中華民國第 57 屆中小學科學展覽會
作品說明書

高級中等學校組　物理與天文學科

051822

以「管」窺天

－探討扭轉圓筒所產生之自發性摺痕及其應用

學校名稱：國立新竹高級中學

作者：	指導老師：
高二 李致宇	楊智貴

關鍵詞：擰紙、挫曲、摺紙

摘要

本次研究探討圓筒經扭轉自發產生摺痕的物理，發現摺痕數和偏斜角在圓筒長度小於直徑時是規律的，並研究它們與其他參數之關係。同時解釋為何對於長圓筒此規律會消失，並發出多個聲音。

從幾何和能量推導之理論能解釋實驗結果，並藉拉力秤測量，釐清扭轉過程的動態行為，歸納出力矩和扭角滿足虎克定律。

我們主張並提供初步的研究成果支持這些性質可應用在(1)環保：有效回收鐵鋁罐；(2)居家：節省收納空間；(3)工業：機械零件伸縮。並在學術上推廣到（1）地球科學：解釋盤古大陸如何分裂；（2）生物物理：比對 β 筒狀蛋白特性；（3）醫學物理：骨骼受扭力的形變和斷裂；（4）軟凝體物理：幾何挫折如何影響擰紙和其它新穎材料，如負折射率超材料。

.

壹、研究動機

「摺紙」作為一種家喻戶曉的娛樂，不僅具有高度藝術價值、同樣也蘊藏豐富的物理原理。著名的三浦摺疊(Miura origami)有許多有趣的性質，且在實務上也已經被應用在人造衛星天線上。深入調查之後，我們進一步發現摺紙近年來在工程應用上具有高度潛力。由於對摺紙背後的物理以及應用感到好奇，在進行文獻收集後，我們選定「紙管」做為研究主題。

筒狀物作為收納物品的容器在日常生活中非常平凡，例如畢業證書的硬紙筒、羽球筒、販售紙杯、塑膠杯的筒狀塑膠袋。物理學家及材料學家很早便了解擠壓筒狀物會在其表面產生各種有趣的紋路，然而科學家們的好奇心不因此而止步；如 N. Yamaki 教授[1]對紙筒兩端施加相對於軸心反向的力矩，並研究紙管在力矩下產生摺痕的過程。在某些條件下，三維紙管藉由施加力矩產生的摺痕能經由摺疊形成二維摺紙。利用此性質，我們可以製造出更節省空間的材料、並以此為基礎設計出可靈活運動的仿生機械。

了解到紙管的潛力後，我們同時閱讀文獻及設計簡單的實驗以觀察是否有高中生程度能回答的問題。實驗上，由垂手可得的材料如 A4 紙，將其捲在五金行購買的水管上製造出紙管、並將其兩端固定在水管上，徒手扭轉兩端的水管，觀察紙管在力矩施加下產生摺痕的現象。多次實驗之後，我們能夠很輕易地觀察紙管的幾何參數（長與半徑）如何影響紙管上的摺痕數，並歸納和分析它們的關係。應用高中學到的力學(功、位能、物理因次分析)和三角函數(正弦定理)，我們也成功地從理論上推導出合理解釋這些實驗結果的模型。然而，一個非常自然的疑惑油然而生：摺痕數必然是整數，但是紙管的幾何參數卻是連續的實數，那麼

1. 紙管為什麼能夠「自然產生」摺紙現象呢？
2. 摺紙現象能夠用什麼樣的參數描述呢？幾何/材料參數是什麼？

   進一步測試，我們發現長紙管會出現「不規律」的摺痕，這和短紙管的現象完全不同！
3. 擰扭跟「揉皺」有沒有關聯？
4. 要用什麼方式才能描述長短紙管的不同？

經過文獻蒐集，我們發現這些問題還沒被研究過，因此決定利用課餘，從實驗和理論齊頭並進，抽絲剝繭來探討：扭紙管時，摺痕如何產生？摺痕數和摺痕偏斜角如何被決定？摺痕數如何隨材質、厚度等變因變化？以及長紙管和短紙管為何遵守不同的物理定律？

貳、研究目的

一、扭圓筒靜態分析(在本實驗中，半徑始終固定為 2.694±0.008 公分)：

(一)紙管幾何(半徑與長度比，R/w)與摺痕數之關係。

(二)軸向拉伸力與摺痕數之關係。

(三)材質(紙管、銅管、鋁箔管與塑膠管)與摺痕數之關係。

(四)厚度(紙管與鋁箔管)與摺痕數之關係。

(五)紙管幾何(R/w)與凹痕偏斜角(α)之關係。

(六)軸向拉伸力、紙管幾何(R/w)與凹痕偏斜角(α)之關係。

二、建構理論描述紙管靜態參數，如摺痕與紙管幾何(R/w)的關係。

三、扭紙管動態過程分析：

(一)扭紙管的過程中，力矩與扭轉角間的關係。

(二)不同幾何參數下，摺痕的產生與力矩、扭轉角之關係。

四、提出模型來描述扭紙管的動態過程。

五、利用靜態理論及扭紙管之聲音量測，來檢視短紙管與長紙管的物理原理。

(一)藉由靜態幾何、能量理論之分析，來檢視長、短紙管的差異。

(二)聲音量測之觀察與分析：

1.藉由聲音量測，檢視紙管半徑長度比(R/w)與聲音產生次數之關係。

2.藉著聲音分析，探討長紙管之聲音能量與次數之關係。

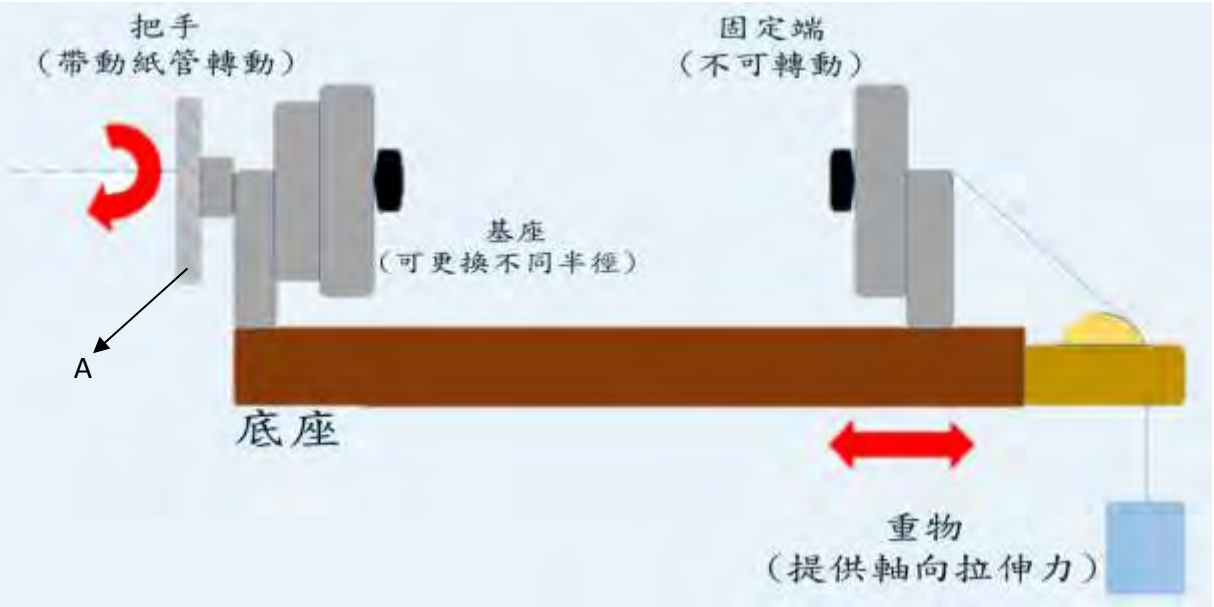
六、檢視半徑不同之大小管摺痕分布之分析：

(一)紙管幾何(半徑與長度比，$\bar{R}/w$)與摺痕數之關係。

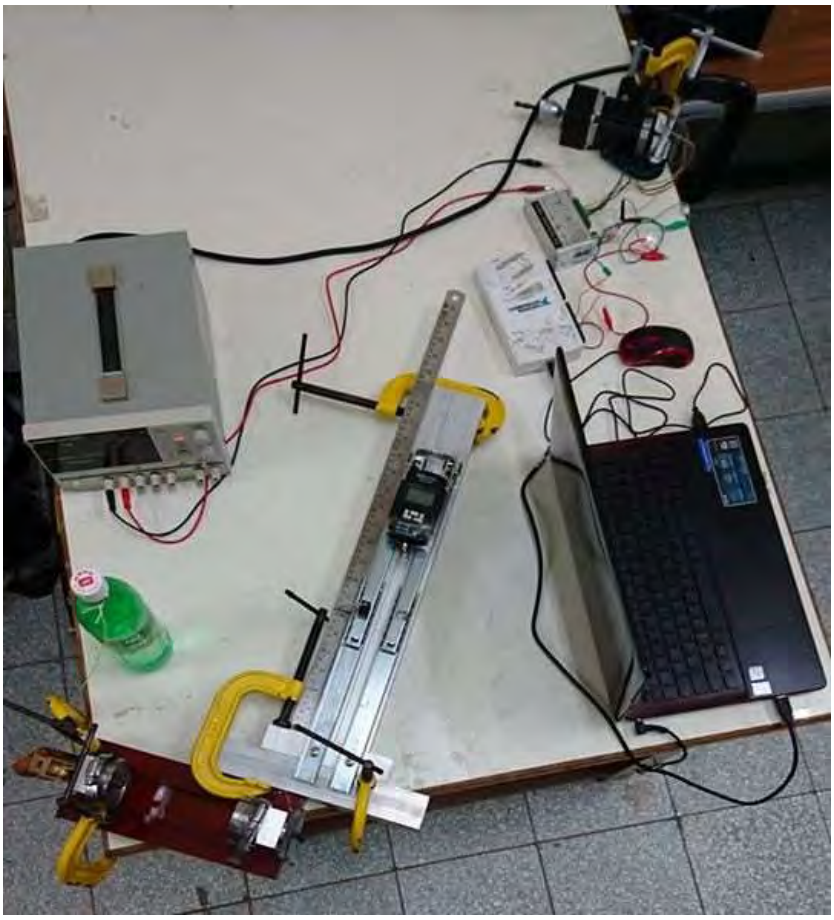
七、建構理論解釋大小管兩半徑及長度之關聯。

參、研究設備及器材

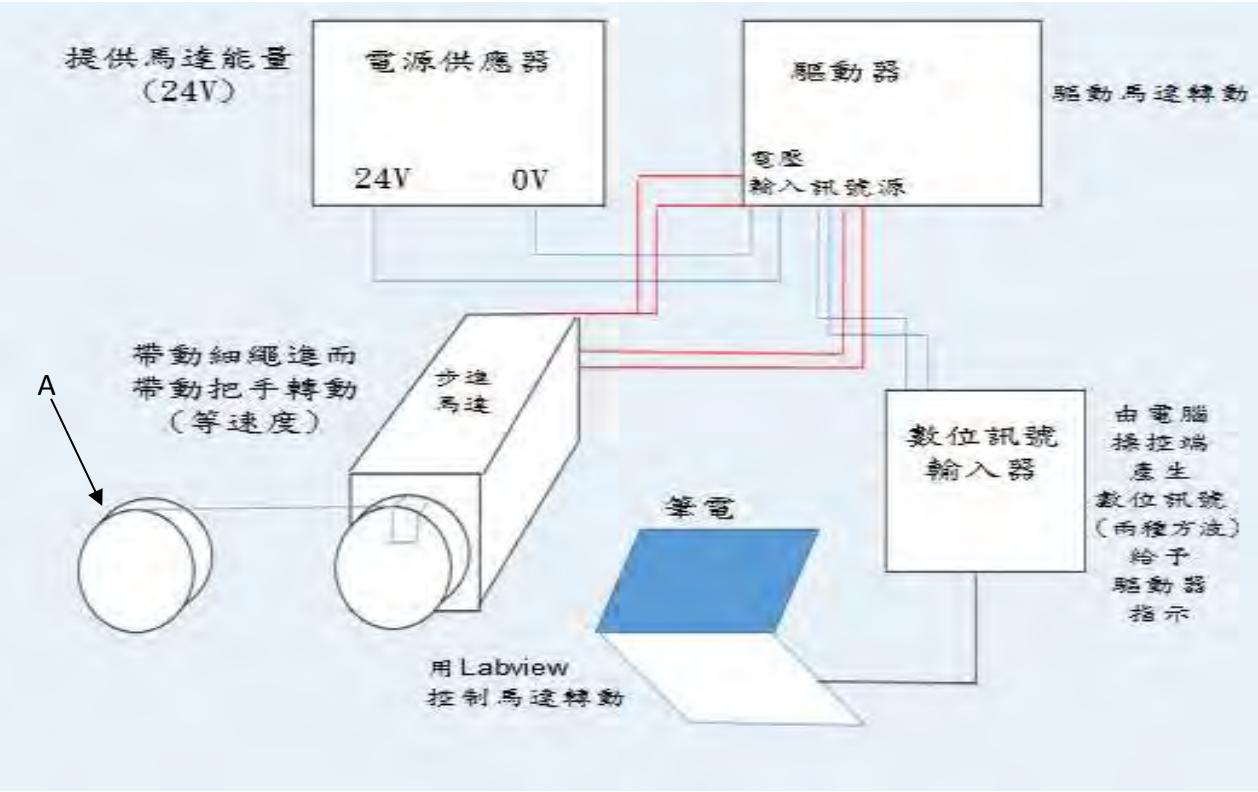
一、實驗架設：



(圖一)實驗儀器正視圖



(圖二)儀器架設全貌圖



(圖三)儀器架設示意圖，圖一和圖三的 A 為相同構造

二、實驗器材：

(一)釣魚線—延展性小的線材。

(二)A4 紙、剪刀、膠帶—裁剪紙用途。

(三)直鐵尺—測量移動之距離。

(四)G 型夾—用來固定架設儀器。

(五)游標尺—測量兩固定端長。

(六)軌道(含鋁材)—用來滑動拉力秤。

(七)針車油—潤滑軌道。

(八)扭轉儀器—用來扭轉紙筒。

(九)鐵束環—用來固定圓筒。

(十)電子天平—量測水瓶重量。

(十一)拉力秤—測量繩子張力用。

(十二)電源供應器—提供能量給用電儀器。

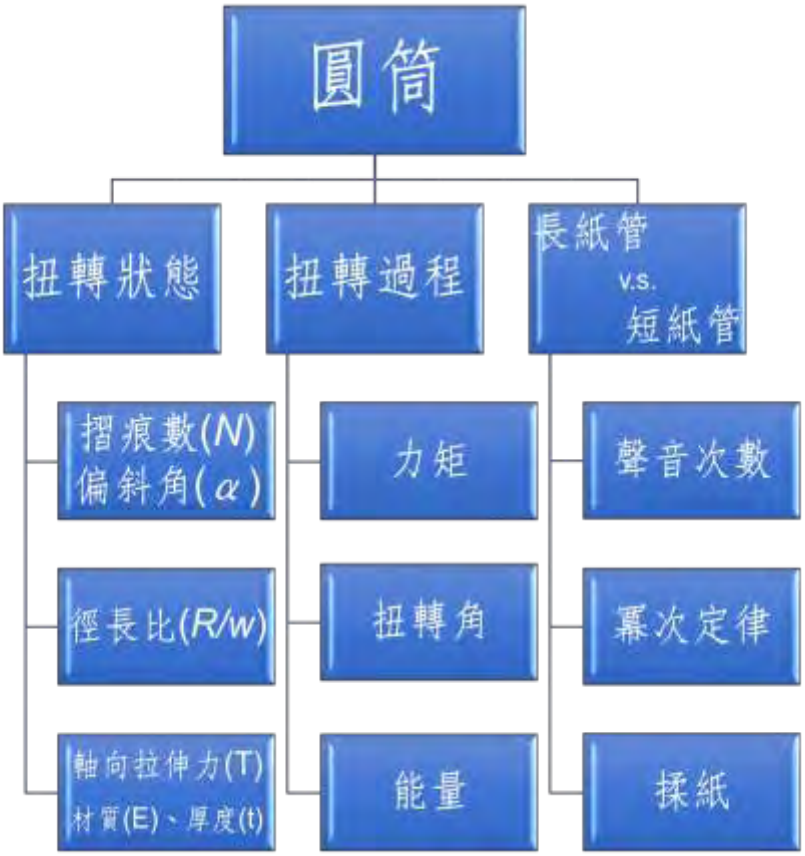
(十三)NI-DAQ USB-6211—電腦輸出訊號的轉換器。

(十四)筆記型電腦(內安裝 LABVIEW)—用程式控制馬達。

(十五)步進馬達與其驅動器—給予固定轉速(角速度約 0.06 rad/s、速度約 0.78 mm/s)，以避免人手扭所造成的誤差。 (馬達連上減速器的功能為增大扭矩，以避免拉不動的情況發生)

肆、研究過程與方法

一、實驗過程



二、實驗方法

(一)靜態過程時，利用步進馬達定速扭轉：

1.裁剪所需大小的紙張。

2.將圓筒環繞在固定端基座，並用鐵束環鎖緊。(鐵束環需平行基座、貼齊邊界。)

3.測量兩固定端之距離。(藉測量兩固定端距離轉換後得到所需圓筒的長度。)

4.將圓筒另一端環繞至旋轉端軸上基座，同樣以鐵束環固定。

5.將電源供應器連接到驅動器。

6.將驅動器連接至數位訊號產生器。

7.將數位訊號產生器連接至筆記型電腦。

8.將儀器(圖一)把手處繫上細繩，並將繩子連接至步進馬達上纏繞數圈。

(為了避免步進馬達上之細繩滑動，建議使用膠帶固定住細繩。

細繩選取「釣魚線」，是因為其相較於一般線材較不具有延展性)

9.利用電腦上的 LabView（**Lab**oratory **V**irtual **I**nstrumentation **E**ngineering **W**orkbench，實驗室虛擬儀器工程平台）程式操控步進馬達帶動把手等速扭轉。

10.圓筒產生摺痕後，將有摺痕之材料拆下，更換紙張並重複步驟 1 至步驟 9。

(二)動態過程時，利用步進馬達定速扭轉：

重複靜態過程的前 7 項步驟，接著

8.架設一軌道使拉力秤可放置於軌道上。(軌道需平行細繩以免所測得的力有誤差)

