

中華民國第 57 屆中小學科學展覽會

作品說明書

高級中等學校組 物理與天文學科

第三名

051821

曲折動盪中的秩序

學校名稱：國立臺南第一高級中學

作者： 高二 陳 實 高二 楊 毅 高二 黃迎真	指導老師： 王俊乃 林立婷
---	-----------------------------

關鍵詞：地震、彎曲、耦合

摘要

在鐵尺的彎曲實驗中，我們發現與既有小角度彎曲文獻不同的結論，並找出大小角度都適用的通式。

我們先確認使鐵尺彎曲之有效分力與受力尺面呈 90 度角。我們最後得出其力 (f)、彎曲程度（端點與原處的垂直位移 h 、端點切線之角變量 θ ）、尺長 (L) 在線密度、粗細不變下滿足 $h \propto \theta L$ 和 $f \propto hL^{-3.02}$ 。

我們觀察鐵尺拉開一定振幅後釋放的振盪狀況，並探究振幅衰減的情形，最終我們得知振幅衰減方程式 $A=A_0e^{-\gamma t}$ 中的 γ 與 L 的關係為 1.67 次方成反比，且與初始振幅無關。

我們更進一步地研究當兩隻尺中有中介物質時能量交換所產生之耦合現象，而我們發現一個振盪週期內包含著數個耦合週期，與一般弱耦合模型相反。

最後我們得到振盪、耦合週期不受初始振幅影響，但和尺長均呈正相關。

壹、動機

去年台南發生了大規模的地震，網路上瘋傳許多地震中建築物劇烈搖動的影片。那些傾斜、龜裂甚至坍塌的房子以及慘絕人寰的災區，啟發了我們以鐵尺作為簡單的模型，來模擬地震中鋼筋或樑柱可能會產生的各種情形。

我們第一個想到的是，那些樑柱的受力與彎曲情形間的關係為何？當然，這方面也不乏相關文獻，但我們發現這些文獻皆是以較硬的金屬為對象做探討，換言之其彎曲的幅度並不會太大；而在地震時，鋼筋卻往往發生遭大角度彎折的情形。是以我們設計了鐵尺大角度彎曲的實驗。

在地震當下，鋼筋震動的振幅衰減快慢也是可能會影響災情的原因之一，我們卻只查得到它會受質量影響。令我們更好奇的是鋼筋的長度與振幅衰減快慢之間的關係，於是我們也朝此方向設計了鐵尺的阻尼振盪實驗。

當這些樑柱、鋼筋等建材一起震動時，它們之間是否會產生交互作用（例如耦合）？會以什麼樣的形式振動？能量在兩介質之中又會如何傳遞？這些疑問激發了我們的好奇心，於是我們便陸續展開實驗來進行研究。

貳、實驗目的

一、鐵尺彎曲實驗（主要探討鐵尺大角度的彎曲）

- （一）探討使鐵尺彎曲之作用於端點的有效分力方向
- （二）探討使鐵尺總長固定下，作用於端點的有效分力與彎曲程度的關係
- （三）探討使鐵尺彎曲之作用於端點的有效分力與鐵尺總長、彎曲程度的關係

二、鐵尺阻尼振盪實驗

- （一）探討鐵尺振盪之端點位移與時間的關係
- （二）探討鐵尺振盪之振幅衰減情形與初始振幅的關係

(三) 探討鐵尺振盪之振幅衰減情形與鐵尺總長的關係

三、雙鐵尺以彈簧連接之耦合振盪實驗

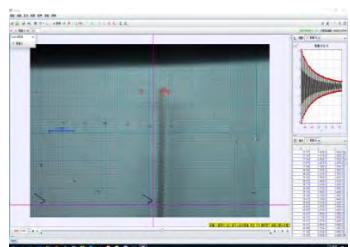
(一) 探討以彈簧連接之兩鐵尺端點位移與時間的關係

(二) 探討以彈簧連接之兩鐵尺振盪之振盪週期、耦合週期與初始振幅的關係

(三) 探討以彈簧連接之兩鐵尺振盪之振盪週期、耦合週期與鐵尺總長的關係

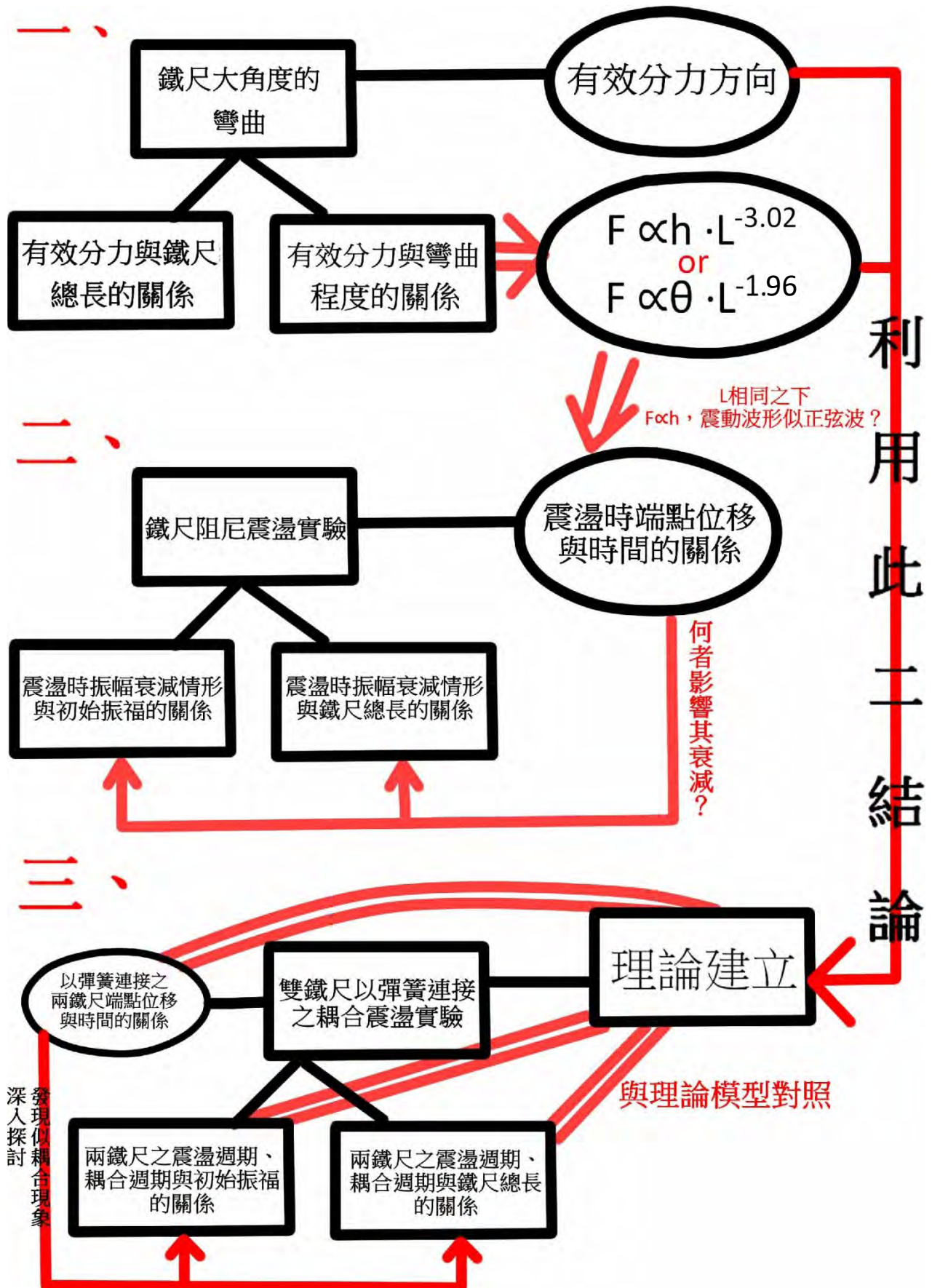
參、研究設備與器材

表一：實驗器材名稱與對應照片

		
圖(a) 60cm 鐵尺	圖(b) S 形夾	圖(c) C 型夾
		
圖(d) 15cm 彈簧	圖(e) 棉線	圖(f) 高速攝影機
		
圖(g) Tracker	圖(h) 測力計	圖(i) 水準儀

肆、研究方法與結果

*實驗流程圖：



一、鐵尺彎曲實驗：探討一端固定的鐵尺另一端點所受拉力與鐵尺彎曲程的關係

（一）實驗裝置圖（如圖 1）

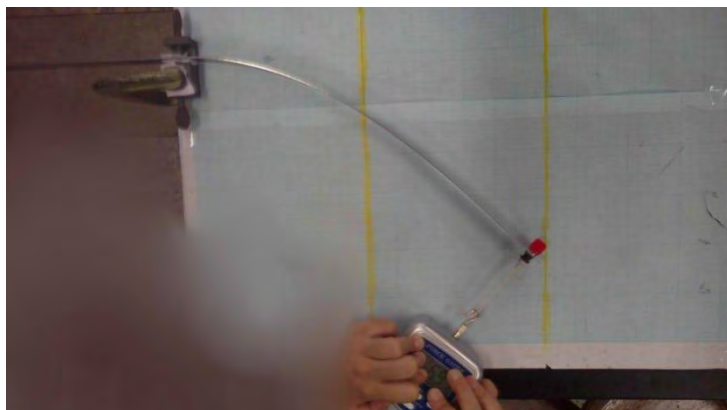


圖 1

（二）前置作業

1. 在實驗組底下固定一張大方格紙作為參考基準。
2. 用 C 型夾以及 S 形夾將尺固定，並與方格紙之格線切齊。
3. 將受力端藉螺絲與棉線與測力計連接。
4. 確認鐵尺不與桌面接觸，避免摩擦力造成的誤差。

（三）實驗方法

首先我們考量的變因是尺的總長 L （即不受力時受力端與固定端的距離（如圖 2）），分別以總長為 60、50、40、35、30 公分的鐵尺作為主要的變因；而在同一長度的鐵尺當中，進一步以彎曲程度（註一）作為操縱變因，紀錄對應的拉力（註二）並拍照匯入電腦分析。

***註一：**因鐵尺的彎曲程度並沒有相關的文獻定義，所以在實驗中我們以「受力端偏離原處的垂直位移 h 」（如圖 3）為操縱變因，而「受力端點切線角度變化量 θ 」（如圖 4）即為應變變因，兩者均可代表鐵尺的彎曲程度。

***註二：**本實驗因未能確定造成鐵尺彎曲之有效分力 f 方向，故每次在測量時須以不同的施力方向拉至相同彎曲程度，以逼近法找出最小拉力（此力即該彎曲程度所對應的有效分力），最後分析時再匯入電腦找出最小拉力方向與切線的夾角，用以確定有效分力的方向。

圖 2

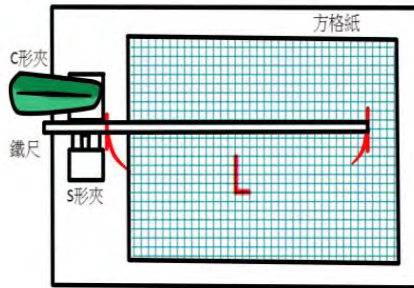


圖 3

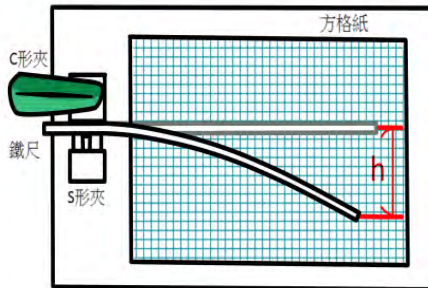
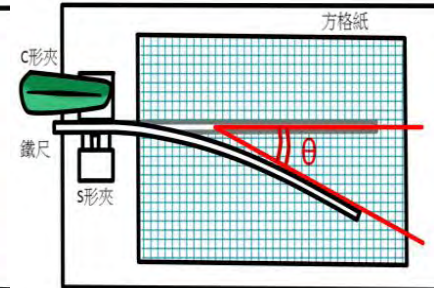


圖 4



(四) 實驗結果

1. 鐵尺彎曲實驗之有效分力的方向

從右表可以明顯看出，最小拉力的方向與受力端點切線的夾角並不受鐵尺的總長或彎曲程度影響。

將所有數據取平均，得到 **90.20321** 度，近似於 90 度。於是可知有效分力的方向恆與受力端點的切線方向垂直。

但因使用逼近法需大量操作，容易產生操作上的誤差，為求精確，於是簡化操作方法設計了以下子實驗：

(1) 實驗方法

已知相同彎曲程度下，有效分力（即最小拉力）的大小皆相同，而所有方向的力均可分解成相同數值的有效分力和不同量值的無效分力（與有效分力垂直者）。

令所求的有效分力方向與切線夾角為 θ ，經實驗測得兩力大小為 F_1 、 F_2 ，方向分別與切線的夾角為 θ_1 、 θ_2 （取銳角）。

尺長 L(cm)	端點位移 h(cm)	最小拉力與端點切線夾角(度)
60	5	82.05652
	10	92.97924
	15	89.29916
	20	88.49820
	25	86.04890
50	5	85.0655
	10	88.66778
	15	87.58980
	20	93.35188
	25	94.21417
40	5	91.51251
	10	93.85531
	15	84.14081
	20	89.53256
	25	85.65864
35	5	93.52676
	10	91.41233
	15	91.04163
	20	96.30006
	25	96.30006
30	5	91.77146
	10	93.41524
	15	89.16968
	20	95.56577
	25	95.56577

*備註：明顯可看出有效分力方向與尺長、端點位移均無關係，故對此 23 組數據做誤差分析：平均數 **90.20321** 標準差 **3.82892** 標準誤 **0.79839**。

根據有效分力的大小相同，並配合圖 5 可列出：

$$\textcircled{1} F_1 \cos(\theta_1 - \theta) = F_2 \cos(\theta_2 - \theta)$$

以差角公式化簡得：

$$\textcircled{2} F_1 \cos \theta_1 \cos \theta + F_1 \sin \theta_1 \sin \theta =$$

$$F_2 \cos \theta_2 \cos \theta + F_2 \sin \theta_2 \sin \theta$$

$$\textcircled{3} (F_1 \cos \theta_1 - F_2 \cos \theta_2) \cos \theta =$$

$$(F_2 \sin \theta_2 - F_1 \sin \theta_1) \sin \theta$$

$$\textcircled{4} \tan \theta = \frac{F_1 \cos \theta_1 - F_2 \cos \theta_2}{F_2 \sin \theta_2 - F_1 \sin \theta_1}$$

$$\textcircled{5} \theta = \tan^{-1} \frac{F_1 \cos \theta_1 - F_2 \cos \theta_2}{F_2 \sin \theta_2 - F_1 \sin \theta_1}$$

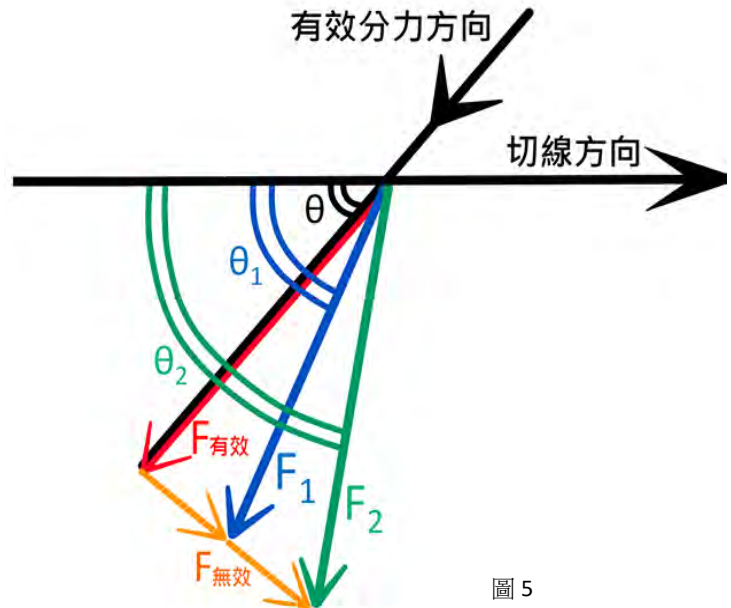


圖 5

故取 6 個不同方向的力，並兩兩一組求出 θ 再取平均即為所求（得 5 組數據）。

(2) 實驗結果

測得 F(N)	測得 θ (rad)	取銳角	$\sin \theta$	$\cos \theta$	$F \sin \theta$	$F \cos \theta$	所求夾角(度)
3.44	1.179075	1.179075	0.924253	0.381782	3.179431	1.313324	89.98981
3.18	1.585501	1.556092	0.999892	0.014704	3.179656	0.046762	89.26429
3.25	1.350023	1.350023	0.975728	0.218984	3.171118	0.711698	89.38132
3.39	1.204995	1.204995	0.933837	0.357698	3.165709	1.212596	89.54509
3.30	1.287002	1.287002	0.966532	0.285325	3.168452	0.924522	89.25034
3.34	1.246756	1.246756	0.947957	0.318399	3.166175	1.063454	

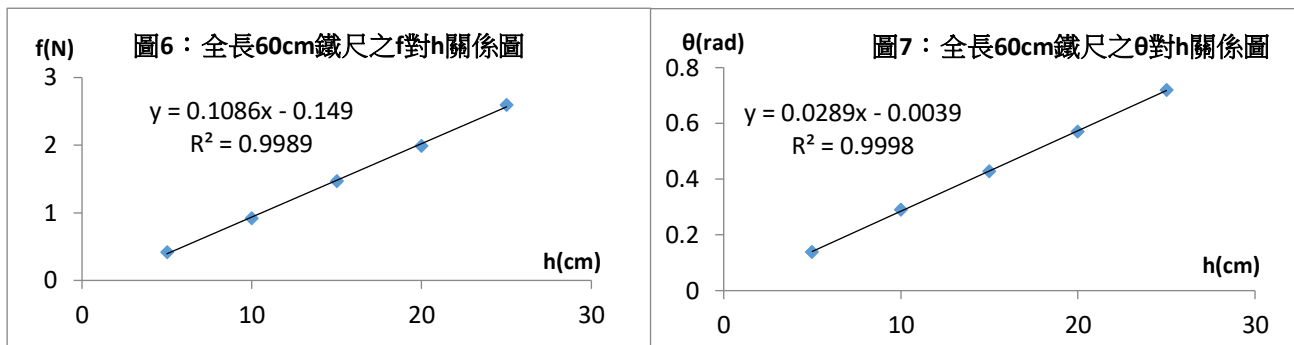
備註：平均數 89.48617 標準差 0.27312 標準誤 0.12214

由此看出，此方法所得之結果亦近似於 90 度，進一步確定有效分力方向與切線恆成垂直。

2. 鐵尺彎曲實驗之固定總長下，有效分力 f 與彎曲程度 h 、 θ 三者之間的關係

(1) 總長 60 公分

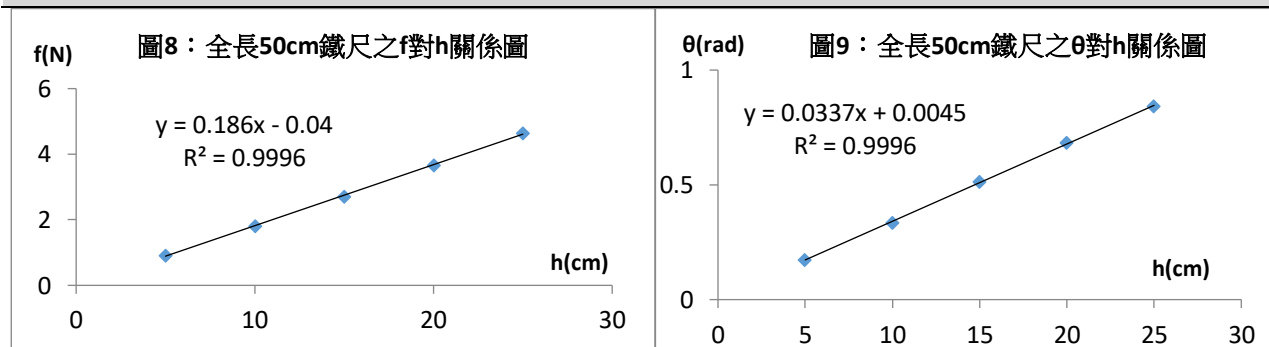
端點位移 h (cm)	最小拉力 f (N)	端點切線角度變化量 θ (rad)
5	0.42	0.138984
10	0.92	0.289385
15	1.47	0.427213
20	1.99	0.569860
25	2.60	0.720626



