

# 中華民國第 57 屆中小學科學展覽會 作品說明書

---

高級中等學校組 物理與天文學科

佳作

051823

顆粒體大逃亡

學校名稱：國立花蓮高級中學

作者：  高一 黃國銘  高一 曾奕凡  高一 陳俊源	指導老師：  莊文治  胡育豪
---	-----------------------------

關鍵詞：顆粒體、障礙物、流率

## 摘要

本實驗在開口限縮之傾斜軌道上放置障礙物，觀察顆粒體於軌道上的流動現象。當單一障礙物在軌道上特定位置時，可明顯增加顆粒體的平均流率(最大可增加達無障礙物時的 55%)，但此位置範圍很小。障礙物在此範圍內時能有序分流顆粒體，且在分析後發現，可由顆粒體直徑、障礙物尺寸、開口寬度及邊界與開口的夾角推導出障礙物擺放位置範圍的方程式，但障礙物的幾何形狀會有所影響。障礙物放置於不同位置時，開口處的顆粒體流動狀態可分為兩類：「密集流態」與「稀疏流態」，兩流態間有一轉變的臨界值存在，類似於液態與氣態間的相變。最後，發現雙障礙物比單障礙物更能提升顆粒體的平均流率(最大可增加達無障礙物時的 60%)，值得進一步探討。

## 壹、研究動機

你是否曾看過道路限縮時車流的情形？或是過斑馬線的擁擠人潮？日常生活許多現象都有著類似壅塞的流動模式。在「世界既簡單又複雜」一書中閱讀到關於災難發生時，疏散人潮的相關問題，我們覺得值得深入去探討。於是設計了傾斜限縮軌道，並在軌道上方放置障礙物觀察 BB 彈在開口處的流動情形，以期人們在逃散中可以有最大的逃生機會。

## 貳、研究目的

- 一、觀察無障礙物的前端限縮傾斜軌道中，顆粒體的流動現象。
- 二、有障礙物放置於軌道對稱軸上，改變障礙物尺寸、形狀及與開口垂直距離時，顆粒體的流動現象：
  - (一) 平均流率的變化。
  - (二) 在障礙物下方空白區的變化。
  - (三) 開口附近速度及密度的變化。
- 三、觀察擺放雙障礙物的前端限縮軌道，改變障礙物與開口距離時，顆粒體的流動現象。

## 參、研究設備及器材

3D 列印障礙物 三種形狀(如圖 1)	軌道 木製軌道箱鐵製軌道面		
BB 彈 (顆粒體)	WD - 40 鐵板清潔用	游標尺 最小刻度：0.05mm	千斤頂 調整角度
攝影機及腳架 規格：30 幀/秒	高速攝影機 (每秒 80~300 幀)	碼錶 計時用	長條形磁鐵 長度：29.75cm
電子磅秤 最小秤重：0.01gw	TRACKER 軟體	IMAGE J 軟體	探照燈 增加軌道亮度以利分析

### 實驗用障礙物

側 視 圖			
	A(橢圓柱)	B(圓柱)	C(半圓柱)

圖一(障礙物)

顆粒體：BB 彈

取用 400 克(約為 3636 顆)的圓球形 BB 彈

另外取 15 顆紅色 BB 彈作為標記顆粒

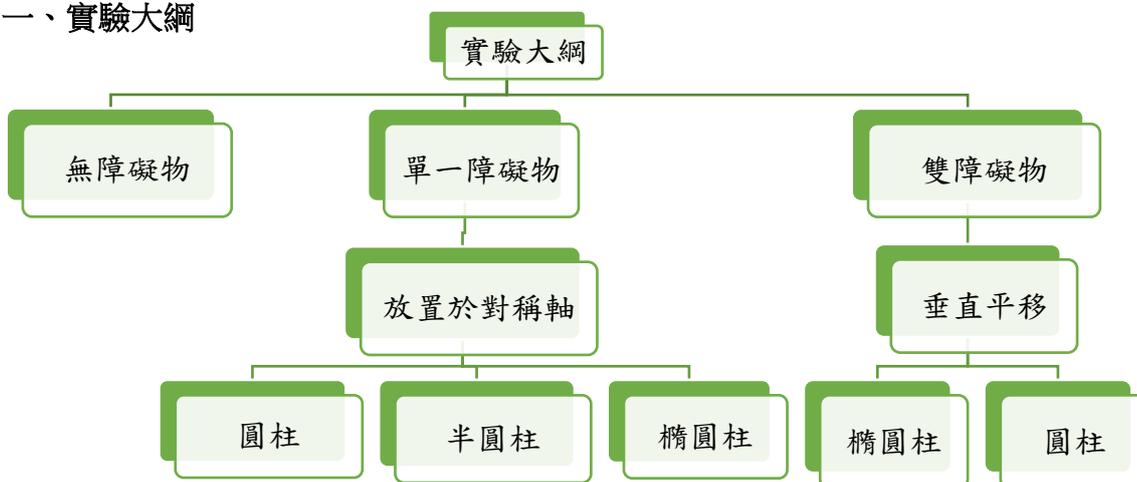
BB 彈規格

直徑：0.60cm

每顆平均重量：0.11gw

## 肆、研究過程及方法

### 一、實驗大綱



## 二、物理量定義與名詞解釋

### (一) 使用符號(如圖二)

$N$ ：顆粒體總數

$T_0$ ：顆粒體在無障礙物的開口限縮傾斜軌道下，自第一顆通過開口到最後一顆通過開口所需時間

$T$ ：顆粒體在有障礙物的開口限縮傾斜軌道下，自第一顆通過開口到最後一顆通過開口所需時間

$Q_0 = \frac{N}{T_0}$ ：顆粒體在無障礙物開口限縮的傾斜軌道  
中平均流率

$Q = \frac{N}{T}$ ：顆粒體在放置障礙物開口限縮的傾斜軌道  
中平均流率

$\eta$ ：流率比， $\eta = Q/Q_0$ ，有障礙物與無障礙物  
的平均流率比

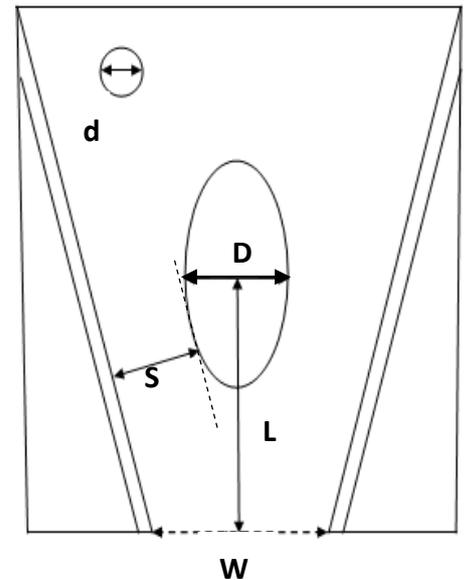
$W$ ：開口寬度(4.2cm)

$d$ ：顆粒體直徑(0.6cm)

$D$ ：障礙物尺寸

$S$ ：障礙物與長條邊界的最短距離

$L$ ：障礙物中心至開口垂直距離



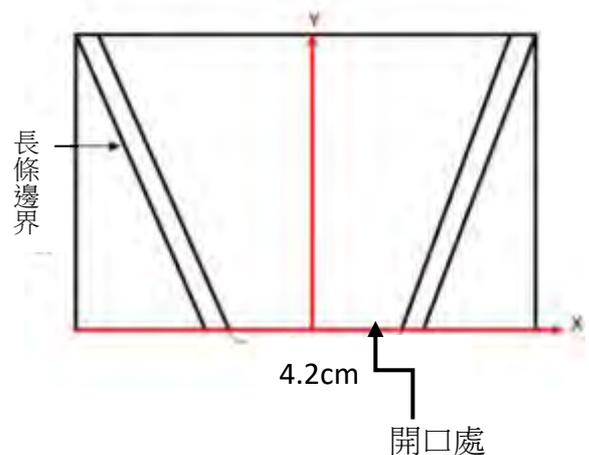
圖二(物理符號定義)

### (二) 座標軸(如圖三)

1.定軌道下端開口中心處為座標原點

2.平行鐵板底部切齊開口末端定義為  
X 軸。

3.垂直於 X 軸平行於軌道面且通過開口中  
點定義為 Y 軸。



圖三(坐標軸)

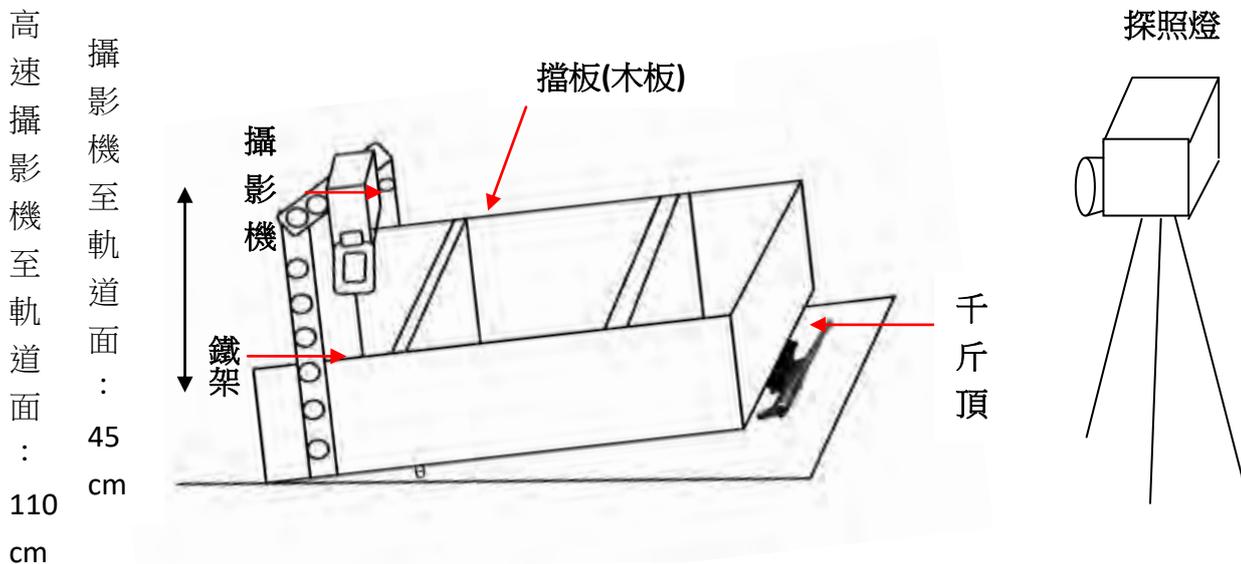
### (三) 名詞

- 1.空白區：顆粒體在流動通過障礙物時，障礙物底部會有一區域無顆粒體存在此區域我們稱之為空白區。
- 2.停滯區：顆粒體流動時，在障礙物上方及長條邊緣會有部分顆粒體流速非常緩慢甚至停滯，有此現象之區域稱作停滯區。
- 3.不定點：障礙物放置於該位置，顆粒體流動所形成之空白區圖形尖端，原先切齊開口在維持一段時間後，若會向開口上方堆積，該點稱為不定點。

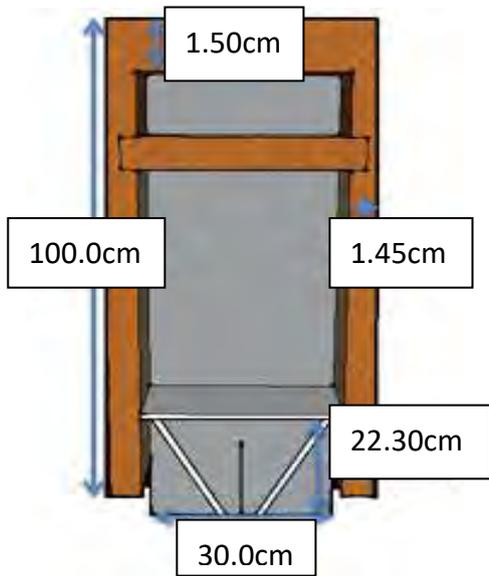
### 三、裝置架設

實驗中將軌道傾斜角度設置為 $8^\circ$ ，因為以此作為傾角顆粒體在流動後不易殘留於軌道面。利用三角函數關係，以千斤頂調整沿軌道下端往上 50cm 處測量與水平桌面高度須為.95cm ( $\sin 8^\circ \approx 0.139 = \frac{6.95}{50}$ )，以鐵架固定於木製軌道壁兩側並將攝影機架設於鐵架上，記錄顆粒體流動之現象。

以三層珍珠板黏合作為擋板，使顆粒體倒入兩擋板中間，在 30cm x42cm 的範圍內容納約 3500 顆，讓顆粒體近乎鋪平。(如圖四、圖五)



圖四(裝置示意圖)



圖五  
軌道尺寸規格

#### 四、前置實驗

##### (一) 鐵板與磁條

軌道是使用灰色鐵板，因為原先使用與軌道壁相同之木頭材質，但長時間實驗後會造成實驗時間之誤差，推測可能為和顆粒之間產生靜電現象進而影響其流動，故以鐵板代替之。

由於軌道為鐵磁性材料故選用磁條來限縮顆粒體通過的開口大小。

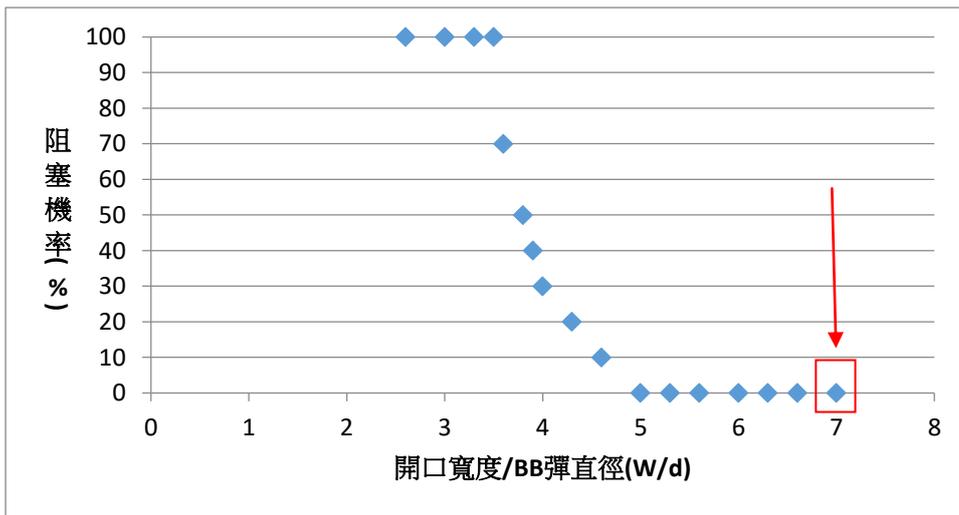
##### (二) 開口寬度

為了決定實驗的軌道開口限縮寬度，測量其在不同寬度之下是否會阻塞以及其機率，進行了以下實驗。

###### 1. 實驗方法：

- (1) 固定在傾角  $8^\circ$  下，以 Y 軸為對稱軸利用磁條限縮開口兩側分別 2.1cm
- (2) 將顆粒體倒入傾斜軌道當中，將球鋪平後，釋放顆粒體並測量第一顆通過開口到最後一顆通過開口所需時間，重複進行五次實驗。
- (3) 將開口以 Y 軸對稱兩側分別減少 0.1cm，重複方法(2)，依序縮小軌道開口直至兩側分別為 0.8cm

2. 實驗結果：圖六顯示開口寬度在顆粒體直徑七倍時(即 4.2cm 如圖↓所示)不可能發生堵塞因此決定以 4.2cm 作為開口寬度大小。



### (三)實驗校正

圖六(阻塞機率與 W/d 關係圖)

1.手按碼錶與實際時間之誤差，利用 Tracker 將拍攝影片加以分析(每秒三十幀)，進行十次檢測包括有障礙物或無障礙物的各種情形，如表一我們發現誤差為  $\pm 0.05$  秒，認定以人為計時是可行的。

2.將顆粒體鋪平與未鋪平之差異：

若未鋪平的情況下，在釋放顆粒體後，當前段顆粒體接觸到開口且開始減速堆積於開口處時，後段顆粒體隨著向下流動會由重疊的兩層變為一層，在實驗測量發現會有約 0.5 秒差異，相較於人為計時的時間差異我們認為會造成些微影響且每次進行實驗無法確認重疊顆粒數的比例故採用將球鋪平的方式進行實驗。

TRACKER 計時(sec)	22.14	20.86	19.77	14.25	17.52	18.83	21.11	21.52	21.65
人為碼表 計時(sec)	22.15	20.86	19.77	14.28	17.49	18.83	21.12	21.56	21.60

## 五、實驗操作

表一

### (一) 實驗一

#### 1.變因

操控變因：障礙物的尺寸、形狀與擺放位置

控制變因：軌道傾角  $8^\circ$ 、開口寬度(W)4.2cm、顆粒體總重 400 公克(總數 3636 顆)、

開口與擋板之距離 27.2cm

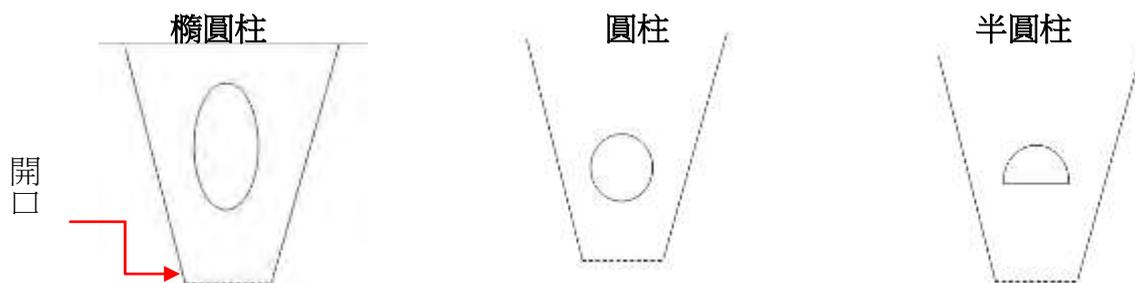
					
橢圓柱 長軸長：短軸長=5:3		圓柱		半圓柱	
編號	短軸長(cm)	編號	直徑(cm)	編號	直徑(cm)
A1	7.2	B1	7.2	C1	7.2
A2	6.0	B2	6.0	C2	6.0
A3	4.8	B3	4.8	C3	4.8
A4	3.6	B4	3.6	C4	3.6
A5	2.4	B5	2.4	C5	2.4