9.將拉力秤兩端綁上細繩，並將繩子分別連接至儀器(圖一)把手及步進馬達。

10.讀取拉力計之位置。

11.利用電腦上的 LabView 程式操控步進馬達帶動把手等速扭轉。

12.每隔 0.5 秒便停止程式以紀錄拉力秤讀數及其相對位置。

13.觀察圓筒上是否有凹痕(buckling)或摺痕產生。

14.重複步驟 11.至步驟 13.，直到圓筒產生摺痕。

15.圓筒產生摺痕後，將有摺痕之材料拆下，更換紙張並重複步驟 1 至步驟 14。

(三)利用錄音筆及麥克風量測扭轉紙管時發出之聲音：

1.準備錄音筆及麥克風，並先量測環境噪音，以確定當下實驗環境是否良好。

2.裁剪六組不同幾何參數 R/w 的紙張各數十張。

3.選取其中一組的紙張捲成紙管，並將紙管一端環繞至基座上，以鐵束環鎖緊。

4.將紙管另一端環繞至另一基座上，並以鐵束環固定。

5.靜置五秒後，利用雙手去扭轉紙管。

(因為使用步進馬達扭轉會有機械的碰撞聲，因此我們用手扭轉)

6.待錄音結束後，將紙管從基座上拆下。

7.將錄音檔檔名紀錄在實驗紀錄簿。

8.重複步驟 3 到步驟 7。

9.利用 MATLAB 將聲音檔轉換成波形圖。

10.將使用 MATLAB 轉換成之波形圖利用 C 語言轉換成能量圖。

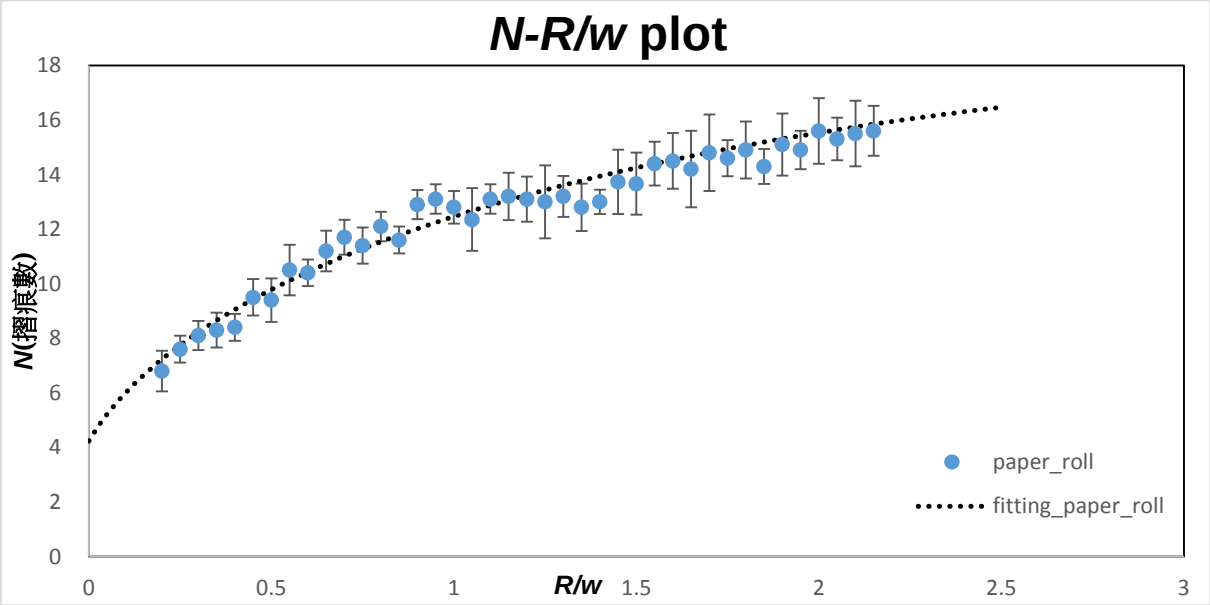
11.將 C 語言轉換成之能量圖代入 R 語言去分析。

12.將其分析之聲音記錄成圖。

伍、研究結果

一、扭圓筒靜態分析：

(一)紙管幾何(*R/w*)與摺痕數之關係。



(圖四)紙管半徑、長度比值與摺痕數關係圖

上圖之藍色圓點(paper_roll)為紙管半徑長度比 *R/w*=0.20 到 2.15，以 0.05 為間距之四十個數據點。採取此四十個紙管半徑長度比之紙管之原因為：

1. 由於實驗儀器之長度限制，無法探討 *R/w*＜0.20 之紙管。
2. 當 *R/w*＞2.15，每 0.05 之間距約小於 0.3 毫米，且因為鐵束環本身之誤差約為 0.3 毫米，因而數據的準確度降低。

圖形上的黑色虛線(fitting_paper_roll)為迴歸曲線(fitting curve)。

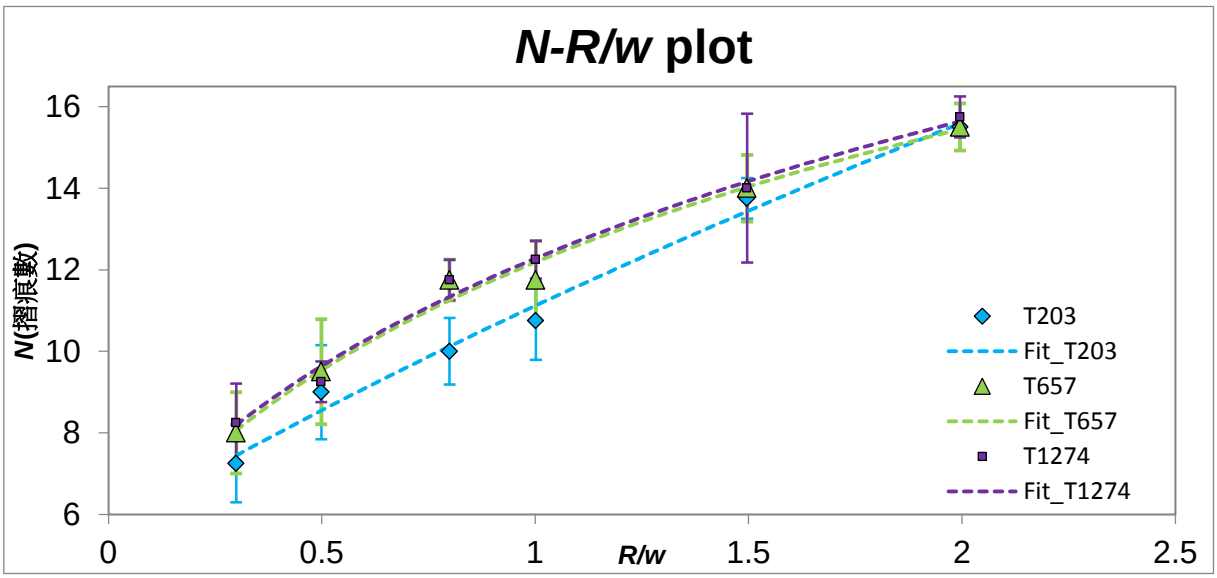
由於我們的扭擰過程都是透過步進馬達等速帶動的儀器，而且 *R* 和 *w* 值也都是利用游標尺精密量測，照理說，相同的 *R/w* 值應該得到相同的摺痕數(*N*)，但是事實上發現，不同次實驗的 *N* 值可以相差 1 條左右。這似乎暗示大自然偏好的 *N* 值不是唯一，那怎麼可能呢？經過一番討論，我們乍然察覺原因可能在於實驗觀察到的摺痕數目必須是整數，而紙筒在扭擰過程勢必遵守高中物理課教的「系統希望處在最低位能」趨勢，如果這個最低能量的 *N* 值在理論計算上不是整數，那就可以合理解釋實驗上觀察到的些微誤差。

從圖四，我們發現摺痕數(*N*)整體隨紙管半徑長度比(*R/w*)增加而遞增，原本將此關係近似為線性，後來發現 *R/w*=0.8 處附近數據始終高於迴歸直線(fitting line)，因此改用凹向下之乘

冪關係曲線來擬和。為了方便之後的實驗更容易觀察，我們一律採用最能反映圖形趨勢且大致將 *R/w* 從 0.20 到 2.15 間取六等分，分別為 *R/w*=0.30, 0.50, 0.80, 1.00, 1.50, 2.00。

另外，我們也從日常生活中思考，有什麼樣的因素會使同樣的幾何條件下之摺痕數改變呢？於是我們就想到了當我們衣服皺了的時候，便會把衣服拉平，而有受到拉力的衣服為什麼比較不容易皺呢？這也促使我們提供給系統一個拉力，以進行後面的實驗。

(二)軸向拉伸力與摺痕數之關係。



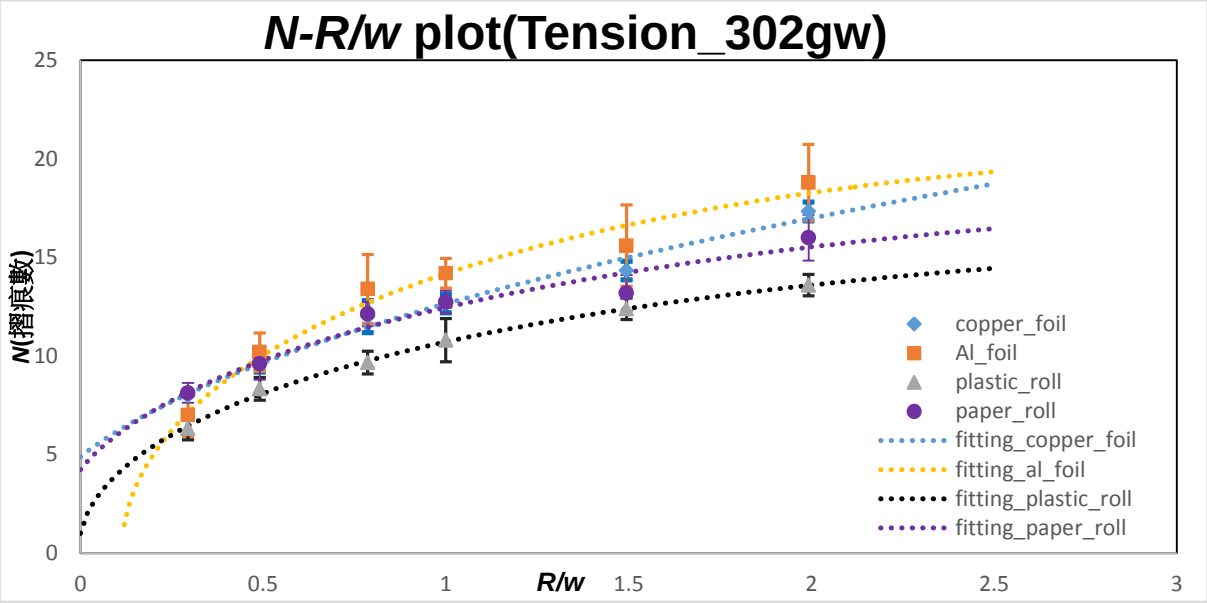
(圖五)不同軸向拉伸力之紙管半徑、長度比值與摺痕數關係圖

上圖之藍色方塊點(T203)為軸向拉伸力 203 克重之數據、綠色三角形(T657)與紫色方形點(T1274)則分別對應到 657 與 1274 克重，其對應顏色之虛線(Fit_T203、Fit_T657、Fit_T1274)為迴歸曲線(fitting curve)。

觀察圖五可發現隨著軸向拉伸力(T)的增加，摺痕數(*N*)會上升，但影響幅度不大，且軸向拉伸力(T)並不影響圖形整體的趨勢。

另外，由圖中我們也可以得知摺痕數(*N*)會隨軸向拉伸力(T)上升而些微增加。從物理量綱來分析，紙管半徑與長度比值(*R/w*)與摺痕數(*N*)皆沒有單位 (物理因次為 0)，然而軸向拉伸力為牛頓 (物理因次為$[M][L][T]^{-2}$)，由此可推測，若軸向拉伸力與摺痕數(*N*)有關聯的話，需除以一力值使其單位相同，因此代表材料力學性質的楊氏係數（單位是壓力）和薄膜厚度很自然地需要被加進公式的修正項，並且它們相對的冪次也可以透過量綱分析唯一決定，所以我們接下去便針對材質及厚度等變因進行後續的實驗。

(三)材質(紙管、銅管、鋁箔管與塑膠管)與摺痕數之關係。



(圖六)紙管、銅管、鋁箔管和塑膠管半徑、長度比值與摺痕數關係圖

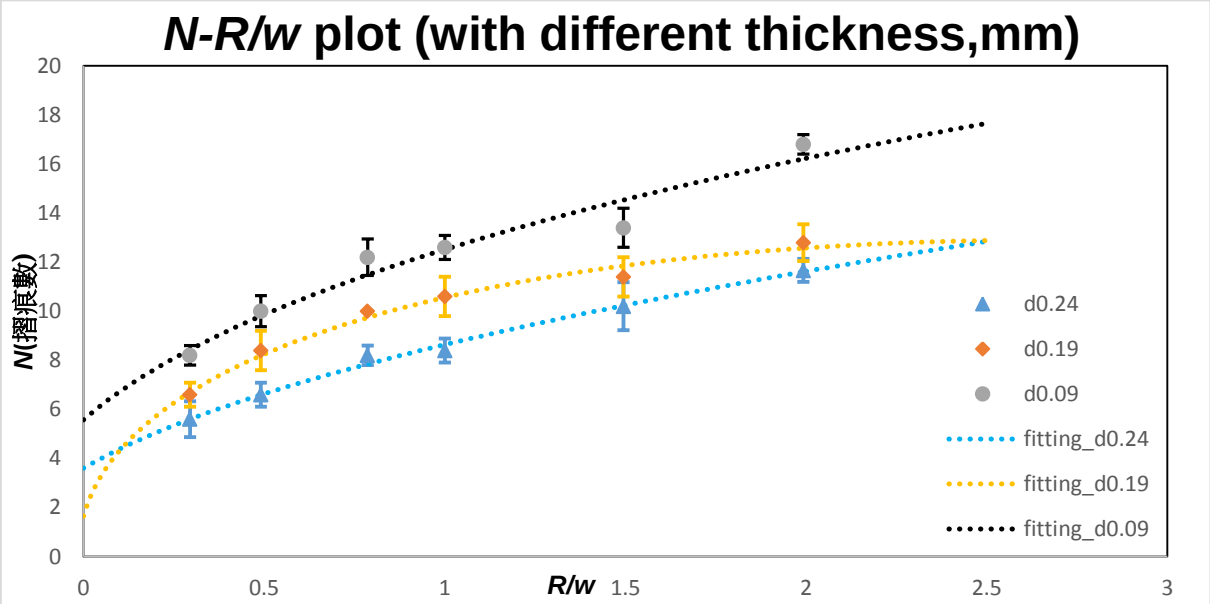
上圖實驗皆在軸向拉伸力 302 克重下進行，藍色菱形點(copper_foil)及藍色虛線(fitting_copper_foil)為銅管的數據及迴歸曲線、橙色方形點(Al_foil)及橙色虛線(fitting_Al_foil)則來自鋁箔管、灰色三角形點(plastic_roll)及黑色虛線(fitting_plastic_roll)指塑膠管、紫色圓點(paper_roll)及紫色虛線(fitting_paper_roll)則描述紙管。

從圖六，我們可以歸納出所有材質圓筒(銅片、鋁箔管、塑膠管)之 *N-R/w* 圖形，大致與實驗一之紙管的趨勢相同：在$\frac{R}{w} > 0$時，為一「遞增」且「凹向下」之曲線。因此我們可以推出材質不影響整體趨勢，僅為修正項之結論。

然而，我們由上述實驗數據得到，對於相同圓筒半徑長度比(*R/w*)，不同材質之摺痕數(*N*)多寡順序大致滿足：鋁箔管＞銅片管＞紙管＞塑膠管。由此能夠推測除了描述硬軟的楊氏模量(*E*)外，材料的塑性程度也會些微影響紙筒的扭轉性質。這部分的說明我們將於統整好軸向拉伸力、材質及厚度之理論後，於第 13 頁呈現。

(四)厚度、圓筒幾何(*R/w*)與摺痕數之關係。

1.紙管之厚度與摺痕數之關係。



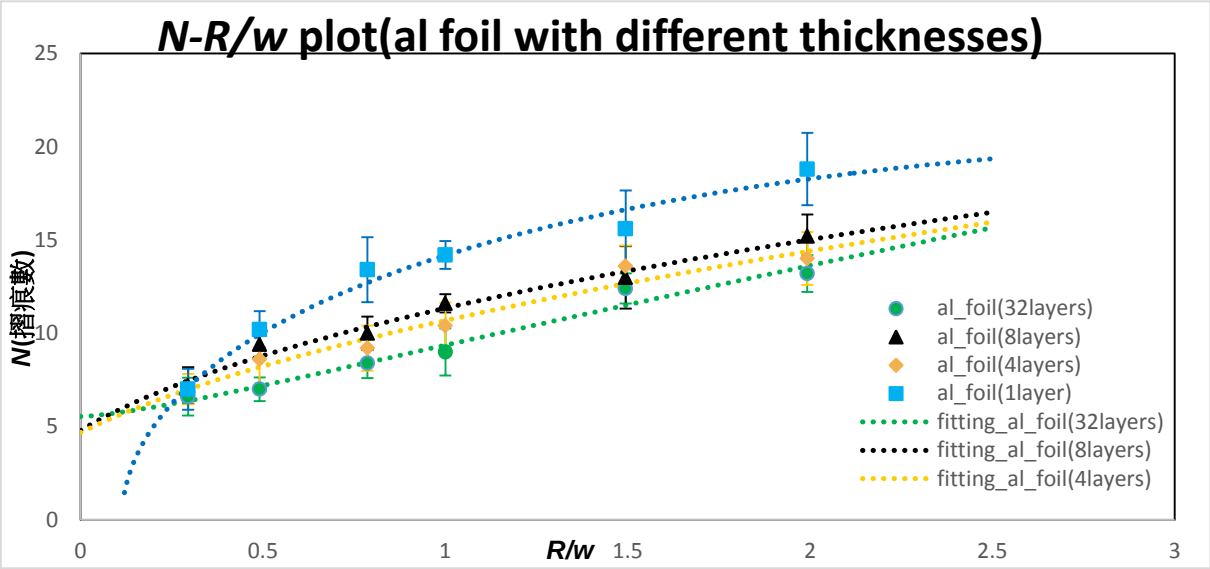
(圖七)不同厚度之紙管半徑、長度比值與摺痕數關係圖

上圖的材料都是紙管，軸向拉伸力再次皆固定使用 302 克重，藍色三角形點(d0.24)及藍色虛線(fitting_d0.24)對應到厚度 0.24 毫米的數據及迴歸曲線、橙色菱形點(d0.19)及橙色虛線(fitting_d0.19)來自厚度 0.19 毫米、灰色圓點(d0.09)及黑色虛線(fitting_d0.09)指厚度 0.09 毫米。