備註：均可看出明顯正比關係，故不必再取對數分析；截距與縱軸尺度相比甚小，應為誤差。

(2) 總長 50 公分

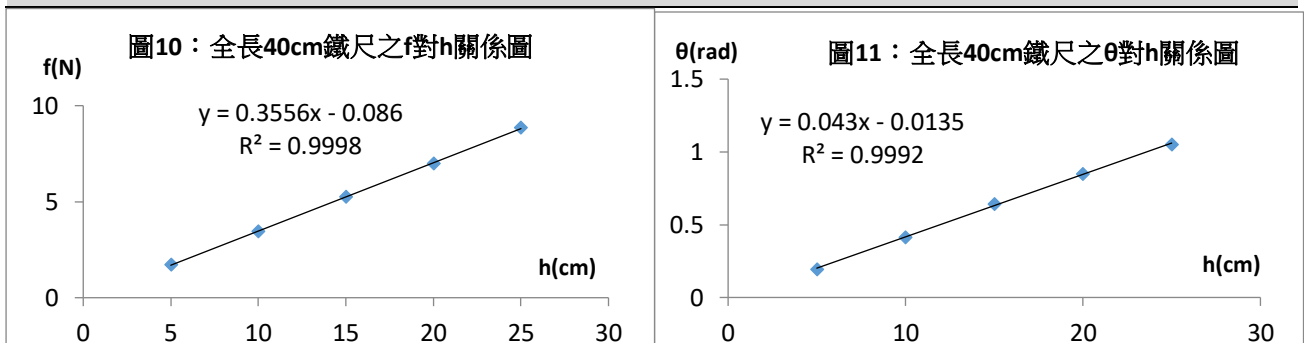
端點位移 h(cm)	最小拉力 f(N)	端點切線角度變化量 θ (rad)
5	0.92	0.173764
10	1.81	0.335444
15	2.71	0.513510
20	3.67	0.683898
25	4.64	0.841447



備註：均可看出明顯正比關係，故不必再取對數分析；截距與縱軸尺度相比甚小，應為誤差。

(3) 總長 40 公分

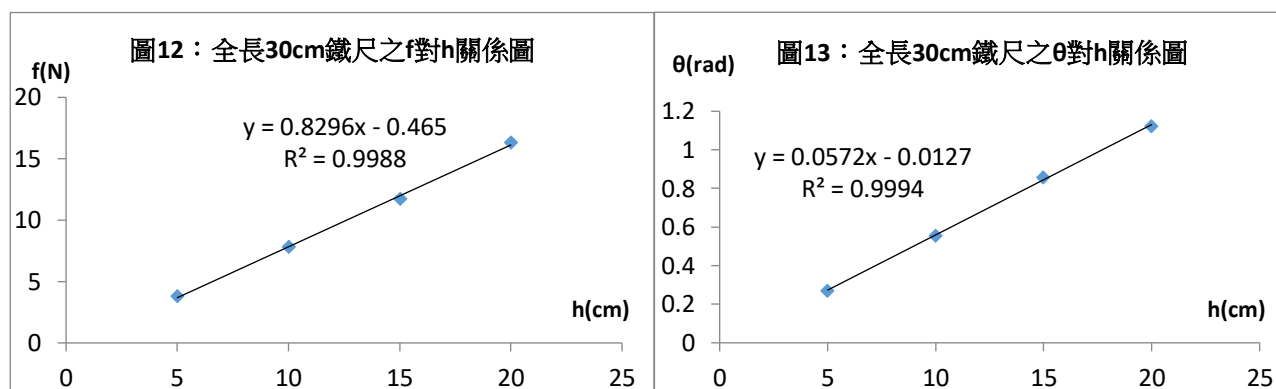
端點位移 h(cm)	最小拉力 f(N)	端點切線角度變化量 θ (rad)
5	1.72	0.194929
10	3.45	0.413499
15	5.25	0.644952
20	6.97	0.851583
25	8.85	1.050069



(4) 總長 30 公分

端點位移 $h(\text{cm})$	最小拉力 $f(\text{N})$	端點切線角度變化量 $\theta(\text{rad})$
5	3.79	0.271226
10	7.79	0.555614
15	11.74	0.858254
20	16.30	1.123446

備註：因端點位移達到 25 公分時恐超過鐵尺的彈性限度，故無法測量此組數據。

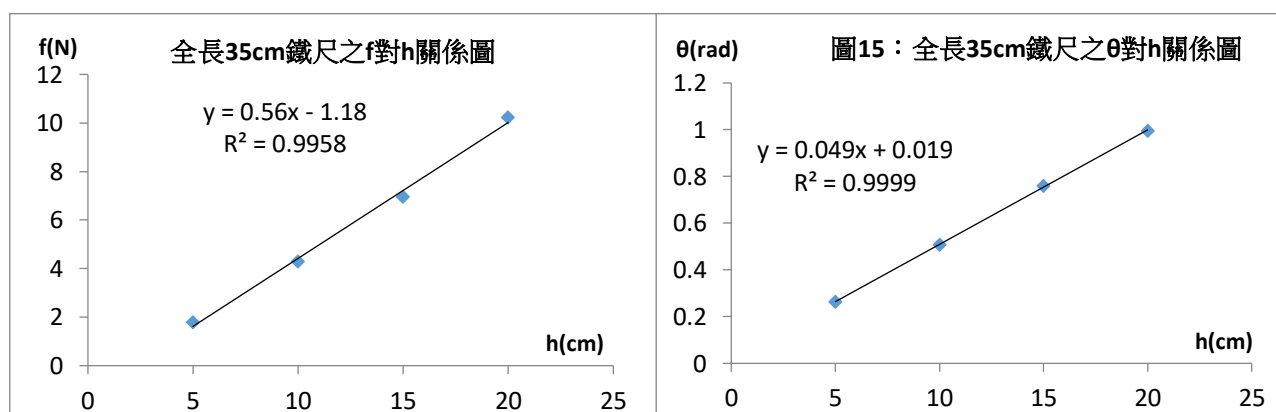


備註：均可看出明顯正比關係，故不必再取對數分析；截距與縱軸尺度相比甚小，應為誤差。

(5) 總長 35 公分（代替總長 20 公分，否則恐超過鐵尺的彈性限度）

端點位移 $h(\text{cm})$	最小拉力 $f(\text{N})$	端點切線角度變化量 $\theta(\text{rad})$
5	1.79	0.263038
10	4.30	0.508338
15	6.95	0.758772
20	10.24	0.996427

備註：因端點位移達到 25 公分時恐超過鐵尺的彈性限度，故無法測量此組數據。

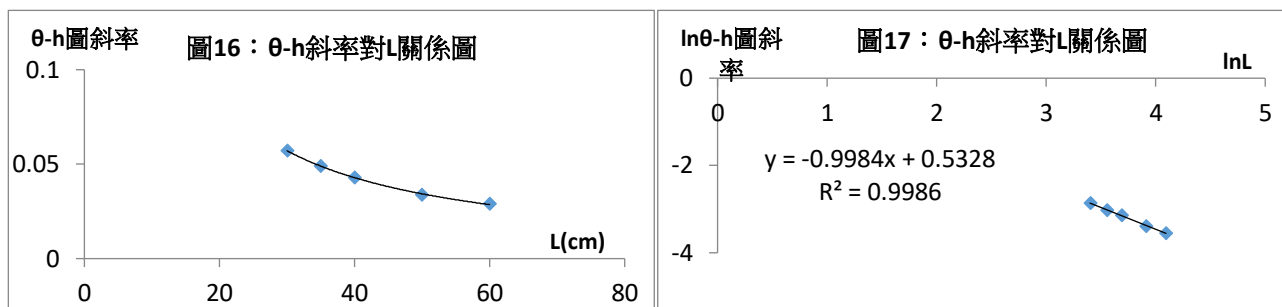


備註：均可看出明顯正比關係，故不必再取對數分析；截距與縱軸尺度相比甚小，應為誤差。

(6) 總長固定下 f 與 h 、 θ 與 h 成正比，故可推估三者間兩兩成正比。將其圖形斜率再對總長 L 作圖即可求得四者間的關係

3. 鐵尺彎曲實驗之總長 L 、有效分力 f 與彎曲程度 h 、 θ 四者之間的關係

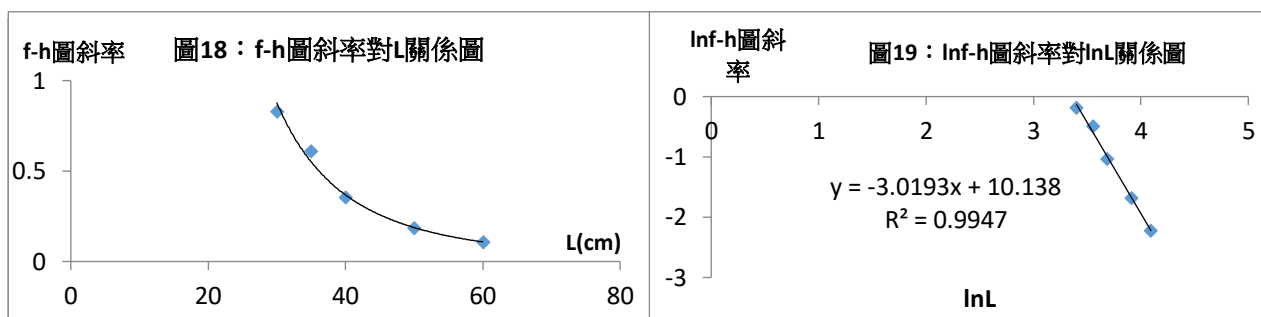
(1) θ 對 h 關係圖斜率與總長 L 的關係



備註：可看出負相關，但須藉由對數，才能看出次方關係。

由此可得 (θ/h) 與 L 約成 1 次方反比，即 $h \propto \theta L$ 。

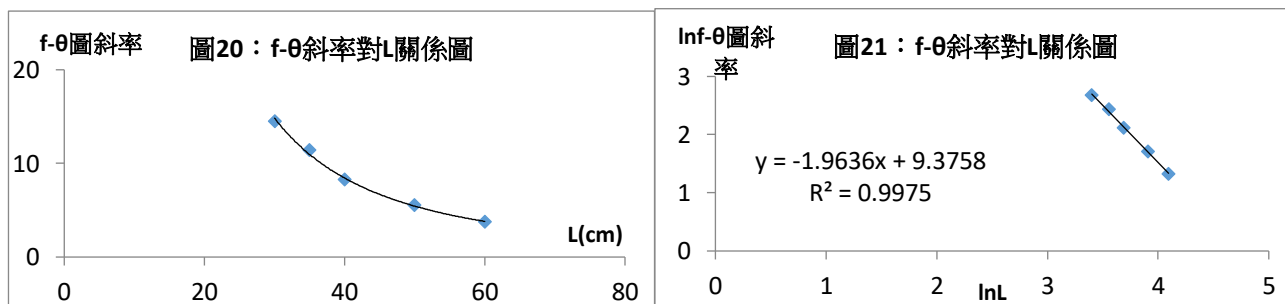
(2) f 對 h 關係圖斜率與總長 L 的關係



備註：可看出負相關，但須藉由對數，才能看出次方關係。

由此可得 (f/h) 與 L 成 3.02 次方反比，即 $f \propto h L^{-3.02}$ 。

(3) f 對 θ 關係圖斜率與總長 L 的關係



備註：可看出負相關，但須藉由對數，才能看出次方關係。

由此可得 (f/θ) 與 L 成 1.96 次方反比，即 $f \propto \theta L^{-1.96}$ 。

(4) 將 (1) 之結論 $h \propto \theta L$ 帶入 (2) $f \propto h L^{-3.02}$ 得 $f \propto (\theta L) \times L^{-3.02} \propto \theta L^{-2.02}$ ，與 (3) 之結果 $f \propto \theta L^{-1.96}$ 比較，發現 L 次方數幾乎吻合，進一步驗證了 (1) (2) 之結論。

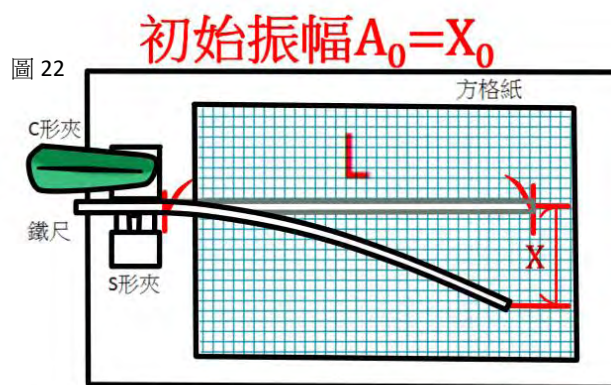
4. 鐵尺彎曲實驗之小結（線密度、粗細不變）

(1) 兩種彎曲程度之關係為： $h \propto \theta L$ 。

(2) 使鐵尺彎曲之有效拉力（垂直端點切線） $f = c_0 h L^{-3.02}$ ，其中 c_0 為常數，單位為 $\text{Nm}^{2.02}$ 。

二、鐵尺阻尼振盪實驗：探討鐵尺振盪時端點振幅的衰減現象

（一）符號解釋（如圖 22）以及實驗裝置圖（如圖 23）



備註：圖 22 之 x 與彎曲實驗之 h 相同。



圖 23

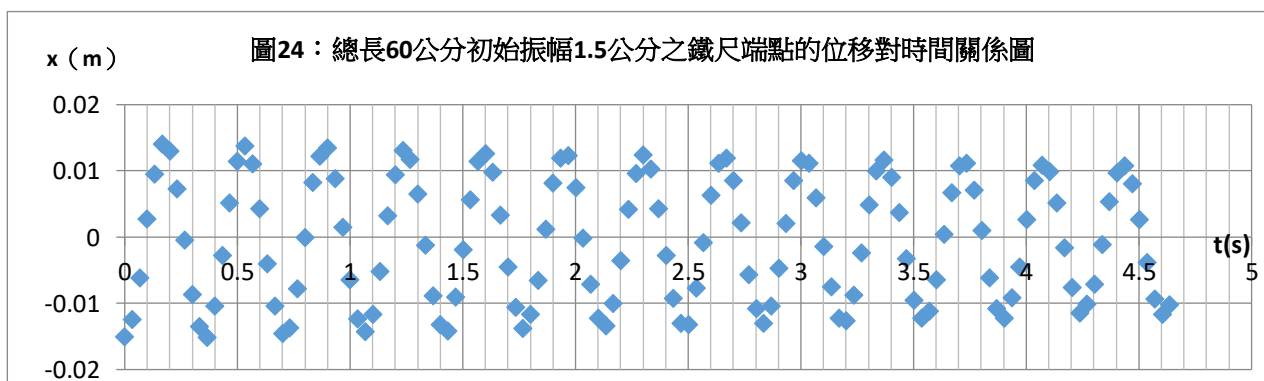
（二）前置作業

1. 在實驗組底下固定一張大方格紙作為參考基準。
2. 用 C 型夾以及 S 形夾將尺固定，並與方格紙之格線切齊。
3. 在鐵尺的上方架設高速攝影機，並於每次實驗開始前以水平儀校正。
4. 確認鐵尺不與桌面接觸，避免摩擦力造成的誤差。

（三）實驗方法（共同部分）

1. 以鐵尺下方之方格紙為基準，以手指將尺的端點拉至所需的初始振幅。
2. 以垂直端點切線的方向放開手指，使尺開始振盪並攝影紀錄（1.前就要開始錄）。
3. 匯入 tracker 追蹤端點偏移平衡點（1.前的位置）的垂直位移 x 與時間 t 的關係。
4. 將 3. 得到之匯入 excel 作圖。

（四）實驗 a：鐵尺阻尼振盪情形概觀



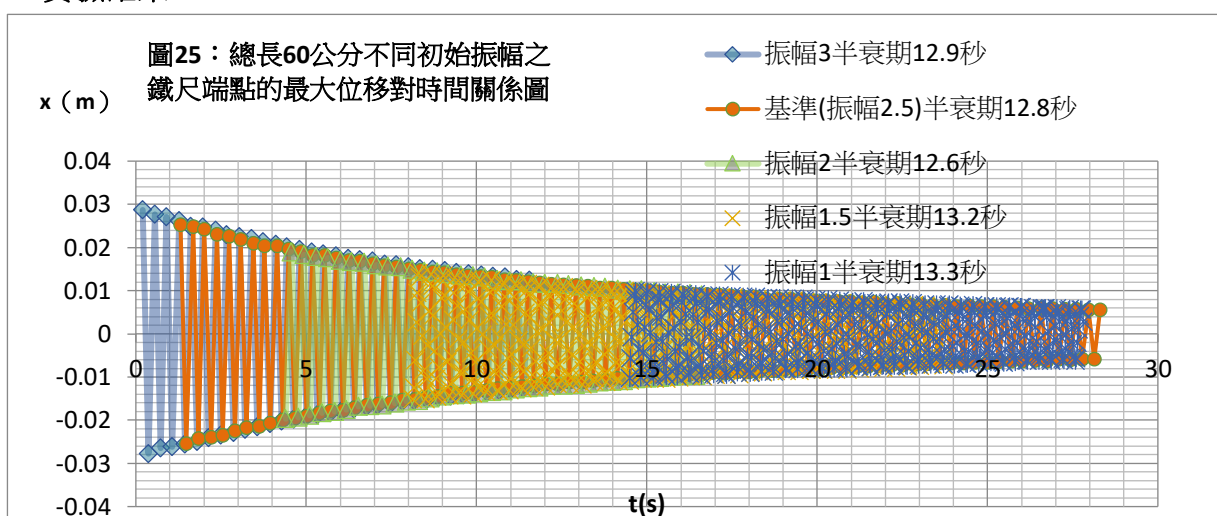
1. 是一個週期固定（0.36 秒）的正弦波——有點類似簡諧振盪的波型。

2.振幅隨時間衰減——此現象應是阻尼的影響，故設計實驗 b 及實驗 c 探討初始振幅、尺長對振幅衰減的影響。

(五) 實驗 b：探討初始振幅對振幅衰減的影響

1.實驗方法：固定尺長 60 公分，先以初始振幅 2.5 公分為基準，用 tracker 追蹤至接近振幅 0.5 公分時停止，在以 3、2、1.5、1 公分為初始振幅，分別追蹤至各自振幅衰減到一半時停止，全部匯入 excel 疊圖比較。