## 2.實驗設計：

探討在 Y 軸上移動時改變障礙物的各種因素所造成影響

### 實驗方法：

- (1)取一障礙物，將障礙物放置於 Y 軸上(如圖七)且其底部與開口距離 18cm 處
- (2)將 400gw 的顆粒體倒入軌道兩擋板間(如 P4 圖四)，再將其鋪平
- (3)釋放顆粒體並測量 T，重複進行五次
- (4)改變障礙物中心與開口的垂直距離(L)
- (5)以固定間距 1.8cm 向下平移，再重複上述步驟 2~5 直至阻塞為止
- (6)變換障礙物依序由 A1 進行至 C5，Tracker 加以分析作 Q-L 圖

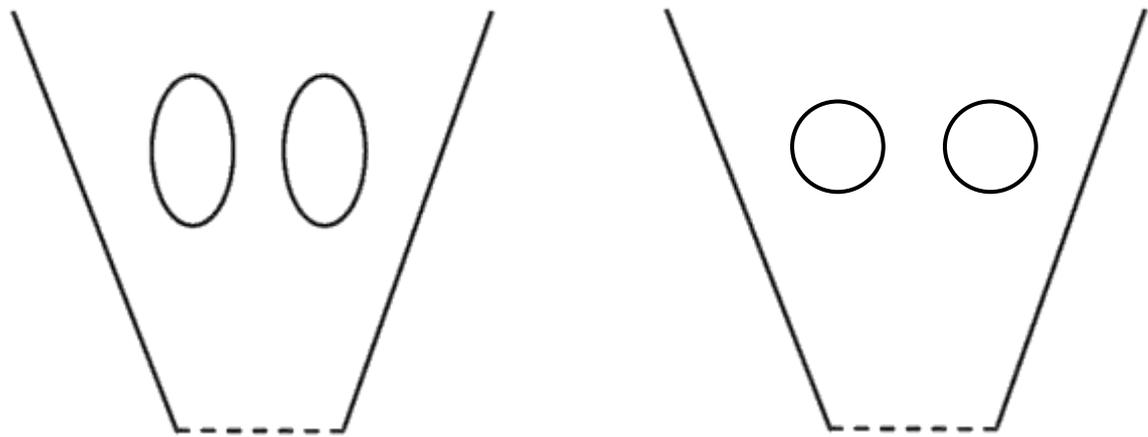


圖七(單一障礙物擺設方式)

(二) 實驗二、探討雙障礙物之間中心距離固定時沿 Y 軸鉛直上移造成之影響：

實驗方法：

- (1)取兩個相同障礙物，固定中心距離 2.7cm，將兩障礙物底部切齊 18cm 處
- (2)將顆粒體倒入軌道中
- (3)釋放顆粒體並測量第一顆通過到最後一顆通過開口的時間，重複進行五次
- (4)固定間距 1.8cm 向下平移重複上述實驗，直至阻塞
- (5)變換障礙物並重複上述方法，最後以 Tracker 分析障礙物與邊界的最短距離。



圖八(雙障礙物擺設方式)

## 伍、研究結果

### 一、 結果一：單一障礙物其中心固定於軌道 Y 軸上移動

#### (一) 尺寸較大的障礙物：(A1~A3、B1~B3、C1~C3)

1. 將障礙物置於適當位置時，顆粒體的平均流率會明顯大於無障礙物時的流率。(最大可增加達 55%左右，如圖十)
2. 會使平均流率增加的障礙物位置擺放範圍很小(即 L 值大約 2.5 公分)。(如圖十~十二)
3. 對於不同障礙物來說，流率比  $\eta$  隨 L 有類似的變化趨勢。隨著 L 由大變小可以大致分為 3 區：

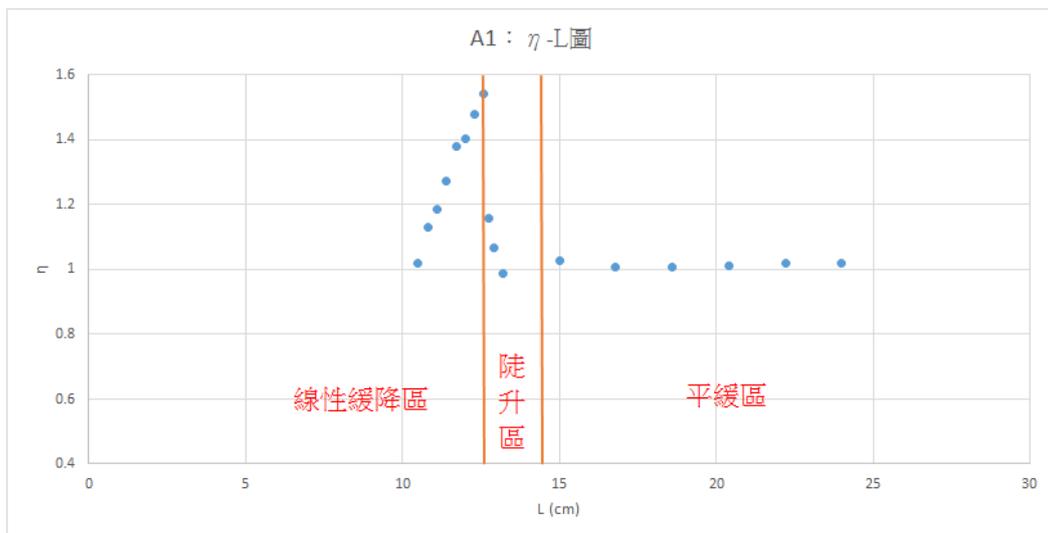
(1)平緩區：障礙物對顆粒體的流率比  $\eta$  幾乎不會造成影響，即  $\eta$  會很接近 1。(如圖九)

(2)陡升區：障礙物在此區時，流率比  $\eta$  隨 L 的變化率極大。(如圖九)

(3)線性緩降區：

I.障礙物在此區時，流率比  $\eta$  隨 L 的變化皆呈現線性關係，且斜率相近(皆為 0.2 左右)，可見三者有著類似的某種關聯。

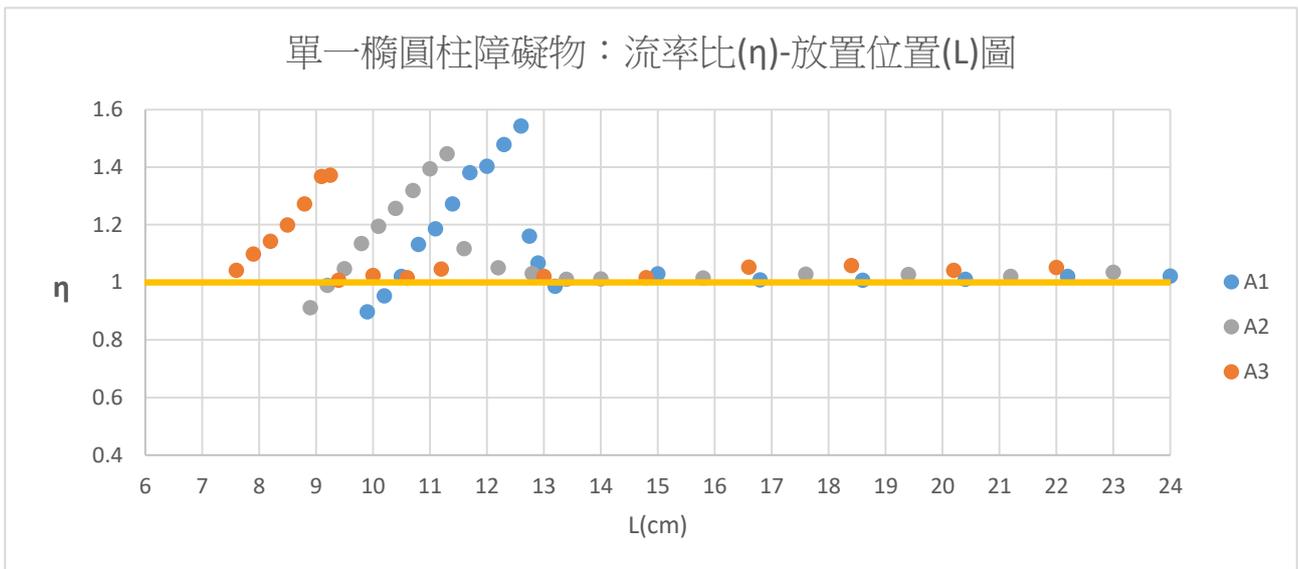
II.當障礙物距離開口太近時，流率比  $\eta$  反而會小於 1。(如圖九)



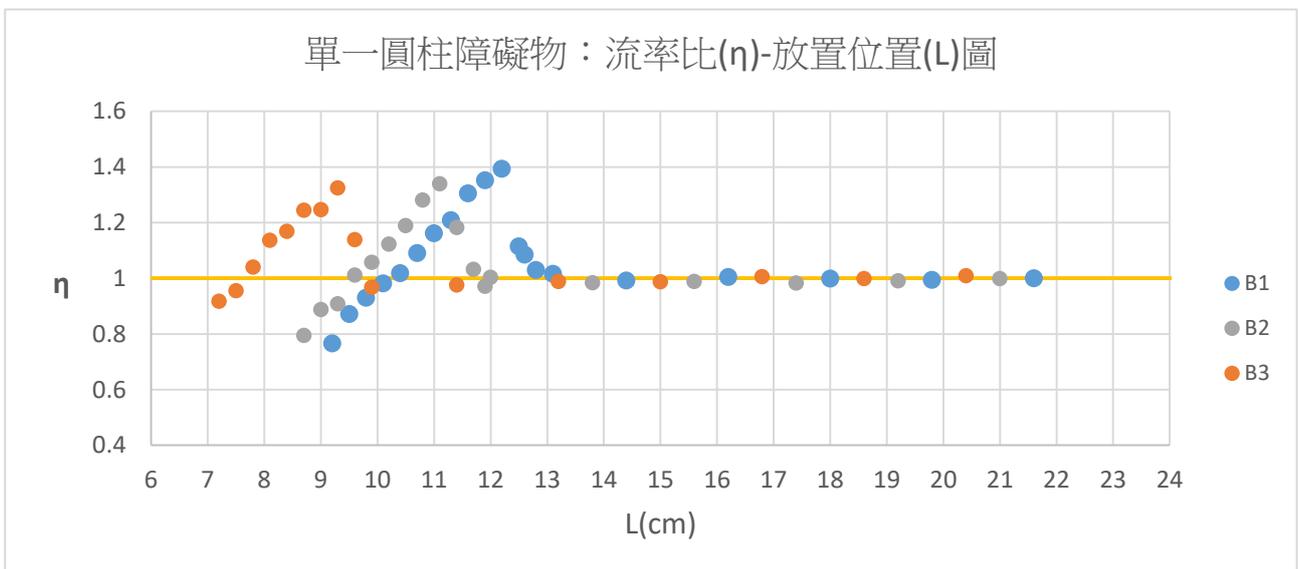
圖九

#### (二) 尺寸較小的障礙物：(A4~A5、B4~B5、C4~C5)

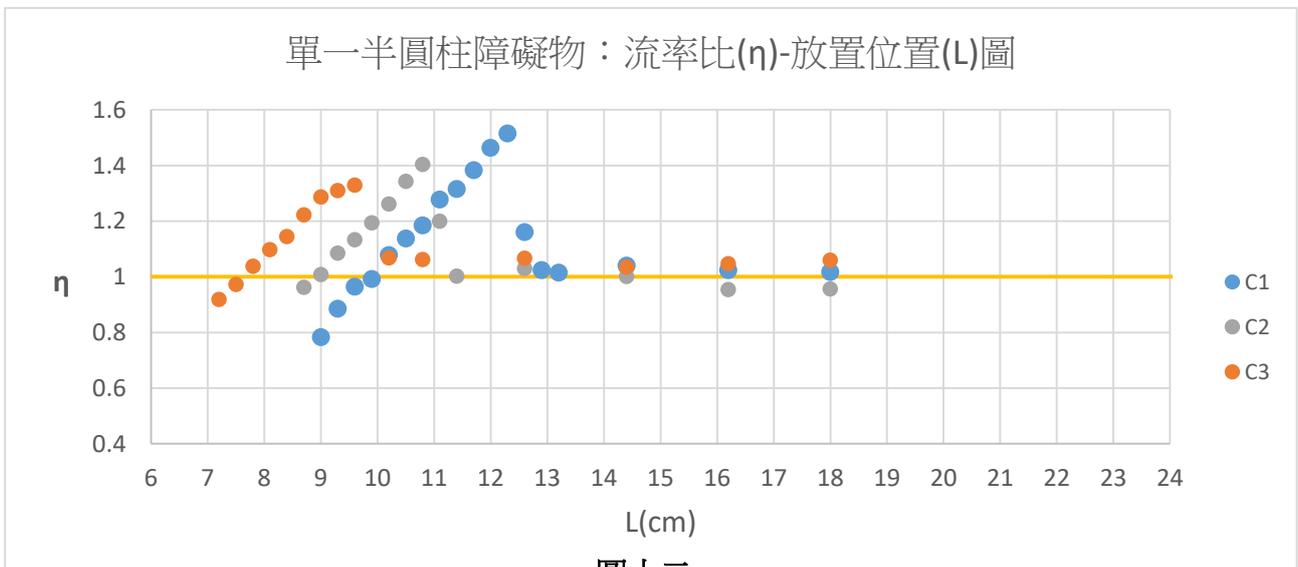
尺寸太小的時候，障礙物對流率比  $\eta$  的影響會變小，即  $\eta$  變化率變小。