由圖七，我們可以觀察到，當厚度增加時，相同半徑長度比(*R/w*)的摺痕數(*N*)會下降，就好比同樣是紙這個材料，影印紙顯然比起厚紙板容易皺，也皺的嚴重，否則郵局寄包裹用的紙箱就不會用厚紙板了，因此圓筒在厚度較大時，傾向摺痕數較少的狀態是我們可以預期的；儘管如此，不同厚度之圖形整體趨勢，仍與實驗一相同，為一「遞增」且「凹向下」之曲線，經由理論以及物理因次分析後，我們推斷厚度可能會以其倒數乘冪之形式或是往下平移的方式影響摺痕數。

另外，因為摺痕數之物理因次為無量綱，且在我們修正了實驗一及採用了實驗二之部分結論後，發現摺痕數可能不僅跟厚度有關係，還跟材料性質楊氏模數(Young's Modulus, E)及我們原本影響尺度略小之軸向拉伸力(T)有些許相關性。

2.鋁箔管之厚度、圓筒幾何(*R/w*)與摺痕數之關係。



(圖八)不同厚度之鋁箔管半徑、長度比值與摺痕數關係圖

對於 302 克重軸向拉伸力，上圖之綠色圓點(Al_foil (32 layers))及綠色虛線(fitting_Al_foil (32 layers)) 是厚度 32 層的鋁箔管數據及迴歸曲線、黑色三角形點(Al_foil (8 layers))及黑色虛線(fitting_Al_foil (8 layers))則是 8 層、橙色菱形點(Al_foil (4 layers))及橙色虛線(fitting_Al_foil (4 layers))是 4 層、藍色方形點(Al_foil (1 layer))及藍色虛線(fitting_Al_foil (1 layer))為 1 層。

由於不同厚度之紙管分屬不同材質的紙，其材料性質不儘相同，因此我們選擇材料性質相同且容易摺疊之鋁箔，藉由疊層方式去展現厚度之關係(我們採用一、四、八、三十二層這四個差距較大之數量)，另外由於扭轉過程中，層與層之間並無產生「錯位」的現象，因此可視為相同材質但不同厚度的鋁箔。由圖八，我們可看到與圖七相同的趨勢，但亦可觀察到在厚度相近(8 層鋁箔管(0.1 毫米)與 0.09 毫米之紙管)、*R/w*(半徑與長度比值)相同下，紙管與鋁箔管的摺痕數(*N*)及整體趨勢並不相同。結合實驗二之結果，我們推測這是由於兩者的楊氏模量(Young's Modulus,E)不同，導致在相同幾何條件下，得到不同的摺痕數(*N*)。

對於相同的 *R/w*，圖形趨勢皆是隨著厚度增加，摺痕數下降，這和紙管與鋁箔管是相似的。整體趨勢亦與實驗一、二及三相同：*N-R/w* 之圖形為一「遞增」且「凹向下」之曲線。

3.歸納圓筒(塑膠管、鋁箔管)之厚度與摺痕數之關係。

藉由實驗數據(圖五、圖七及圖八)觀察到，軸向拉伸力(尺度較小)及厚度(尺度較大)皆會些微影響摺痕數，因此我們將先前的理論加入修正。因摺痕數為無因次之物理量，根號內影響每一項之修正項也必須無因次；考量 E(Young's Modulus)=正向應力(σ，因次為$[M][L]^{-1}[T]^{-2}$，

此處為軸向拉伸力(T)除以厚度(t)平方) /正向應變(ε ，因次為 0)，並由因次分析，推測厚度應為平方才能使其因次為無量綱，亦即後者對於摺痕數的影響應該比前者較為靈敏。

然而，因為圓筒半徑長度比(*R/w*)對於摺痕數(*N*)之影響遠大於厚度(t)、楊氏模量(Young's Modulus,E)或軸向拉伸力(T)，因此包含$\left(\frac{T}{Et^2}\right)$的修正項可以（經由泰勒展開）加在原本公式後頭，並且附加一個遠小於 1 的冪次α：

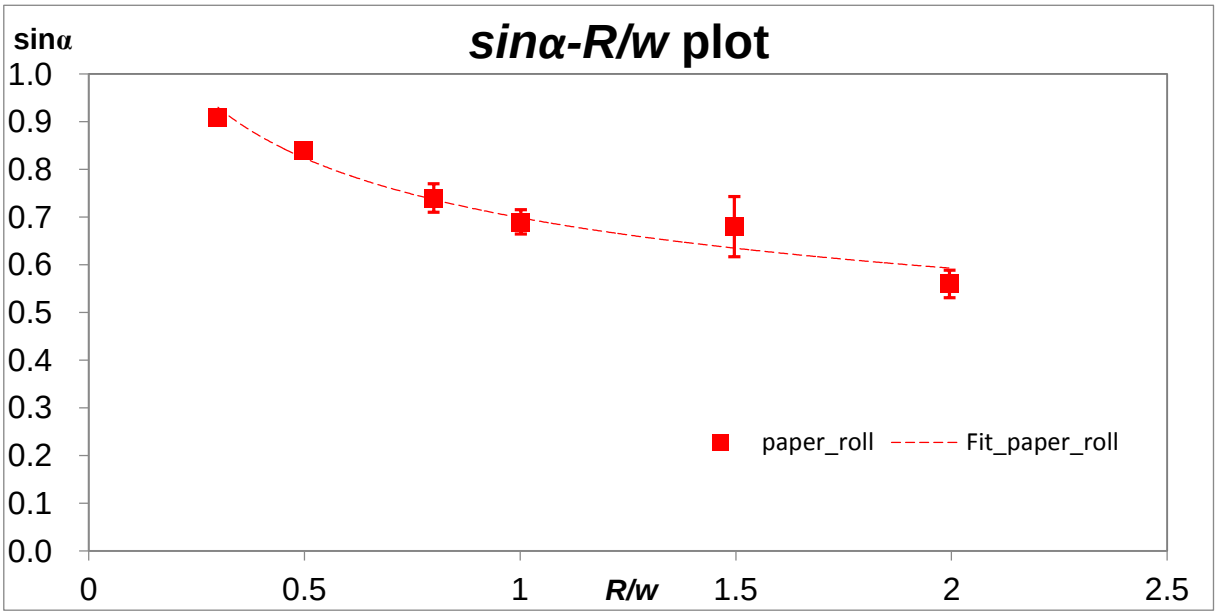
$$N = \sqrt{A\left(\frac{R}{w}\right) + B} + \left(\frac{T}{Et^2}\right)^{\alpha}$$

其中 A、B、C、 α 為實驗待定的常數。

關於為何相同圓筒半徑長度比(*R/w*)，不同材質之摺痕數(*N*)多寡順序大致滿足：鋁箔管＞銅片管＞紙管＞塑膠管之推導如下：

對於 *N*(*R/w*)公式的推廣，大致理解的方式分成兩個階段：首先，根據論述，楊氏模量和薄膜厚度(*t*)是以$\frac{1}{Et^2}$關係之修正項進到 *N*($\frac{R}{w}$)公式。對於楊氏模量，銅片、鋁箔、塑膠、紙管比例大致為 100:50:1:0.2；至於厚度，比例則為 1:0.8:0.5:0.2，因此$\frac{1}{Et^2}$的比例可以簡單計算為 0.01:0.31:4:12.5。接著，由於塑膠和紙管的塑性明顯較銅片和鋁箔大，因此前者的紙管會受到塑性的影響而額外變長，根據 *N*($\frac{R}{w}$)的遞增趨勢，*w* 等效變長會使得 *N* 變少，綜合兩者的考量，$\frac{1}{Et^2}$的比例 0.01:0.31:4:12.5 扣除塑性所減少的 *N*，變成 0.01:0.31:0.005:0.007，亦即 *N* 的數目依序是鋁箔最多，其次為銅片、紙管和塑膠。

(五)紙管幾何(*R/w*)與凹痕偏斜角(α)之關係。



(圖九)紙管半徑、長度比值與凹痕偏斜角(α)關係圖

上圖之紅色方塊點(paper_roll)及紅色虛線(Fit_paper_roll)為六個特定紙管半徑長度比(*R/w*=0.3、*R/w*=0.5、*R/w*=0.8、*R/w*=1.0、*R/w*=1.5、*R/w*=2.0)之數據及迴歸曲線。

由圖九，可以觀察出幾個性質：

1.凹痕偏斜角之正弦值(sin α)會隨著紙管半徑長度比(*R/w*)之上升而下降。

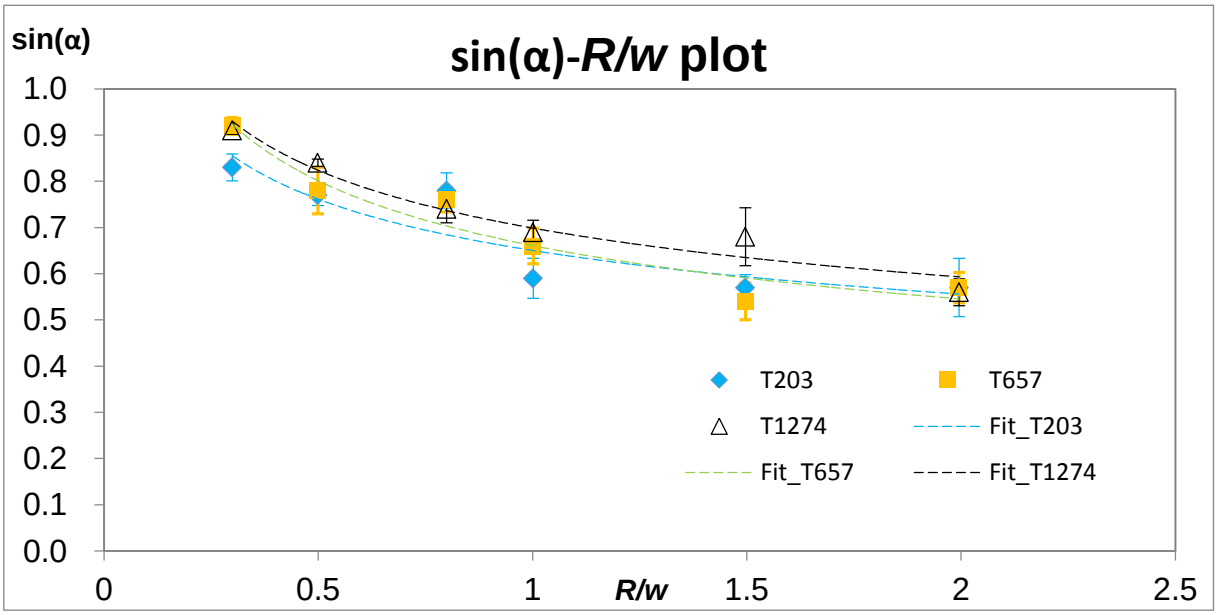
2.凹痕偏斜角(α)會隨著紙管半徑長度比(*R/w*)之上升而下降。

3.sin α -*R/w* 圖為一「遞減」且「凹向下」之圖形。

然而，由這張圖僅能看出，sin α -*R/w* 之關係可能為乘冪、對數或甚至是線性；必須透過幾何分析，才能唯一決定為：$\sin\alpha \approx \sqrt{\frac{w}{2R}} \Rightarrow \frac{R}{w} \propto (\sin\alpha)^{-2}$。將此關係式經由微分運算後，得到圖形在 $\frac{R}{w}>0$ 時，的確為「遞減」且「凹向上」。

接著，我們好奇凹痕偏斜角(α)是否會像摺痕數(*N*)一樣會被其他變因修正？於是接著進行不同軸向拉伸力的實驗。

(六)軸向拉伸力與凹痕偏斜角之關係。



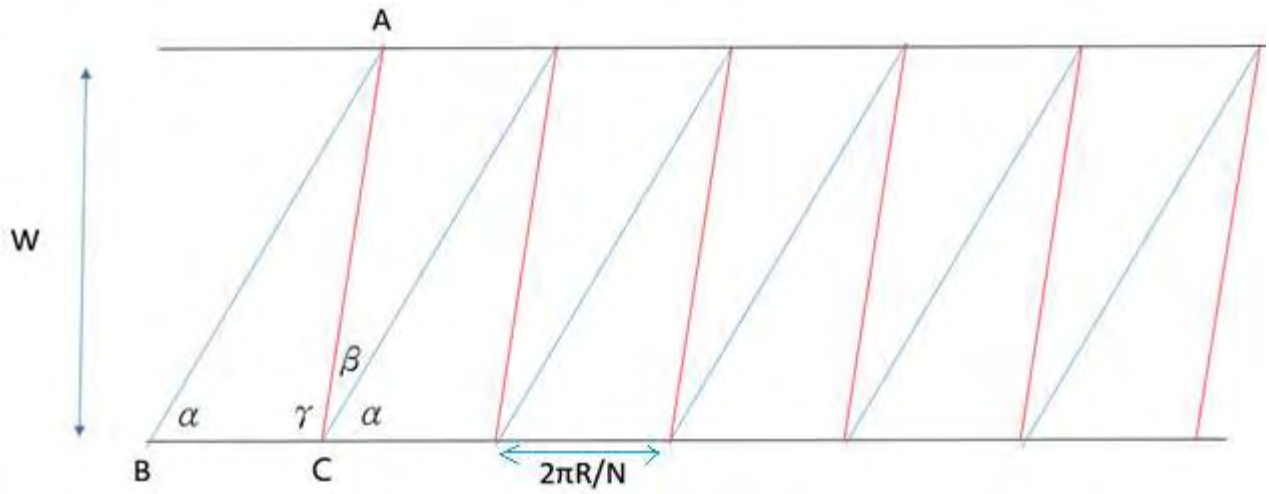
(圖十)紙管半徑、長度比值與凹痕偏斜角正弦值關係圖

上圖之藍色方塊點(T203)及藍色虛線(Fit_T203)為軸向拉伸力 203 克重之數據及迴歸曲線、黃色方形點(T657)及綠色虛線(Fit_T657)的拉伸力為 657 克重、黑色三角形點(T1274)及黑色虛線(Fit_T1274)則為 1274 克重。

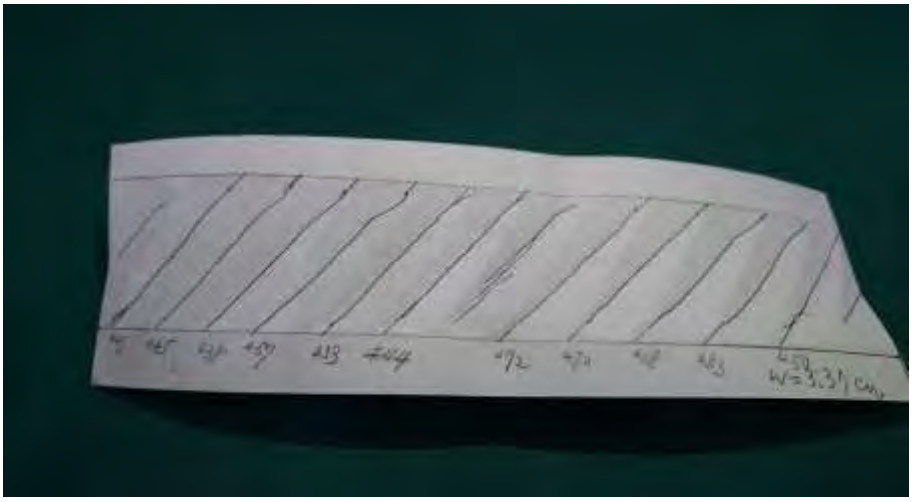
由圖十，可以歸納出隨著軸向拉伸力(T)之上升並不影響整體圖形走向，仍舊維持一曲線關係，且隨著軸向拉伸力(T)的增加，凹痕偏斜角之正弦值亦會略為隨之上升。

另外，由圖中之三條迴歸曲線可以推論軸向拉伸力幾乎不影響圖形之走向，若以物理量觀點去推測，軸向拉伸力(單位為克重，物理因次為$[M][L][T]^{-2}$)比起紙管半徑與長度比值(R/w)(沒有單位，物理因次為 0)對於凹痕偏斜角之正弦值($\sin\alpha$) (沒有單位，物理因次為 0)之關聯性應該較低，因此我們便不針對凹痕偏斜角再進行材質與厚度之探討。

二、建構理論描述紙管靜態參數，如摺痕與紙管幾何間的關係。

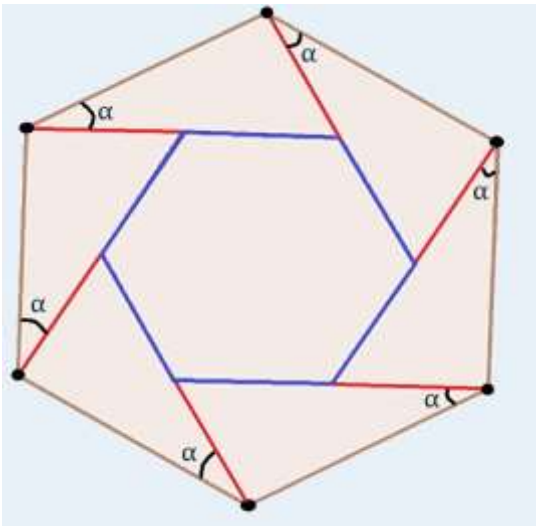


(圖十一)幾何模型(藍色為凹痕、紅色為凸痕)

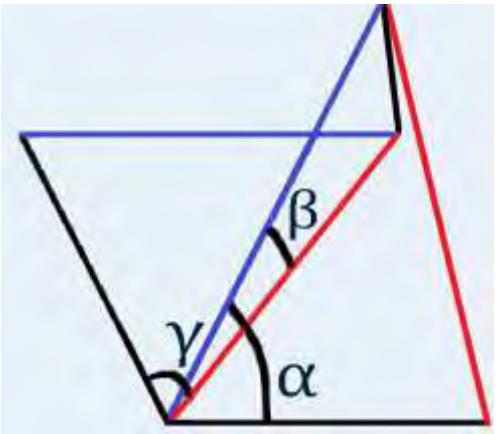


(圖十二)紙張摺痕(凹痕)正面

(圖十三)紙張摺痕(凹痕)反面



(圖十四)紙管產生正多邊形之平面結構



(圖十五)正 N 邊形之平面圖(內角為 α 角為平面圖)

(圖十六)紙管產生之平面結構正視圖

由幾何關係(特別是三角形內角和和正弦定理)可得知：

$$\beta = \frac{\pi}{N} - (1)$$

$$\alpha = \alpha_0 + \Delta\alpha \approx sin^{-1}\sqrt{\frac{W}{2R}} - \frac{\pi}{2N} - (2)$$