2.實驗結果



(1) 振幅的衰減情形與初始振幅並無關係。

(2) 不同初始振幅之半衰期幾乎相等，即半衰期不受初始振幅影響。

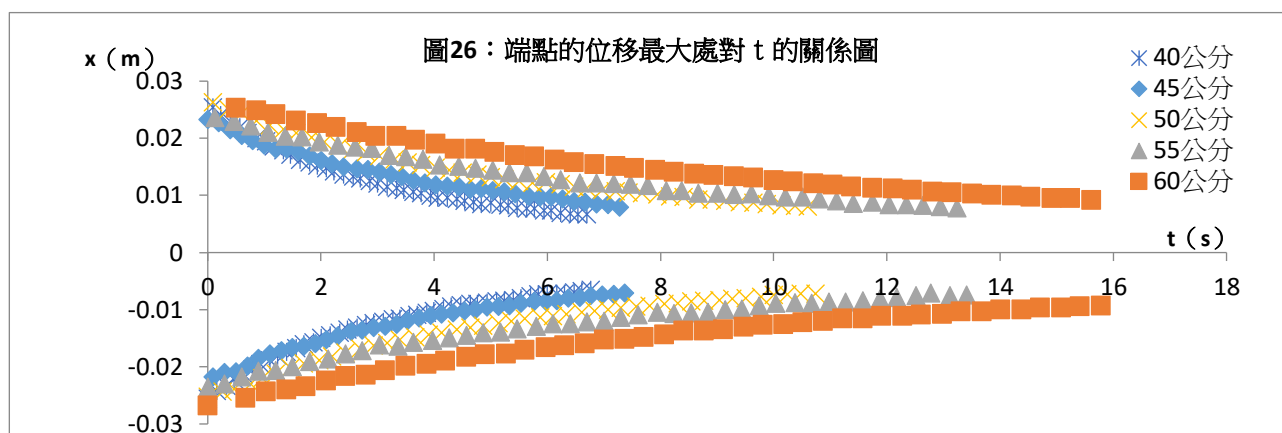
(六) 實驗 c：探討不同尺長 L 對振盪時端點振幅衰減的影響

1.實驗方法

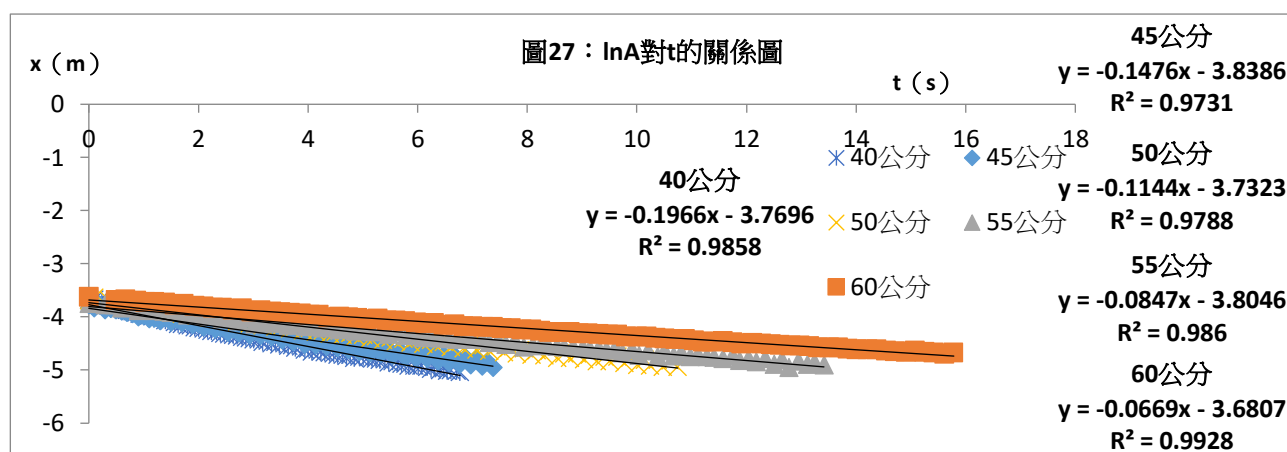
已知次阻尼之運動方程式：位移 $x = \text{初始振幅 } A_0 e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \phi)$ 中， $\cos(\omega t + \phi)$ 的部分是形容 $x-t$ 函數圖中的正弦波形式，本實驗要探討的振幅衰減方程式則可比照阻尼公式的前半部設為振幅 $A = A_0 e^{-\gamma t}$ ，其中 γ 為大於 0 的常數。這個公式也可以解釋實驗 b 之半衰期不受初始振幅影響的結論，並由實驗 b 的結論再得知 γ 不受初始振幅的影響。本實驗要探討不同的尺長對 γ 值的影響，但此實驗有 2 個連動的操作變因：尺長 L 和尺的質量 m (正比 L ，因密度、截面積固定)。由文獻三知 (m 為唯一變因時) $\gamma \propto m^{-1}$ ，同理令 (L 為唯一變因時) $\gamma \propto L^a$ ，這才是我們要的結論。將此變因連動的實驗之 $\gamma \propto m^{-1} L^a$ ，即 $\gamma \propto L^{a-1}$ ，對照實驗將會得到的結果 $\gamma \propto L^b$ ，可得 $a=b+1$ 。即在質量固定的情況下， γ 會與 L 的 $b+1$ 次方成正比。

本實驗為了方便分析，固定以 2.5 公分作為初始振幅，並以 60、55、50、45、40 公分的尺長作為操縱變因，找出 $\gamma \propto L^b$ 中的 b。

2.實驗結果



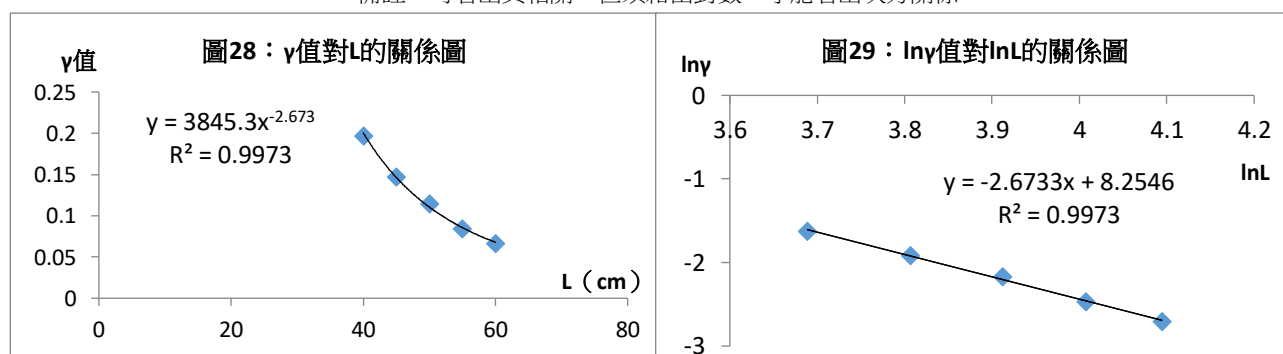
備註：可看出尺長愈短振幅衰減愈快（即 γ 愈大），但須藉由對數，才能找出 γ 值。



備註： $A=A_0e^{-\gamma t}$ 等號兩邊取自然對數後得 $\ln A=-\gamma t+\ln A_0$ ，故圖形的斜率即為 $-\gamma$ ，須再以負的斜率對 L 作圖。

尺長(cm)	圖 27 之直線斜率	γ 值
40	-0.1966	0.1966
45	-0.1476	0.1476
50	-0.1144	0.1144
55	-0.0847	0.0847
60	-0.0669	0.0669

備註：可看出負相關，但須藉由對數，才能看出次方關係。



實驗結果顯示 γ 與 L 的 2.67 次方成反比，而 -2.67 即 1. 所述之 b ，根據 1. 之推導我們得到，在 L 為唯一變因的情況下， γ 與 L 的 -2.67+1 次方成正比，即是 γ 與 L 的 1.67 次方成反比。

(七) 鐵尺阻尼振盪之小結

1. 單鐵尺的振盪情形為一振幅隨時間衰減的正弦波，且週期不隨時間改變。
2. 振幅衰減方程式可寫為 $A=A_0e^{-\gamma t}$ （故半衰期與初始振幅無關），其中 $\gamma \propto m^{-1}L^{-1.67}A_0^0$ 。

三、雙鐵尺以彈簧連接之耦合振盪實驗：探討以彈簧連接之兩鐵尺振盪的耦合情形

(一) 符號解釋（如圖 30）以及實驗裝置圖（如圖 31）

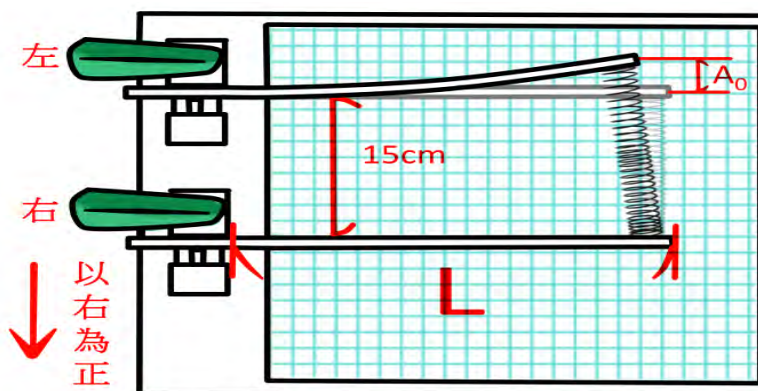


圖 30



圖 31

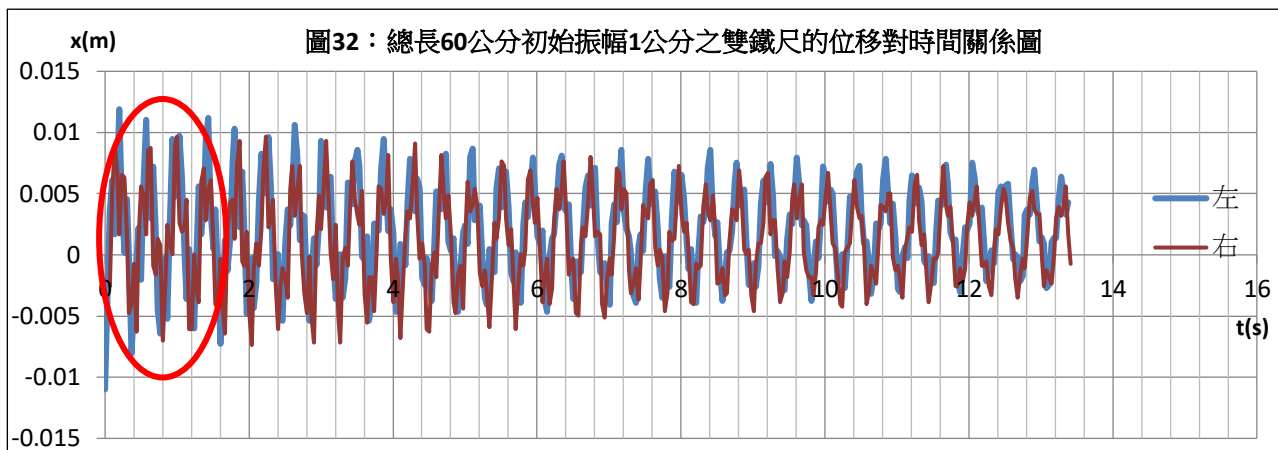
(二) 前置作業

1. 在實驗組底下固定一張大方格紙作為參考基準。
2. 將兩支鐵尺的端點以彈簧連接。
3. 用 2 個 C 型夾以及 4 個 S 形夾將尺固定，並分別與方格紙之格線切齊。
4. 在鐵尺的上方架設高速攝影機，並於每次實驗開始前以水平儀校正。
5. 確認鐵尺不與桌面接觸，避免摩擦力造成的誤差。

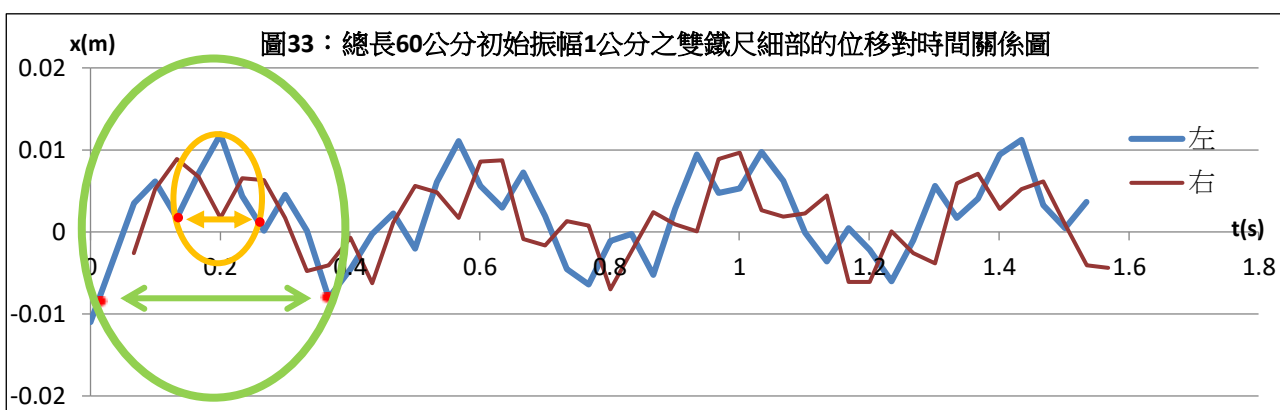
(三) 實驗方法（共同部分）

1. 以鐵尺下方之方格紙為基準，以手指將左邊鐵尺的端點向外拉至所需的初始振幅，同時以另一隻手指固定右邊鐵尺的端點。（方向如圖 30 所示）
2. 以垂直端點切線的方向同時放開兩邊手指，使尺開始振盪並攝影（1. 前就要開始錄）
3. 匯入 tracker 追蹤端點偏移平衡點（1. 前的位置）的垂直位移 x 與時間 t 的關係，並統一以右為正。
4. 將 3. 之左右兩鐵尺的資料匯入 excel 疊成一張圖。

(四) 實驗 a：雙鐵尺耦合振盪情形概觀



備註：可看出兩尺大致波形類似且同步，但沒完全吻合，故放大紅圈部分作圖 33 來分析。

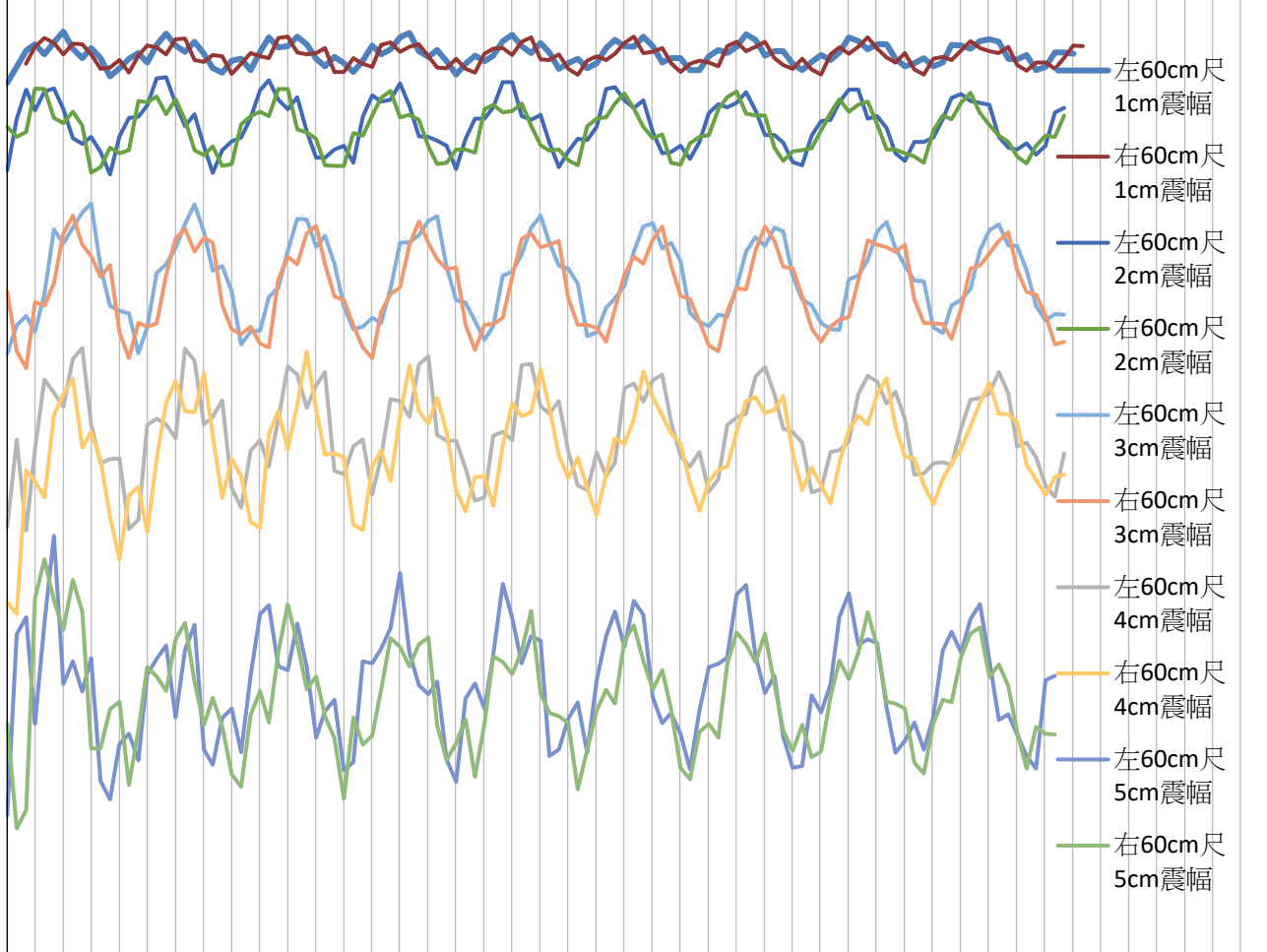


1. 雙鐵尺的振盪波形有明顯的同步波形（綠色圈圈）及互補波形（黃色圈圈）兩種，而兩者均不隨時間改變。
2. 同步的波形週期較互補波形長，並且與單鐵尺振盪波形類似，故稱之振盪週期（如綠色箭頭）；但雙鐵尺（以彈簧連接）的振盪週期較單鐵尺（阻尼）的振盪週期略長：以 60 公分之鐵尺為例，雙鐵尺振盪週期約為 0.42 秒，而單鐵尺振盪週期約為 0.36 秒。
3. 互補的波形週期較同步波形短，並且類似耦合，故稱之耦合週期（如黃箭頭）。
4. 基於以上三點，設計實驗二、三，分別探討初始振幅與尺長對兩種不同週期的影響。

(五) 實驗 b：探討初始振幅對振盪、耦合週期的影響

1. **實驗方法：**固定以 60 公分為尺的總長，分別以 1、2、3、4、5 公分的初始振幅，統一用 tracker 追蹤 118 個影格點並疊成一張圖比較同時間內的週期數。
2. **實驗結果：**（振幅向下遞增排列）