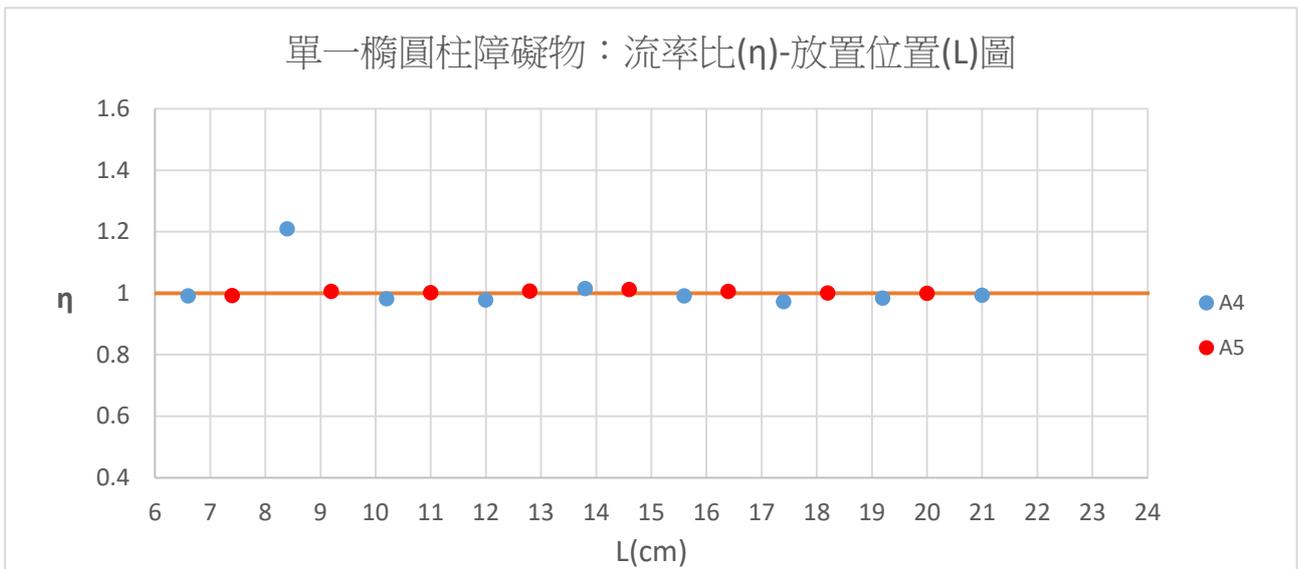
圖十



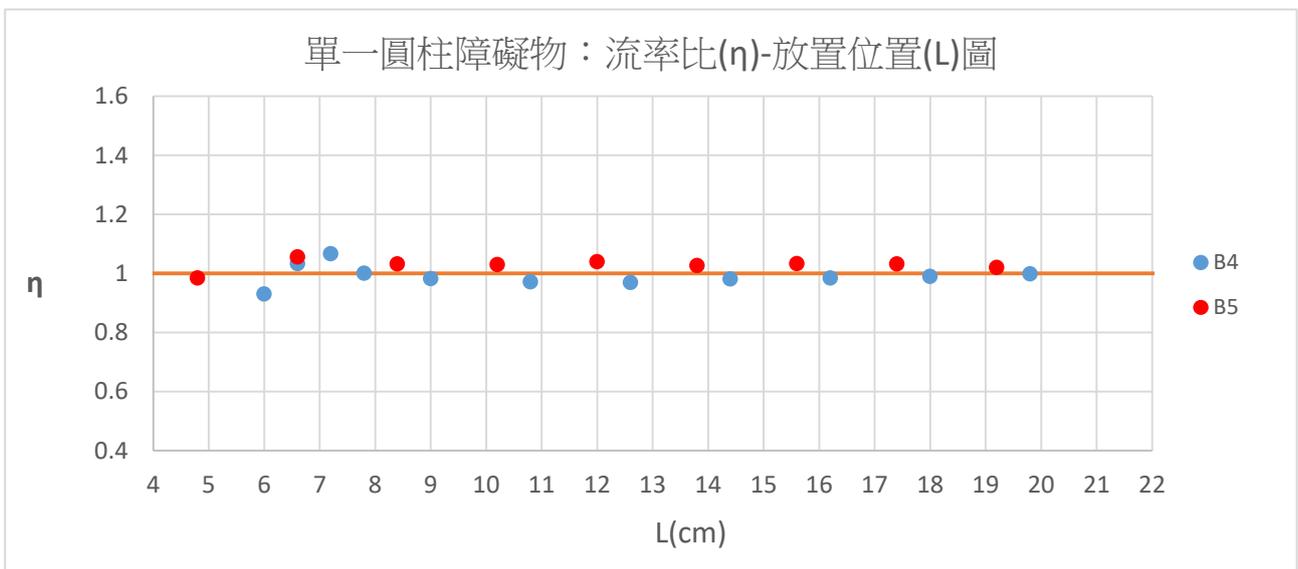
圖十一



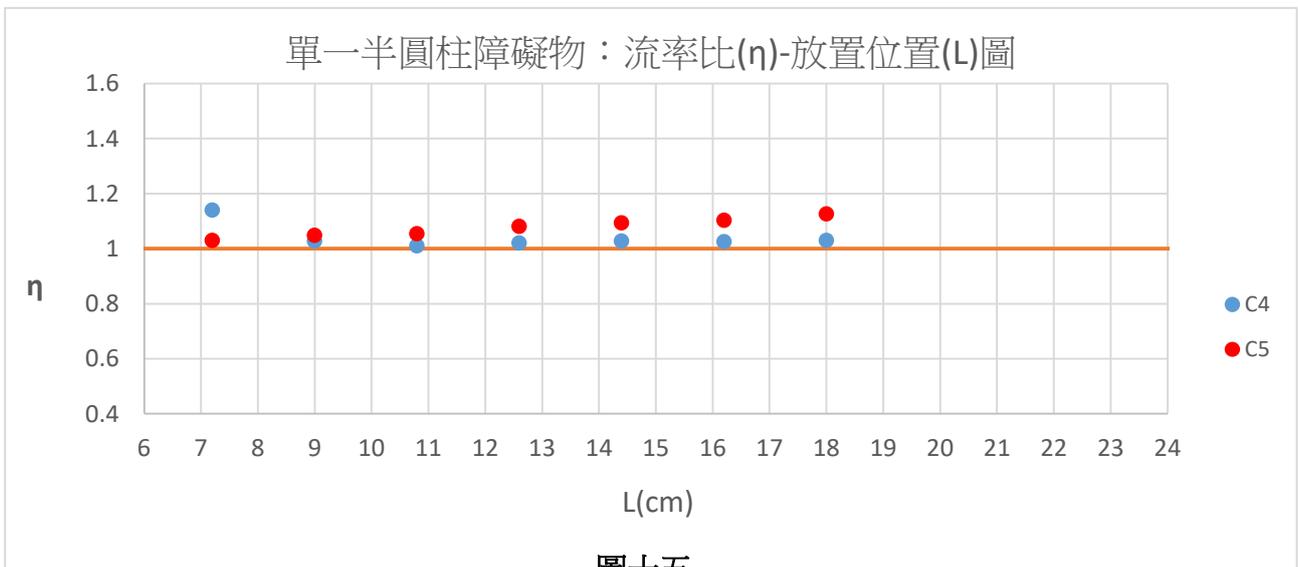
圖十二



圖十三



圖十四



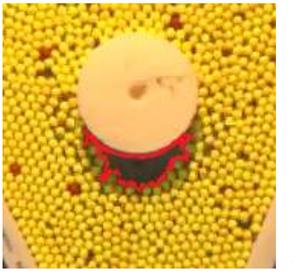
圖十五

## 二、結果二：單一障礙物的空白區

### (一) 空白區的幾何性質

#### 1.形狀：

經由實驗觀察，我們發現空白區的形狀會不斷改變，但大致上可以分為最明顯的兩種，分別為三角形空白區和半圓形空白區。若出現動態穩定的三角形空白區，平均流率會比無障礙物時之平均流率還要大；若出現穩定的半圓形空白區，其會平均流率與無障礙物時之平均流率相近。

	障礙物 A1	障礙物 B1	障礙物 C1
三角形空白區	 -1	 -2	 -3
半圓形空白區	 -4	 -5	 -6

圖十六(單一障礙物空白區圖)

#### 2.面積：

由於空白區的幾何形狀會不斷變動，我們無法精確地測量空白區面積，但由上圖十六-1 對照十六-2、十六-3 對照十六-4、十六-5 對照十六-6 可以看出相同障礙物情況下之三角形空白區面積大於半圓形空白區面積(圖十六中同形狀障礙物大小皆相等)。

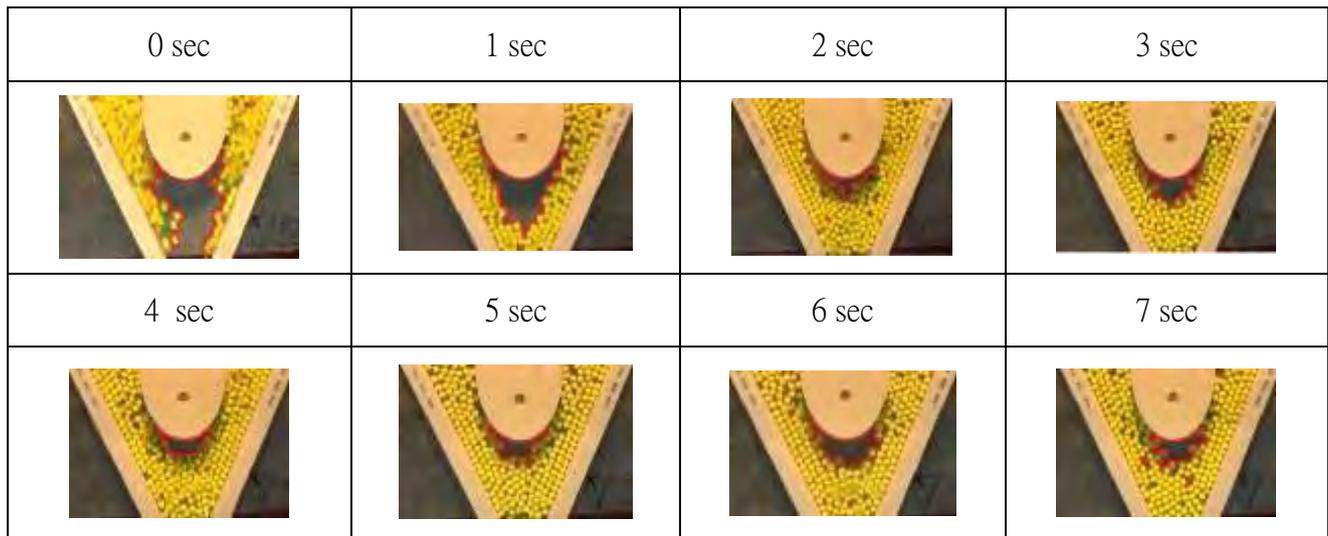
#### 3.長度：

當形成三角形空白區時，亦即平均流率較大時，空白區長度會大於形成半圓形空白區(圖十六-1 對照十六-2、十六-3 對照十六-4、十六-5 對照十六-6)。

## (二) 穩定空白區之形成過程

### 1. 半圓形空白區

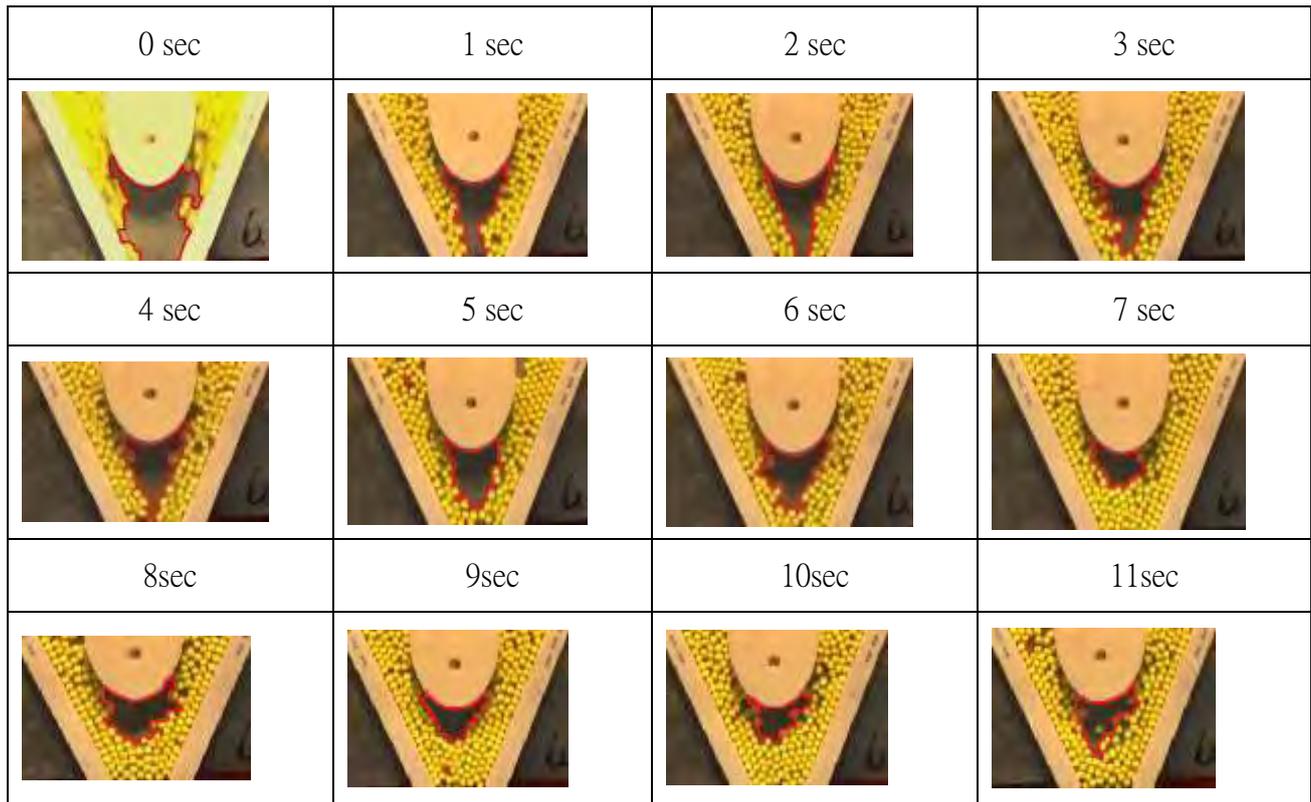
- (1) 當釋放顆粒體後，會先形成超出開口的長條狀空白區(如圖十七：0 sec)。
- (2) 接著因為顆粒體之間及顆粒體與長條邊界間的碰撞，顆粒體相撞減速聚集至障礙物下端(如圖十七：1 sec~2 sec)。
- (3) 空白區形成半圓狀，並保持動態改變(如圖十七：3~7 sec)。



圖十七(單一障礙物半圓形空白區形成流程圖)

### 2. 不穩定的空白區：

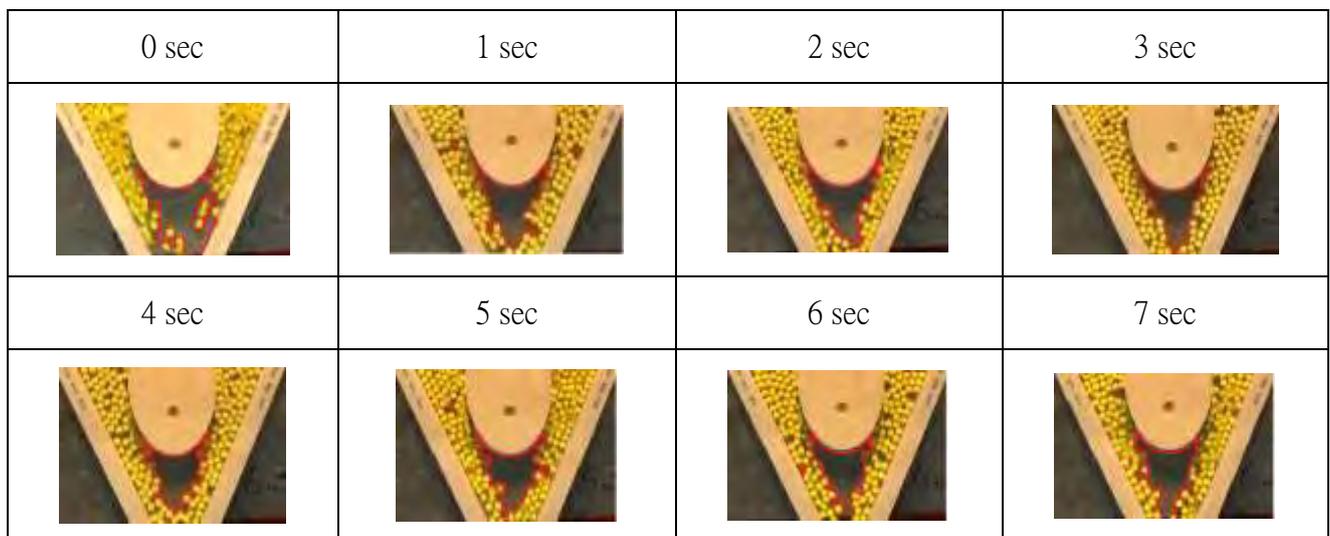
- (1) 此種空白區會先形成三角形空白區並持續數秒，形成方式與一般三角形空白區的形成方式相同。(如圖十八：0~4 sec)
- (2) 接著空白區會向上回堵至障礙物下端產生動態穩定的半圓形空白區，並且不會回復成三角形空白區。(如圖十八：5~11 sec)



圖十八(單一障礙物不穩定空白區形成流程圖)

### 3. 三角形空白區

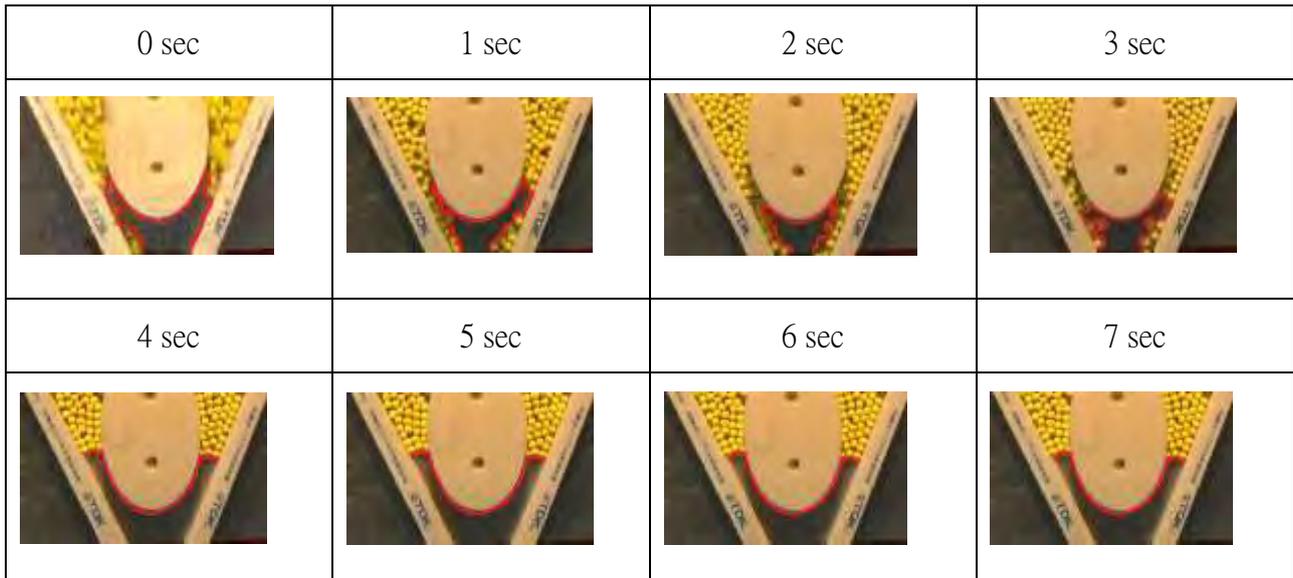
- (1) 當釋放顆粒體後，會先形成超出開口的長條狀空白區(如圖十九：0 sec)。
- (2) 接著因為顆粒體之間及顆粒體與長條邊界間的碰撞，顆粒體相撞減速聚集至開口附近(如圖十九：1 sec)。
- (3) 空白區形成三角形狀，並保持動態改變(如圖十九：2~7 sec)。



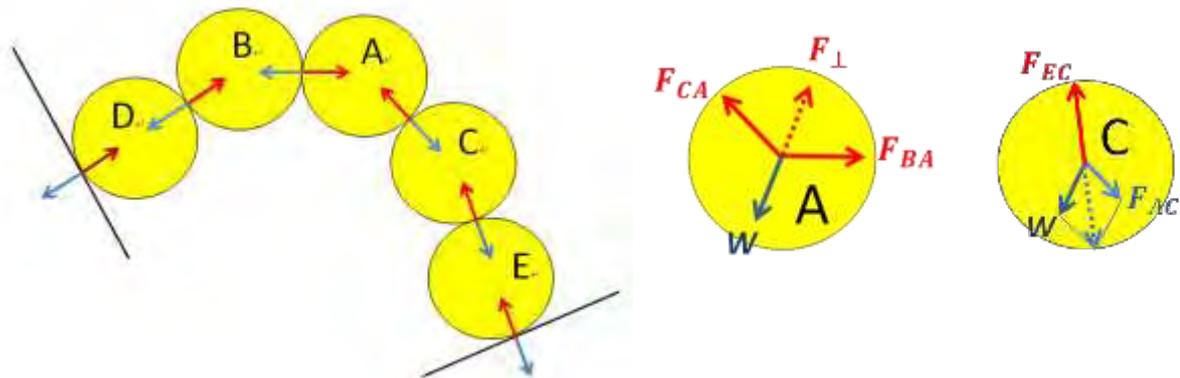
圖十九(單一障礙物三角形空白區形成流程圖)

#### 4. 堵塞時的空白區

- (1) 當釋放顆粒體後，會先形成超出開口的長條狀空白區(如圖二十：0 sec)。
- (2) 接著因為障礙物與長條邊界距離太近，所以產生隨機性的堵塞(如圖二十：3~4sec)。
- (3) 堵塞時，離開口最近的少許顆粒體形成上凸拱狀支撐(如圖 22)，並且不再流動(如圖二十：5~7sec)。