從能量觀點，我們推測外力對摺痕作的功 W 會與摺痕數(N)、摺痕長成正比，但這麼一來，大自然豈不只會選擇沒有摺痕，亦即 N=0 的情況。顯然這和實驗事實不符，因此我們預期還需要加入第二種會隨 N 增加而減小的功，來和前者抗衡，使得總功對 N 的作圖可以出現最低點(因為大自然偏愛能量最低的選擇)。直覺上，紙筒兩端的多邊形邊長略短於凹凸摺痕，產生此紙張形變的能量應該是第二個需要考慮的項，不過由於它和 N 無關，因此我們只能思考更細節的變形量。想到當圓形變成正多邊形時，曲線被壓成 N 段直線，肯定會迫使附近的紙面出現挫曲(buckling)，圓筒兩端挫曲各自產生的凹痕交疊的部分，可以視成是交互作用；顯然當它們離得越近（距離大致上是摺痕長度：$w/\sin\alpha$），交互位能應當越大，而且多邊形之邊長越大，凹痕也會越明顯，使得交互位能加強。綜合這些理由可以推出下式：

$$\mathrm{W} = N\,\varepsilon\left[\frac{\mathrm{w}}{\sin\,\alpha}+\frac{\mathrm{w}}{\sin\gamma}\right]+\,\eta\,N\left(\frac{2\pi R}{N}\right)\left(\frac{2\pi R}{N}\right)\frac{\sin\,\alpha}{w}-(3)$$

將(3)式化簡,並將(2)式之結果代入(3)式，我們可以得到：

$$\mathrm{W} = N\varepsilon\mathrm{w}\left[\frac{1}{\sin(\alpha_0-\frac{\pi}{2N})}+\frac{1}{\sin(\alpha_0+\frac{\pi}{2N})}\right]+\frac{\eta\pi^2}{N}\left(\frac{2R}{w}\right)^{1.5}-(4)$$

$$\because\ \varepsilon\,,\,\eta\ >0\ 且\ \frac{R}{w}>0$$

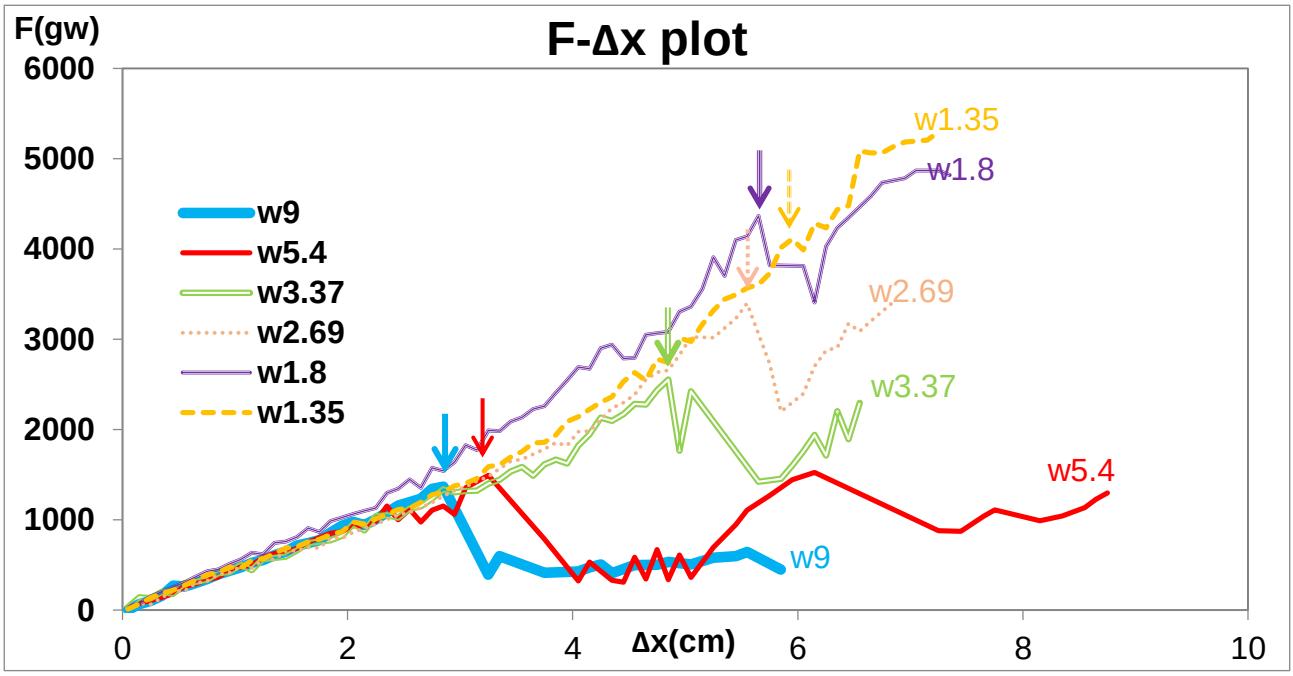
$$\therefore\frac{dN^*}{d\left(\frac{R}{w}\right)}>0\left(\forall\frac{R}{w}>0\right)-(5)$$

$$\because\ \varepsilon\,,\,\eta\ >0\ 且\ \frac{R}{w}>0$$

$$\therefore\frac{d^2N^*}{d\left(\frac{R}{w}\right)^2}<0\left(\forall\frac{R}{w}>0\right)-(6)$$

由(5)及(6)式可以推論 N-R/w 圖應為一「**嚴格遞增**」且「**凹向下**」之圖形。

三、扭紙管動態過程分析：



(圖十七)扭力與位移關係圖(每隔 0.1 公分取一個點)

圖十七中，紙管長度為 9.00 公分(R/w=0.3)、5.40 公分(R/w=0.5)、3.37 公分(R/w=0.8)、2.69 公分(R/w=1.0)、1.80 公分(R/w=1.5)、1.35 公分(R/w=2.0)之扭力與位移關係圖分別為藍色實線(w9)、紅色實線(w5.4)、綠色實線(w3.37)、米色虛線(w2.69)、紫色實線(w1.8)及黃色虛線(w1.35)，而其對應顏色之箭頭代表紙管表面產生全部摺痕時，同時亦為拉力秤讀數最大值；而座標軸橫軸為拉力秤之位移、縱軸為拉力秤之力讀數。

(一)扭紙管過程，力矩與扭轉角的關係。

根據觀察圖十七之圖形，我們可以推論在箭頭處(摺痕產生前)，圖形大致為線性直線。而導致其圖形有些許曲折的物理來源有兩個：

1.它來自物理實驗中常見之系統誤差，且其數值皆在誤差範圍內，可以忽略。

2.這些轉折反映表面產生較前一個狀態更多的 buckling(較不明顯的摺痕)，因此改變其材料性質，造成可產生摺痕之空間變小，因此更不易產生摺痕，圖形之斜率上升，導致曲折現象的產生。

大致上，讓我們先將圖形近似為線性來進行後面的討論。

因為$\vec{\tau} = \vec{R} \times \vec{F}$ 及 $\Delta\theta = \frac{\Delta x}{R}$，所以 $F = k\Delta x \Leftrightarrow \frac{\tau}{R} = k(R * \Delta\theta) \Leftrightarrow \tau = kR^2\Delta\theta$，k 為一常數，而紙管半徑($R$)為定值，所以得到 $\tau = K\Delta\theta$ $(K = \text{const.})$。

(二)不同紙管幾何參數下，摺痕產生與力矩、扭轉角之關係。

藉由觀察圖十七可以察覺，當紙管半徑與長度比值(*R/w*)越大時，箭頭會隨之往圖形之右上方移動，且可藉由圖十七推論其 k(圖形斜率)應相同，而箭頭底下的三角形面積為步進馬達帶動紙管轉動所作的功($=\frac{1}{2}k(\Delta x)^2$)，由此可知$\Delta x$應隨紙管半徑與長度比值(*R/w*)增加而遞增，同樣道理，正比於Δx之 F、$\Delta\theta$、τ皆會隨之上升。

利用前述之(4)式：$W = N\varepsilon w\left[\sqrt{\frac{2R}{w}}+\frac{1}{2}\left(\frac{2R}{w}\right)^{\frac{3}{2}}\left(2-\frac{w}{2R}\right)\frac{\pi^2}{4N^2}\right]+\frac{2\sqrt{2}\,\eta\,\pi^2R^{1.5}}{Nw^{1.5}}$，可知當紙管半徑與長度比(*R/w*)增加時，施力所作的功(*W*)會上升，藉由理論(4)式亦可充分解釋此現象。

四、提出模型來描述扭紙管的動態過程。

從圖十七中，我們能明顯看到施力與位移量成正比，且紙管與彈簧有幾個相似性質：

(一)紙管在產生摺痕前之施力會造成其形變，但若在產生摺痕前將外力移除，紙管會回到原狀態，此點與彈簧有恢復性(回復性)之特性相似。

(二)紙管產生摺痕後無法恢復原狀，可視同彈簧超過彈性限度之現象。

(三)外力施給紙管的功轉換成儲存位能和**摺痕**，這類似彈簧之彈力位能和**長度伸長量**。

(四)施於紙管的外力與位移成正比，此點如同彈簧之虎克定律$F = -k * \Delta x$。

五、利用靜態理論及扭紙管之聲音量測來檢視短紙管與長紙管的物理原理。

(一)藉由靜態幾何、能量理論之分析，來檢視長、短紙管差異。

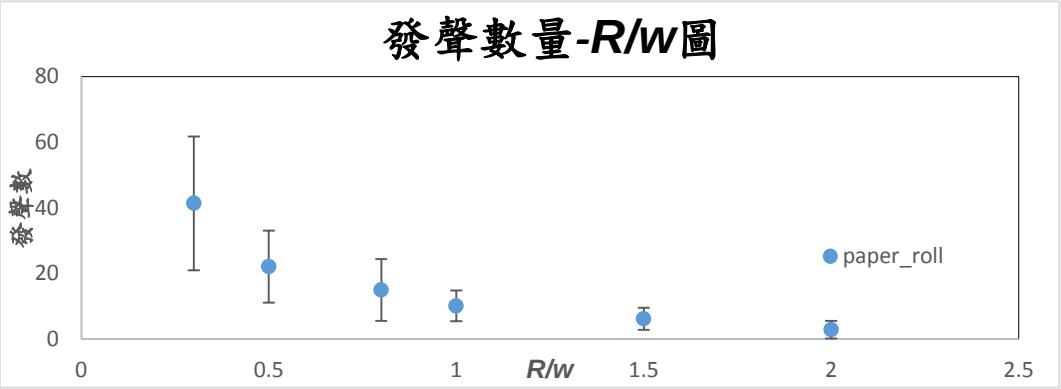
根據(2)式：$\alpha = \alpha_0 + \Delta\alpha \approx \sin^{-1}\sqrt{\frac{w}{2R}}-\frac{\pi}{2N}$，且其中之反正弦函數內之值$\sqrt{\frac{w}{2R}}$必須小於等於 1，才能產生規律的摺痕，因此當紙管長度大於直徑時，將會造成圖形中的三角形內角和不再等於 180 度 (因不滿足正弦定理)，因而無法完全適用之後的靜態幾何-能量理論，去精準估算出其摺痕數，我們定義其為「長紙管」，且亦有於實驗中觀察到其不規律摺痕；反之，當摺痕規律時($R/w \geq 0.5$)定義為「短紙管」。

那麼大自然會如何在兼顧能量最低的前提，迴避幾何理論的約束呢？從長紙管的實驗，我們發現摺線長短、位置和角度變得隨機，且沒有重複性；這與揉皺過程在薄膜產生的摺線相似，因此除了比較長、短紙管差異外，也想探討擰長紙管和揉皺有沒有進一步的共同性質。

(二)聲音量測之觀察與分析：

由於長、短紙管摺線除了形狀、理論等差異外，我們還發現擰短紙管時，僅會產生一個聲響，接著所有摺痕皆會同時出現；但是對於長紙管，因其摺痕產生之不確定性，在擰扭過程中，可以量到數十聲的聲響。因此利用錄音筆及麥克風量測聲音並分析，做更一步的探討。

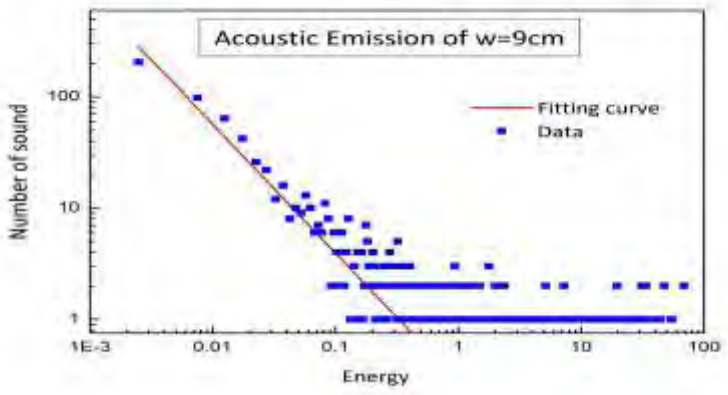
1.藉由聲音量測，檢視紙管半徑長度比(*R/w*)與聲音產生次數之關係。



(圖十八)紙管半徑長度比(*R/w*)與聲音產生次數之關係圖

上圖之藍色原點(paper_roll)為紙管在被擰轉至產生摺痕期間所產生之平均聲音數量，可以清楚觀察到，短紙管的平均聲響不超過兩聲，而長紙管則平均可以超過四十聲，因此，光是產生聲音之數量，就可以推定長、短紙管在擰的過程具有非常不同的行為。

2.藉著聲音分析，探討長紙管之聲音能量與次數之關係。



(圖十九)長紙管(*R/w*=0.3)之聲音能量與次數之關係圖

藍色方形點來自將原始數據繪製成長條圖後，縱軸和橫軸皆取對數；理由是當聲音次數和能量滿足「冪次關係」時，在全對數圖上會呈現出直線，而那個關鍵的冪次便可從直線的斜率直接讀出。紅色實線為擬合此數據統計之迴歸直線，其圖形整體趨勢的確滿足一斜率為

負之直線，且斜率經由 R 語言計算得到約-1.156736 且 y 截距約為 0.2745466，代表方程式為：

$$\log y = -1.156736 * \log x + 0.2745466 - (7)$$

$$\Rightarrow y = 1.89 * \frac{1}{x^{1.156736}}$$

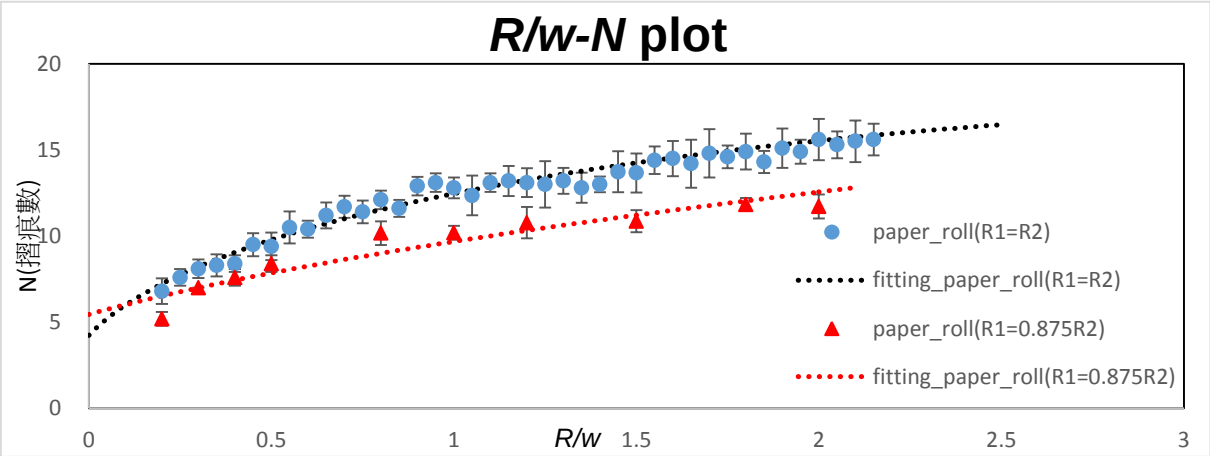
上式顯示擰轉長紙管之聲音次數與能量滿足冪次定律，且冪次與前人之擰紙數據[2]相近。

為什麼長紙管會發出這麼多聲音呢？我們推測源頭極可能是「挫折(frustration)」這個在物理裏惡名昭彰的現象。例如二維的三角晶格，如果每一個格點只能擺男生或女生，並且臨近晶格的人分屬不同性別，不管最後三角形選的是「兩男一女」或「兩女一男」，都會有一端是男男或女女相鄰，這就是挫折的現象。根據文獻，挫折在液晶和玻璃轉變(glass transition)等系統同樣扮演關鍵的角色。回到擰紙管實驗，我們發現擰長紙管與揉紙同樣會出現「挫折」，似乎應力在決定要在哪裏產生摺線、產生多長、多斜的摺線和什麼時候產生時，大自然內部無法達成共識，在喋喋不休的爭論中，遲遲無法決定。換言之，擰長紙管與揉紙的過程都有類似「挫折」的現象，導致這兩個表面上非常不同的流程，竟然給出相同的聲音統計行為[2]。

六、檢視半徑不同之大小管摺痕分布之分析。

一般的圓筒兩端半徑不一定相同，因此先前討論的摺痕規律、動態以及聲學性質，只是特例。我們接著希望探討在廣義的大小管情況，例如圓錐，是否有更多有趣的物理和應用？

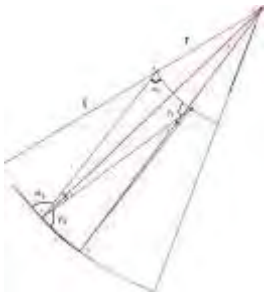
(一)紙管幾何(半徑與長度比，$\bar{R}/w$)與摺痕數之關係。



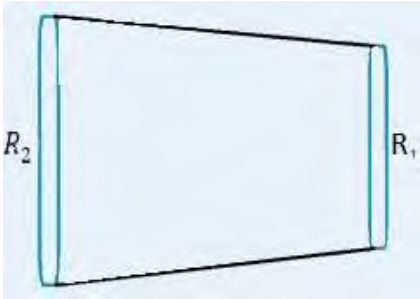
(圖二十)大小管與一般紙管之半徑長度比($\bar{R}/w$)與摺痕數對照圖

由上圖發現，在兩端半徑(R_1、R_2, $R_1<R_2$)比例(R_1/R_2)降到 0.875 時，驚奇還未發生，也就是說圖趨勢與比例為 1 的 $R_1=R_2$ 一般紙管大致相同：遞增、凹向下，摺痕具有規律性。

七、建構理論解釋大小管兩半徑及長度之關聯。



(圖二十一)大小管平面圖



(圖二十二)大小管立體圖

$$\begin{cases} r\theta = 2\pi R_1 \\ (r+l)\theta = 2\pi R_2 \end{cases} \Rightarrow \mathrm{r} = \frac{R_1 l}{R_2 - R_1} - (8)；\theta = \frac{2\pi(R_2 - R_1)}{l} - (9)$$

$$\begin{cases} \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 = \pi \\ N(\alpha_2 - \beta_2 + \gamma_2) + \theta = (N-2)\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta_2 = \frac{\pi}{N} - \frac{\theta}{2N} - (10) \\ \alpha_2 + \gamma_2 = \pi - \frac{\pi}{N} + \frac{\theta}{2N} - (11) \end{cases}$$