圖34：60公分總長不同初始振幅之雙鐵尺振盪的端點位移對時間關係疊圖



尺長 L(cm)	初始振幅 (cm)	振盪總時間(s)	耦合總時間(s)	振盪週期 數	耦合週期 數	振盪週期(s)	耦合週期(s)	一個振盪週期 的耦合週期數
60	1	3.67	3.77	9	30	0.408	0.01256	3.24
60	2	3.67	3.67	9	30	0.408	0.01211	3.33
60	3	3.64	3.67	9	29	0.404	0.01242	3.25
60	4	3.70	3.67	9	29	0.411	0.01246	3.30
60	5	3.67	3.77	9	30	0.408	0.01256	3.24

備註：可以明顯看出振盪週期、耦合週期、一個振盪週期的耦合週期數與初始振幅為零相關，故不另外作圖。

可得知（1）振盪週期不受初始振幅影響。

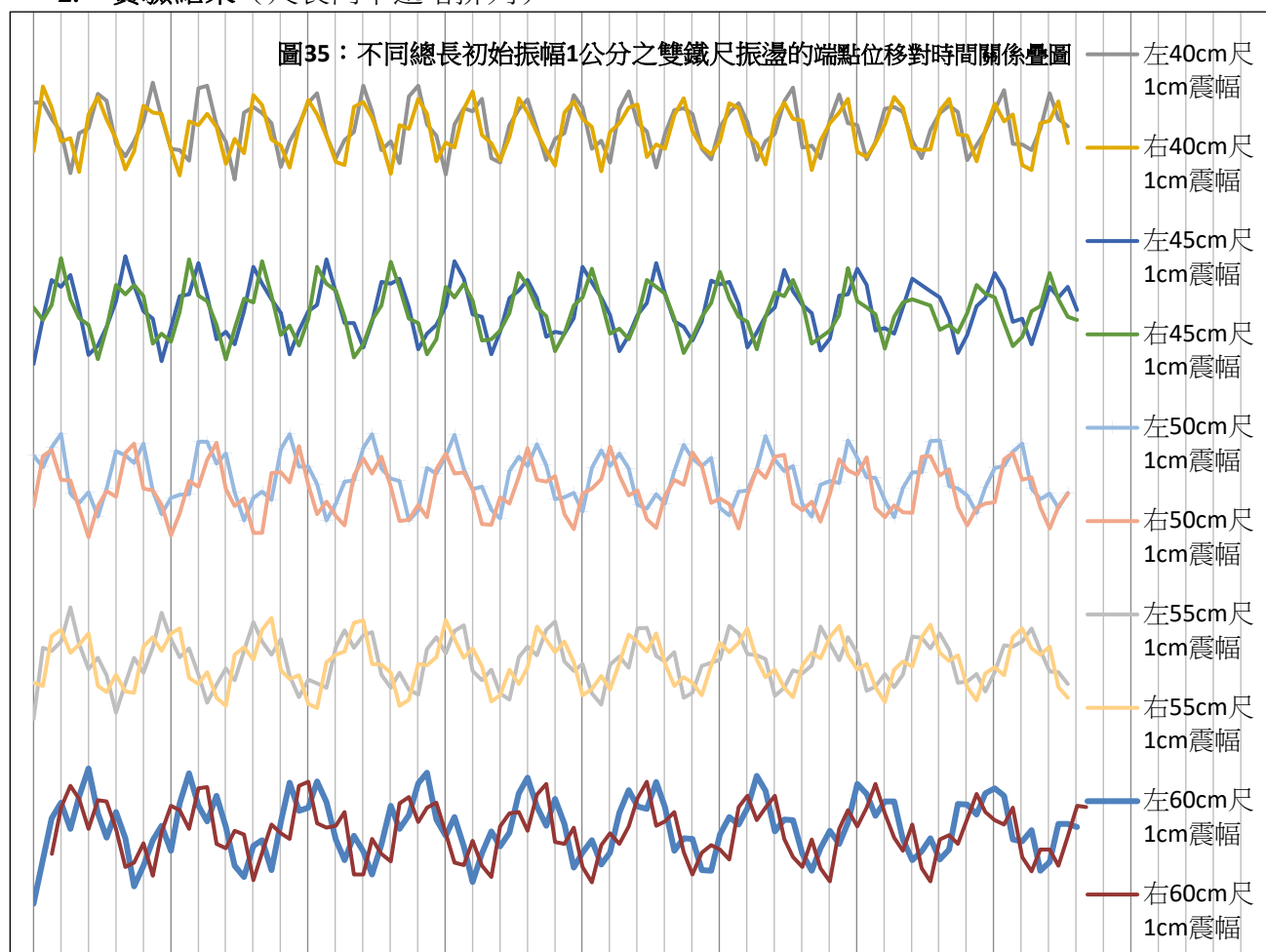
（2）耦合週期不受初始振幅影響。

（3）耦合週期與振盪週期的比值不受初始振幅影響。

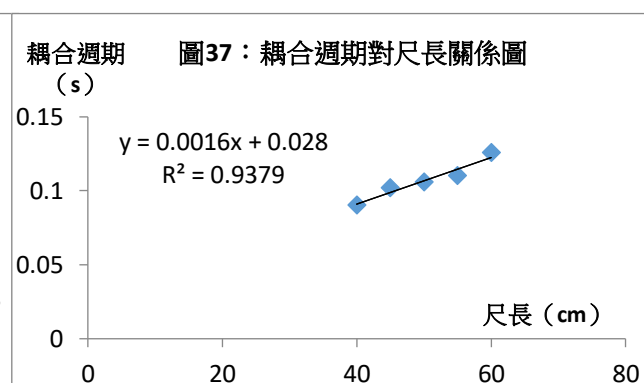
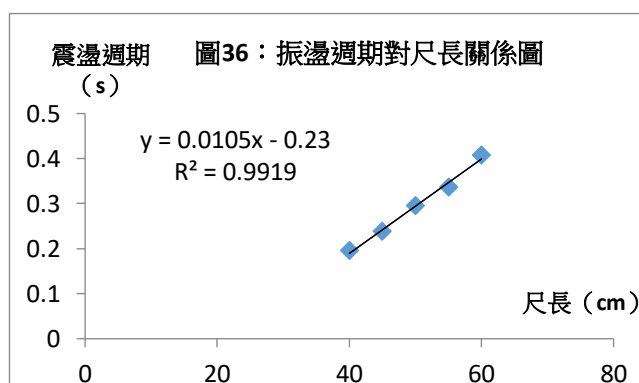
（六）實驗 c：探討鐵尺的總長對振盪、耦合週期的影響

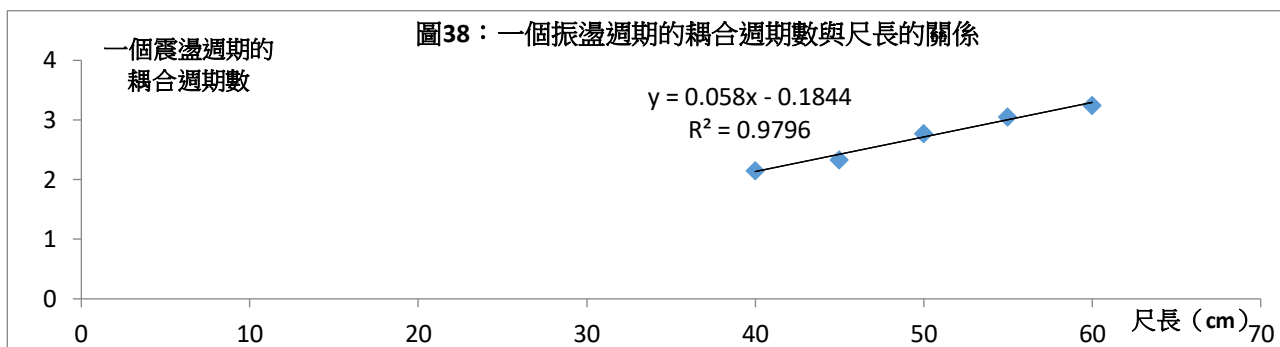
1. 實驗方法：固定 1 公分振幅，分別以 40、45、50、55、60 公分作為鐵尺的總長，統一用 tracker 追蹤 118 個影格點並疊成一張圖比較同一時間內的週期數。

2. 實驗結果（尺長向下遞增排列）



尺長	初始振	振盪總時	耦合總時	振盪週	耦合週	振盪週	耦合週	一個振盪週期的耦合週期數
L(cm)	幅(cm)	間(s)	間(s)	期數	期數	期(s)	期(s)	
40	1	3.51	3.71	18	41	0.195	0.0904	2.16
45	1	3.57	3.77	15	37	0.238	0.102	2.34
50	1	3.53	3.71	12	35	0.294	0.106	2.78
55	1	3.70	3.74	11	34	0.336	0.111	3.06
60	1	3.67	3.77	9	30	0.408	0.126	3.24





備註：雖均呈線性關係，但截距相較於縱軸尺度顯然不可忽略，故不是正比關係，應均為正相關。

(七) 鐵尺耦合振盪之小結

1. 振盪週期與尺長的關係為正相關。
2. 耦合週期與尺長的關係為正相關。
3. 一個振盪週期的耦合週期數與尺長的關係為正相關。

伍、討論與實驗結論

一、鐵尺彎曲實驗

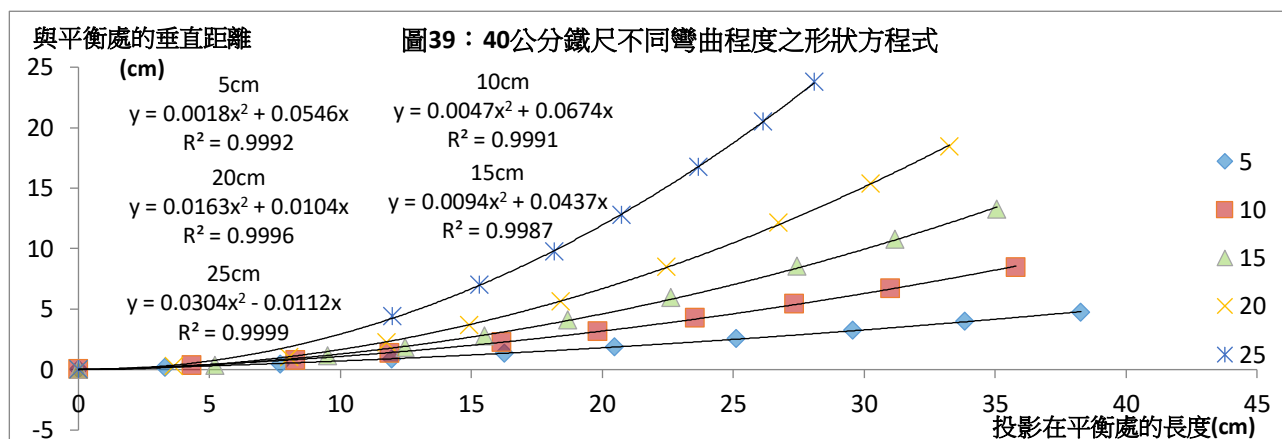
(一) 實驗方法的討論

本實驗欲探討拉力 F 與鐵尺總長 L 、彎曲程度(端點位移 h 或端點切線角變量 θ)的關係，理應先①固定一種 L 找 f 對 h 、② f 對 θ 的關係，再③固定一種 h 找 f 對 L 的關係，最後④固定一種 θ 找 f 對 L 的關係；分別以①③合併為 f 對 L 、 h 的關係，②④合併為 f 對 L 、 θ 的關係。但找④的實驗中 θ 無法控制相同，又因切線角變量（切線與原處的夾角）必須由拍照匯入電腦分析才能找出，基於 θ 要實驗後才能確定的特性，我們決定以與④同義的實驗方法：固定 5 種 L ，改變 h 找出對應的 f 、 θ ，並分別找出每一種長度的 f - θ 圖的斜率，再以斜率對 L 作圖，而 f - θ 圖的斜率對 L 的關係即為④求得的關係；而③之方法雖然可行，但考量到找 f - h 的斜率對 L 的關係時樣本數較③多，使得誤差的影響降低，且數據不必再額外測量，故也將③以與之同義的此方法取代。

(二) 實驗結果的討論

1. 在固定尺長的實驗中，我們發現兩種表示彎曲程度的物理量 h 、 θ 呈現漂亮的正比，讓我們好奇鐵尺彎曲的形狀為何。於是以固定點為原點，鐵尺平衡處為 x 軸，

找出 40 公分鐵尺不同彎曲程度 ($h=5、10、15、20、25\text{cm}$) 的方程式並疊圖如下：



備註：因必過原點，故直接設定趨勢線截距為 0，無常數項。

由上圖可以看出：不論彎曲程度為何，鐵尺的形狀都遵守二次曲線（拋物線）的形式，故我們由此推測同總長下不論大小角度 h 均正比於 θ 應是一種數學上的關係。

2. 文獻七與我們做的實驗類似：一金屬條以一端固定，在另一端掛上砝碼，測量砝碼

重量與端點位移的關係，得到拉力 F 和端點位移 h

成正比，和尺長 L 的 3 次方成反比；而我們的實驗則是

得到拉力 f 和端點位移 h 成正比，和尺長 L 的 3.02

次方成反比的結論。

雖然乍看之下結論相似，卻有一個很大的不同點，

即在於拉力的方向——文獻四中方向恆與原處垂直，

我們的卻是恆與端點的切線方向垂直，如圖 40 所示。此兩方向的夾角恰為 θ (θ 為當初用

來表示彎曲程度所定義的物理量)，故 $F = f / \cos \theta$ (因 f 為有效分力，即為最小拉力，故可

以確定 $f < F$)。我們的實驗多了一個變數 $\cos \theta$ ，卻得到了類似的結果，顯然在邏輯上是不合

理的，因此我們用現有的數據做驗證：先取固定 $h=10$ 及 $h=20$ 公分，依我們的結論作 $f-L$ 關

係圖，再依文獻四的結論作 $f/\cos \theta - L$ 關係圖來做比較。

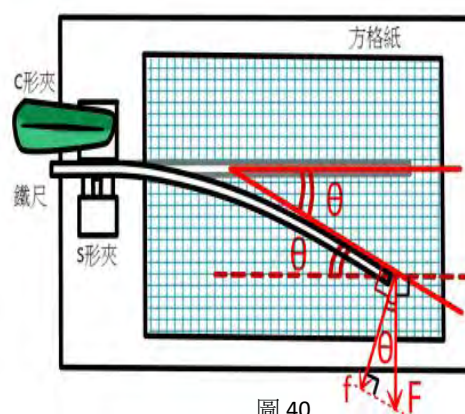
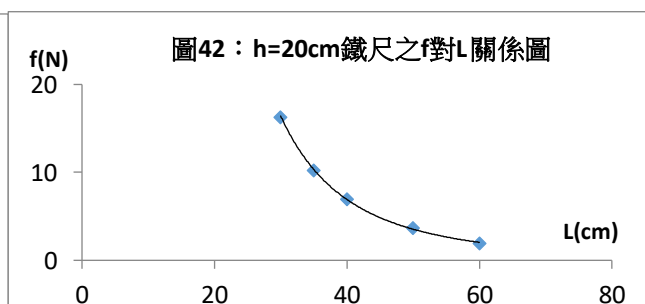
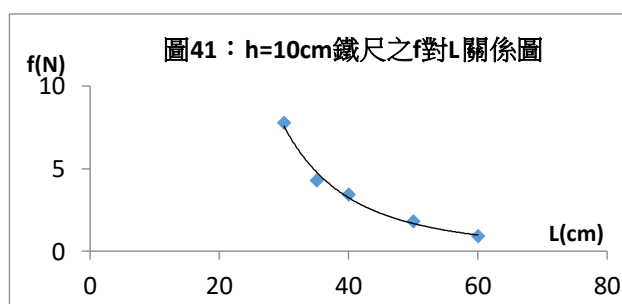
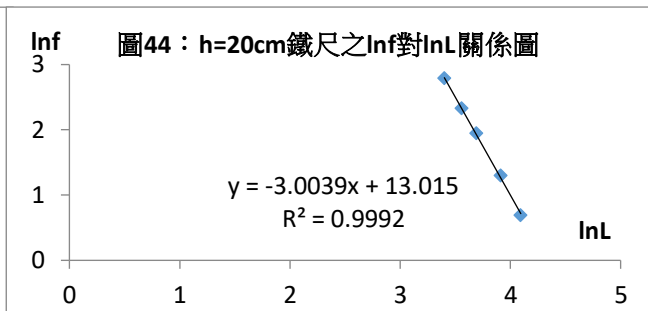
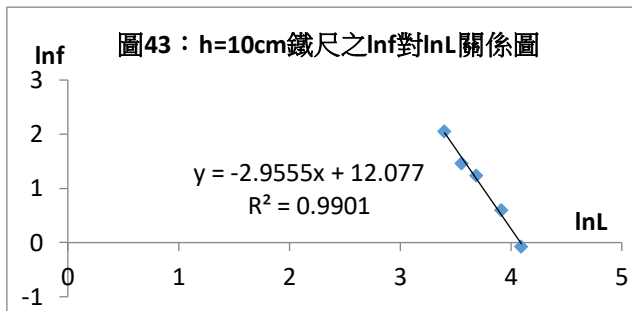


圖 40

(1) $f-L$ 關係圖 (我們的實驗方法) 備註：圖 41、42 均可看出負相關，但須藉由對數，才能看出次方關係。

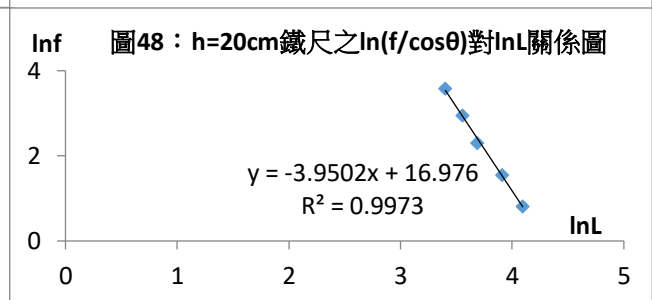
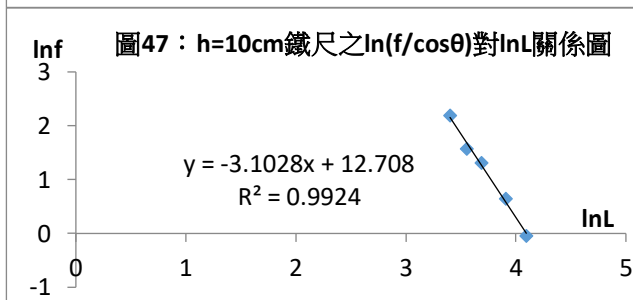
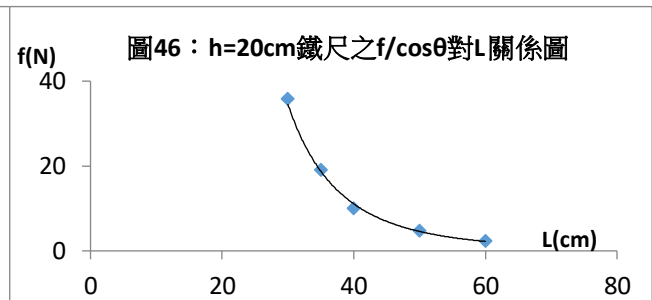
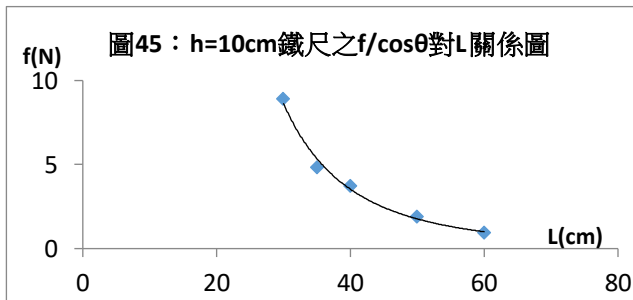