圖二十(單一障礙物堵塞時的空白區)



圖二十一(顆粒體堵塞成拱交互作用力)

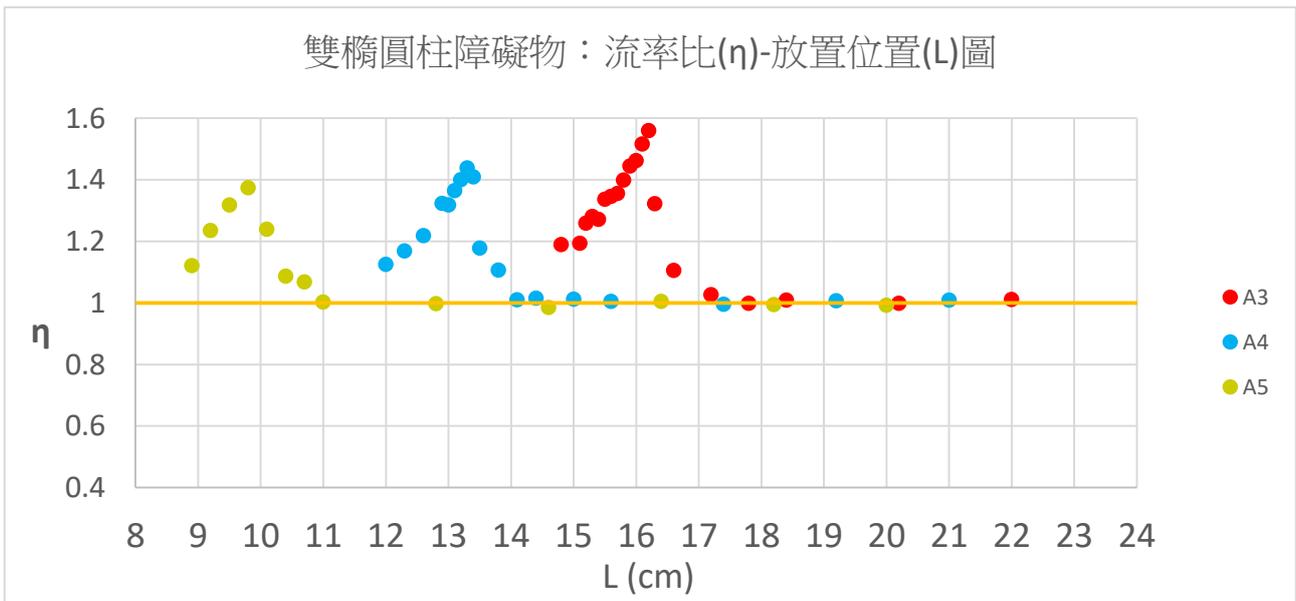
### 三、結果三：雙障礙物兩者的中心點固定於 Y 軸上移動

(一) 會使平均流率增加的雙障礙物擺放位置範圍比單障礙物小(即 L 值大約 1.5 公分)。

在此範圍內，當 L 漸小時， $\eta$  有陡升緩降的趨勢，但其變化率都不小。

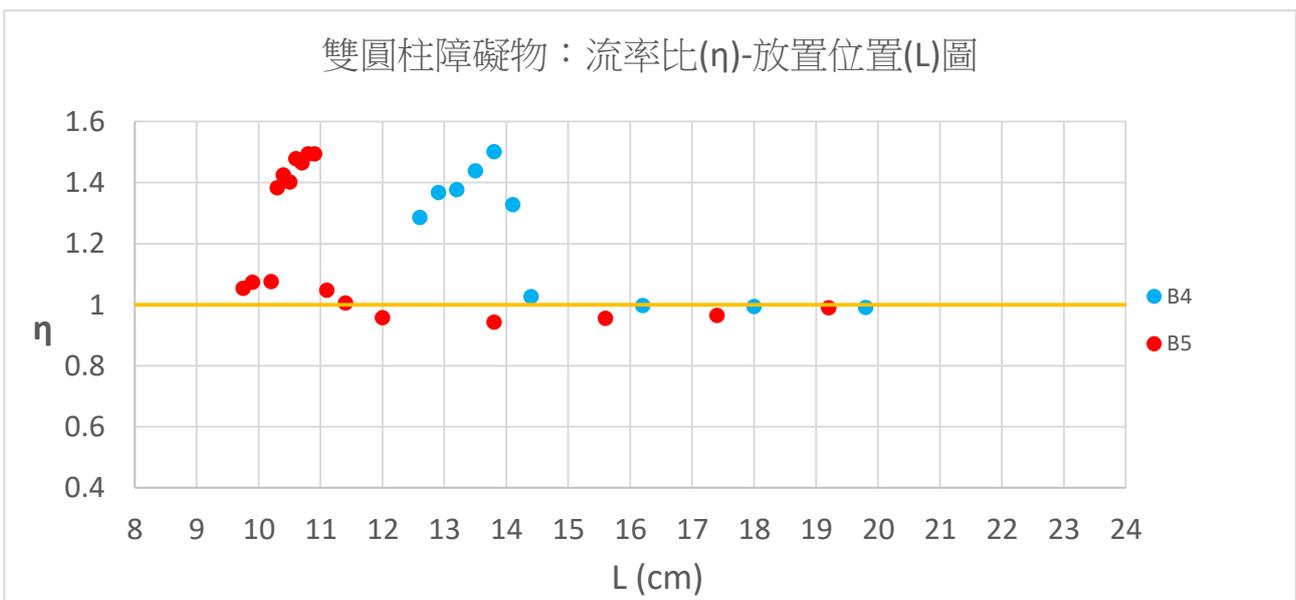
(二) 將雙障礙物置於適當位置時，顆粒體的平均流率會明顯大於無障礙物時的流率。

(最大可增加達 60%左右，如圖二十三、二十四)



圖二十三

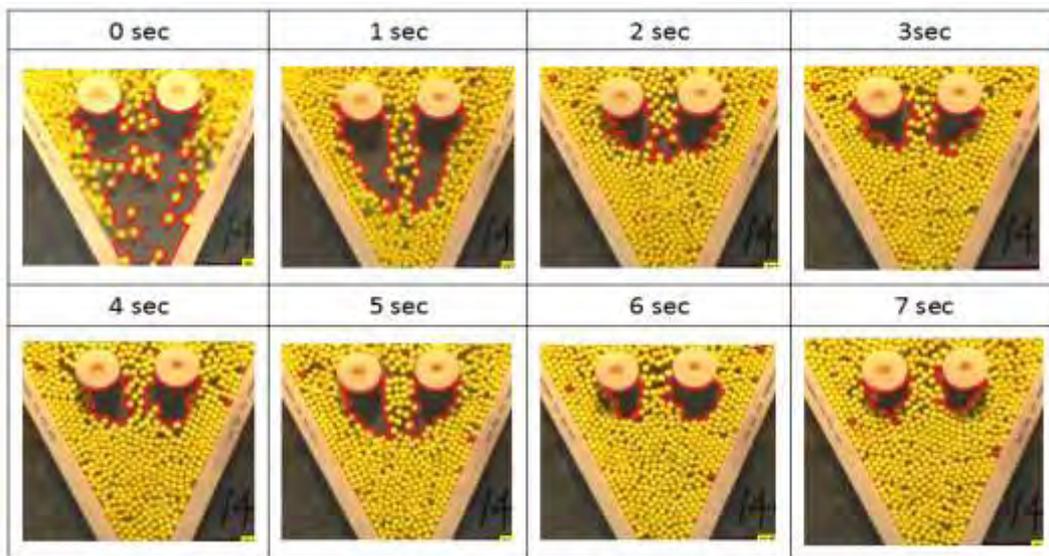
(三) 放置不同大小及形狀的雙障礙物時顆粒體的  $\eta$ -L 圖有極相似的趨勢。



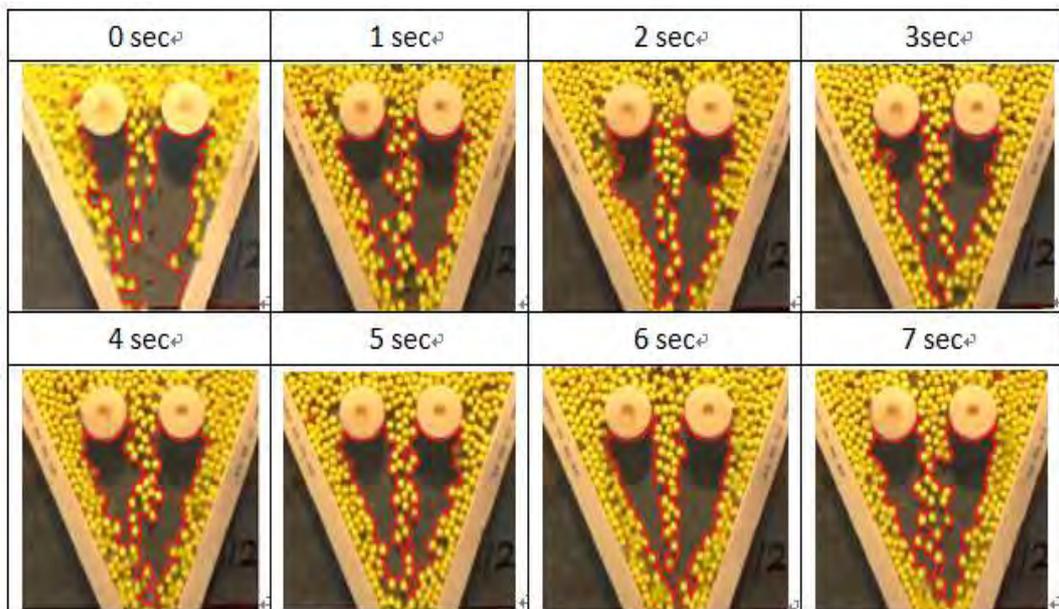
圖二十四

### 雙障礙物的空白區：

- (一) 當釋放顆粒體後，會先在兩障礙物下都形成超出開口的長條狀空白區(如圖二十五：0 sec、二十六：0 sec)
- (二) 接著因為顆粒體之間及顆粒體與長條邊界間的碰撞，顆粒體相撞減速。形成三角形空白區時，僅聚集至開口附近，不會延伸到障礙物下端(如圖二十五：1 sec)，而形成半圓形空白區時，顆粒體則會聚集至障礙物(如圖二十六：1 sec~2 sec)。
- (三) 兩障礙物之空白區形成三角形及半圓形，並保持動態改變(如圖二十五：2~7 sec、二十六：3~7 sec)。



圖二十五(雙障礙物半圓形空白區形成流程圖)



圖二十六(雙障礙物三角形空白區形成流程圖)

## 陸、討論

### 一、會導致平均流率增加的障礙物擺放位置在哪裡?

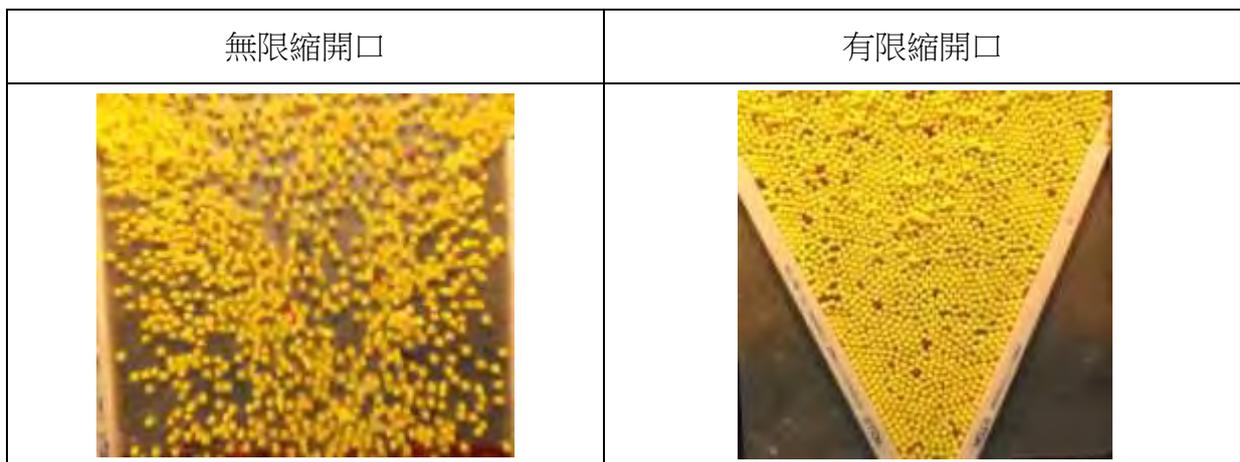
#### (一)限縮開口與無限縮開口的差異(如圖二十七)

##### 1.無限縮開口

在沒有限縮開口的情況下，顆粒體釋放後會全數同時向下流動。此時沒有與限縮邊界產生交互作用，可以快速的全數通過不被限縮的開口。

##### 2.有限縮開口

在開口限縮的情況下，當軌道寬度縮小時，邊緣的顆粒體會受到邊界的作用力，造成顆粒體間會相互碰撞而減速讓顆粒體回堵。因此需較長的時間才可全數通過限縮的開口。



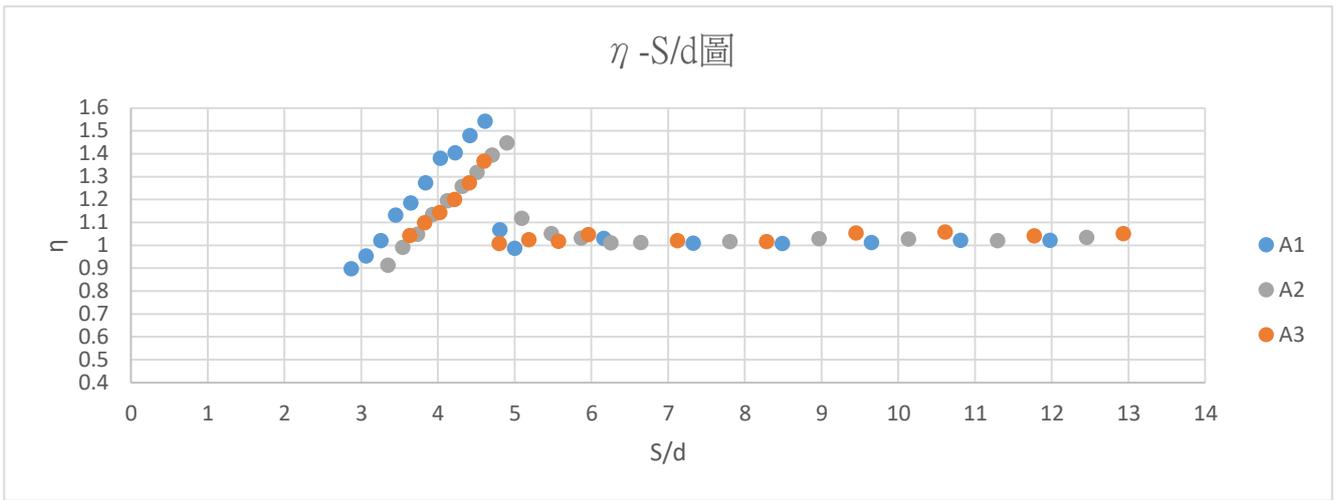
圖二十七(限縮與無限縮開口比較圖)

#### (二)放置障礙物的用意

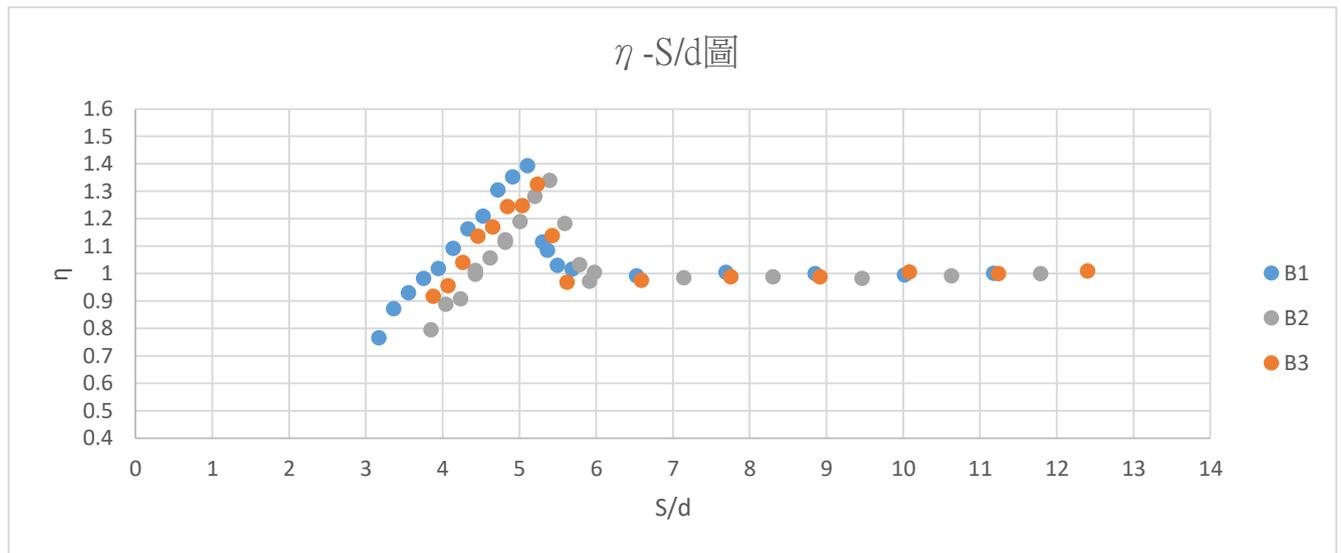
由於在寬度限縮的軌道上同時湧入大量的顆粒體，顆粒體會與邊界及其他顆粒體產生碰撞而減速，使顆粒體回堵。我們試圖放置障礙物，發揮調節作用，起有序分流之功能，使平均流率增加。