同理

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = \pi \\ N(\alpha_1 - \beta_1 + \gamma_1) - \theta = (N-2)\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta_1 = \frac{\pi}{N} + \frac{\theta}{2N} - (12) \\ \alpha_2 + \gamma_2 = \pi - \frac{\pi}{N} - \frac{\theta}{2N} - (13) \end{cases}$$

$$\Delta\mathrm{BED}\text{ 是等腰，而且}\angle\mathrm{BED} = \pi - \frac{\theta}{N} \Rightarrow \begin{cases} \angle\mathrm{OBD} \equiv \gamma_2' = \gamma_2 - \dfrac{\theta}{2N} \\ \angle\mathrm{ODB} \equiv \alpha_2' = \alpha_2 - \dfrac{\theta}{2N} \end{cases}$$

對於ΔCBD，正弦定理：$\frac{\overline{CD}}{\sin\left(\gamma_2 - \frac{\theta}{2N}\right)} = \frac{\overline{BD}}{sin\beta_1} = \frac{\frac{2\pi R_2}{N}}{\sin\left(\frac{\pi}{N} + \frac{\theta}{2N}\right)} - (14)$

另外，從幾何可以推得：

$$\overline{CD}^2 = (r+l)^2 + r^2 - 2(r+l)^2 cos^2\alpha_2 - 2r(r+l)\sin\alpha_2\sqrt{1 - \left(1 + \frac{l}{r}\right)^2 cos^2\alpha_2} - (15)$$

由(8)式及因為(15)式中根號內之數應為正⇒ $\left(1 + \frac{l}{r}\right) cos\alpha_2 = \frac{R_2}{R_1} cos\alpha_2 \le 1 - (16)$

為了使壓扁大小管時，$\overline{CD}$不要突出截面：$\overline{CD} = \frac{\frac{2\pi R_2}{N}\sin\left(\gamma_2 - \frac{\theta}{2N}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{N} + \frac{\theta}{2N}\right)} \le (R_1 + R_2)\frac{\frac{\pi}{N}}{\sin\frac{\pi}{N}} - (17)$

當$N >> 1$時，(17)式改寫為$\frac{2\pi R_2 \sin\gamma_2}{\pi + \frac{\theta}{2}} \le R_1 + R_2 \Rightarrow \sin\gamma_2 \le \frac{(R_1+R_2)(l+R_2-R_1)}{2R_2 l} - (18)$

且當$N >> 1$，(11)式改寫為$\alpha_2 + \gamma_2 \approx \pi \Rightarrow \sin\alpha_2 = \sin\gamma_2 \le \frac{(R_1+R_2)(l+R_2-R_1)}{2R_2 l} - (19)$

由(16)及(19)式，我們可以發現當$\sqrt{1 - \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2} > \frac{(R_1+R_2)(l+R_2-R_1)}{2R_2 l}$時，$\alpha_2$會無解

$\Rightarrow (R_2 - R_1) > \left(\frac{l+R_2-R_1}{2l}\right)(R_1 + R_2)$，狀態邊界：$4\left(\frac{R_2}{l} - \frac{R_1}{l}\right) > \left(1 + \frac{R_2}{l} - \frac{R_1}{l}\right)^2\left(\frac{R_1}{l} + \frac{R_2}{l}\right)$

陸、討論

一、未來可研究之方向：

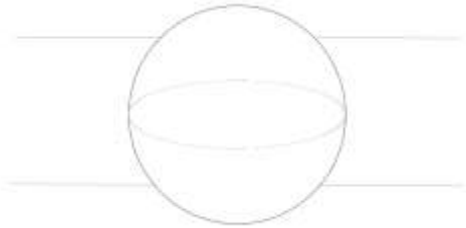
(一)曲面(斜切管、球形等)：

1.簡介：由於曲面與平面幾何性質的不同，例：曲面之三角形內角和並不一定滿足歐氏幾何之 180 度，因此我們能針對更多、更複雜之曲面構造進行研究。

2.斜切管：

(圖二十三)扭斜切管示意圖

3.圓球：



(圖二十四)擰圓球示意圖

5.預測：因本報告探討的紙管為歐氏幾何上所形成的三角形，而斜切管、圓球等為曲面，因而我們預期其幾何性質將與本研究探討範疇有所相異。

(二)地球科學：在擰轉時，主要是由剪切力提供紙管產生摺痕。而我們預期地球有可能因為不同緯度間、自轉產生的切線速率不同，相當於對板塊產生切剪力矩，在赤道附近的板塊可發現較多小裂痕，這與在長紙管看到的多條摺痕相似。因而我們認為可以將擰扭圓筒延伸到扭黏土圓球，並試著與地球板塊運動結合，藉由扭轉中發現的物理過程去建立文獻上缺乏之理論解釋盤古板塊之斷裂面與摺痕之關聯；另外，圖二十六為冥王星的第一號衛星——冥衛一(凱倫)，而其主要是由岩石及冰所組成的，在它上面可以看到明顯與地球類似的板塊，而在其赤道也可以看到許多皺褶，我們認為這與擰紙的摺痕是類似的，而造成此現象的可能就是板塊之間因為不同緯度造成不同

的切線速率導致板塊兩側所受到的剪切力不同而產生類似摺痕的現象。

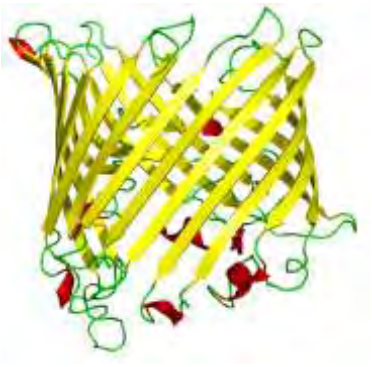
(圖二十五)地球板塊結構

(圖二十六)冥衛一(凱倫)之板塊皺摺圖

(三)生物物理：

1.β-筒狀蛋白(Beta Barrel)簡介：到目前為止，這類蛋白僅在革蘭氏陰性細菌的外膜、革蘭氏陽性細菌的細胞壁、以及線粒體和染色質的外膜上發現。且根據化學變性研究，β-筒狀蛋白的穩定性與水溶性蛋白的穩定性相似。

2.β-筒狀蛋白(Beta Barrel)之構造圖：



(圖二十七) β-筒狀蛋白(Beta Barrel)構造圖

3.應用：藉由擰扭圓筒所歸納出的幾何關係，可用來研究相似於圓筒摺痕傾斜現象之蛋白質條(Beta Strands)，及其蛋白質構造 β-筒狀蛋白(Beta Barrel)。

(四)醫學：骨頭可視為一厚度不可忽略且含有許多其他物質之圓筒，而我們認為在受到擰扭外力而造成之骨折現象，可以藉由扭圓筒之理論去模擬骨折時，骨頭所發生的物理變化及其性質。

(五)物理：

1.藉由擰紙管的觀察：長紙管的聲音現象似揉紙；短紙管的形狀狀態似摺紙，因而創造一個滿足揉、擰、摺等動作之綜合理論。

2.挫折(frustration)：在長紙管中因各摺痕都有各自偏好的能量最低點，彼此摺痕間會爭執自己所喜好的狀態，而導致最後摺痕發生斷裂，並非我們所預期應有的三角形。而在揉紙過程中我們也發現它與長紙管產生的聲音有相同的統計分佈[2]，因此認為在揉紙過程中，彼此間摺痕也有各自偏好的狀態，導致最後摺痕產生挫折而具有與長紙管相同的機制。

3.冪次法則(Power Law)：

(1)簡介：冪定律(Power Law)為一種多項式關係。遵守這關係的多項式會展現出標度不變性（scale invariance）的性質。最普通的，表達兩個變量之間關係的冪定律，其形式為$f(x) = ax^k$。

(2)範例：凡德瓦力模型、芮氏地震規模、萬有引力定律、波茲曼定律、摩爾定律。

柒、結論

在本次實驗中，我們試圖了解擰圓筒之動、靜態性質，並在動態實驗中發現施力與位移滿足虎克定律，另外 F-Δx 圖下面積亦滿足紙管在扭轉過程中所儲存的位能；再藉由幾何、能量理論，發現動、靜兩狀態之現象相互呼應，一旦得出半徑與長度比值(R/w)固定時之摺痕數(N)及摺痕偏折角(α)，即可推導其能量；同時，只要求出施力作功，即可類推至 N 及 α。

以下特性為本研究之結論：

一、扭圓筒**靜態**分析：

(一)不同紙管半徑與長度比值(R/w)對摺痕數(N)及摺痕偏折角(α)之影響分析：

1.摺痕數(N)隨著紙管半徑與長度比值(R/w)的上升而增加。

2. N-R/w 圖之圖形為一**嚴格遞增**且**凹向下**之曲線。

3.摺痕偏折角(α)因著紙管半徑與長度比值(R/w)的上升而減小。

4. $\sin\alpha$-R/w 圖之圖形為一**嚴格遞減**且**凹向上**之曲線。

(二)不同軸向拉伸力(T)之紙管之靜態分析：相同紙管半徑長度比(R/w)時，

1.軸向拉伸力(T)越大，摺痕數(N)越多。

2.軸向拉伸力(T)之增減與摺痕偏折角(α)之變化無明顯之關係。

(三)不同材質之圓筒之靜態分析：

1.相同 R/w 時，摺痕數(N)大小排序為：鋁箔管＞銅片管＞紙管＞塑膠管。

(四)不同厚度(t)之圓筒之靜態分析：

1.相同圓筒半徑長度比(R/w)時，摺痕數(N)會因厚度增加而下降。

2.厚度之影響可與楊氏模量(Young's Modulus, E)及軸向拉伸力(T)結合。

(五)不同幾何、材料性質之比較，利用靜態理論模型分析：

1.摺痕數(N)皆隨著圓筒半徑與長度比值(R/w)的上升而增加。

2. N-R/w 圖之圖形皆為一**遞增**且**凹向下**之曲線。

3.由幾何及能量的觀點可得下列兩式：

$$\alpha \approx \sin^{-1}\sqrt{\frac{w}{2R}} - \frac{\pi}{2N}$$

$$N = \sqrt{A\left(\frac{R}{w}\right) + B}\left(\text{其中 A、B 為常數}\right)$$

4.以厚度(t)、楊氏模量(Young's Modulus, E)及軸向拉伸力(T)，修正公式為：

$$N = \sqrt{A\left(\frac{R}{w}\right) + B} + C\left(\frac{T}{Et^2}\right)^{\alpha}$$

二、扭紙管**動態**過程分析：

(一)紙管所受的扭力與位移成正比。

(二)施於紙管之力矩與扭轉角成正比。

(三)紙管半徑與長度比值(R/w)越大，扭力對紙管的作功越多。

(四)紙管在「恢復性」、「彈性限度」、「位能」等特性與彈簧相似。

三、紙管的物理原理：

(一)短紙管在扭轉後之形態與二維摺紙相似。

(二)長紙管在聲音量測及挫折(frustration)之摺痕產生過程與揉紙相似。

(三)長、短紙管在幾何理論、冪次定律等性質不相同。

四、研究應用：

(一)利用擰扭圓筒可將三維圓柱形變成二維摺紙的性質：

1.生活上，我們將此性質藉以收納、壓縮、解省居家方面之放置空間。

2.工業上，我們能將伸縮功能應用於機械零件製造，並使機械能更靈敏便利。

3.環保上，我們將以更安全且有效地方式回收鐵、鋁罐，進而達到環保減炭。

(圖十八)扭轉壓縮前的銅管

(圖十九)經扭轉壓縮後的銅管

(二)利用動態過程中短紙管塑性變形前承受之臨界力矩較大之性質：

1.建築上，R/w 小(半徑小/長度大)之圓柱臨界力矩較小，建築的柱子如果過長，抗力矩效果也會較差。我們主張可以用數個 R/w 大(半徑大/長度小)之圓柱，取代過長之單一圓柱以框束連接彼此，增加建築柱子本身的臨界力矩，才能承受更大的扭轉變形。

捌、參考資料

[1]Yamaki, N., and K. Otomo. "Experiments on the postbuckling behavior of circular cylindrical shells under hydrostatic pressure." *Experimental Mechanics* 13.7 (1973): 299-304.

[2]Tsai, Sun-Ting *et al.*, "Power-law ansatz in complex systems: Excessive loss of information." *Physical Review E* 92 (2015): 062925.

[3]Houle, Paul A., and James P. Sethna. "Acoustic emission from crumpling paper." *Physical Review E* 54.1 (1996): 278.

[4]Hunt, G. W., Gabriel J. Lord, and Mark A. Peletier. "Cylindrical shell buckling: a characterization of localization and periodicity." *Discrete and Continuous Dynamical Systems Series B* 3.4 (2003): 505-518.

[5]Hunt, Giles W., and Ichiro Ario. "Twist buckling and the foldable cylinder: an exercise in origami." *International Journal of Non-Linear Mechanics* 40.6 (2005): 833-843.

[6]Onal, Cagdas D., Robert J. Wood, and Daniela Rus. "Towards printable robotics: Origami-inspired planar fabrication of three-dimensional mechanisms." *Robotics and Automation (ICRA), 2011 IEEE International Conference on*. IEEE, 2011.

[7]Onal, Cagdas D., Robert J. Wood, and Daniela Rus. "An origami-inspired approach to worm robots." *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics* 18.2 (2013): 430-438.

[8]Silverberg, Jesse L., et al. "Using origami design principles to fold reprogrammable mechanical metamaterials." *Science* 345.6197 (2014): 647-650.

[9]Hu, Nan. "Buckling-induced smart applications: recent advances and trends." *Smart Materials and Structures* 24.6 (2015): 063001.

【評語】051822

本作品探討扭轉折痕與角度的現象，其中再加上以聲音音量來分析折痕能量的關係，是不錯的想法，作者再加入不同材質的折痕研究,並以圓球來分析可能的地球地殼之板塊疊合,是很好的應用。本作品身為延續之作品，在增加的部份份量有點少。

作品海報

摘要

本次研究探討圓筒經扭轉自發產生摺痕的物理，對於短圓筒，直線摺痕在長度和間距都呈規律性，我們能從幾何及能量觀點推導出摺痕數目及偏斜角度和實驗參數（如圓筒長度、半徑、厚度等）的關係。同時也能解釋為何當圓筒過長時，規律會消失，並發出許多噪音。

研究動機

之前在參觀奇美博物館的摺紙特展時，了解到「摺紙」已經跳脫童玩和藝術領域，在工業和科學上也有非常大的應用，例如衛星的太陽能板、工程上的機械蟲……。

然而我發現擰轉圓筒過程中，三維圓筒受到剪力而傾斜後，會直接產生規律的自發性摺痕，異於一般費時費工的摺紙，這激起我想對其進一步探討，並試圖推廣應用到日常生活。

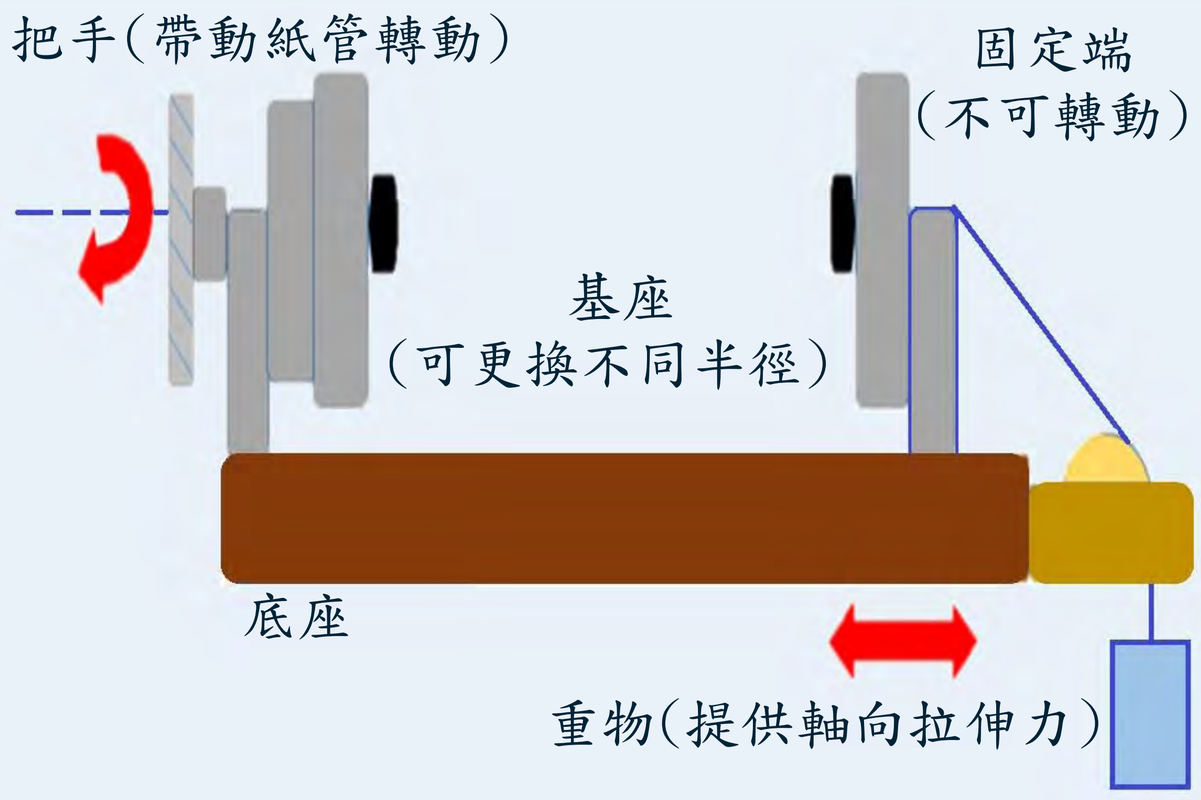
研究目的

一、探討幾何、軸向拉伸力、材質與摺痕數及偏斜角關係。
二、分析不同參數下，扭轉過程中的力矩、扭轉角與能量之關係。
三、藉由量測扭轉圓筒發出的噪音音量和頻率多寡，檢視長、短紙管不同的統計行為。
四、建構理論解釋兩端半徑不同之圓筒(大小管)半徑及長度之關聯。
五、檢視不同幾何構造(厚度大之圓筒、球形)之物體扭轉過程之型態。