由此可見，不論彎曲程度的大小，相同彎曲程度時 f 均接近與 L 的 3 次方成反比。

（會與先前的 3.02 次方不同是因為選取的樣本數量差異）

（2） $f/\cos \theta$ - L 關係圖（文獻實驗方法）備註：圖 45、46 均可看出負相關，但須藉由對數才能看出次方關係



由此可見，當固定的彎曲程度較小時， $f/\cos \theta$ 接近與 L 的 3 次方成反比，與 f 對 L 的關係接近；但當固定的彎曲程度較大時， $f/\cos \theta$ 卻接近與 L 的 4 次方成反比。

比較兩種結果能發現， h 固定下應是有效分力方向的 f 才會滿足 $f \propto L^{-3.02}$ （因此乘幂關係要成立必須要與固定的 h 大小無關），但文獻四的 $F (= f/\cos \theta)$ 在彎曲程度小的時候與我們得到的關係相似；我們認為這是因為文獻四使用的金屬塊彎曲程度並不大，也就是 θ 極小，而此時 $\cos \theta$ 會趨近於 1，也就是說這時候的 F 會趨於與 f 相等。

這可以解釋文獻四的結論與我們有所差異的原因。本實驗的獨特之處在於我們得到能真正使彈性彎曲體彎曲的有效分力方向，另外，我們得出的關係在大小角度都適用。

（三）鐵尺彎曲實驗結論

1. 不論鐵尺總長或彎曲程度為何，使鐵尺彎曲之作用於端點的有效分力恆與端點的切線方向成垂直。
2. 兩種彎曲程度 h （端點垂直位移）及（端點切線與原處夾角） θ ，在小角度下 $h \propto \theta L$ 應是數學上必然的關係，但我們的實驗中竟發現大角度下也滿足此關係。
3. 在線密度、粗細不變下，使鐵尺彎曲之有效拉力 $f = c_0 h L^{-3.02}$ ，其中 c_0 為常數，單位為 $\text{Nm}^{2.02}$ 。

二、鐵尺之阻尼振盪實驗

（一）實驗結果的討論

從文獻以及我們的實驗結果可以知道，鐵尺的質量或總長愈大，能量的衰減就愈慢。若類比到建築結構當中，則可以解釋為什麼一根鋼筋往往不能太長——鋼筋越長，地震的時候振動能量衰減就愈慢，可想而知所造成的災害也會嚴重許多。

（二）鐵尺之阻尼振盪實驗結論

1. 鐵尺的振盪情形為一振幅隨時間衰減的正弦波，且週期不會隨時間改變。
2. 振幅的衰減方程式可寫為 $A = A_0 e^{-\gamma t}$ ，其中 $\gamma \propto m^{-1} L^{-1.67}$ ，而與初始振幅無關，故尺長愈長，振幅衰減就會愈慢。

三、雙鐵尺以彈簧連接之耦合振盪實驗

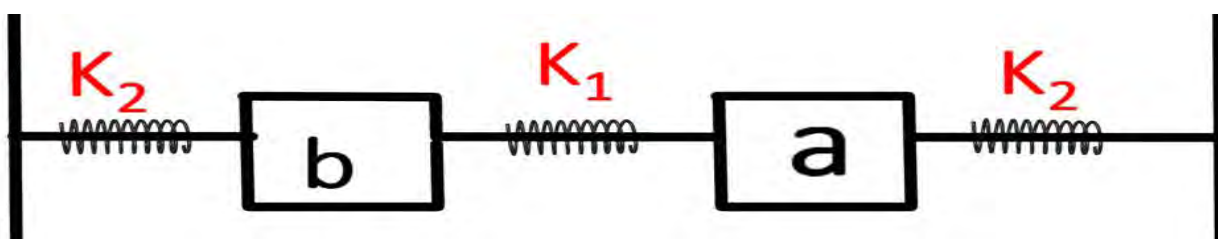
（一）耦合理論模型

1. 說明：

我們在文獻中看到通常在分析單一此類彈性物體振動時會採用彎矩來分析，但須運用相對高深的微積分，遠遠超出高中生能力所及，何況再加上兩者的耦合會更複雜，我們查尋文獻並沒有發現前人的探討或已建立的模型。因此我們決定自己建立一套較簡單的模型試圖解釋此類複雜的問題。首先我們由實驗一得知有效力（ F ）與偏離的位移（ H ）兩者成正比；實驗二得知鐵尺在振盪的波型與簡諧振盪的波型相似；由上述兩點，在小角度下，我們以以下模型簡化其端點之振動，示意圖如下。



圖中彈簧表示鐵尺偏移時所受到的恢復力，由我們在實驗一得到的式子 $F = \frac{c_0 h}{L^{3.02}}$ ，令 $\frac{c_0}{L^{3.02}}$ 為等效 k 值 (k')，使滿足 $F = k'h$ 的形式，值得注意的是文獻中用彎矩導出單一此類物體其振盪之角頻率為下： $\omega = \alpha_n \sqrt{\left(\frac{EI}{mL^3}\right)}$ ，其中 EI 呈現的是彎曲剛度， m 為質量，令 $\frac{EI}{L^3}$ 為 k'' 得到 $\omega = \alpha_n \sqrt{\left(\frac{k''}{m}\right)}$ 與模型之 $\omega = \sqrt{\left(\frac{k'}{m}\right)}$ 對應驗證我們的方法之合理與可行性。而推廣至雙鐵尺耦合振盪模型如下，其中 k_2 彈簧造成的力表示彈性彎曲體彎曲後本身的恢復力，而 k_1 則表示 a 、 b 物體在耦合時連接的彈簧。



2.理論式子的推導：

(1) 在做單邊鐵尺的力學分析時，端點受彎曲產生的恢復力等效於彎曲實驗中與有效拉力

$$f_1 = \frac{c_0 h}{L^{3.02}} \text{ (如圖 49) 等大反向的作用力 } f_2, \text{ 而我們固定取垂直原處方向的分力 } f_3 (= f_2 \cos \theta)$$

來做力學分析。

(2) 已知彎曲程度 θ (如圖 49) 會隨端點位移而增大，而隨尺長而變小。故在改變初始振幅實驗中 θ 最大發生在尺長 60 公分、端點位移為 5 公分時；而在改變尺長的實驗中，彎曲程度 θ 最大則發生在尺長 40 公分、端點位移為 1 公分時。取兩者聯集，比對彎曲實驗中尺長 40 公分、端點位移為 5 公分時的 $\theta = 0.161375$ ，此時 $\cos \theta = 0.987$ ，近似於 1 (誤差小於 1.3%)，也就是說在耦合振盪實驗中的彎曲程度夠小，使 $f_3 (= f_2 \cos \theta)$ 可近似於 f_2 以便分析。

(3) 彈簧的恢復力與空氣阻力之方向雖也會隨端點位移改變，但基於 2.提及之彎曲程度太小，故近似為垂直原處的方向簡化計算。

(4) 如圖 50、圖 51，依力學分析可列：

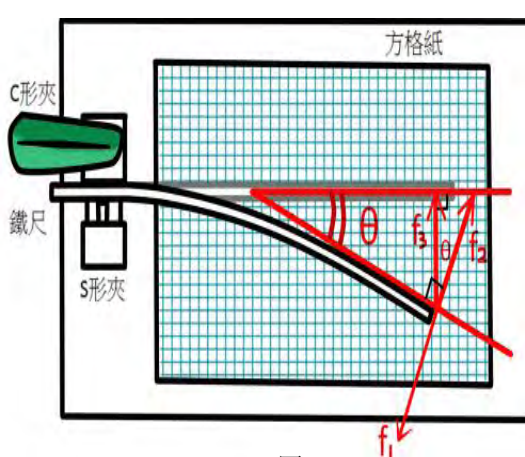


圖 49

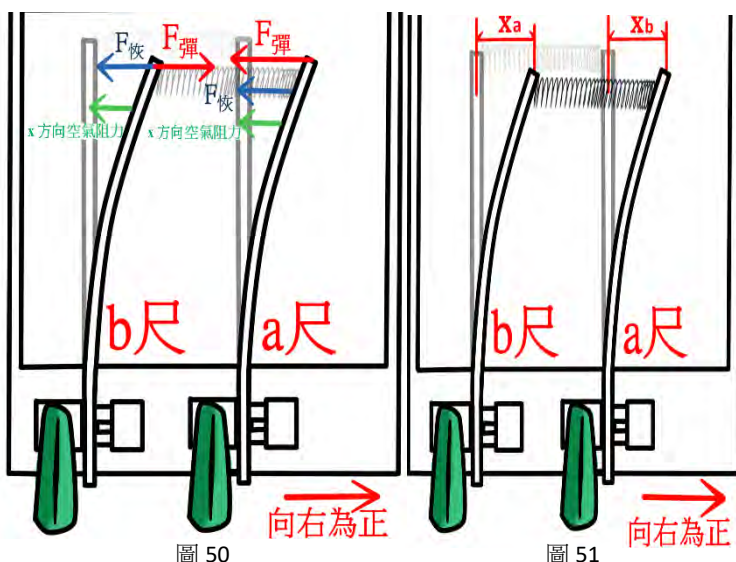


圖 50

圖 51

$$(1) \begin{cases} m \cdot \frac{d^2 x_A}{dt^2} = -k' x_A - k(x_A - x_B) - b \cdot \frac{dx_A}{dt} & \dots \dots \text{①} \\ m \cdot \frac{d^2 x_B}{dt^2} = -k' x_B + k(x_A - x_B) - b \cdot \frac{dx_B}{dt} & \dots \dots \text{②} \end{cases}$$

其中 k' 為鐵尺彎曲後所受恢復力之等效彈力係數， k 為彈簧之彈力係數， b 為空氣阻力係數。

* 令①、②相加，化簡得：

$$(2) m \cdot \frac{d^2 (x_A + x_B)}{dt^2} = -k' (x_A + x_B) - b \cdot \frac{d(x_A + x_B)}{dt}$$

* 令 $X_1 = x_A + x_B$ ，得：

$$(3) m \cdot \frac{d^2 X_1}{dt^2} = -k' X_1 - b \cdot \frac{dX_1}{dt}$$

* 又令 $X_1 = c_1 \cdot e^{\lambda_1 t}$ ：

$$\text{則 } m \cdot \lambda_1^2 \cdot c_1 \cdot e^{\lambda_1 t} = -k' \cdot c_1 e^{\lambda_1 t} - b \cdot c_1 \cdot \lambda_1 e^{\lambda_1 t}$$

$$m \lambda_1^2 = -k' - b \lambda_1$$

$$m \lambda_1^2 + b \lambda_1 + k' = 0$$

$$\text{得(4) } \lambda_1 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4mk'}}{2m}$$

* 令①、②相減，化簡得：

$$(5) m \cdot \frac{d^2 (x_A - x_B)}{dt^2} = -k' (x_A - x_B) - 2k(x_A - x_B) - b \cdot \frac{d(x_A - x_B)}{dt}$$

* 令 $X_2 = x_A - x_B$ ，得：

$$(6) m \cdot \frac{d^2 X_2}{dt^2} = -k' X_2 - 2k X_2 - b \cdot \frac{dX_2}{dt}$$

* 又令 $X_2 = c_2 \cdot e^{\lambda_2 t}$:

$$\text{則 } m \cdot \lambda_2^2 \cdot c_2 \cdot e^{\lambda_2 t} = -(k' + 2k) \cdot c_2 e^{\lambda_2 t} - b \cdot c_2 \cdot \lambda_2 e^{\lambda_2 t}$$

$$m\lambda_2^2 = -(k' + 2k) - b\lambda_2$$

$$m\lambda_2^2 + b\lambda_2 + (k' + 2k) = 0$$

$$\text{得 (7) } \lambda_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4m(k' + 2k)}}{2m}$$

$$* \text{ 令 } \begin{cases} \frac{b}{2m} = \gamma \\ \omega_1^2 = \frac{k'}{m} \\ \omega_2^2 = \frac{k' + 2k}{m} \end{cases}, \text{ 則 } \begin{cases} \lambda_1 = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_1^2} \\ \lambda_2 = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_2^2} \end{cases}。$$

◎若 $\gamma^2 < \omega_1^2$, 則得 :

$$(8) X_1 = A_0 \cdot e^{-\gamma t} \cdot \cos(\omega_1' t + \theta_1)$$

$$\text{其中 (9) } \omega_1' = \sqrt{\omega_1^2 - \gamma^2}$$

◎又若 $\gamma^2 < \omega_2^2$, 則得 :

$$(10) X_2 = A_0 \cdot e^{-\gamma t} \cdot \cos(\omega_2'' t + \theta_2)$$

$$\text{其中 (11) } \omega_2'' = \sqrt{\omega_2^2 - \gamma^2}$$

* 將(8)、(10)以 X_A 、 X_B 表示 :

$$\text{得(12) } \begin{cases} X_A + X_B = A_0 \cdot e^{-\gamma t} \cdot \cos(\omega_1' t + \theta_1) \\ X_A - X_B = A_0 \cdot e^{-\gamma t} \cdot \cos(\omega_2'' t + \theta_2) \end{cases}$$

* 以(12)代入初始條件以求初始相位角, $t=0$ 時, 兩者速度為 0 :

$$0 = \frac{dx_A}{dt} + \frac{dx_B}{dt} = -\gamma \cdot A_0 \cdot e^{-\gamma t} \cdot \cos(\omega_1' t + \theta_1) - A_0 \cdot e^{-\gamma t} \cdot \omega_1' \cdot \sin(\omega_1' t + \theta_1)$$

$$-\gamma \cdot A_0 \cdot \cos \theta_1 - A_0 \cdot \omega_1' \cdot \sin \theta_1 = 0$$

$$\text{則 } \gamma \cdot \cos \theta_1 = -\omega_1' \cdot \sin \theta_1$$

$$\tan \theta_1 = \frac{\gamma}{-\omega_1'}$$

$$\text{再化簡可得 (13) } \theta_1 = \tan^{-1} \frac{\gamma}{-\omega_1'}$$

$$\text{同理可得 (14) } \theta_2 = \tan^{-1} \frac{\gamma}{-\omega_2''}$$

* 以相加相減化簡得 :

$$(15) \begin{cases} X_A = A_0 \cdot e^{-\gamma t} \cdot \frac{\cos(\omega' t + \theta_1) + \cos(\omega'' t + \theta_2)}{2} \\ X_B = A_0 \cdot e^{-\gamma t} \cdot \frac{\cos(\omega' t + \theta_1) - \cos(\omega'' t + \theta_2)}{2} \end{cases}$$

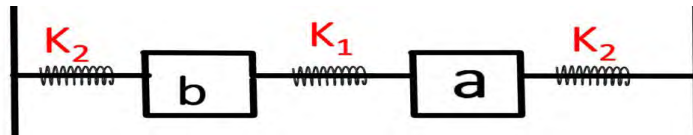
* 以和差化積公式代入，最終得到耦合振盪之鐵尺端點位移滿足：

$$\begin{cases} x_A = A_0 \cdot e^{-\gamma t} \cdot \cos\left[\frac{(\omega' + \omega'')t}{2} + \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right] \cdot \cos\left[\frac{(\omega' - \omega'')t}{2} + \frac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right], \\ x_B = -A_0 \cdot e^{-\gamma t} \cdot \sin\left[\frac{(\omega' + \omega'')t}{2} + \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right] \cdot \sin\left[\frac{(\omega' - \omega'')t}{2} + \frac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right] \end{cases}$$

$$\text{其中 } \omega' = \sqrt{\left(\frac{c_0}{mL^{3.02}}\right) - \gamma^2}, \quad \omega'' = \sqrt{\left(\frac{c_0}{mL^{3.02}} + \frac{2k}{m}\right) - \gamma^2}, \quad \theta_1 = \tan^{-1} \frac{\gamma}{-\omega'}, \quad \theta_2 = \tan^{-1} \frac{\gamma}{-\omega''}$$

(二) 理論模型與實驗結果的比較

1. 找出 c_0 ：已知有效拉力 $f = \frac{c_0 h}{L^{3.02}}$ (h 為端點位移， L 為尺長)，故分別以彎曲實驗其中 5 組 L 、 h 、 f 來求出 5 個 c_0 ，並求出平均為 2.485 ($\text{Nm}^{2.02}$)。
2. 彈簧 k 值：74.64N/m。
3. 找出尺質量 m ：先測 60 公分（整隻尺）的質量=0.1383kg，則 $0.1383\text{N} \times$ （固定端距離自由端的尺長（即 L ）/60）即為所求。
4. 找出 γ 值：即阻尼振盪實驗之 γ 值。
5. 此實驗與弱耦合模型的差異：



上述之弱耦合的結論在 k_2 （兩旁彈簧） $\gg$ （ k_1 中間彈簧）的情況下才會成立；而此實驗

之等效 k_2 即為 $\frac{c_0}{L^{3.02}}$ ，實驗數據中最大的 k_2 發生在 $L=40$ 公分時，其值為 $\frac{2.485}{0.4^{3.02}} = 38.49$ (N/m)，

而用來連接的彈簧 k_1 固定為 74.64N/m，可見本實驗之 k_1 反而大於 k_2 ，並不滿足形成弱耦合的條件。

由實驗結果來比較，一般常見的耦合形式的週期較振盪週期大（波形會如圖 52 的形式）；

而我們得到的耦合形式為耦合週期小於振盪週期（波形如圖 53），有別於一般耦合形式。

圖 52

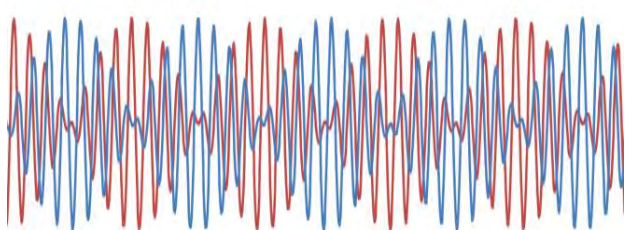
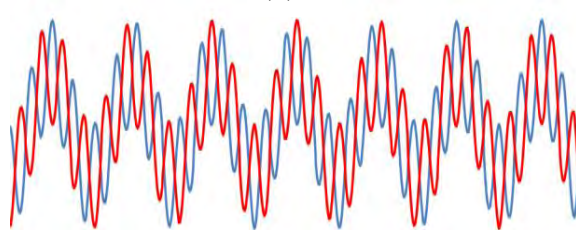