#### (三)障礙物放置位置與增加平均流率的關係

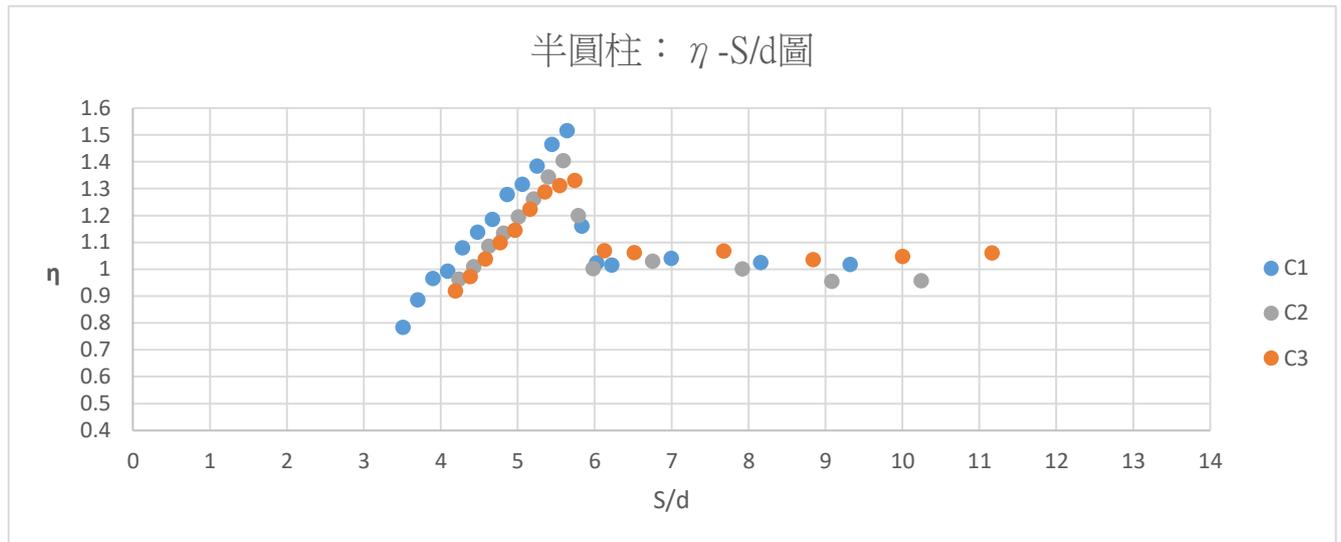
我們觀察在無放置障礙物下的單一開口寬度會影響流率，放置障礙物後，就如同在開口上方增加兩個障礙物與長條邊界之間的小開口，因此我們將障礙物與長條邊界之間的最短距離與其平均流率進行細部分析。(如圖二十八~三十)



圖二十八



圖二十九



圖三十

#### (四) 物理圖像分析

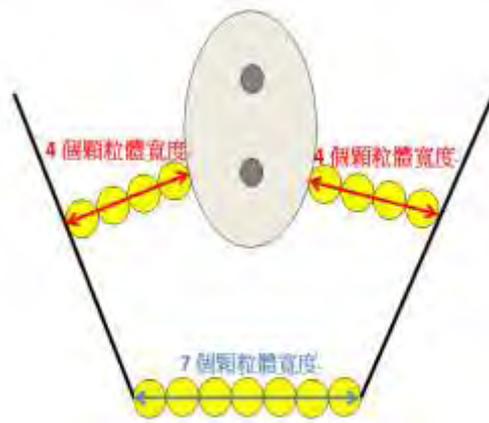
根據三種障礙物的幾何形狀，我們原先做出此一預測：

- 1.圓柱和半圓柱障礙物會有著近似的實驗結果，而橢圓柱由於形狀與其餘兩者有所差別，應該會有不同的結果。
- 2.對於障礙物的放置位置，認為最短距離的條件限制僅須滿足：

$$\frac{s}{d} > 3.5 \text{ 且 } \frac{2s}{d} - \frac{W}{d} < 3 \Rightarrow 3.5 < \frac{s}{d} < 5$$

其原因如下：

- (1) 實驗中的開口寬度(W)為 7 個顆粒體直徑寬。當障礙物與長條邊界之間的最短距離為 3.5~5 個顆粒體直徑寬時(  $s/d < 3$  時會容易形成拱而阻塞 )，這兩個小開口每次總共只能通過 6~10 個顆粒體。(如圖三十一)
- (2) 當通過兩側最短距離的顆粒體總數介於 6~10 顆時，多出的三個顆粒體，由於數目不多，開口每次仍能使這些顆粒體通過，而不會造成回堵至障礙物下方的現象，即形成動態穩定的三角形空白區。
- (3) 當通過兩側最短距離的顆粒體總數在 10 顆以上時，比開口的 7 個顆粒體寬度多出許多因此有極高的機會使兩側的顆粒體在開口前碰撞，使顆粒減速因而回堵至障礙物下方，形成動態穩定的半圓形空白區。



圖三十一

(五)障礙物擺放位置的推估方程式

1. 橢圓柱障礙物（如圖三十二）：

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{(y-L)^2}{a^2} = 1 \quad \leftarrow \text{橢圓標準式}$$

斜率 $m$ 與橢圓相切直線方程式

$$y-L = mx \pm \sqrt{b^2 m^2 + a^2}$$

$$\text{取負號} \Rightarrow y-L = mx - \sqrt{b^2 m^2 + a^2}$$

$$m = \cot \theta$$

$$\overline{OB} = L - \sqrt{b^2 m^2 + a^2}$$

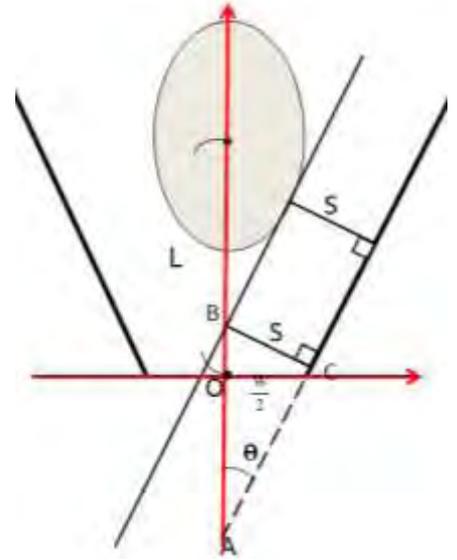
$$\overline{AB} = \overline{AO} + \overline{OB} = \frac{W}{2} \cot \theta + L - \sqrt{b^2 m^2 + a^2}$$

而 $\triangle ABC$ 中

$$\frac{s}{\frac{W}{2} \cot \theta + L - \sqrt{b^2 m^2 + a^2}} = \sin \theta$$

$$\Rightarrow s = \frac{W}{2} \cot \theta \sin \theta + L \sin \theta - \sqrt{b^2 m^2 + a^2} \sin \theta$$

$$\Rightarrow L = \sqrt{b^2 \cot^2 \theta + a^2} + s \csc \theta - \frac{W}{2} \cot \theta \text{---(1)}$$



圖三十二

2. 圓柱障礙物：

利用橢圓形障礙物所導出的  $L$  值，若數學式中  $a=b=D/2$ ，即可得到圓的方程式。

$$L = \frac{D}{2} \csc \theta + s \csc \theta - \frac{W}{2} \cot \theta \text{---(2)}$$

3. 半圓柱障礙物：

利用類似幾何方法即可得到半圓柱  $L$  值如下：

$$L = \frac{D}{2} \cot \theta + s \csc \theta - \frac{W}{2} \cot \theta \text{---(3)}$$

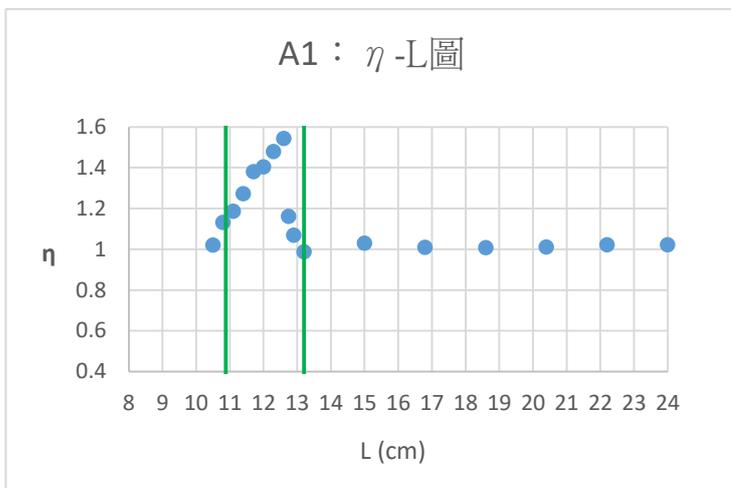
將障礙物與長條邊界間最短距離的條件限制  $\frac{s}{d} > 3.5$  且  $\frac{2s}{d} - \frac{W}{d} < 3 \Rightarrow 3.5 < \frac{s}{d} < 5$  及相關

實驗參數代入上方所得式(1)(2)(3)分別可得平均流率明顯增加的障礙物放置位置範圍

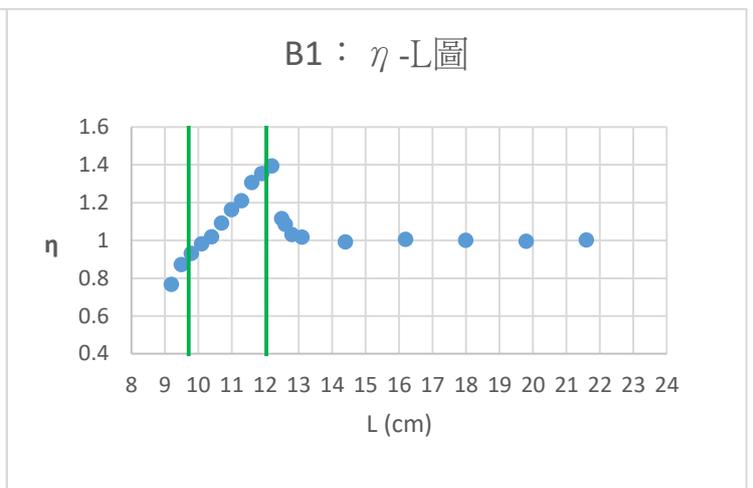
L1(下限)及 L2(上限)。(如表二以 A1、B1、C1 為例)

	A1	B1	C1
L1(cm)	10.88	9.71	8.99
L2(cm)	13.20	12.04	11.30

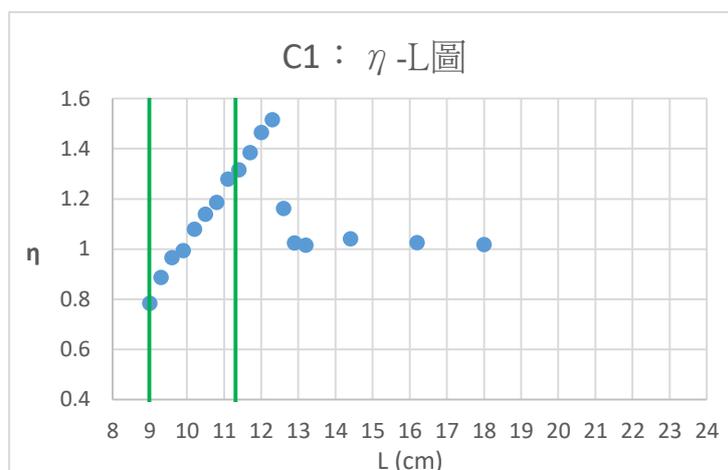
表二



圖三十三



圖三十四



圖三十五

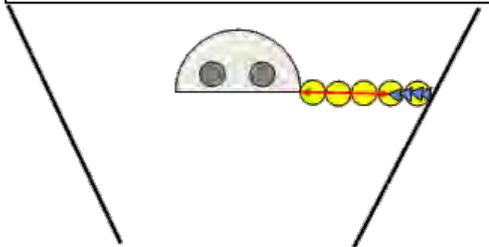
## (六) 最短距離的條件修正

- 1.取 A1、B1、C1 比較可發現三種障礙物 Q 隨 L 有類似的變化趨勢，半圓柱與圓柱間出現最大流率的位置(L 值)，前者明顯較大，反而是橢圓柱與圓柱較為接近。(如圖三十三~三十五)
- 2.在理論推估方面，橢圓柱較為吻合，圓柱則有些微差異，但半圓柱明顯與預測範圍有所偏差。(如圖三十三~三十五)

探討其原因如下：

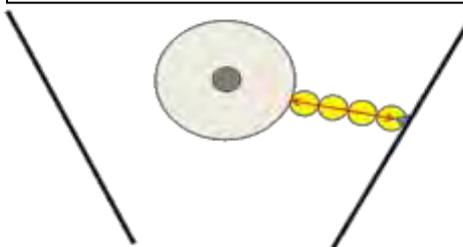
- (1)在半圓柱及圓柱中，雖然幾何形狀近乎相同，但兩者有一明顯差別即半圓缺少下半部的弧狀。當顆粒體通過障礙物時，障礙物中心以上與長條邊界之間的顆粒體便會開始整齊的排列；顆粒通過中心後，具有下半弧狀的圓柱可使顆粒沿其邊緣流動，而顆粒通過半圓柱後保持慣性向下流動，在外側的顆粒體與長條邊界的共同作用下，會造成同一排顆粒體有 1~1.5 個顆粒體無法順利通過，造成有效最短距離縮減(如圖三十六、三十七)，因此明顯增加平均流率的放置位置會比原先預測值更高。(如圖三十四、三十五)
- (2)因為橢圓柱的曲率較圓柱來得小且形狀更扁長，顆粒體通過時，比起圓柱能更有效的達到有序分流，而其有效最短距離也與最短距離接近。(如圖三十七、三十八)

紅色雙箭頭代表有效最短距離，藍色三角形為顆粒體通過障礙物時受長條邊界阻礙而無法整齊向下運動的區域。若欲放置半圓柱於有效最短距離為  $3.5d$  處，對應的  $s$  約為  $4.5d$ 。

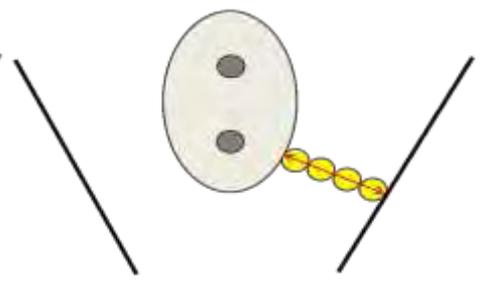


圖三十六

紅色雙箭頭代表有效最短距離，藍色三角形為顆粒體通過障礙物時受長條邊界阻礙而無法整齊向下運動的區域。若欲放置圓柱於有效最短距離為  $3.5d$  處，對應的  $s$  約為  $4d$ 。



圖三十七



圖三十八

根據上述推測，對圓柱及半圓柱做出下列修正，並將其帶入位置推估方程式得到新的位置範圍預估值(如表三)

圓柱障礙物

$$\frac{s}{d} > 4 \text{ 且 } \frac{2s}{d} - \frac{W}{d} < 4 \Rightarrow 4 < \frac{s}{d} < 5.5$$

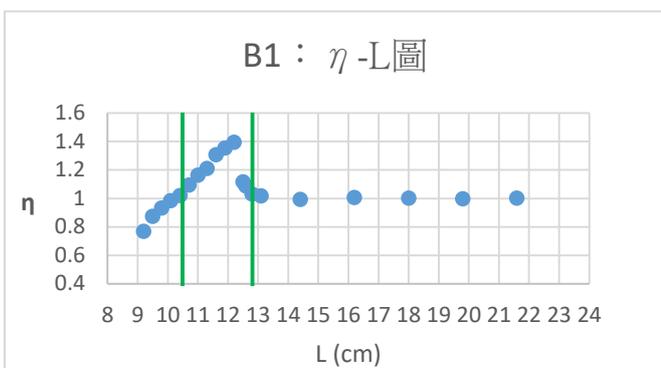
半圓柱障礙物

$$\frac{s}{d} > 4.5 \text{ 且 } \frac{2s}{d} - \frac{W}{d} < 5 \Rightarrow 4.5 < \frac{s}{d} < 6$$

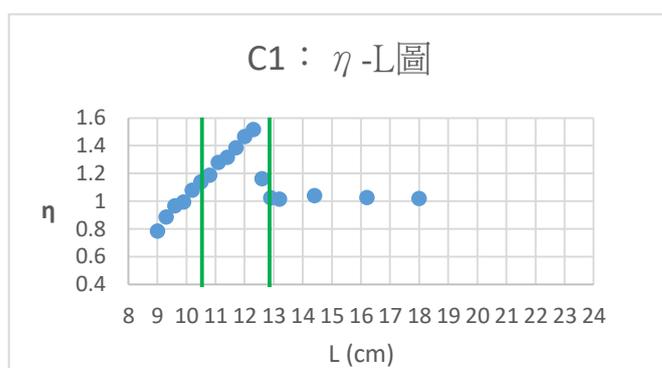
修正	A1	B1	C1
L1(cm)	10.88	10.49	10.54
L2(cm)	13.20	12.81	12.86

表三

由圖三十三~三十五及三十九、四十紅線修正範圍，看出經過有效最短距離的修正後，理論預估可使平均流率明顯增加的礙物擺放位置範圍，與實驗值較為相符。這也說明了形狀對於障礙物通過時的有效最短距離影響有所不同，以本實驗為例，橢圓的最短距離與有效最短距離接近。