研究過程及實驗儀器

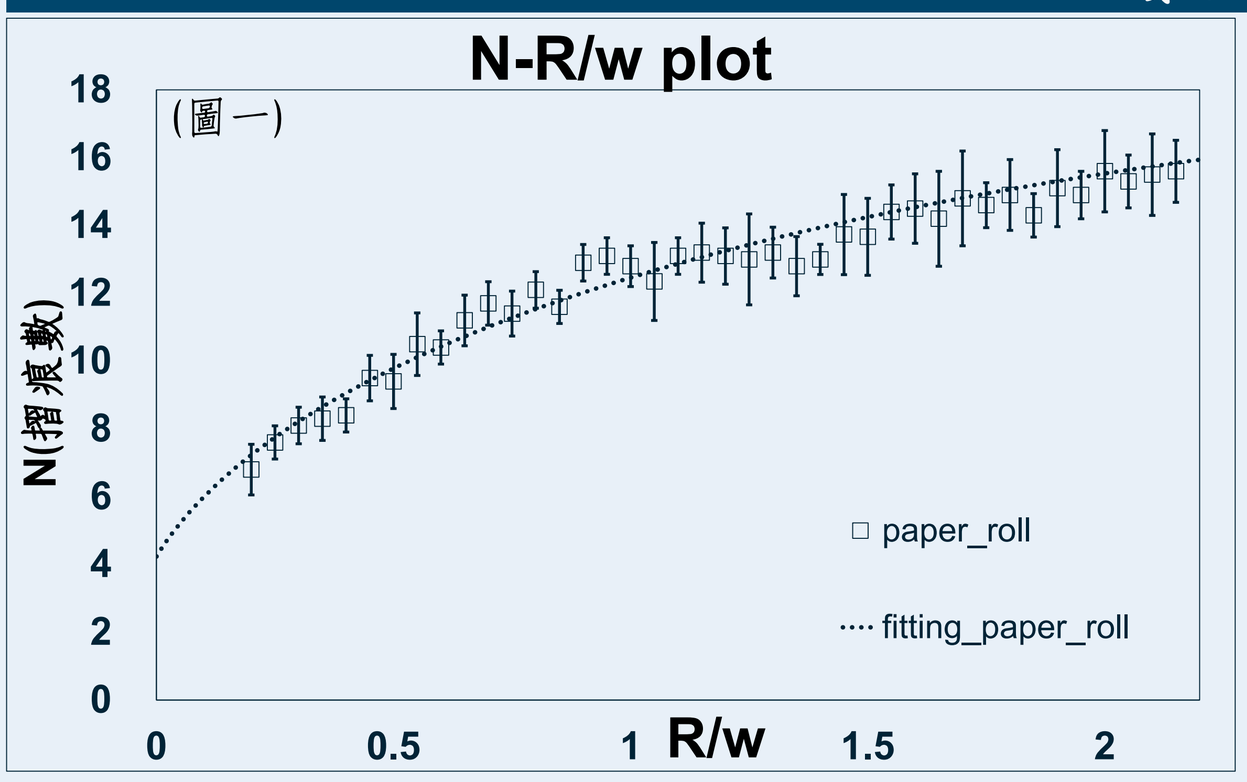
研究過程

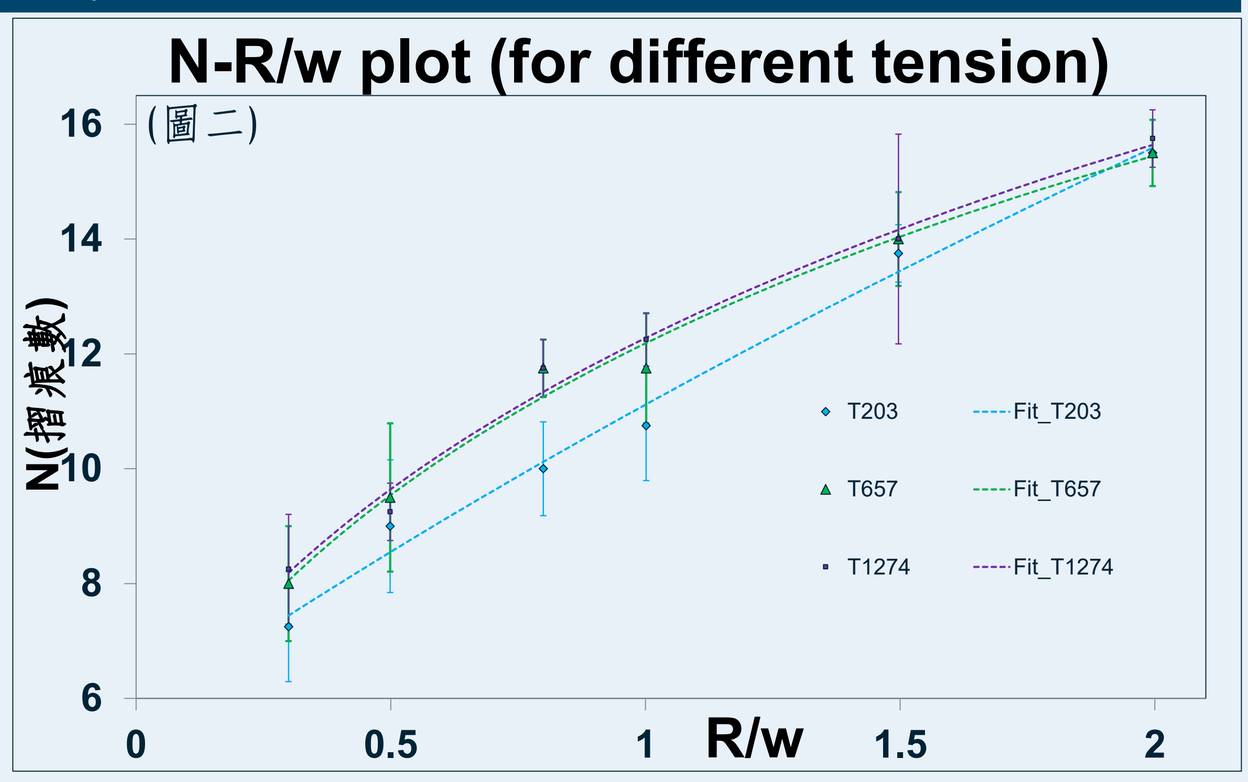
實驗儀器

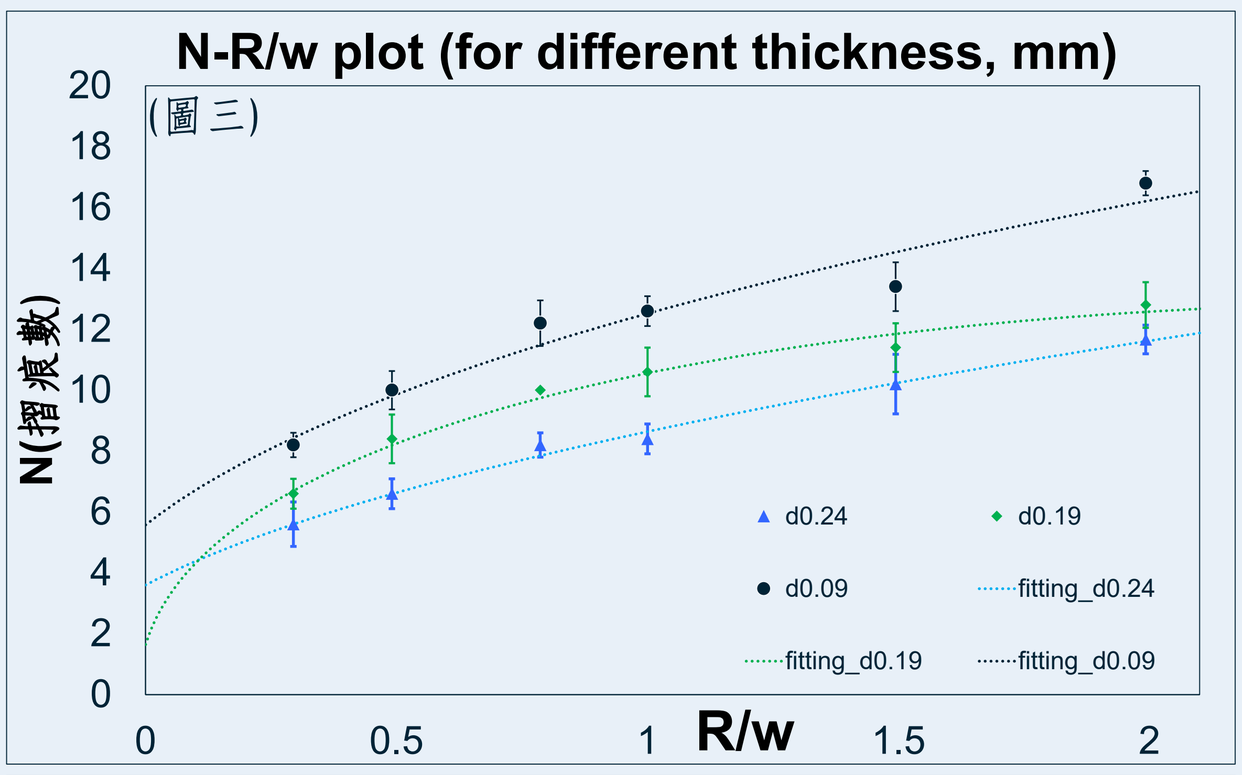


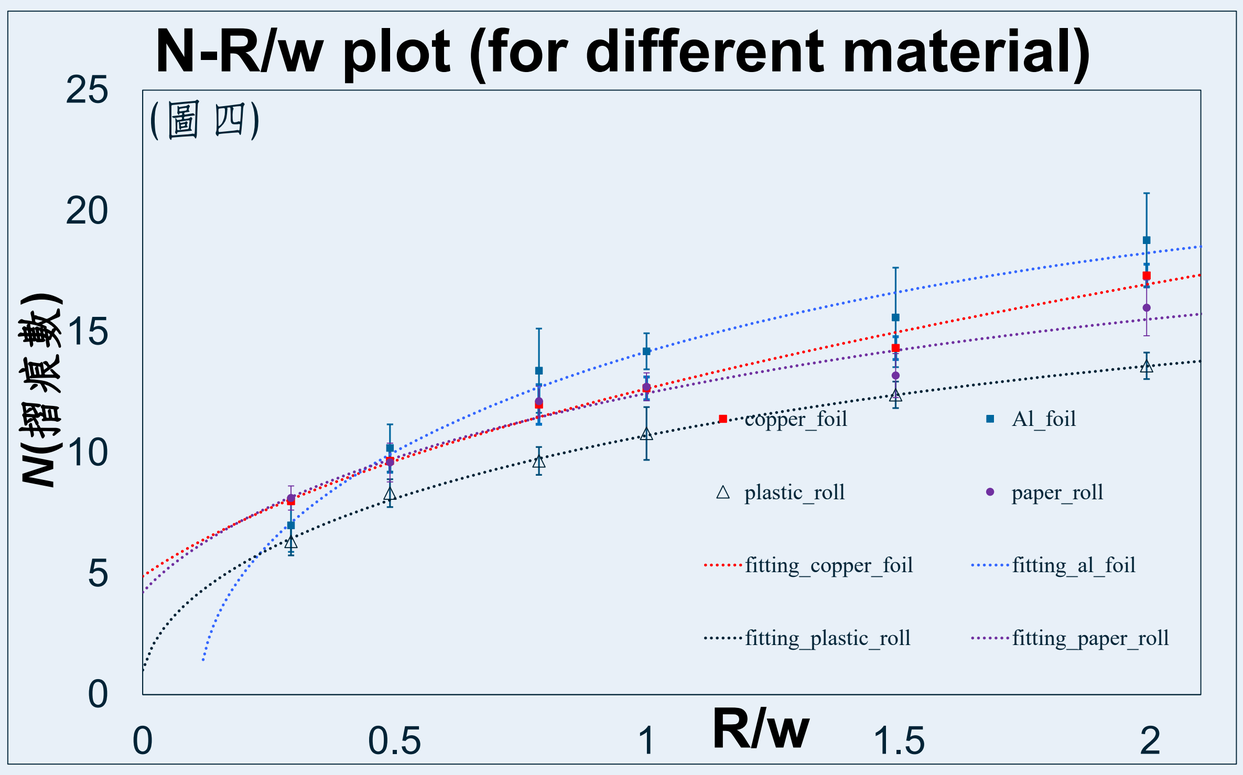
一、探討幾何、軸向拉伸力、材質與摺痕數及偏斜角關係

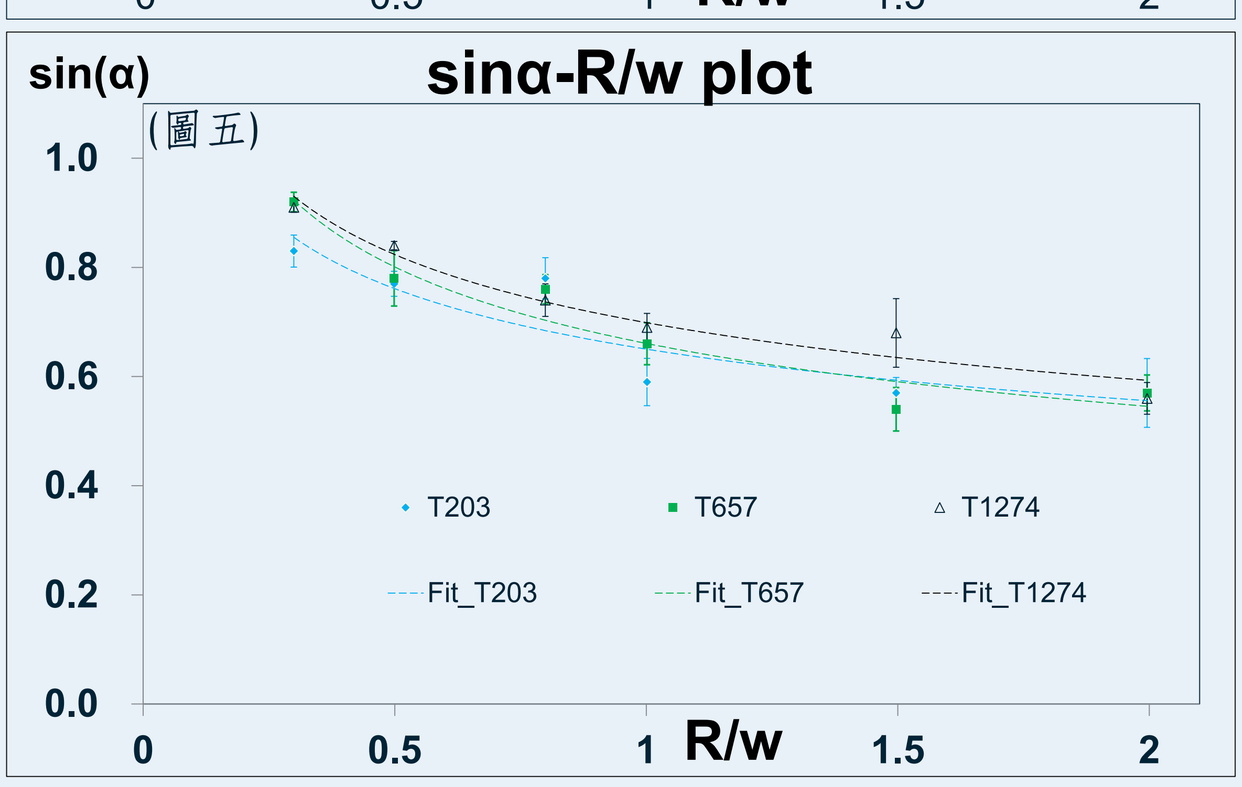
實驗結果





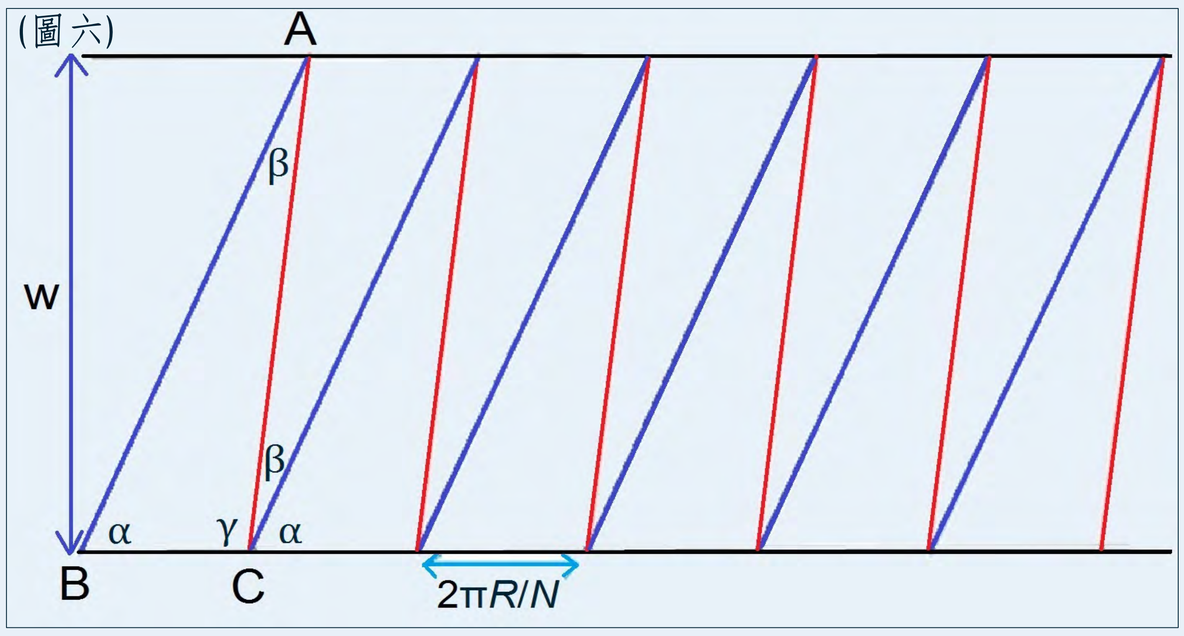


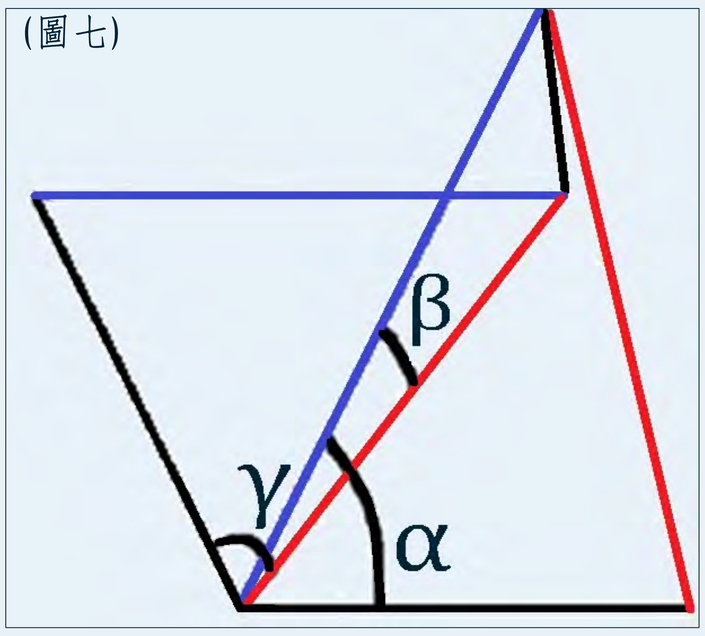


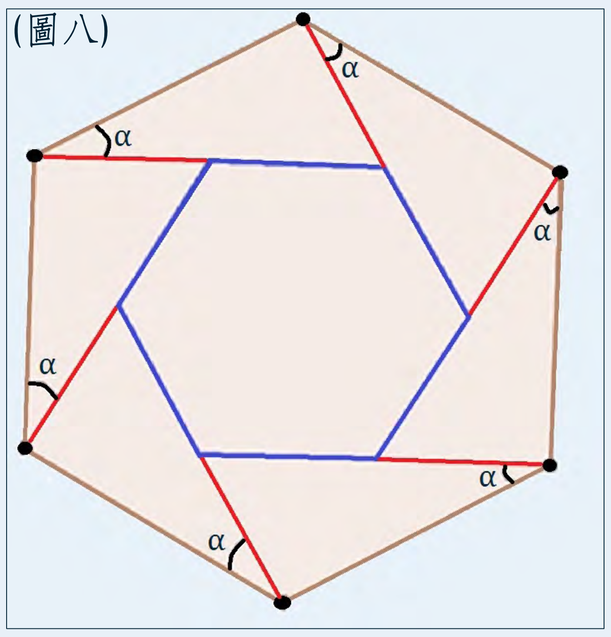


由(圖一)，我們了解**N-R/w**關係大致**遞增**且**凹向下**，並以軸向拉伸力(圖二)、厚度(圖三)、材質(圖四)做為變因，進一步發現當軸向拉伸力增加或厚度減少時，摺痕數**(N)**會些微增加；對於不同材質，**N**多寡依序為：鋁箔、銅片、紙、塑膠，並能結論這些參數對於**N**的影響遠不及半徑長度比**(R/w)**；而我們可以清楚看到**α**角度會隨**R/w**之增加而減少，且軸向拉伸力的影響幾乎可以忽略(圖五)。