圖 53



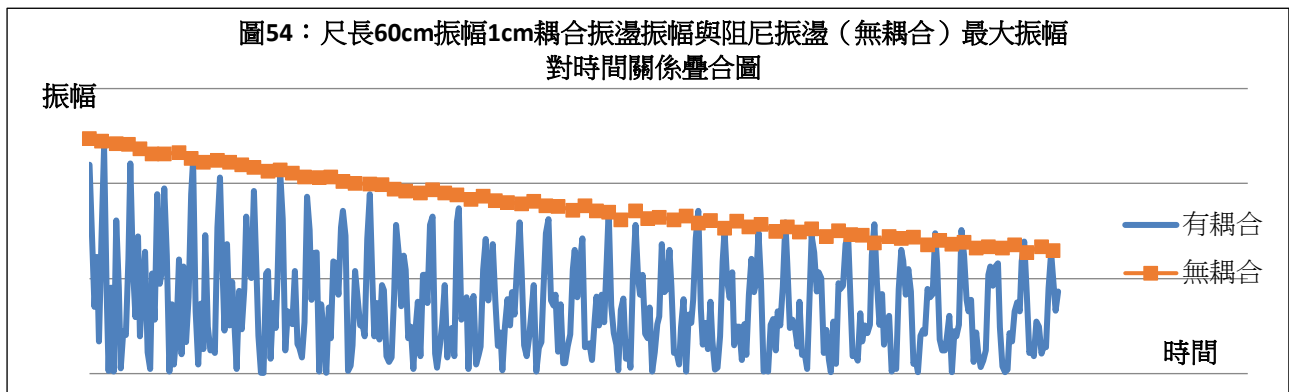
6.雖然實驗結果並不符合弱耦合模型，但因與其只差在 k 值大小，故我們認為這仍算一種不同形式上的耦合，且查詢資料後亦無發現相關文章探討此現象。

7.有無耦合振盪對振幅衰減的影響

$$\text{位移方程式} \begin{cases} x_A = A_0 \cdot e^{-\gamma t} \cdot \cos \left[\frac{(\omega' + \omega'')t}{2} + \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right] \cdot \cos \left[\frac{(\omega' - \omega'')t}{2} + \frac{\theta_1 - \theta_2}{2} \right] \\ x_B = -A_0 \cdot e^{-\gamma t} \cdot \sin \left[\frac{(\omega' + \omega'')t}{2} + \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right] \cdot \sin \left[\frac{(\omega' - \omega'')t}{2} + \frac{\theta_1 - \theta_2}{2} \right] \end{cases}$$

兩隻尺的衰減情形 $A_0 \cdot e^{-\gamma t}$ 與實驗二阻尼實驗（無耦合）控制衰減的 γ 相同 ($\gamma = \frac{b}{2m}$)，

於是固定尺長 60cm、振幅 1cm，取耦合振盪其中一隻尺與實驗二之數據做疊圖比較：



備註：耦合振盪的最大振幅對時間函數(即藍色上方包絡線)與無耦合時幾乎相同。

8.由此可見，有無耦合振盪並不會顯著影響振幅的衰減，可以用來驗證鋼筋結合在一起時，如果發生耦合，震幅不會較快衰減。

9.振盪、耦合週期與初始振幅的關係

$$\text{位移方程式} \begin{cases} x_A = A_0 \cdot e^{-\gamma t} \cdot \cos \left[\frac{(\omega' + \omega'')t}{2} + \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right] \cdot \cos \left[\frac{(\omega' - \omega'')t}{2} + \frac{\theta_1 - \theta_2}{2} \right] \\ x_B = -A_0 \cdot e^{-\gamma t} \cdot \sin \left[\frac{(\omega' + \omega'')t}{2} + \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right] \cdot \sin \left[\frac{(\omega' - \omega'')t}{2} + \frac{\theta_1 - \theta_2}{2} \right] \end{cases} \text{中，不論}$$

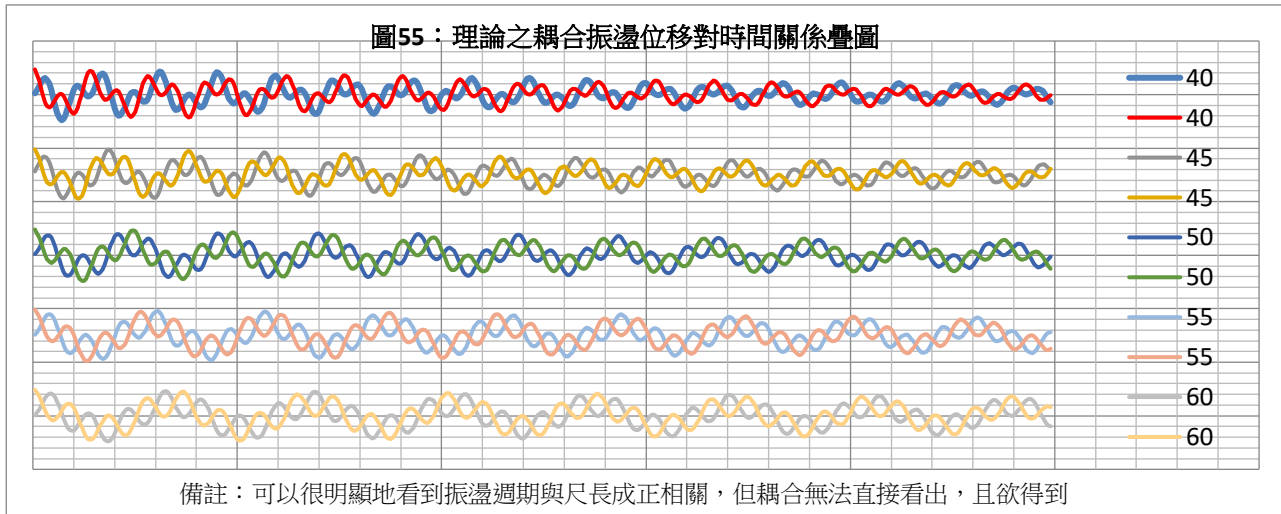
是 ω' 和 ω'' 都與初始振幅 A_0 無關。單獨出現的 A_0 只會影響整體的振幅，並不會影響週期，與實驗結果相同。

10.振盪、耦合週期與尺長的關係

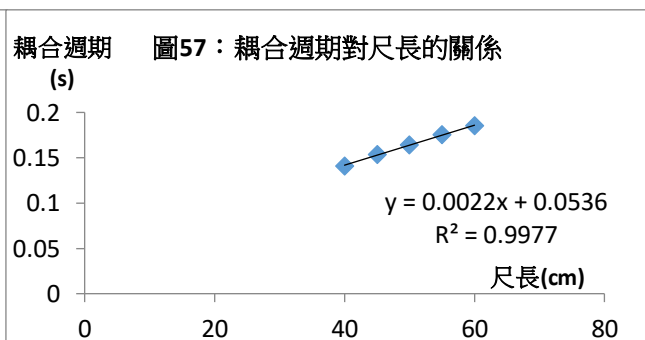
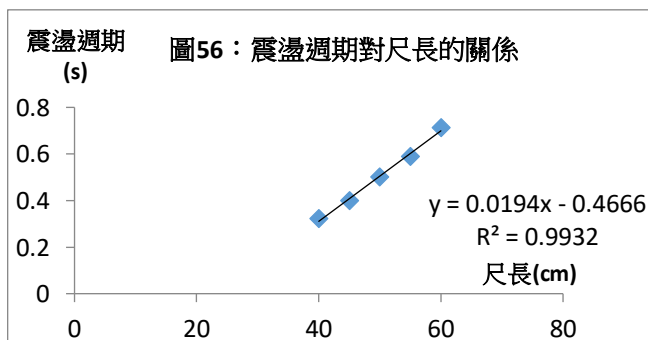
(1) 比對方法：分別以 40、45、50、55、60 公分的鐵尺，找出該長度之位移方程式 (A_0 固定為 1 公分)，並以 excel 疊圖。

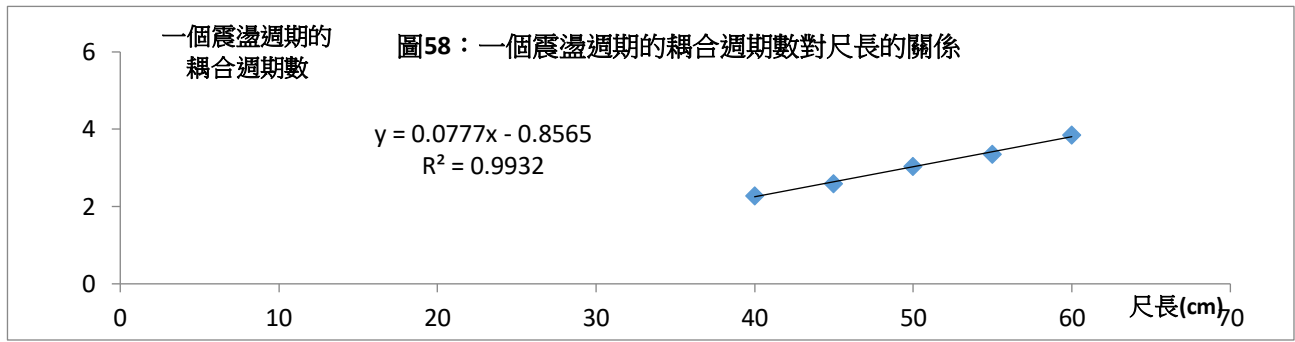
c_0	m	L	k	γ	$(\omega' + \omega'')/2$	$(\omega' - \omega'')/2$	$(\theta_1 + \theta_2)/2$	$(\theta_1 - \theta_2)/2$
2.485	0.1383	0.6	74.6422	0.0669	21.63832	-12.47121449	-0.004629515	-0.00267
2.485	0.126775	0.55	74.6422	0.0847	23.46495	-12.54588093	-0.00505449	-0.0027
2.485	0.11525	0.5	74.6422	0.1144	25.78387	-12.55929717	-0.005816959	-0.00283
2.485	0.103725	0.45	74.6422	0.1476	28.8259	-12.48211113	-0.006301923	-0.00273
2.485	0.0922	0.4	74.6422	0.1966	32.98221	-12.27280405	-0.006918615	-0.00257

(2) 比對結果



尺長 $L(\text{cm})$	總時間(s)	振盪週期數	耦合週期數	振盪週期(s)	耦合週期(s)	一個振盪週期的 耦合週期數
40	5	15.5	35.5	0.323	0.141	2.29
45	5	12.5	32.5	0.400	0.154	2.60
50	5	10	30.5	0.500	0.164	3.05
55	5	8.5	28.5	0.588	0.175	3.35
60	5	7	27	0.714	0.185	3.86





備註：雖均呈線性關係，但截距相較於縱軸尺度顯然不可忽略，故不是正比關係。應皆為正相關。

由理論模擬圖比對實驗結果圖可發現均有互補的耦合波形，能量在此過程相交換。

$$\text{位移對時間的方程式} \begin{cases} x_A = A_0 \cdot e^{-\gamma t} \cdot \cos \left[\frac{(\omega' + \omega'')t}{2} + \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right] \cdot \cos \left[\frac{(\omega' - \omega'')t}{2} + \frac{\theta_1 - \theta_2}{2} \right] \\ x_B = -A_0 \cdot e^{-\gamma t} \cdot \sin \left[\frac{(\omega' + \omega'')t}{2} + \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right] \cdot \sin \left[\frac{(\omega' - \omega'')t}{2} + \frac{\theta_1 - \theta_2}{2} \right] \end{cases}$$

$$\text{中 } \omega' = \sqrt{\left(\frac{c_0}{mL^{3.02}}\right) - \gamma^2}, \quad \omega'' = \sqrt{\left(\frac{c_0}{mL^{3.02}} + \frac{2k}{m}\right) - \gamma^2}, \quad \text{根號內有 } L^{-3.02},$$

而在計算其調幅週期時其反映在 $\frac{4\pi}{\omega'' + \omega'}$ 和 $\frac{4\pi}{\omega'' - \omega'}$ ，也就是

$$\frac{4\pi}{\sqrt{\left(\frac{c_0}{mL^{3.02}} + \frac{2k}{m}\right) - \gamma^2} + \sqrt{\left(\frac{c_0}{mL^{3.02}}\right) - \gamma^2}}$$

和 $\frac{4\pi}{\sqrt{\left(\frac{c_0}{mL^{3.02}} + \frac{2k}{m}\right) - \gamma^2} - \sqrt{\left(\frac{c_0}{mL^{3.02}}\right) - \gamma^2}}$ 上。這也驗證了在我們的條件中，改變尺長所得到的振盪週期與尺長間的關係為正相關，而耦合週期與尺長間之關係亦為正相關的結論。

(三) 誤差的討論

用理論推出來並帶入所得到的數據其趨勢可以驗證我們得到的結論，但是如果與實際得到的振盪、耦合週期來比較，可以發現有誤差存在，我們的推論主要有兩點如下：

1. 由於我們無法得知此類物體振動時空氣阻力係數 b 值，因此我們用實驗二所得數據反推之，但因我們實驗二中次阻尼模型之方程式 $A_0 e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \phi)$ 是在假設空氣阻力正比於速度的一次方下推出，實際上到底與速度的幾次方正比並不知道。
2. 當鐵尺在振動的時候，依實驗一推得之關係 $H \propto \theta L$ ，可知鐵尺由固定端至端點的各處其振動的速度不同，所以尺上各處阻力實不能等效視為彈簧-振子系統中與振子速率成正比的阻尼力。

(四) 本模型與常見以彎矩建立之模型比較

常見以彎矩建立之模型將鐵尺振盪視為一連續系統，由文獻七知，連續系統中每一頻率之自

由振動是同時發生的，且一般分佈系統的運動可表為各個模態自由運動的線性組合形式，故描述的是鐵尺整體運動情形，以單一鐵尺的振盪為例 $y(x, t) = \sum_{r=1}^{\infty} y_r(x, t) = \sum_{r=1}^{\infty} C_r Y_r(x) \cos(\omega_r t - \phi_r)$ (本式取自文獻七)。而我們則只描述端點的運動方程式，但如果要用文獻這種分析方式再加上耦合與阻尼，計算上或者呈現出的式子必然會更為複雜。本模型的特別之處在於將實驗一、二的結論也貫串融合起來，並且只需使用相對簡單的微分技巧就能解釋這複雜的振盪形式，也就是彈性彎曲體在耦合、阻尼下的振動。雖不能完整表示整支尺的振盪，但是描述了振動時最具意義的端點運動情形。

(五) 雙鐵尺以彈簧連接之耦合振盪實驗結論

1. 雙鐵尺的振盪波形有明顯的同步波形（振盪波形）及互補波形（耦合波形）兩種，而兩者的週期均不隨時間改變。
2. 振盪週期較耦合週期長，與一般的弱耦合模型不同。
3. 耦合振盪並不會影響每一隻尺的振幅衰減情形。
4. 振盪週期與耦合週期均與初始振幅無關。
5. 振盪週期與耦合週期均與鐵尺的總長成正相關。
6. 一個振盪週期內包含的耦合週期數與鐵尺總長成正相關。

陸、未來展望

- 一、彎曲實驗中，希望未來能以數學證明總長固定下 h 與 θ 的正比關係。
- 二、測量 k 值的實驗中，除了長度，探討還有哪些變因會影響 k 值；例如厚度、材質等。
- 三、本報告之實驗三的我們用的是較方便取得的鐵尺來模擬梁柱等，看其耦合現象，未來可以使用與梁柱內部更相似的材料與結構來模擬。
- 四、實驗中我們採用兩隻鐵尺來模擬梁柱等材料間的耦合，但實際並非只有二者，可以擴及三個、四個……來進行較模擬較複雜的耦合振盪。
- 五、除了尺的長度，其實連接物之長度也會影響振盪週期（像是本實驗彈簧之 k 值改變），可以設計實驗並比對其與理論模型的差別並探究其原因。

- 六、改變耦合振盪的中介物質，例如泡棉，看看其對振幅衰減及半衰期的影響。
- 七、如果將中介物質（例如本實驗中的彈簧）分別兩個、三個、四個……並聯在兩支尺之間，用 tracker 標點並探討其如何運動。

柒、參考文獻

一、《怎麼說它有多彎？》曹亮吉

二、《支點和踏板位置對跳水板力學特性的影響》賈曉紅, 季林紅, 曹春梅, 陳小平, 於 芬

三、《解阻尼振盪微分方程》

ezphysics.nchu.edu.tw/prophys/basicexp/expnote/damping/exp8.pdf

四、《Thermal expansion and the bi-material strip》

<https://www.doitpoms.ac.uk/tlplib/thermal-expansion/printall.php>

五、《材料的應力與應變》pic.eslite.com/Upload/Attachment/200911/633937192752968750.pdf

六、《力學耦合振盪》<http://www.phys.nthu.edu.tw/~exphy/Download/ex12.pdf>

七、《南亞技術學院改進教學計畫成果報告——「振動學」課程教學講義》周祖亮

[http://web.tiit.edu.tw/acof/accu/word/%E6%94%B9%E9%80%B2%E6%95%99%E5%AD%B8/99%E6%88%90%E6%9E%9C%E5%A0%B1%E5%91%8A/%E6%95%99%E6%94%B9%E9%80%B2-099C-009%E6%88%90%E6%9E%9C%E5%A0%B1%E5%91%8A\(%E5%91%A8%E7%A5%96%E4%BA%AE\).pdf](http://web.tiit.edu.tw/acof/accu/word/%E6%94%B9%E9%80%B2%E6%95%99%E5%AD%B8/99%E6%88%90%E6%9E%9C%E5%A0%B1%E5%91%8A/%E6%95%99%E6%94%B9%E9%80%B2-099C-009%E6%88%90%E6%9E%9C%E5%A0%B1%E5%91%8A(%E5%91%A8%E7%A5%96%E4%BA%AE).pdf)

【評語】 051821

本作品討論鐵尺的彎曲程度與耦合震盪之間的關係。實驗設計與量測完整，結果分析詳盡。鐵尺本身彈性強，震盪易傳入基台上，因此基台之重量，C型夾之固定強度應列入實驗分析的參數。

作品海報

壹、摘要

本研究主要想探討彎曲程度極大時的情形，以及一些與既有文獻不同的小角度彎曲結論。

彎曲實驗尋找能有效使鐵尺彎曲之力的方向，研究不同長度的鐵尺間有效受力與其彎曲程度的關係。

鐵尺彎曲後將受到回復力作用，我們觀察拉一定振幅後釋放的振盪狀況，並探究初始振幅和尺長對振幅衰減（能量衰減）的影響。接著我們研究兩尺間有中介物質時能量交換產生的耦合現象，卻意外發現此實驗與一般的弱耦合模型有差異：現有的耦合模型均是一個耦合週期內包含數個本身的振盪週期，但本實驗中，卻是一個振盪週期內包含數個耦合週期。最後我們探討了振盪、耦合週期與初始振幅、尺長的關係。