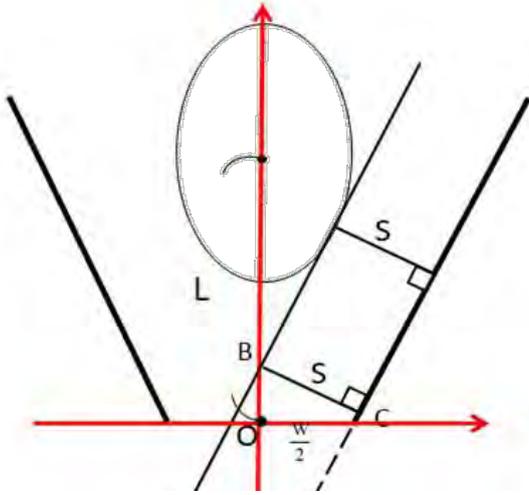


圖三十九

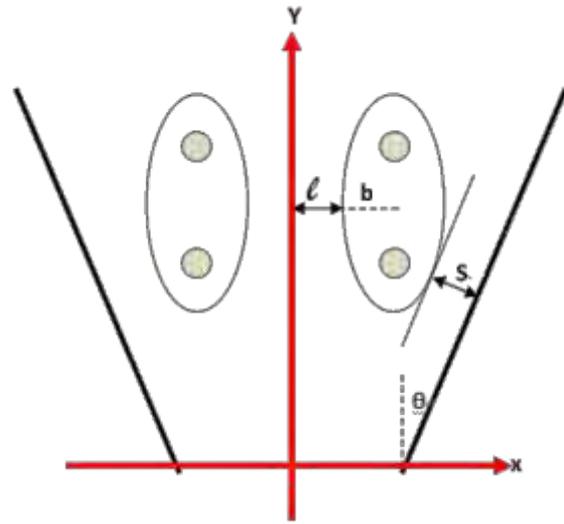


圖四十

(七) 雙障礙物擺放位置的推估方程式



圖四十一

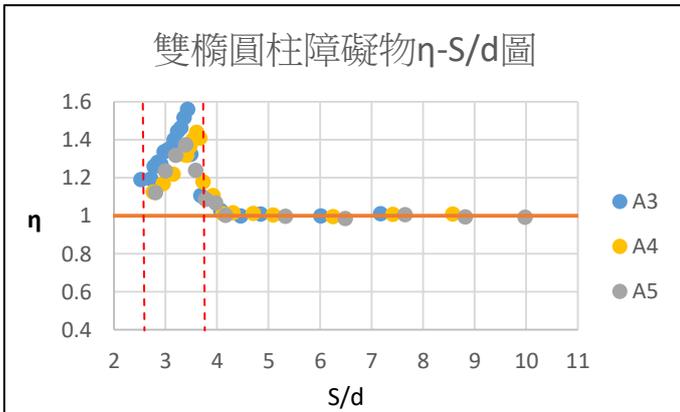


圖四十二

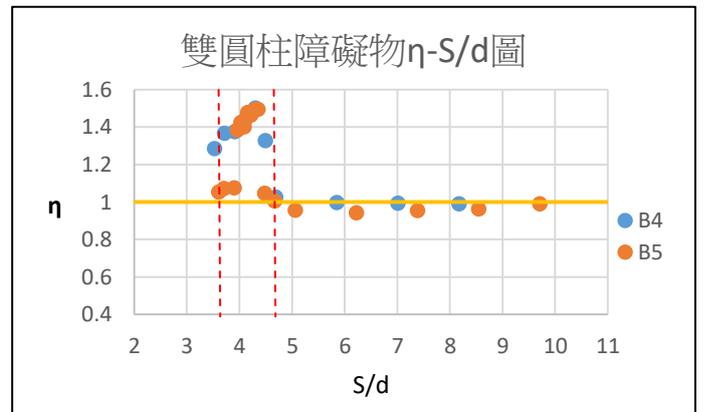
參考圖四十一、四十二

經幾何推導後可得知，雙障礙物中兩側與長條邊界最短距離  $S'$  為

$$S' = s - (b+l)\cos\theta \quad (s: \text{單一橢圓障礙物放置於位置 } L \text{ 所對應 } s, \quad l: \text{從 } Y \text{ 軸水平移動距離})$$



圖四十三



圖四十四

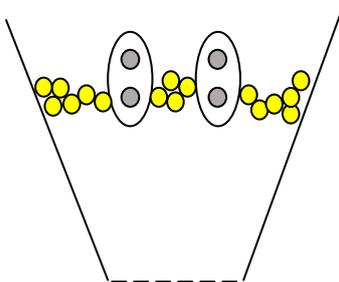
實驗中雙障礙物中心的水平距離  $2\Delta h = 2.7\text{cm}$ ，為 4.5 個顆粒體直徑大小，比照單一障礙物將原先所做  $\eta-L$  圖找出  $L$  所對應之  $s/d$ ，仍可發現兩種形狀的雙障礙物擺放於軌道時與先前推論相符。(如圖四十三、四十四)

由於在兩側距離為 2.5 個顆粒體直徑長時，實際上應通過 2 個顆粒體，而雙障礙物中心水平距離亦可通過 4 個顆粒體，因此在顆粒流動時仍能順利通過，上圖橢圓柱障礙物，明顯增加平均流率時，通過開口的顆粒數目介於 8~10 個顆粒體，相較於 7 個顆粒體直徑的開口寬度，

仍可順利通過，因此兩側最短距離的範圍： $2.5 < \frac{s}{d} < 3.5$ 。

相較於橢圓柱，圓柱明顯增加流率的範圍： $3.5 < \frac{s}{d} < 4.5$ ，圓柱的實際最短距離與有效最短距離有所差距，因此實際可通過的顆粒數目較少。

進一步分析，發現顆粒體在通過雙障礙物時，雙障礙物間最短距離的顆粒，相較兩側不容易與長條邊界產生交互作用，通過時的排列也較為整齊，因此通過開口時的 Y 方向速度較大，與顆粒體間交互碰撞可增加通過開口的機率而不回堵(如表四)

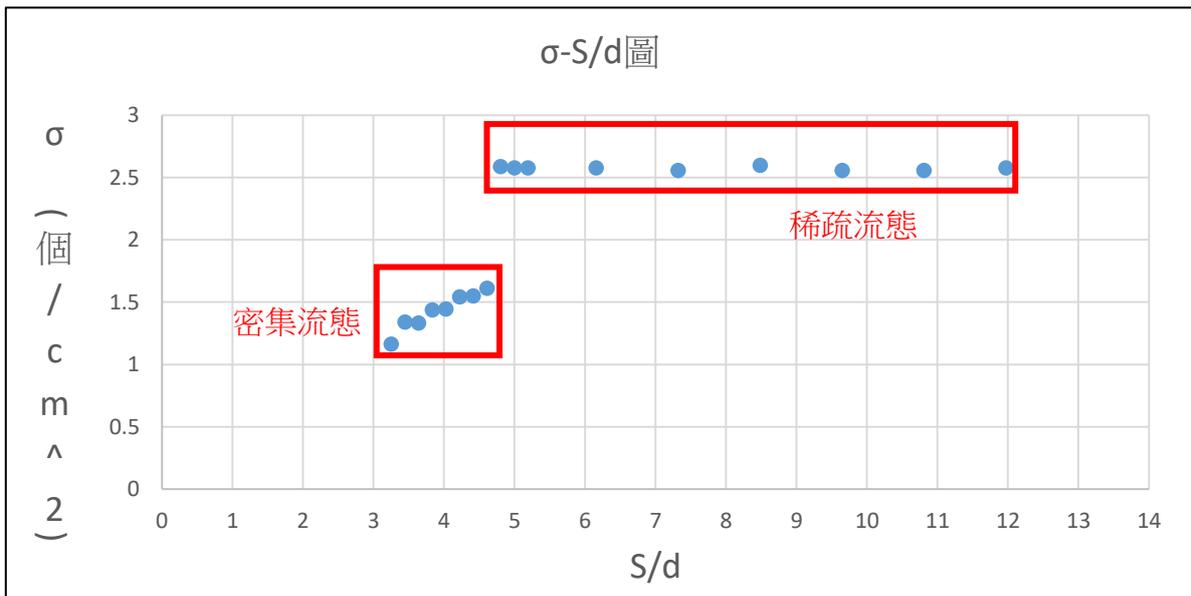


	A3	A4	A5	B4	B5
通過雙障礙物間之顆粒體於開口附近的 Y 方向速度(cm/s)	54.13	46.05	36.99	46.63	36.22
通過障礙物與長條邊界的顆粒體於開口附近的 Y 方向速度(cm/s)	39.42	34.30	28.76	33.68	28.77

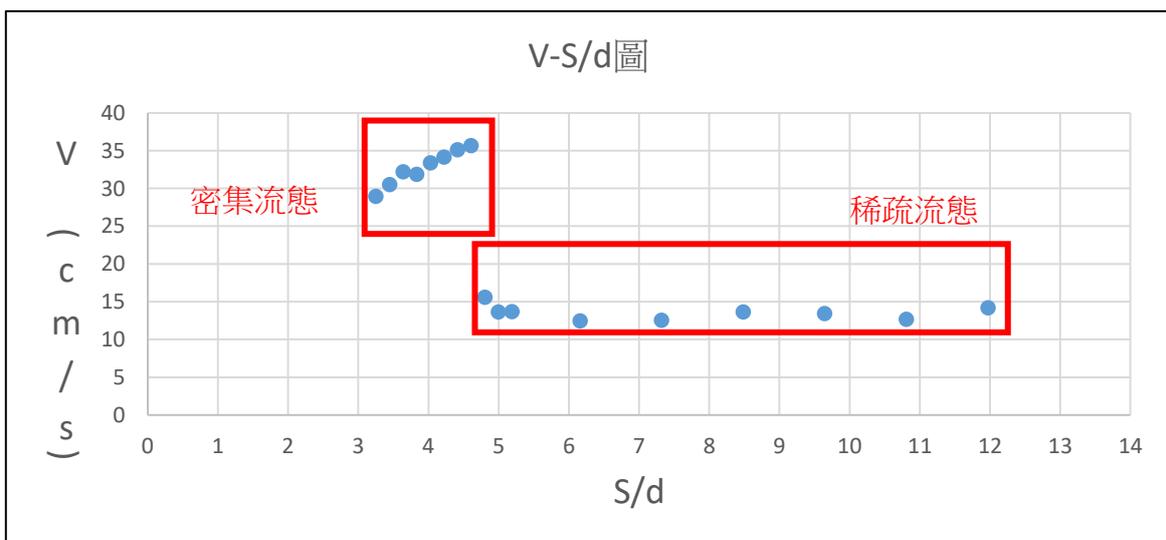
表四

## 二、討論

(一) 在討論一中已經探討了使平均流率增加的障礙物擺放位置，想藉由數據分析進一步了解會使平均流率增加的原因。流體力學中學過，流率 $Q = \rho \times V \times A$  ( $\rho$ ：流體密度， $V$ ：流體速度， $A$ ：截面積)，在本實驗中將其改為二維的關係式： $Q = \sigma \times V \times W$  ( $\sigma$ ：開口附近顆粒體平均粒子數面密度， $V$ ：顆粒體開口附近 Y 方向的平均速度， $W$ ：開口寬度)。利用 Tracker 及 ImageJ 軟體分別分析橢圓柱障礙物 A1 放置在各位置時，開口附近顆粒體的  $\sigma$  及  $V$ ，得到數據(如圖四十五、四十六)。



圖四十五



圖四十六

(二)經由上圖四十五、四十六可明顯地看出開口附近的顆粒體流動可區分成 2 種類型：

1. **密集流態**：顆粒體粒子數密度大 ( $\sigma$  大)、速度慢 ( $V$  小)。在此流態中因顆粒體在開口附近的密度較大，顆粒體的碰撞較頻繁，使其速度變慢，造成平均流率較小。此流態中不論障礙物的位置在哪，速度及粒子數密度都差不多，無明顯變化。

2. **稀疏流態**：顆粒體粒子數密度小 ( $\sigma$  小)、速度快 ( $V$  大)。在此流態中，顆粒體在開口附近的密度明顯降低，顆粒體的碰撞較不頻繁，顆粒體便可較有秩序的流動，因此速度增快，造成平均流率增加。

由上述分析，可以明顯地看出來顆粒體在開口附近的流動分成兩個不同狀態，很類似於固體與液體的兩種相，由圖可看出相變發生的臨界值就在  $\frac{S}{d} = 5$  左右。在臨界值附近，發生顆粒體速度  $V$  及密度  $\sigma$  陡然升降的現象(如圖四十五、四十六)。

## 柒、結論

- 一、將單一障礙物放置在軌道上特定位置時，可以明顯增加平均流率(最多可達無障礙時平均流率的 55%左右)，但這些位置的範圍很小。在此範圍中，當障礙物向開口處移動時(L 漸小)，平均流率有陡升緩降(線性緩降)的趨勢，其變化率都不小。
- 二、顆粒體流過障礙物時，在障礙物下方所形成的空白區大致上分成兩類：「半圓形空白區」和「三角形空白區」。當形成半圓形空白區時，平均流率會與無障礙物時之平均流率相近；當形成三角形空白區時，平均流率會大於無障礙物時之平均流率。  
而當障礙物放置在發生最大平均流率的位置附近時，障礙物下方會伴隨有不穩定空白區的形成。
- 三、放置障礙物能有序分流顆粒體運動。開口處的平均流率受顆粒體直徑、障礙物與長條邊界的有效最短距離及開口寬度三者共同影響。在進一步分析後發現，能明顯增加平均流率的單一障礙物擺放位置，可由顆粒體直徑、障礙物尺寸、開口寬度及長條邊界與 Y 軸的夾角四者決定，且障礙物的幾何形狀會有所影響。
- 四、障礙物放置於不同位置時，開口處附近顆粒體的流動狀態可區分為兩類：「密集流態」與「稀疏流態」。密集流態的顆粒體粒子數密度較大、速度較慢，平均流率與無障礙物時相近；稀疏流態的顆粒體粒子數密度較小、速度較快，平均流率明顯增大。  
密集流態與稀疏流態轉換時有臨界值存在，類似固體與液體兩態間的相變。
- 五、放置雙障礙物在軌道的特定位置上時可以明顯增加平均流率(最多可達無障礙時平均流率的 60%左右)，這些位置的範圍較單一障礙物小。當障礙物向開口處移動時(L 漸小)，其變化趨勢與單一障礙物相似。

## 捌、參考資料及其他

### 一、未來展望

本研究期望利用以下方法驗證討論一裡的數學式

- (一)改變開口寬度
- (二) 改變長條邊界與開口的夾角
- (三)改變顆粒體直徑

本研究對雙障礙物只有初步探究，希望可以進一步對雙障礙物探討。

### 二、參考資料

林明瑞 (2009) · 普通高級中學物理下冊 · 臺南市：南一

Hugh D. Young · 普通物理學上冊 · 新北市：全華

賈魯強、黎璧賢 (2010) · 物理雙月刊，漫談顆粒體物理 · 503-510

Obstacle in a funnel(無名氏) · <http://eskola.hfd.hr/icm/download/IYPT2005/funnel.pdf>

Jeffrey Kluger (2008) · 莊靖譯(2010) · 世界既簡單又複雜 · 漫遊者出版社

## 【評語】 051823

本作品以探討小顆粒體在軌道上的流動現象，在中間加入障礙物時可以有分流的效果而讓平均流速變大（55%增加），是不錯的結論。然而本實驗以物體之平滑度、障礙物之形狀，有直接關連，作者應討論之研究成果，設計出不同之形狀的障礙物，以 3-D 列印的實驗加以驗證。

作品海報

## 摘要

本實驗在開口限縮之傾斜軌道上放置障礙物，並觀察顆粒體於軌道上的流動現象。發現單一障礙物在軌道上特定位置時，可明顯增加顆粒體在開口處的平均流率(最大可達無障礙物時的55%)，但此障礙物放置位置範圍很小。障礙物的有效放置能有序分流顆粒體運動，而平均流率的增大程度由顆粒體直徑、障礙物與長條邊界最短距離及開口寬度三者共同決定。

在進一步分析後發現，能明顯增加平均流率的單一障礙物擺放距離，主要可由顆粒體直徑、障礙物尺寸、開口寬度及長條邊界與開口的夾角四者決定，並推出障礙物擺放位置的方程式，但障礙物的幾何形狀會有所影響。

障礙物放置於不同位置時，開口附近顆粒體的流動狀態可區分為兩類：「**密集流態**」與「**稀疏流態**」，密集流態與稀疏流態間的轉換有一臨界值存在，類似固體與液體兩態間的相變。最後，發現雙障礙物比單一障礙物更能提高平均流率(最大可增加達無障礙物時的60%)，值得再進一步探索。

## 壹、研究動機

你是否曾看過道路限縮時車流的情形？或是過斑馬線的擁擠人潮？日常生活許多現象都有著類似壅塞的流動模式。在「**世界既簡單又複雜**」一書中閱讀到關於災難發生時，疏散人潮的相關問題，我們覺得值得深入去探討。於是設計了傾斜限縮軌道，並在軌道上方放置障礙物觀察BB彈在開口處的流動情形，以期人們在逃散中可以有最大的逃生機會。

## 貳、研究目的

- 一、觀察無障礙物的前端限縮傾斜軌道中，顆粒體的流動現象。
- 二、有障礙物放置於軌道對稱軸上，改變障礙物尺寸、形狀、與開口垂直距離及開口寬度時，觀察顆粒體的流動現象：
  - (一)平均流率的變化。
  - (二)在障礙物下方空白區的變化。
  - (三)開口附近速度及密度的變化。
- 三、觀察擺放雙障礙物的前端限縮軌道，改變障礙物與開口距離時，顆粒體的流動現象。

## 參、實驗器材

BB彈 (圖1)	木製軌道箱 鐵製軌道面	3D列印障礙物(圖2)
攝影機 (30幀/秒) (120幀/秒)	長條形磁鐵 (29.75cm)	碼錶 (最小單位：0.01sec)



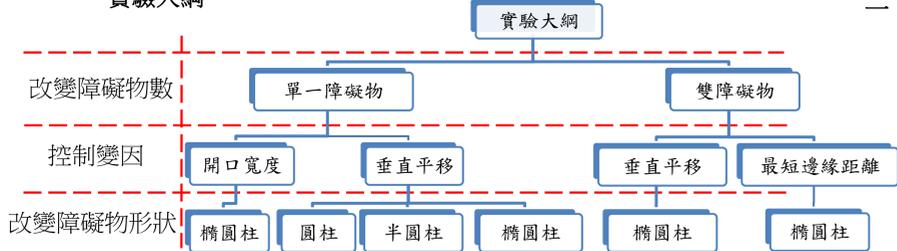
圖 1



圖 2

## 肆、研究過程及方法

### 一、實驗大綱



### 二、物理量定義與名詞解釋

#### (一)使用符號

- N: 顆粒體總數  
 $T_0$ : 顆粒體在無障礙物的開口限縮傾斜軌道下，自第一顆通過開口到最後一顆通過開口所需時間  
T: 顆粒體在放置障礙物的開口限縮傾斜軌道下自第一顆通過開口到最後一顆通過開口所需時間  
 $Q_0 = \frac{N}{T_0}$ : 顆粒體在無障礙物時的平均流率  
 $Q = \frac{N}{T}$ : 顆粒體在放置障礙物時的平均流率  
 $\eta = \frac{Q}{Q_0}$ : 流率比，有障礙物與無障礙物時的平均流率比