理論模型







幾何：$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma=\pi \\ N(\alpha-\beta+\gamma)=(N-2)\pi \end{cases}$

$\Rightarrow \alpha \approx \sin^{-1}\sqrt{\frac{w}{2R}}-\frac{\pi}{2N};\ \beta=\frac{\pi}{N}$

能量：

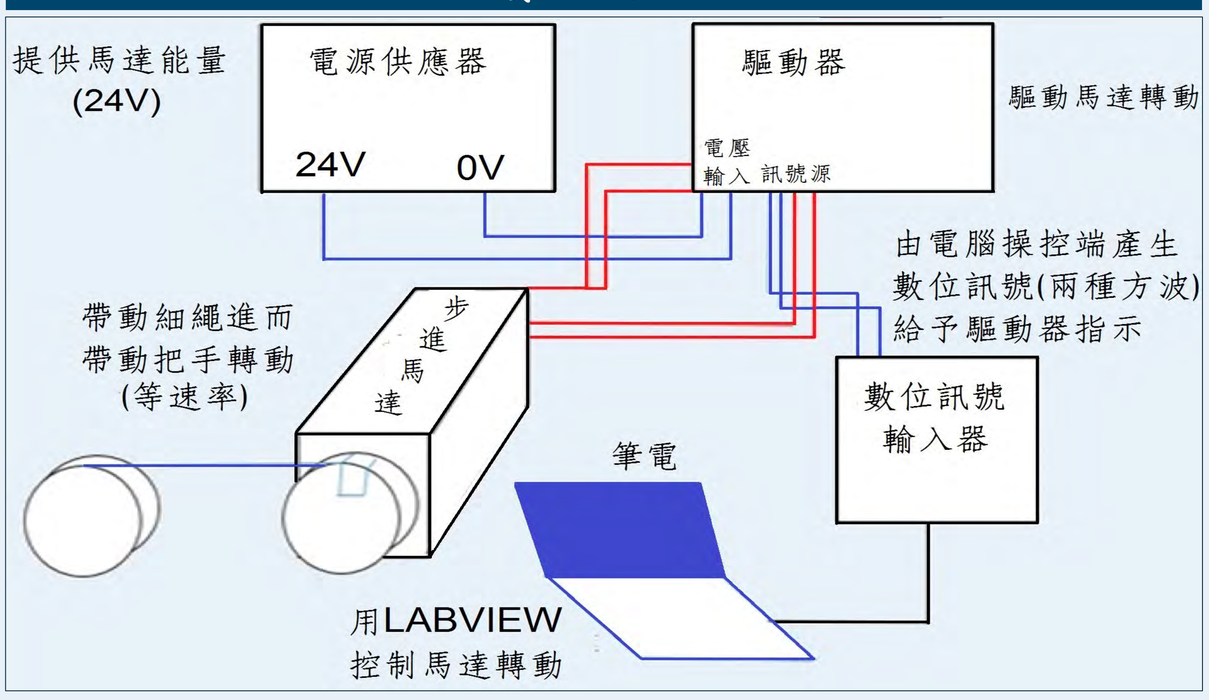
$$W = N\varepsilon\left(\frac{w}{\sin\alpha}+\frac{w}{\sin\gamma}\right)+\eta N\left(\frac{2\pi R}{N}\right)\left(\frac{2\pi R}{N}\right)\frac{\sin\alpha}{w} \xrightarrow{\frac{dW}{dN}=0} \Rightarrow\Rightarrow\Rightarrow N=\sqrt{A\left(\frac{R}{w}\right)+B} \xrightarrow{\text{軸向拉伸力、楊氏係數、厚度修正}} \Rightarrow\Rightarrow\Rightarrow\Rightarrow\Rightarrow\Rightarrow\Rightarrow\Rightarrow N=\sqrt{A\left(\frac{R}{w}\right)+B+\left(\frac{T}{Et^2}\right)^C}$$

二、分析不同參數下，扭轉過程中的力矩、扭轉角與能量之關係

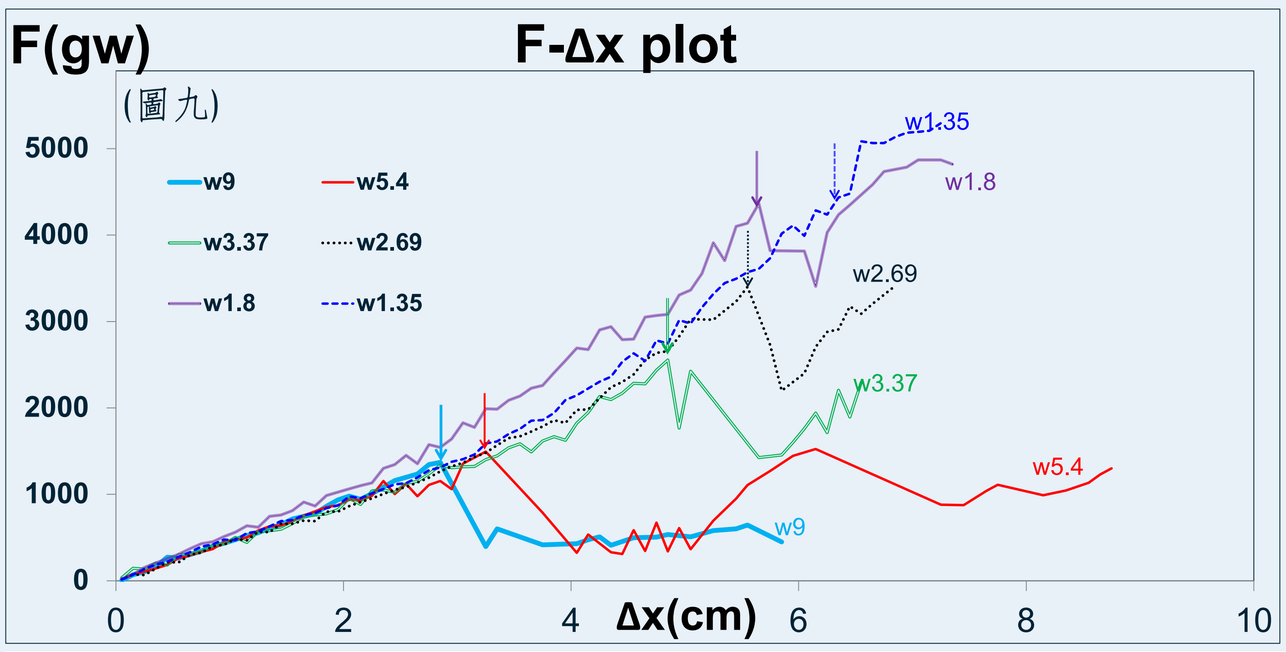
實驗介紹

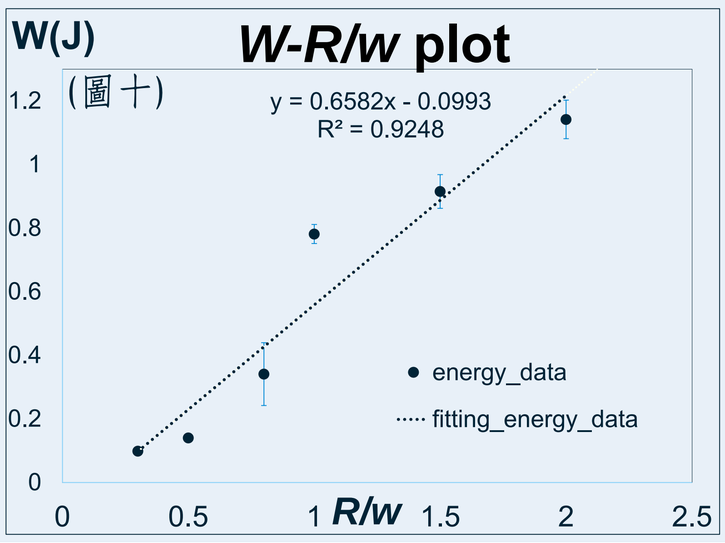
緊接著實驗一，我們希望能夠藉由固定轉速(步進馬達)來轉動圓筒，以量測每一時間點之力與位移，進而觀察其整體動態過程，並發現產生摺痕前的受力與位移成正比。進一步探討後，得知紙管於動態過程中，有許多性質與彈簧相同，因此可以推論動態紙管類似彈簧。最後由圖形底下面積可計算得到能量，並代入實驗一的能量理論中，去推導其應產生之摺痕數。

實驗架設



實驗結果





藉(圖九)、(圖十)，我們發現動態過程中，不同*R/w*的紙管拉力與位移大致成正比；而產生摺痕所需能量則隨著*R/w*增加而上升。

理論模型

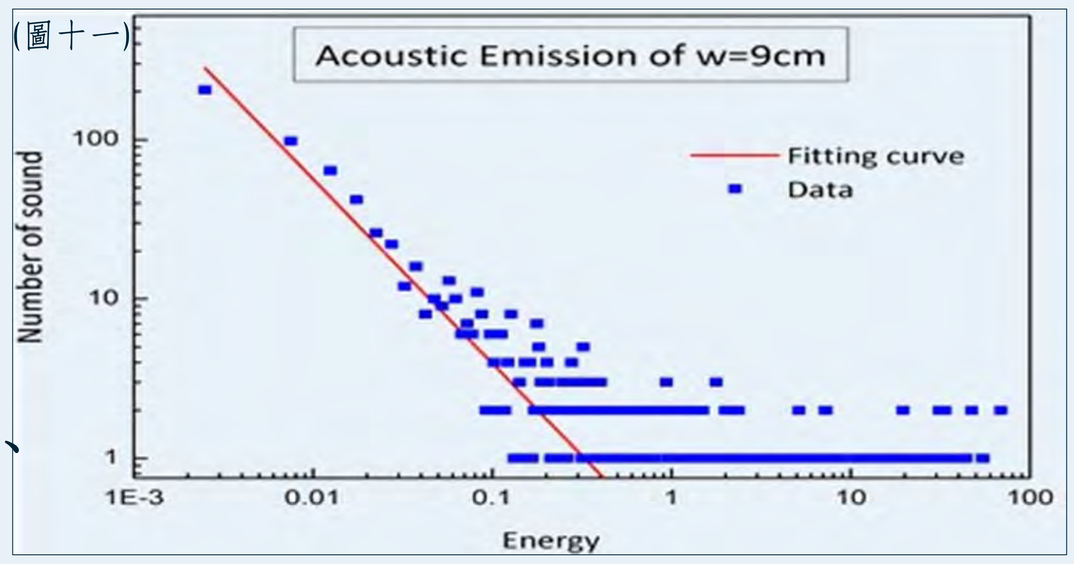
(一) 紙管在產生摺痕前，施力造成的是彈性形變，如將外力移除，紙管會回到原狀態。
(二) 產生摺痕後，塑性形變使得紙管無法恢復原狀，可視同類似彈簧超過彈性限度。
(三) 外力施給紙管的功，轉換成位能和摺痕，類似彈簧之彈力位能和伸長量。
(四) 施於紙管的外力與位移成正比，此點如同彈簧之虎克定律。

三、藉量測扭轉圓筒發出噪音音量和頻率，檢視長、短紙管統計行爲

實驗介紹

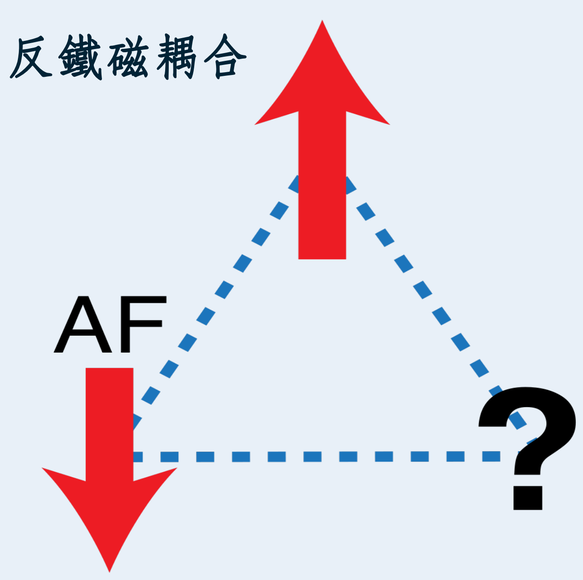
藉由量測扭轉圓筒所發出之噪音音量和頻率多寡，我們發現長、短紙管有不同的聲音統計分布，並進一步釐清這個行為的改變和摺痕失去規律性乃**同時**發生，從而結論背後機制極可能是同樣在液晶和玻璃轉變(glass transition)等系統扮演關鍵角色的幾何「挫折」(frustration)。最後，在實驗中，我們利用麥克風及錄音筆，將扭轉紙管的噪音錄下來，再利用MATLAB、C、R等程式語言，從聲音檔依序轉換成波型檔、能量檔及數據全對數圖。

實驗結果



理論模型

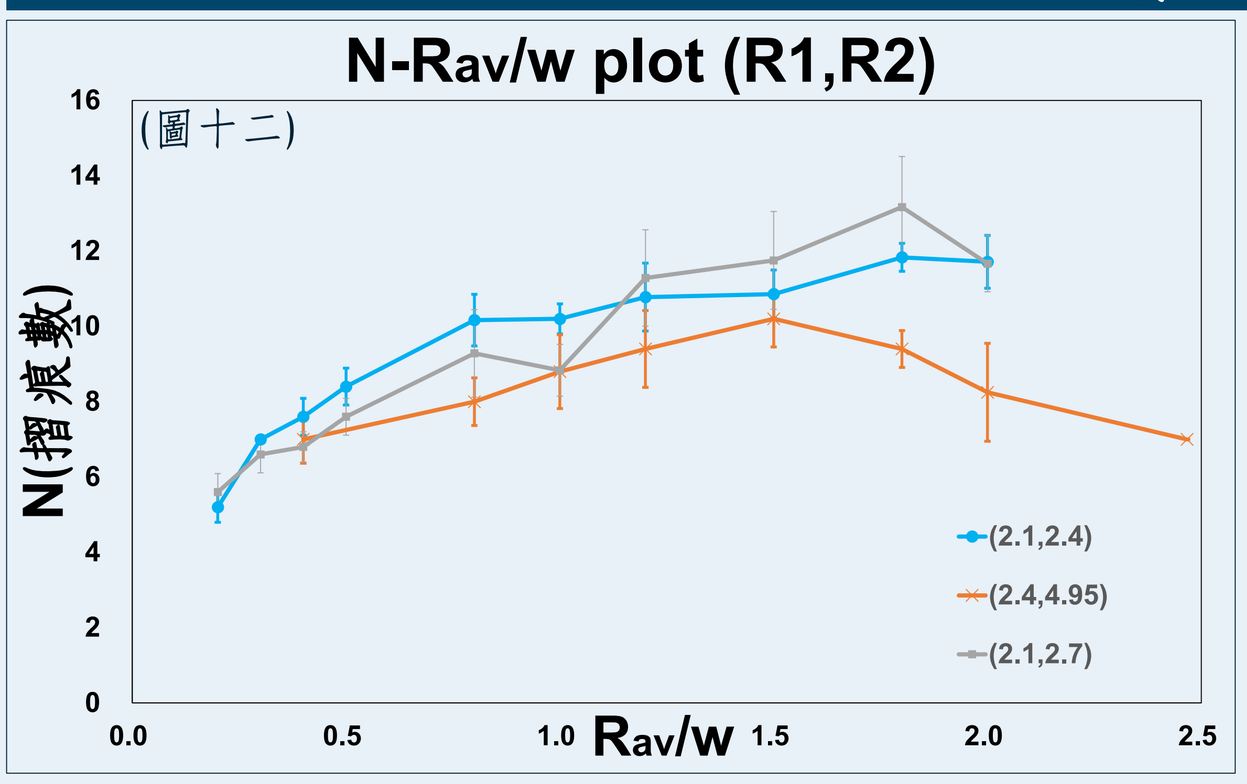
我們發現擰長紙管與揉紙同樣會出現挫折，似乎應力決定在哪裏和什麼時候產生多長、多斜的摺線時，無法達成共識，在喋喋不休的爭論中，大自然遲遲無法決定；換言之，擰長紙管與揉紙的過程遭遇類似的「挫折」，導致這兩個表面上非常不同的流程，竟然給出相同的聲音統計行為。(Tsai, Sun-Ting *et al.*, 2015)