貳、研究動機

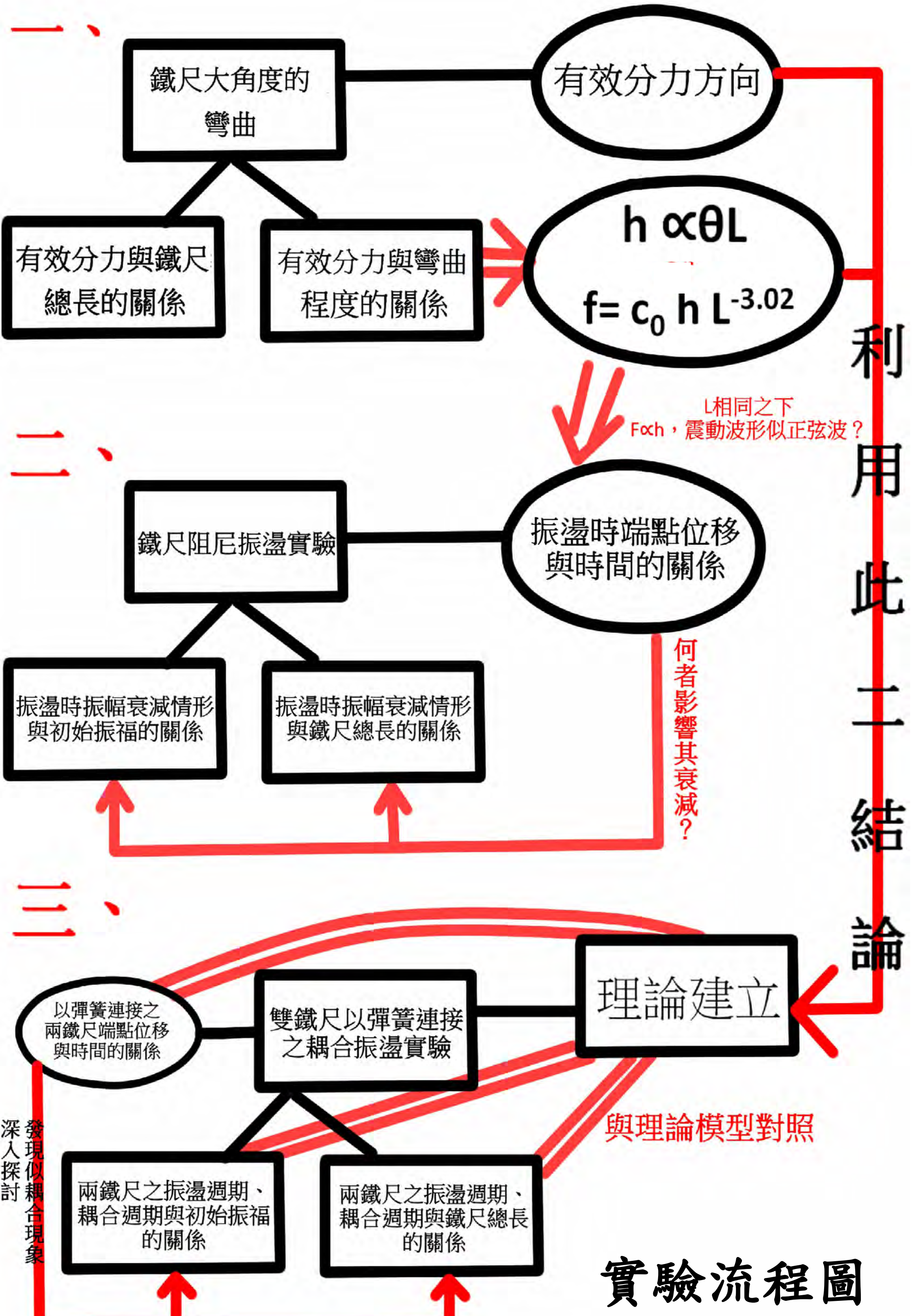
去年台南發生了大規模地震。那些傾斜、龜裂甚至坍塌的房子以及慘絕人寰的災區，啟發了我們以鐵尺作為簡單模型，來模擬地震中鋼筋或梁柱可能會產生的各種情形，例如大角度彎曲、震動時鋼筋的能量衰減、交互作用……。

參、實驗目的

- 一、鐵尺彎曲實驗（主要探討鐵尺大角度的彎曲）
- （一）能使鐵尺彎曲、作用於端點的有效分力方向
 - （二）總長固定，作用於端點的有效分力、彎曲程度間的關係
 - （三）作用於端點的有效分力與鐵尺總長、彎曲程度間的關係
- 二、鐵尺阻尼振盪實驗
- （一）振盪的端點位移與時間的關係
 - （二）振幅衰減情形與初始振幅的關係
 - （三）振幅衰減情形與鐵尺總長的關係
- 三、雙鐵尺以彈簧連接之耦合振盪實驗
- （一）兩鐵尺端點位移與時間的關係
 - （二）兩鐵尺之振盪週期、耦合週期與初始振幅的關係
 - （三）兩鐵尺之振盪週期、耦合週期與鐵尺總長的關係

肆、研究裝置圖

左至右依序為彎曲實驗、阻尼振盪實驗、耦合振盪實驗裝置圖



伍、實驗結果

一、鐵尺彎曲實驗

對不同鐵尺總長 L ，改變垂直位移 h ，找出有效分力 f 和切線夾角 θ 。
 h 和 θ 用以表示彎曲程度。 f 為同彎曲程度下的最小拉力。
找出 f 和 h 、 θ 、 L 間的關係。

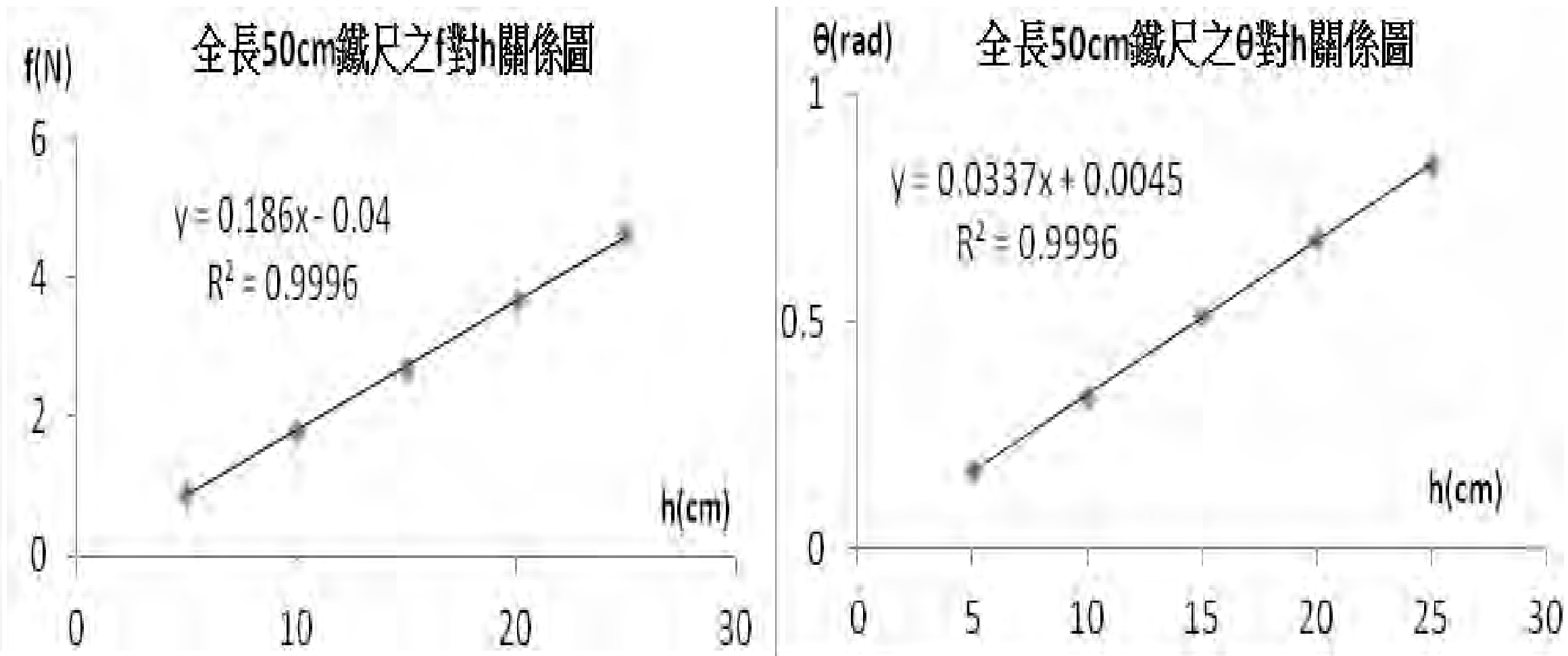
（一）作用於端點之有效分力的方向

相同彎曲程度下，令有效分力與切線夾角 θ ，得兩力 F_1 、 F_2 ，與切線的夾角為 θ_1 、 θ_2 。
根據有效分力相等可得：

$$\theta = \tan^{-1} \frac{F_1 \cos \theta_1 - F_2 \cos \theta_2}{F_2 \sin \theta_2 - F_1 \sin \theta_1}$$

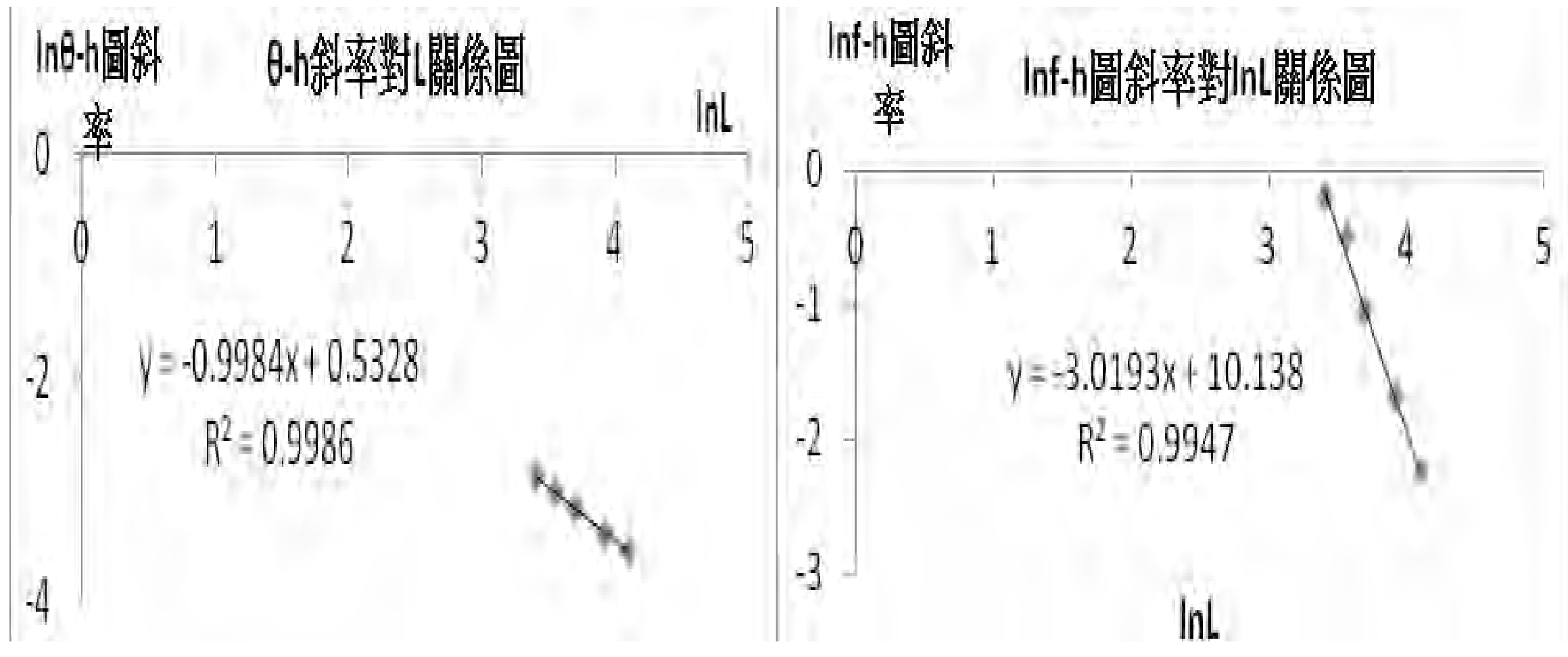
故取 6 個不同方向的力，並兩兩一組求出 θ 再取平均即為所求。
得到結果近似於 90 度，確定有效分力方向恆與切線垂直。

（二）總長固定，有效分力 f 與彎曲程度 h 、 θ 三者之間的關係



總長固定下 f 與 h 、 θ 與 h 成正比，故可推估三者間兩兩成正比
將其圖形斜率再對總長 L 作圖即可求得四者間的關係。

（三）總長 L 、有效分力 f 與彎曲程度 h 、 θ 四者之間的關係



由此可得 $h \propto \theta L$ 、 $f \propto h L^{-3.02}$ 。

（四）鐵尺彎曲實驗之小結（線密度、粗細不變下）

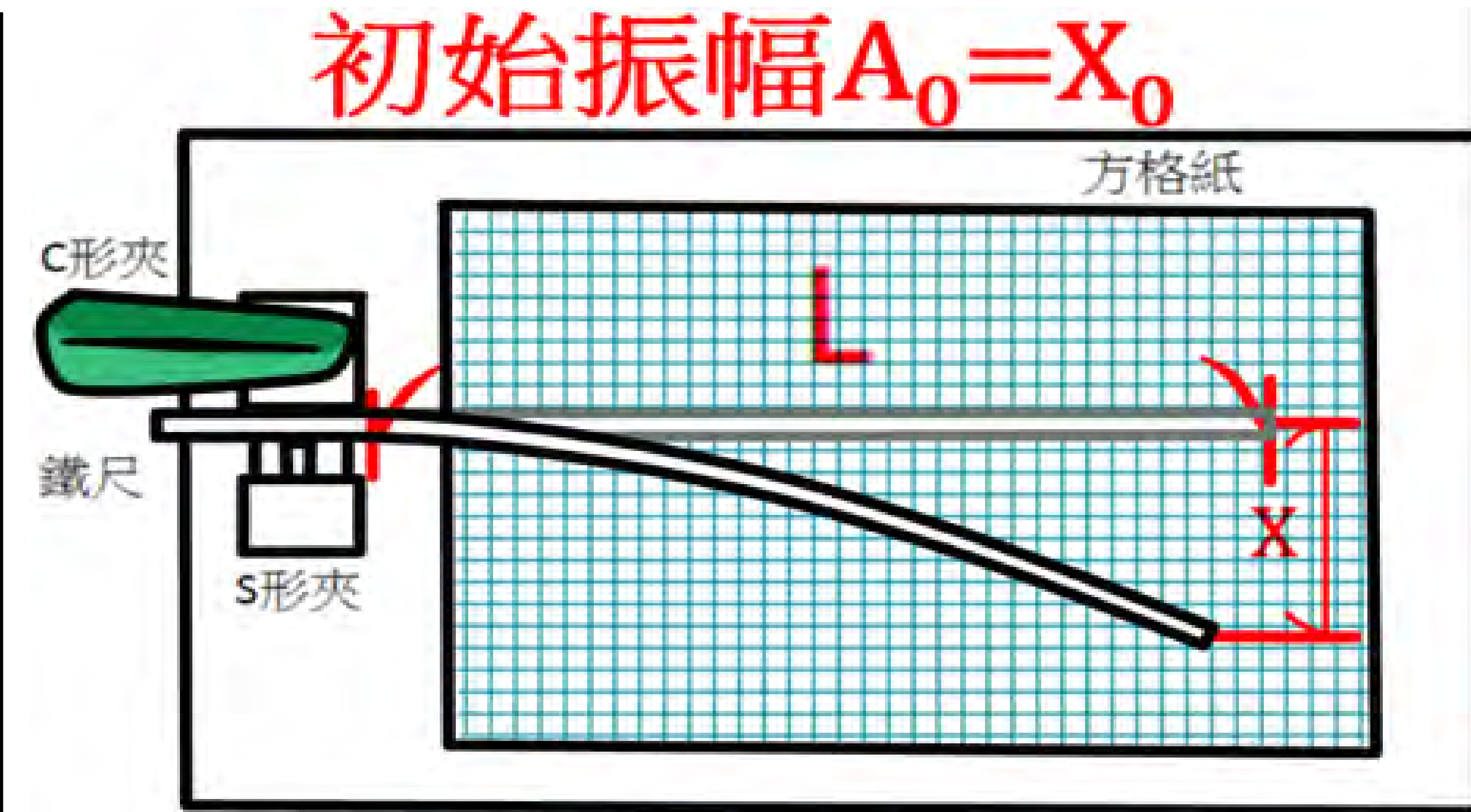
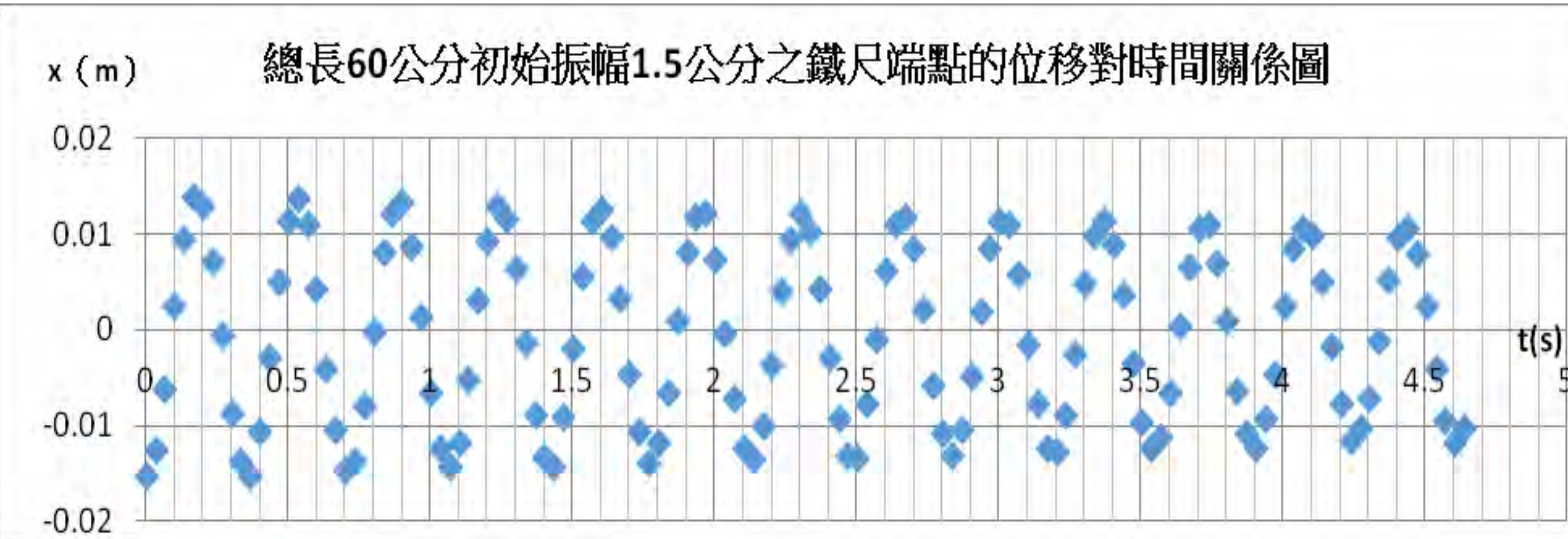
- （1）兩種彎曲程度之關係為： $h \propto \theta L$ 。
- （2）使鐵尺彎曲之有效拉力（垂直端點切線） $f = c_0 h L^{-3.02}$ ，其中 c_0 為常數，單位為 $Nm^{2.02}$ 。