- D: 障礙物尺寸  
W: 開口寬度  
d: 顆粒體直徑(0.6cm)  
S: 障礙物與長條邊界的最短距離  
L: 障礙物中心至開口垂直距離

#### (二)座標軸(如圖 3)

- 定軌道下端開口中心處為座標原點，X軸、Y軸平行於軌道面

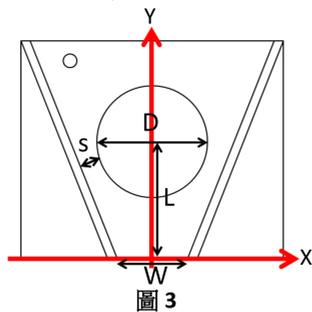


圖 3

### 三、裝置架設(如圖4~5)

- (一)將軌道傾斜角度設置為 $8^\circ$ ，因為以此作為傾角，顆粒體在流動後不易殘留於軌道面，利用三角函數關係，以千斤頂調整沿軌道下端往上50cm處測量與水平桌面高度須為6.95cm ( $\sin 8^\circ$ )
- (二)以鐵架固定於木製軌道壁兩側並將攝影機架設於鐵架上，記錄顆粒體流動之現象。

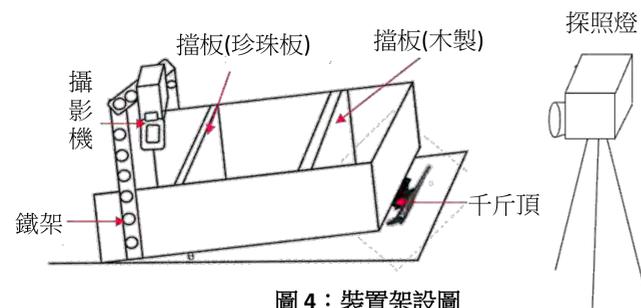


圖 4: 裝置架設圖

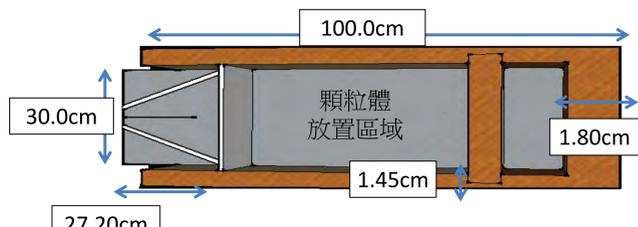


圖 5: 軌道尺寸圖

## 五、實驗操作

### (一)變因

**操控變因**: 障礙物的尺寸與形狀(如下表有3種形狀5種大小，共15種不同的障礙物)、雙障礙物最短邊緣距離、L、W

**控制變因**: 軌道傾角 $8^\circ$ 、 $N=3636$ 顆、開口與擋板之距離27.2cm

俯視圖	橢圓柱 (長軸長:短軸長=5:3)		圓柱		半圓柱	
	A5 A4 A3 A2 A1	B5 B4 B3 B2 B1	C5 C4 C3 C2 C1			
尺寸	編號	短軸長(cm)	編號	直徑(cm)	編號	直徑(cm)
	A1	7.2	B1	7.2	C1	7.2
	A2	6.0	B2	6.0	C2	6.0
	A3	4.8	B3	4.8	C3	4.8
	A4	3.6	B4	3.6	C4	3.6
A5	2.4	B5	2.4	C5	2.4	

### (二)實驗設計:

#### 1.實驗一

探討單一障礙物在Y軸上移動時，改變障礙物大小、形狀所造成影響

實驗步驟:

- (1)取一種形狀的障礙物，將障礙物放置於Y軸上，其底部邊緣與開口距18cm。
- (2)將全數顆粒體倒入軌道兩擋板間，再將其鋪平。釋放顆粒體並測量T，重複進行五次。
- (3)改變障礙物中心與開口的垂直距離(L)，以固定間距1.8cm向下平移，再重複上述步驟(2)~(3)直至阻塞為止。
- (4)變換障礙物依序由A1進行至C5，重複步驟(1)~(3)

#### 2.實驗二

探討單一障礙物在Y軸上移動時，改變開口寬度所造成影響

實驗步驟:

- 以Y軸為對稱軸，兩側同時平行移動長條邊界改變開口寬度。餘步驟與實驗一同。

#### 3.實驗三

探討雙障礙物在Y軸上移動，改變雙障礙物間最短邊緣距離( $2\ell$ )所造成影響

實驗步驟:

- 以Y軸為對稱軸放置障礙物，兩障礙物中心之連線與開口平行，改變雙障礙物最短邊緣距離，餘步驟與實驗一同。(如圖 6)

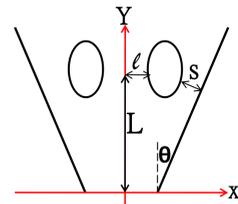


圖 6

## 伍、實驗結果

### 一、結果一：單一障礙物其中心固定於軌道Y軸上

#### (一)尺寸較大的障礙物：(A1~A3、B1~B3、C1~C3)

- 1.將障礙物置於適當位置時，顆粒體的平均流率會明顯大於無障礙物時的流率。(最大可增加多達55%左右，如圖 7)
- 2.會使平均流率增加的障礙物位置擺放範圍很小(即 $\Delta L$ 值大約2.5公分)。(如圖8~10)
- 3.對於不同障礙物來說，流率比 $\eta$ 隨L有類似的變化趨勢。隨著L由大變小可以大致分為三區：(如圖 7)
  - (1)平緩區：此時的平均流率 $\eta \approx 1$ 與無障礙物時的平均流率接近。
  - (2)陡升區：在此區時 $\eta > 1$ ，隨著L減小但平均流率急遽上升。
  - (3)線性緩降區：對本實驗不同形狀的障礙物而言，當L減小時 $\eta$ 隨之遞減。其線性緩降區的斜率相近(大約為0.2)。如圖(8~10)

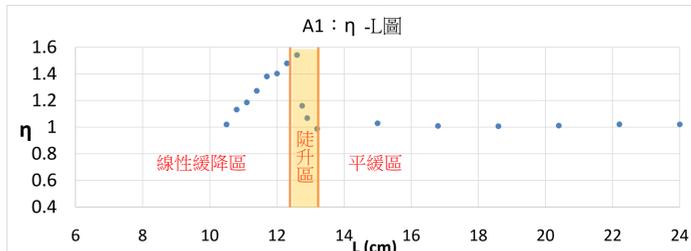


圖 7

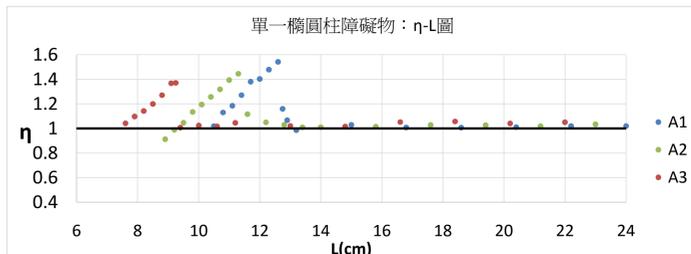


圖 8

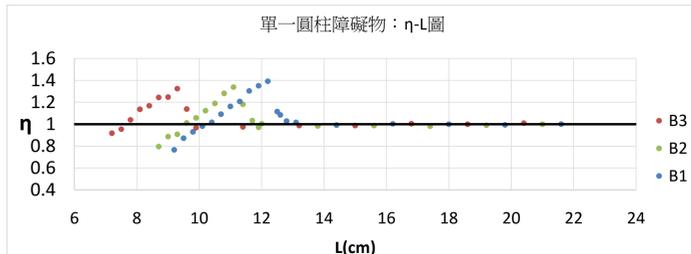


圖 9

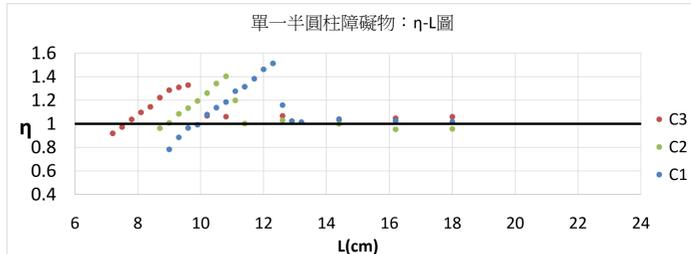


圖 10

#### (二)尺寸較小的障礙物：(A4~A5、B4~B5、C4~C5)

尺寸較小的障礙物，對於平均流率幾乎沒有影響( $\eta \approx 1$ )。(如圖11)

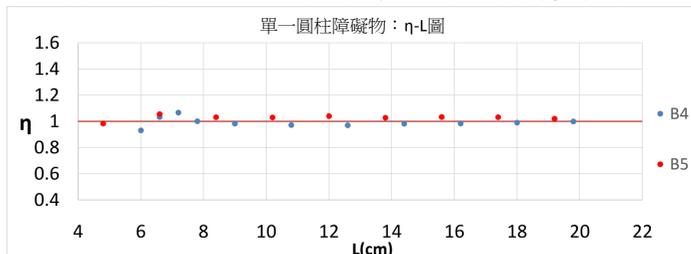


圖 11

## 陸、討論

### 二、結果二：單一障礙物A1，改變四種開口寬度(4.2cm、4.8cm、5.4cm、6.0cm)

- (一)在不同的開口寬度下放置障礙物，其 $\eta$ 隨L的變化趨勢相近。  
 (二)如圖12，對於不同開口寬度時的線性緩降區斜率皆相近。

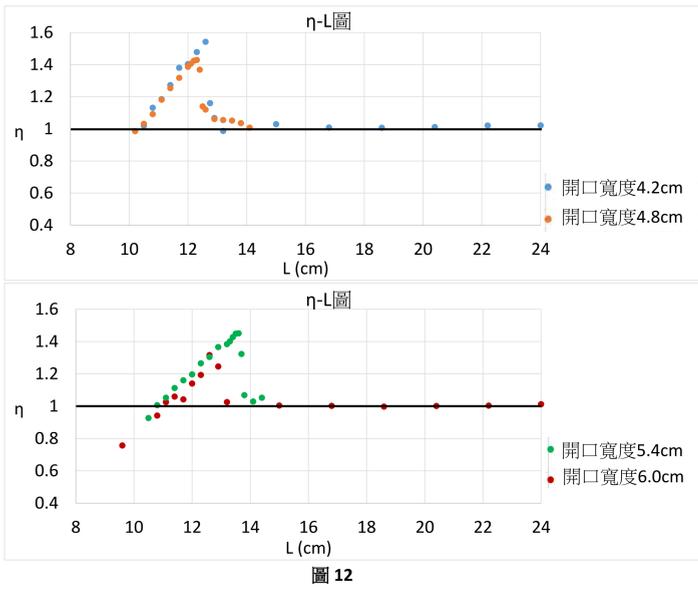


圖 12

### 一、障礙物與邊界最短距離和平均流率的關係

在實驗過程中發現，放置單一障礙物時，就如同在開口上方增加兩個小開口。因此我們進行了障礙物與邊界之間的最短距離的細部分析。

(一)相同開口寬度 (4.2cm)，不同障礙物

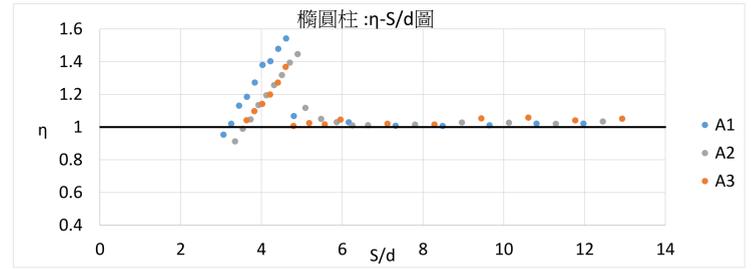


圖 17

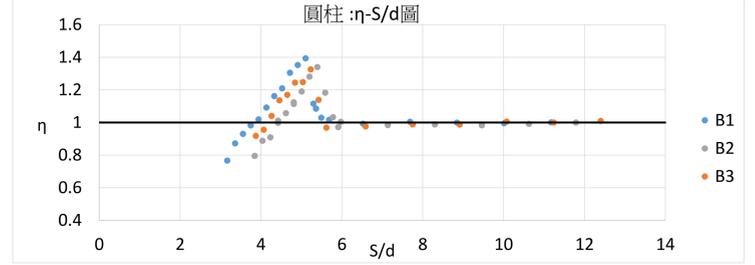


圖 18

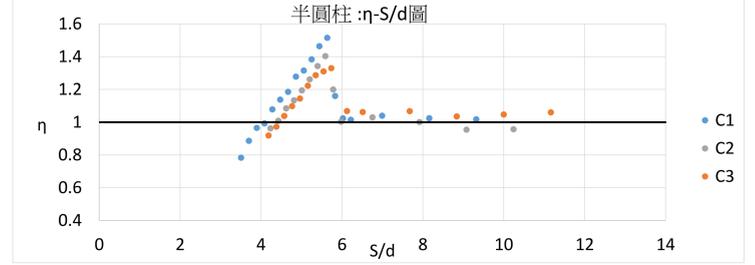


圖 19

(二)不同開口寬度，障礙物A1

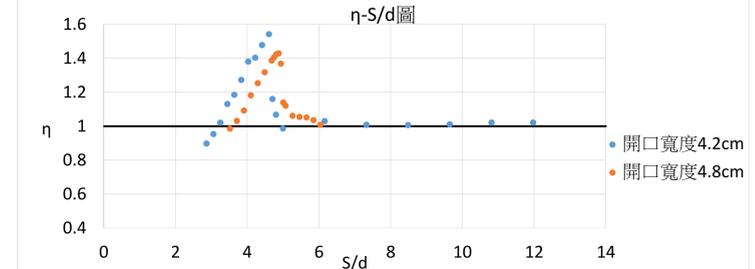


圖 20

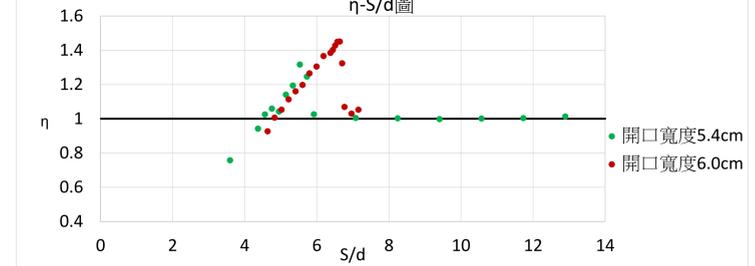


圖 21

(三)兩障礙物邊緣最短距離相同(2.7cm)，不同障礙物

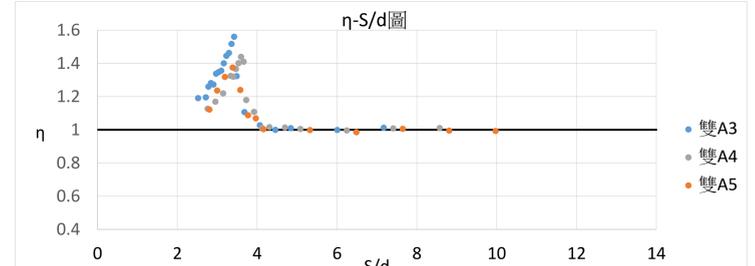


圖 22

### 二、流場分析

分析回堵情形及順暢情形下，通過障礙物的5個顆粒體流動現象。

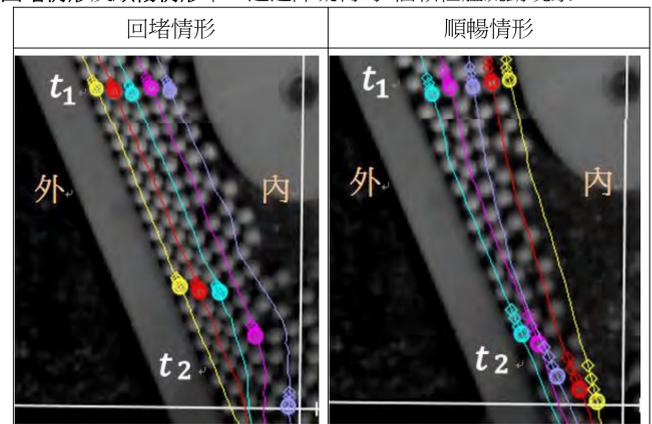


圖 23

(一)回堵情形:流過障礙物後的顆粒體排列較緊密，大部分顆粒體的流動軌跡平行邊界。外側3個顆粒體 $v_y$ 相近，內側2個顆粒體 $v_y$ 較快，其中又以最靠內側的顆粒體最快。通過障礙物兩邊內側顆粒體易於開口上方產生碰撞。

(二)順暢情形:流過障礙物後的顆粒體排列較稀疏，內側顆粒體的流動軌跡不平行邊界，易流向外側。 $v_y$ 由外至內遞增。通過障礙物兩邊內側顆粒體不易於開口上方產生碰撞。

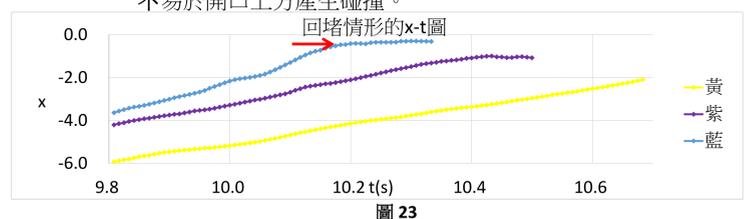


圖 24

(三)在回堵情形中可以看到最內側的顆粒體(藍色軌跡)在 $t=10.2$ 之前 $v_x$ 大略不變，並且有越過中線之趨勢，但在 $t=10.2$ 後(紅色箭頭處)因為與另一側顆粒體往-x方向碰撞，導致其 $v_x$ 大概減慢至0(如圖23)。