在我們實驗中發現長紙管(*R/w*≤0.5)扭轉中產生之聲音數量為短紙管(*R/w*>0.5)的數倍到數十倍。另外我們也能藉由(圖十一)，發現長紙管(w=9公分)在能量-次數之全對數圖中，整體趨勢呈現負斜率的直線，這代表其滿足冪次定律(Power Law)，由於冪次大小與前人研究之「揉紙」相符，我們推斷「擰長紙管」與「揉紙」應有些許相關。

四、建構理論解釋大小管兩半徑及長度之關聯

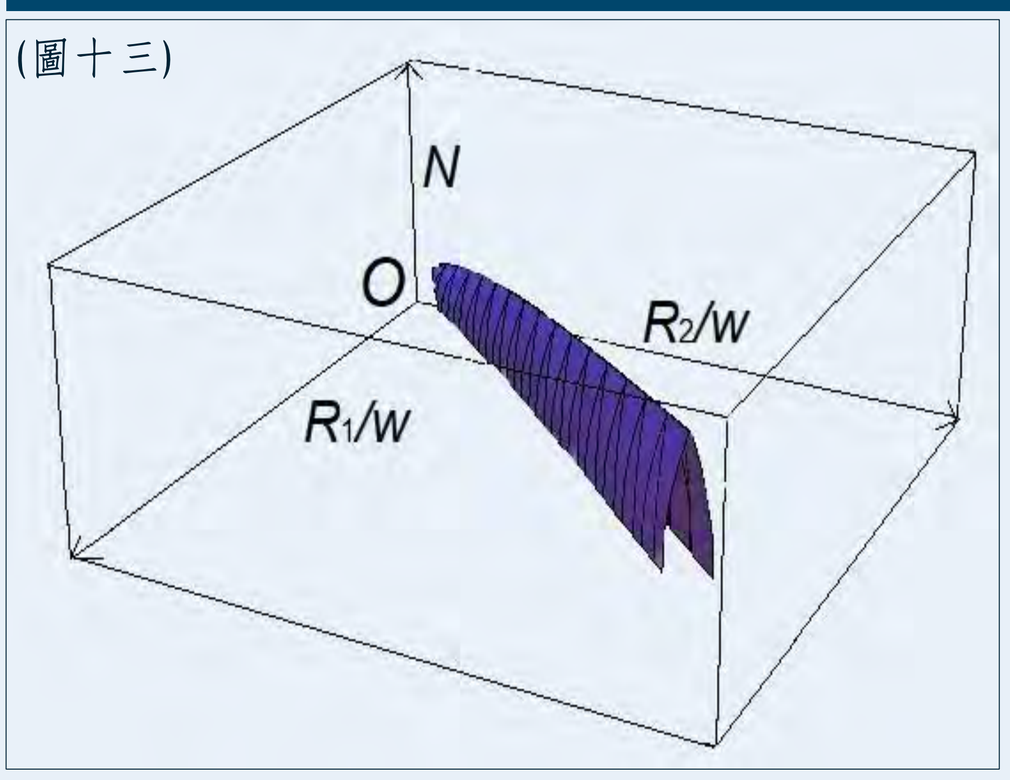
實驗結果

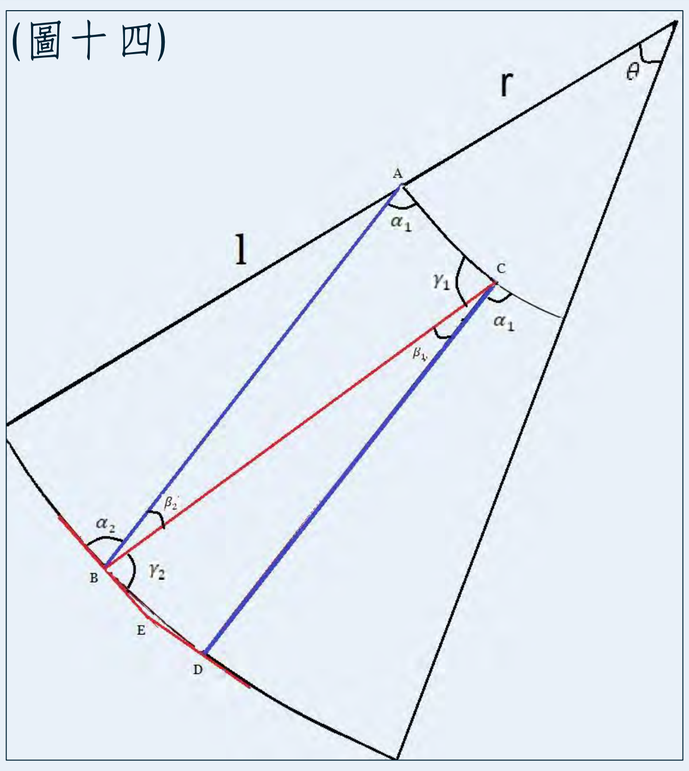


由(圖十二)，我們了解大小管的**N-R_{av}/w**關係大致與圓筒的**遞增**且**凹向下**相似，不同的是，當**R_1**和**R_2**相差很大時**(R_2/R_1>1.28)**，圖形會出現極值。藉由推廣(圖一)圓筒之幾何及能量理論至大小管後，可以繪出較為廣義之**N**與**R_1/w**及**R_2/w**所形成之三維圖形(圖十三)。

(圖十二)中的一條曲線均對應到(圖十三)中的一個截面，因而能理解極值出現之原因，並加以歸納出每一半徑比例之曲線圖形。

理論模型





$$\begin{cases} \alpha_2+\beta_2+\gamma_2=\pi \\ N(\alpha_2-\beta_2+\gamma_2)+\theta=(N-2)\pi \end{cases}$$

$$\Rightarrow \beta_2=\frac{\pi}{N}+\frac{\theta}{2N}$$

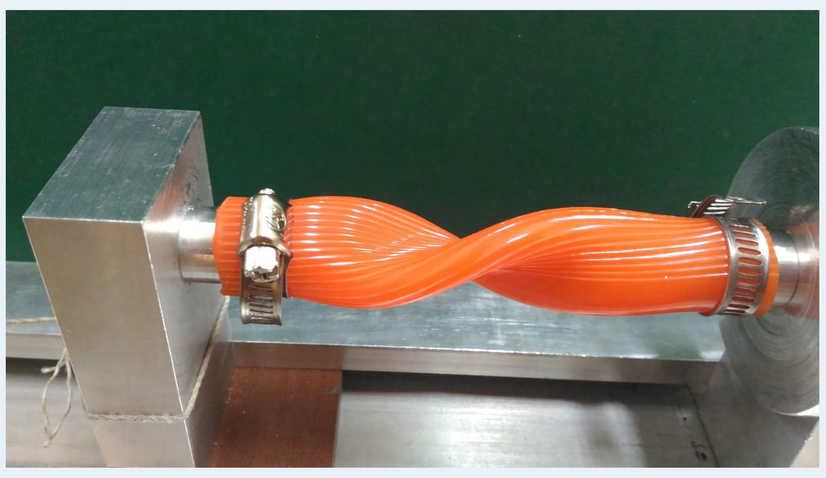
$$\begin{cases} \alpha_1+\beta_1+\gamma_1=\pi \\ N(\alpha_1-\beta_1+\gamma_1)-\theta=(N-2)\pi \end{cases}$$

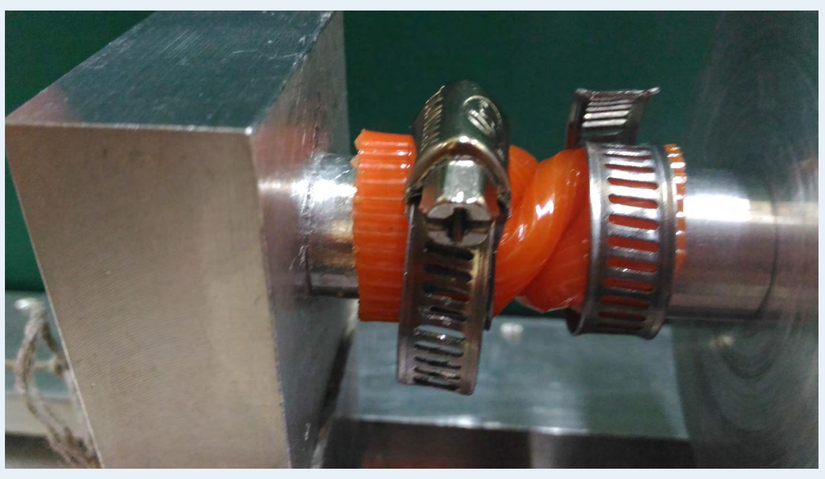
$$\Rightarrow \beta_1=\frac{\pi}{N}-\frac{\theta}{2N}$$

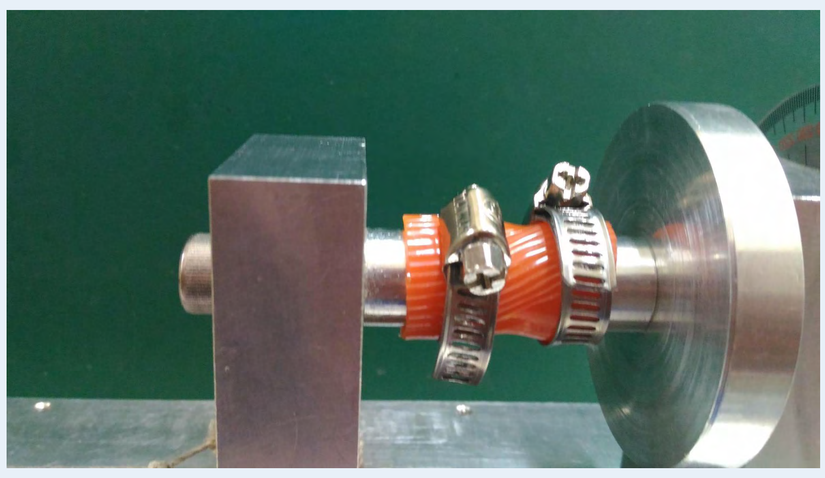
由幾何，能求得兩摺痕規律邊界為

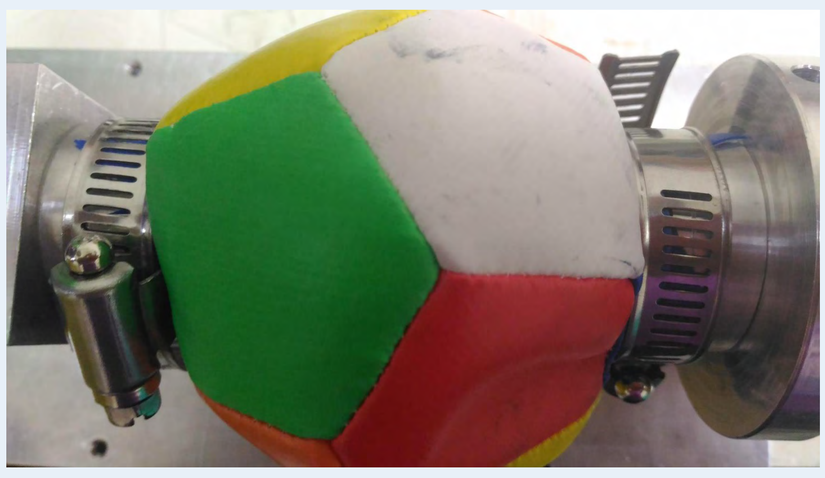
$$\begin{cases} (y+0.25)^2-(x-0.25)^2=0.5 \\ (x+0.25)^2-(y-0.25)^2=0.5 \end{cases}$$

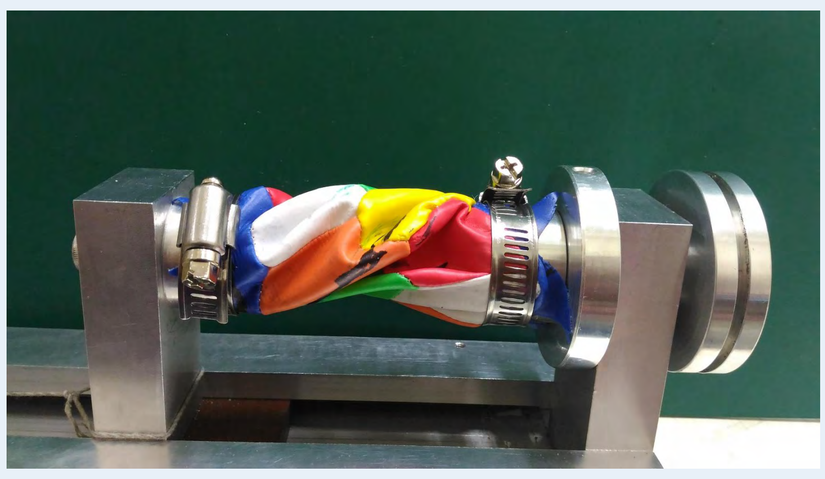
五、檢視不同幾何構造(厚度大之圓筒、球形)物體扭轉過程之型態

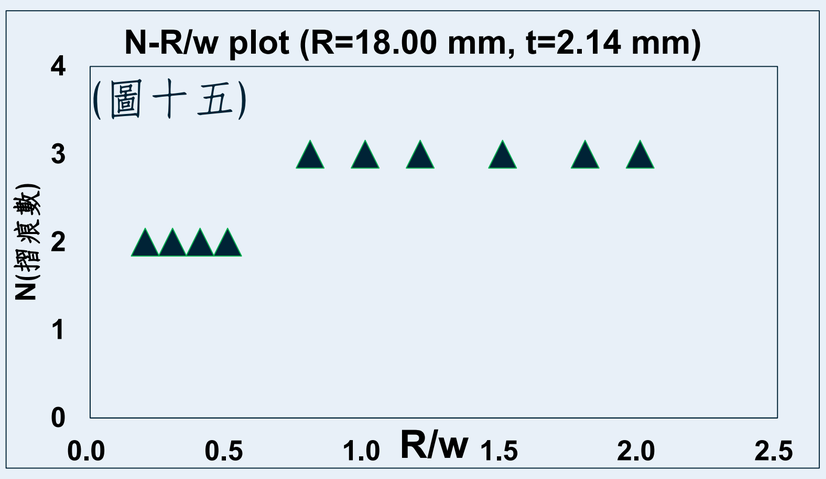


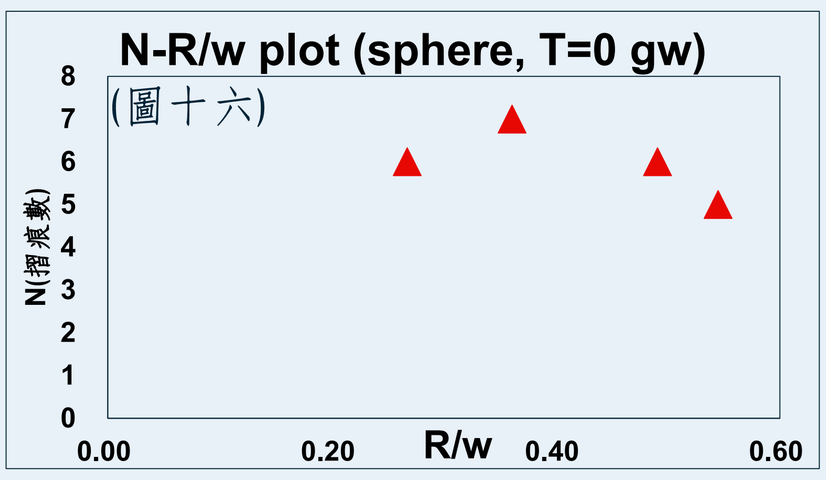


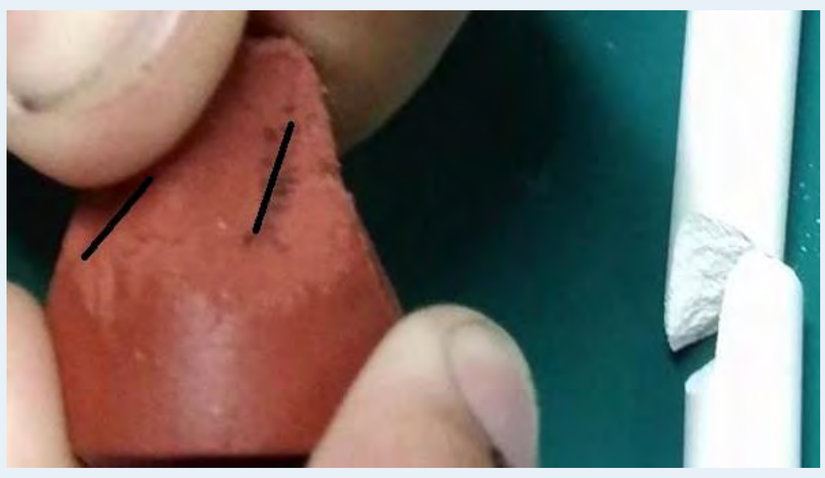












結論、未來展望及研究應用

一、當實驗參數給定後，圓筒之摺痕數**(N)**與偏斜角**(α)**可以被唯一決定。

二、**N-R/w**圖為一嚴格遞增且凹向下之曲線；而**sinα-R/w**圖為一嚴格遞減且凹向上之曲線。

三、長紙管在聲音量測及挫折**(frustration)**之摺痕產生過程與**揉紙**相似。

四、紙管的動態過程與彈簧許多性質相近。

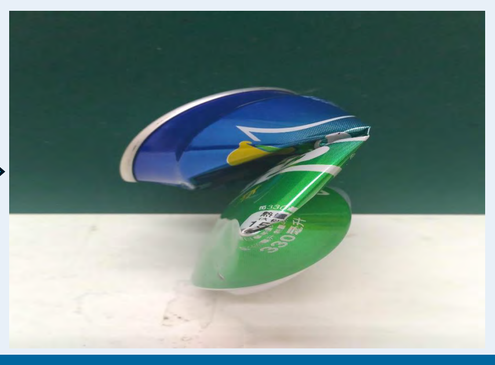
五、將傾斜摺痕對應*β*-筒狀蛋白之蛋白質條**(beta strands)**，進以研究其傾斜成因及動力學。

六、藉由扭轉中歸納的物理原理，建立文獻上缺乏之理論，解釋盤古板塊斷裂面與摺痕之可能關聯。

七、工業上將伸縮功能應用於機械零件之製造，並使機械能更靈敏便利。

八、生活上推廣到收納、壓縮、節省居家放置空間。

九、環保上，我們的結論有助於更安全且有效地方式回收鐵、鋁罐，進而達到環保減炭的效果。



參考文獻

- Yamaki, N., and K. Otomo, "Experiments on the postbuckling behavior of circular cylindrical shells under hydrostatic pressure" Experimental Mechanics 13 (1973): 299-304.
- Houle, Paul A., and James P. Sethna, "Acoustic emission from crumpling paper", Phys. Rev. E 54 (1996): 278.
- Tsai, S. T. *et al.*, "Power-law ansatz in complex systems: Excessive loss of information" Phys. Rev. E 92(2015):062925.