### 三、結果三：單一障礙物的空白區

從實驗過程中可明顯發現，顆粒體在障礙物下方的流動型態主要分為三類(可以對應到圖7中的平緩區、陡升區、線性緩降區)，分別為(圖13):

- (一)半圓形空白區  
 (二)不穩定空白區  
 (三)三角形空白區

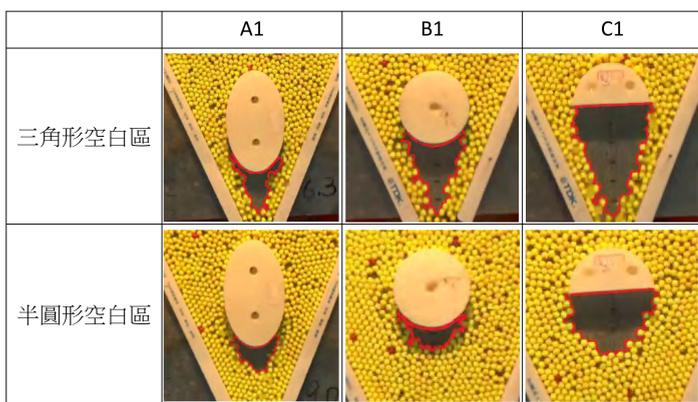


圖 13

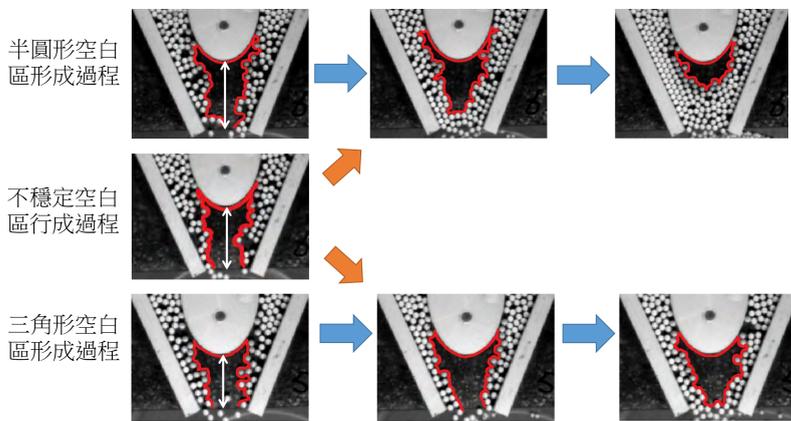


圖 14

### 四、結果四：雙障礙物的影響

(一)雙橢圓柱障礙物最短邊緣距離固定，改變障礙物尺寸(如圖15)

- 放置雙障礙物時軌道上的顆粒體 $\eta$ 隨L變化的趨勢和單一障礙物相似，但可使 $\eta$ 值增加的障礙物放置位置範圍更小(約1.5cm左右)。在此範圍內，當L漸小時， $\eta$ 有陡升緩降的趨勢，但其變化率都不小。
- 若將雙障礙物放置於適當位置，對於平均流率的影響比相同尺寸及形狀的單一障礙物明顯。

(二)雙橢圓柱障礙物A4改變其中心距離(如圖16)

- $\eta$ 隨L的變化仍有相似的趨勢。
- 對於同組雙障礙物，改變其邊緣最短距離時，流率明顯增加的位置L範圍，仍然非常接近。

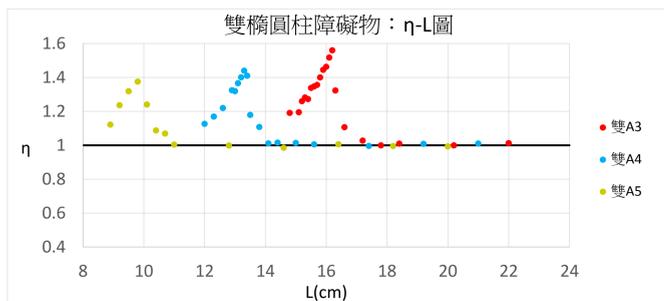


圖 15

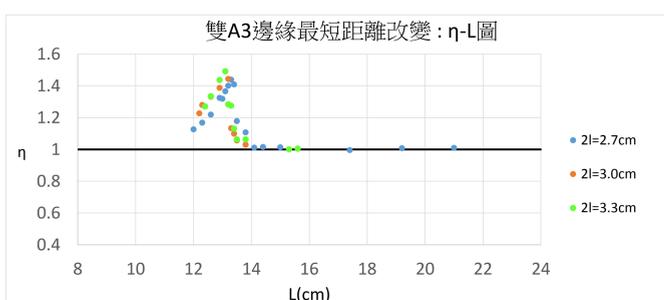


圖 16

### 三、物理圖像分析

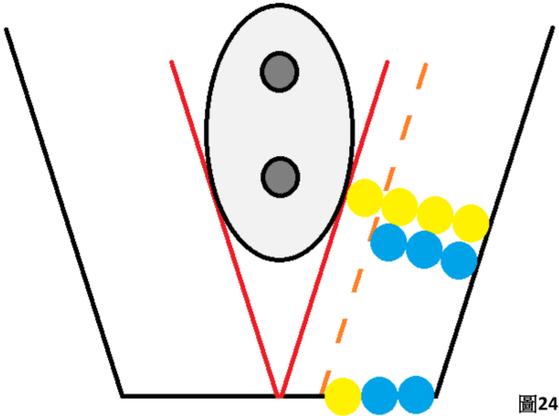


圖24

#### (一)條件方程式

- 觀察顆粒體的流動時，我們發現當顆粒體經過障礙物後，較內側的顆粒體並不會沿著與邊界的平行線移動，而是會向外側擠入。亦即，當通過障礙物與邊界的最短距離(s)處有4個顆粒體，但最後進入開口前卻僅剩3個顆粒體(如圖24)。藉由這個想法，可得橢圓柱障礙物發生最大流率對應的S值之條件方程式：

$$\left[\frac{S}{d}\right]_{max} - 1 = \left[\frac{W}{2d}\right] \text{-----橢圓}$$

紅色雙箭頭代表有效最短距離，藍色三角形為顆粒體通過障礙物時受長條邊界阻礙而無法整齊向下運動的區域。若欲放置半圓柱於有效最短距離為4d處，對應的s約為5d。

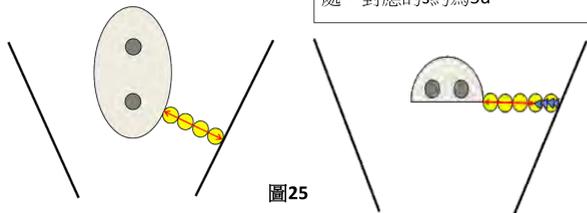


圖25

- 藉由實驗數據的分析，看出在相同開口寬度的情況下出現最大流率的S/d值，圓形和半圓形障礙物均較橢圓形障礙物高。觀察實驗中所拍攝的影片之後，我們做出了以下的推論：

橢圓柱的曲率較圓柱及半圓柱小且形狀更扁長，顆粒體通過時，比起圓柱及半圓柱能更有效的達到有序排列分流，而其有效最短距離也與真實最短距離接近。(如圖25)

由此可得圓柱與半圓柱的發生最大流率對應的S值之條件方程式：

$$\left[\frac{S}{d}\right]_{max} - 2 = \left[\frac{W}{2d}\right] \text{-----圓、半圓}$$

- 由條件方程式可求得流率最大值的障礙物擺放S/d範圍(如圖26)：



圖26

#### (二)障礙物擺放位置L的推估方程式

- 橢圓柱障礙物(如圖27)：

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{(y-L)^2}{a^2} = 1 \quad \leftarrow \text{橢圓標準式}$$

斜率m與橢圓相切直線方程式

$$y-L = mx \pm \sqrt{b^2 m^2 + a^2}$$

$$\text{取負號} \Rightarrow y-L = mx - \sqrt{b^2 m^2 + a^2}$$

$$m = \cot \theta$$

$$\overline{OB} = L - \sqrt{b^2 m^2 + a^2}$$

$$\overline{AB} = \overline{AO} + \overline{OB} = \frac{W}{2} \cot \theta + L - \sqrt{b^2 m^2 + a^2}$$

而△ABC中

$$s = \overline{AB} \sin \theta$$

$$\Rightarrow s = \frac{W}{2} \cot \theta \sin \theta + L \sin \theta - \sqrt{b^2 m^2 + a^2} \sin \theta$$

$$\Rightarrow L = \sqrt{b^2 \cot^2 \theta + a^2} + s \csc \theta - \frac{W}{2} \cot \theta \text{---(1)}$$

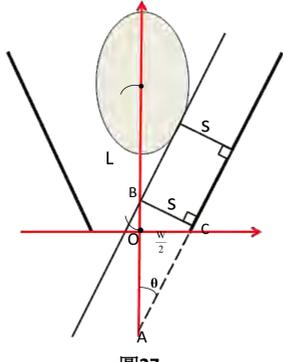


圖27

- 圓柱障礙物：

利用橢圓形障礙物導出的L值，若數學式中 $a = b = \frac{D}{2}$ ，則

$$L = \frac{D}{2} \csc \theta + s \csc \theta - \frac{W}{2} \cot \theta \text{---(2)}$$

- 半圓柱障礙物：

利用類似幾何方法即可得到半圓柱L值如下：

$$L = \frac{D}{2} \cot \theta + s \csc \theta - \frac{W}{2} \cot \theta \text{---(3)}$$

將上述條件方程式所得S值範圍及相關實驗參數，代入上式(1)(2)(3)

分別可得平均流率明顯增加的障礙物擺放L值範圍。(如圖28)

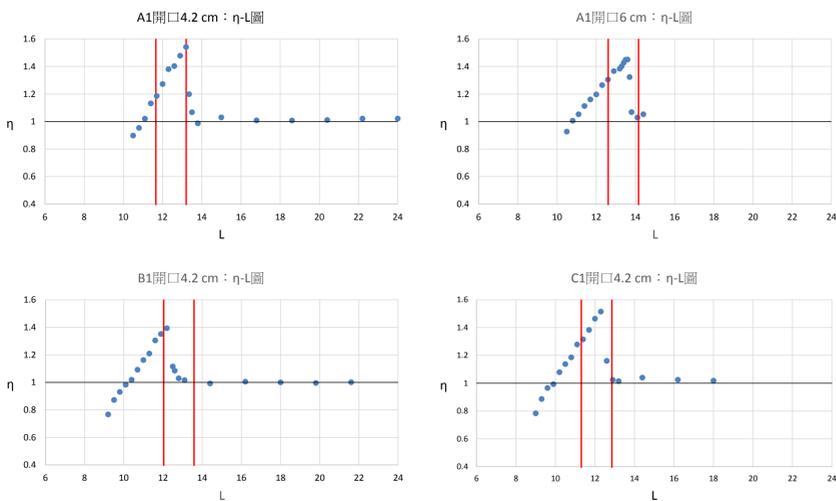


圖28

### 四、顆粒體在開口附近的密度及速度

- 流體力學提到，流率 $Q = \rho V A$  ( $\rho$ ：流體密度， $V$ ：流體速度， $A$ ：截面積)，將此式由三維變成二維的 $Q = \sigma V W$  ( $\sigma$ ：平均粒子數密度， $V$ ：Y方向的平均速度， $W$ ：開口寬度)。分別分析橢圓柱障礙物A1在4.2 cm及6 cm的開口寬度時，顆粒體在開口附近的 $\sigma$ 及 $V$ ，得數據(如圖29)。

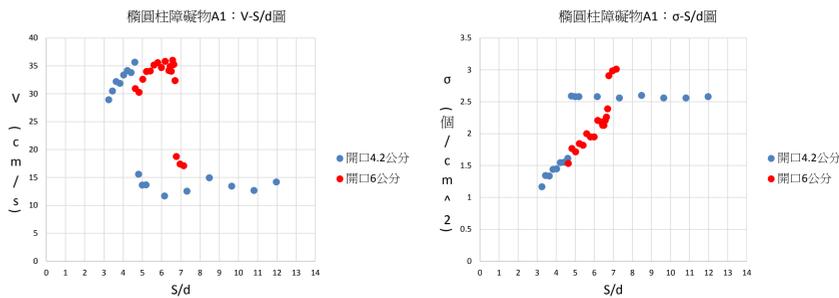


圖29

- 開口附近的顆粒體流動可區分成二種類型：

1. 密集流態：顆粒體粒子數密度大( $\sigma$ 大)、速度慢( $V$ 小)、且障礙物離開口較遠( $L$ 較大)。
2. 稀疏流態：顆粒體粒子數密度小( $\sigma$ 小)、速度快( $V$ 大)、且障礙物離開口較近( $L$ 較小)。

- (三)由上述分析，可以明顯地看出來顆粒體在開口附近的流動分成兩個不同狀態，很類似於固體與液體的兩種相，由圖中可看出在4.2 cm及6 cm的開口寬度時相變發生的臨界值就在 $\frac{S}{d} = 5$ 及7左右。在臨界值附近，發生顆粒體速度 $V$ 及密度 $\sigma$ 陡然升降的現象(如圖27)。

- (四)接著分析雙橢圓柱障礙物A4在 $l$ 為1.65 cm以及1.5 cm時，顆粒體在開口附近顆粒體的 $\sigma$ 及 $V$ ，得數據(如圖30)。

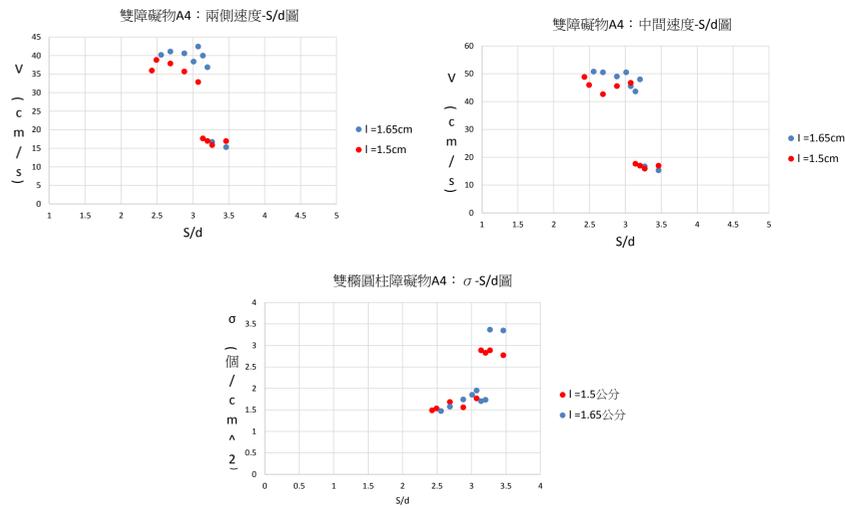


圖30

### 五、雙障礙物與邊界的最短距離S'

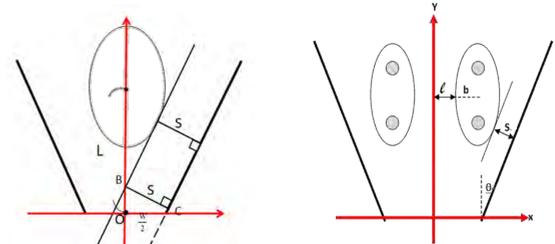


圖31

經幾何推導後可得知，雙障礙物中兩側與長條邊界最短距離 $S'$ 為：

$$S' = S - (b + l)$$

(S：單一橢圓障礙物放置於位置L所對應S，l：從Y軸水平移動距離)

## 柒、結論

- 一、將單一障礙物放置在軌道上特定位置時，可以明顯增加平均流率(最多可達無障礙時平均流率的55%左右)，但這些位置的範圍很小。在此範圍中，當障礙物向開口處移動時(L漸小)，平均流率有陡升緩降(線性緩降)的趨勢，其變化率都不小。
- 二、顆粒體流過障礙物時，在障礙物下方所形成的空白區大致上分成兩類：「半圓形空白區」和「三角形空白區」。當形成半圓形空白區時，平均流率會與無障礙物時之平均流率相近；當形成三角形空白區時，平均流率會大於無障礙物時之平均流率。而當障礙物放置在發生最大平均流率的位置附近時，障礙物下方會伴隨有不穩定空白區的形成。
- 三、放置障礙物能有序分流顆粒體運動。開口處的平均流率受顆粒體直徑、障礙物與長條邊界的有效最短距離及開口寬度三者共同影響。在進一步分析後發現，能明顯增加平均流率的單一障礙物擺放位置，可由顆粒體直徑、障礙物尺寸、開口寬度及長條邊界與Y軸的夾角四者決定，且障礙物的幾何形狀會有所影響。
- 四、障礙物放置於不同位置時，開口處附近顆粒體的流動狀態可區分為兩類：「密集流態」與「稀疏流態」。密集流態的顆粒體粒子數密度較大、速度較慢，平均流率與無障礙物時相近；稀疏流態的顆粒體粒子數密度較小、速度較快，平均流率明顯增大。密集流態與稀疏流態轉換時有臨界值存在，類似固體與液體兩態間的相變。
- 五、放置雙障礙物在軌道的特定位置上時可以明顯增加平均流率(最多可達無障礙時平均流率的60%左右)，這些位置的範圍較單一障礙物小。當障礙物向開口處移動時(L漸小)，其變化趨勢與單一障礙物相似。

## 捌、參考資料及其他

### 一、未來展望

1. 本研究期望利用以下方法驗證討論一裡的數學式：
  - (一)改變長條邊界與開口的夾角
  - (二)改變顆粒體直徑
2. 本研究對雙障礙物只有初步探究，希望可以進一步對雙障礙物探討。

### 二、參考資料

1. 林明瑞(2009)·普通高級中學物理下冊·臺南市：南一
2. Hugh D. Young·普通物理學上冊·新北市：全華
3. 賈魯強、黎璧賢(2001)·物理雙月刊，漫談顆粒體物理·503-510
4. Obstacle in a funnel, <https://is.gd/yumWW7>
5. Jeffrey Kluger(2008)·莊譯濤(2010)·世界既簡單又複雜·漫遊者出版社