二、 阻尼振盪實驗

將尺拉至初始振幅，再朝垂直端點切線的方向放開並紀錄。
追蹤端點偏移平衡點之垂直位移 x 與時間 t 的關係，再匯入電腦作圖。

(一) 實驗 a：鐵尺阻尼振盪情形概觀

- 1. 是週期固定的正弦波，類似簡諧振盪的波型。
- 2. 振幅隨時間衰減應為阻尼的影響。

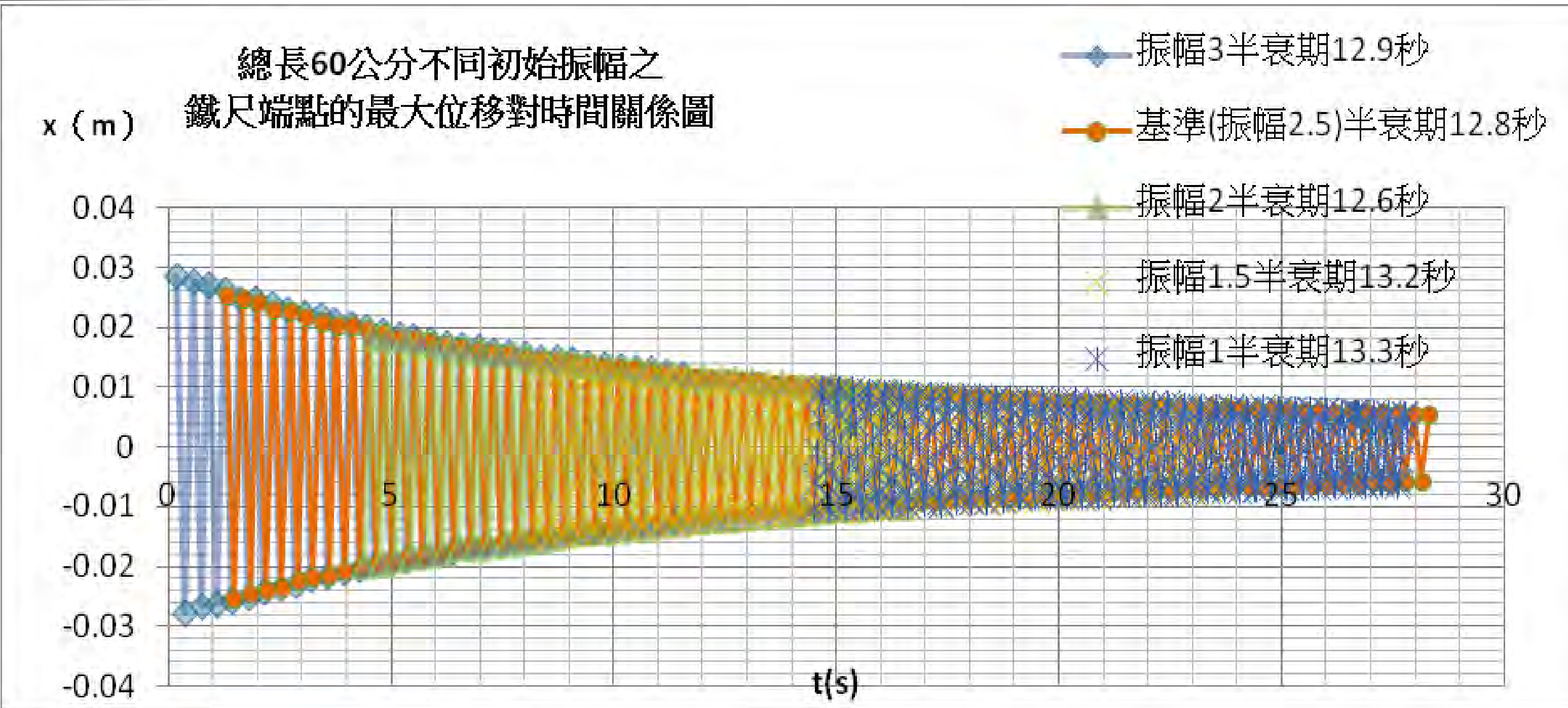


(二) 實驗 b：探討初始振幅對振幅衰減的影響

固定尺長 60 公分，始以初振幅 2.5 公分為基準。
而後再以不同初始振幅拍攝至振幅減半，並疊圖比較。

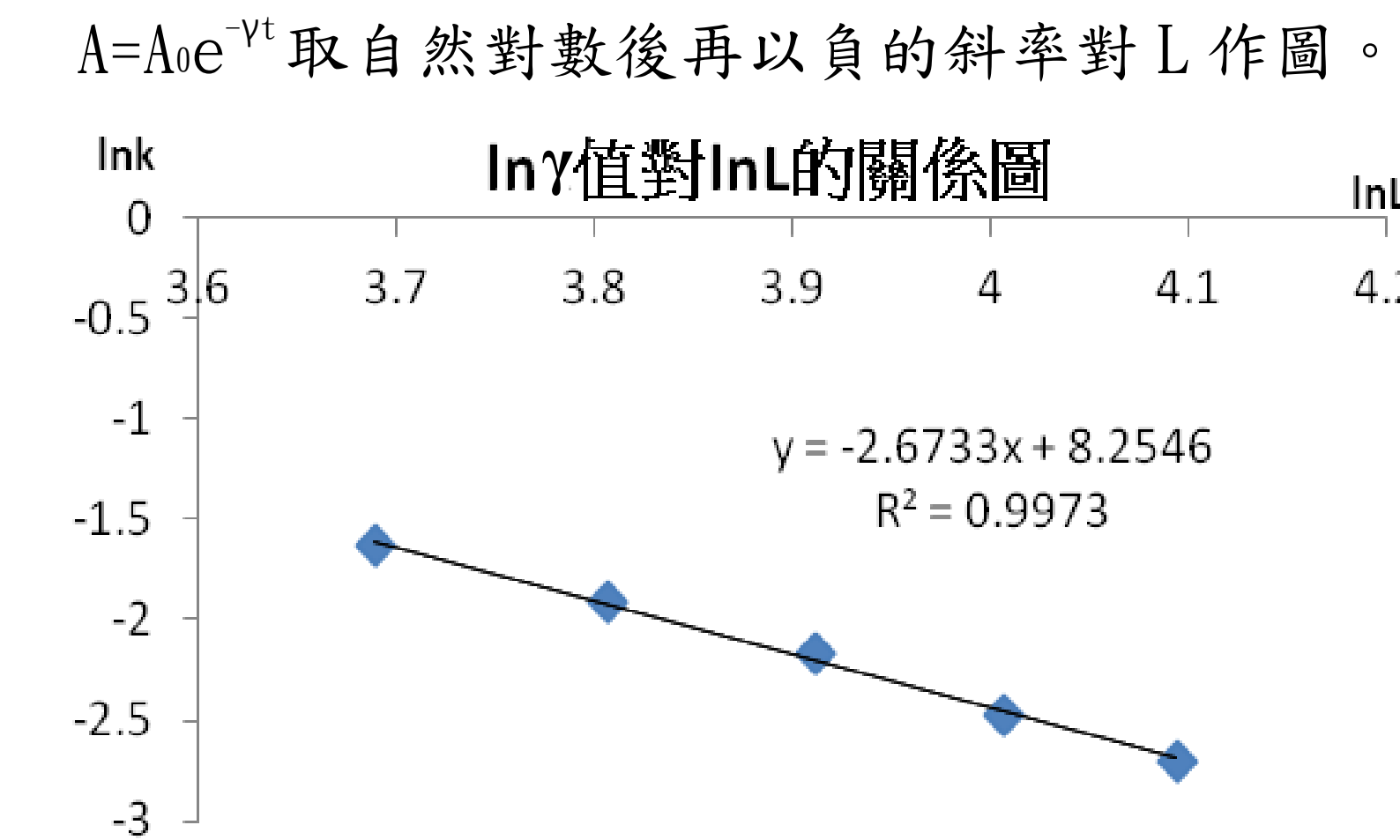
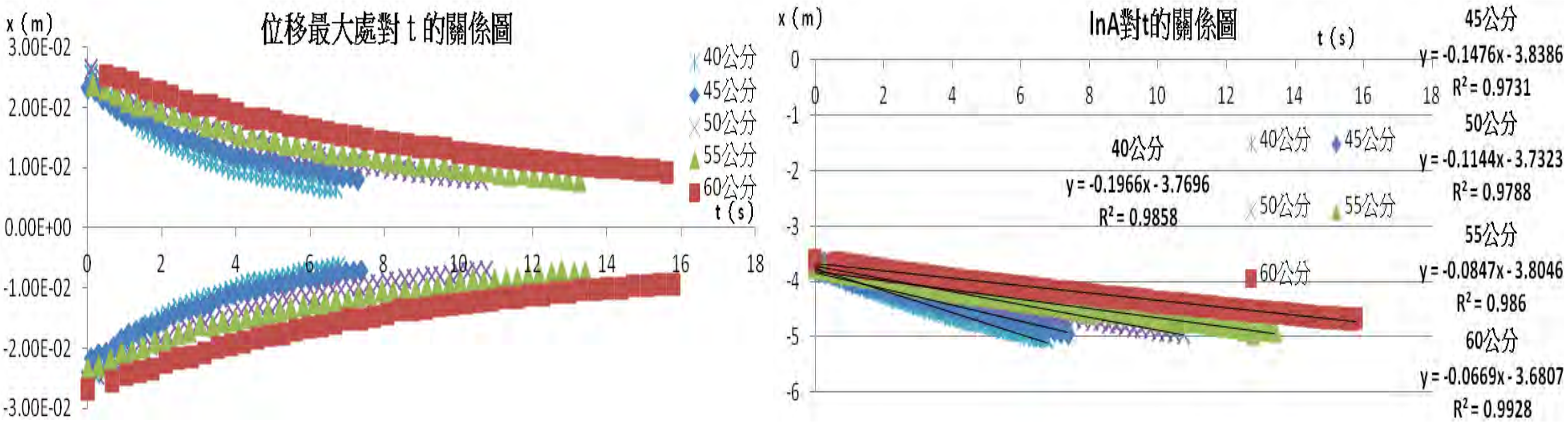
由右圖可知：

- (1) 振幅衰減情形與初始振幅並無關係。
- (2) 不同初振幅的半衰期約略相等，
即半衰期不受初振幅影響。



(三) 實驗 c：探討不同尺長 L 對振幅衰減的影響

固定初振幅，改變不同尺長，找出 γ 與 L 間的關係。



得知扣除質量 m(與 L 成正比，與 γ 成反比)的影響， γ 與 L 的 1.67 次方成反比。

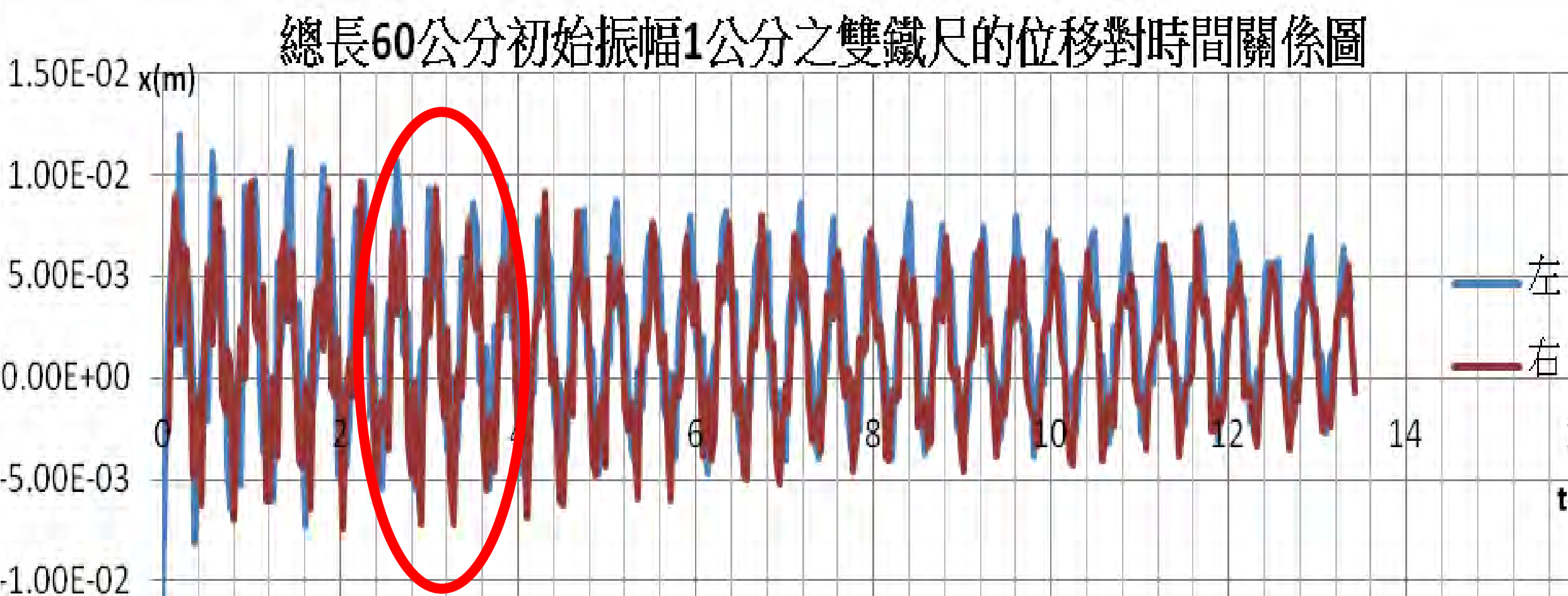
(四) 鐵尺阻尼振盪之小結 :1. 單鐵尺的振盪為一振幅隨時間衰減的正弦波，且週期不隨時間改變。

- 2. 振幅衰減方程式可寫為 $A=A_0e^{-\gamma t}$ （故半衰期與初振幅無關），其中 $\gamma \propto m^{-1}L^{-1.67}$ 。

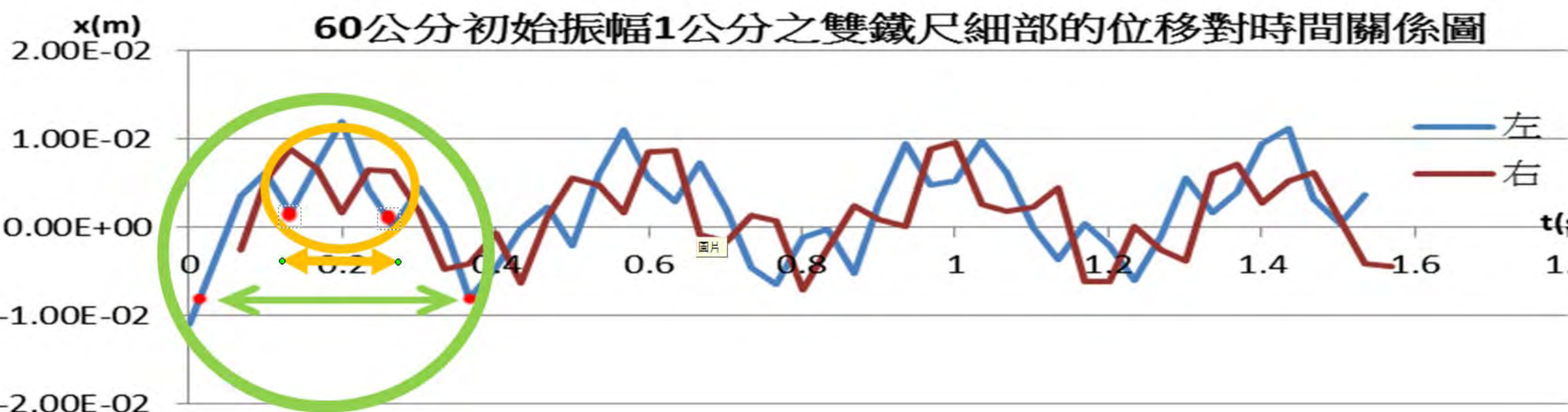
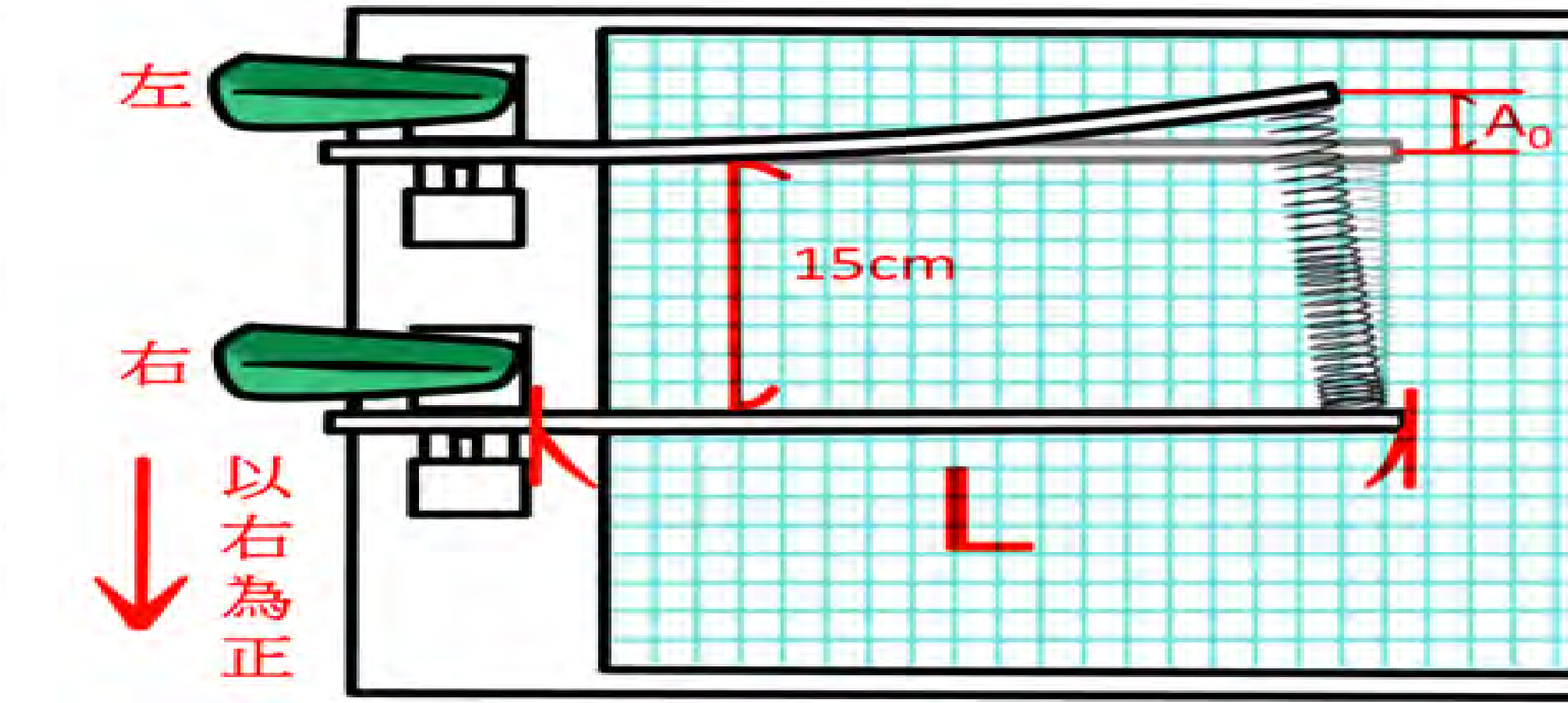
三、 雙鐵尺以彈簧連接之耦合振盪實驗：兩鐵尺振盪的耦合情形

將左尺的端點拉至初始振幅，同時以另一指固定右尺，再同時放開兩手指。追蹤端點偏移的垂直位移 x 與時間的關係，並疊圖分析。

(一) 實驗 a：雙鐵尺耦合振盪情形概觀



可看出兩尺大致波形類似且同步但沒完全吻合，故放大紅圈部分作下圖分析。



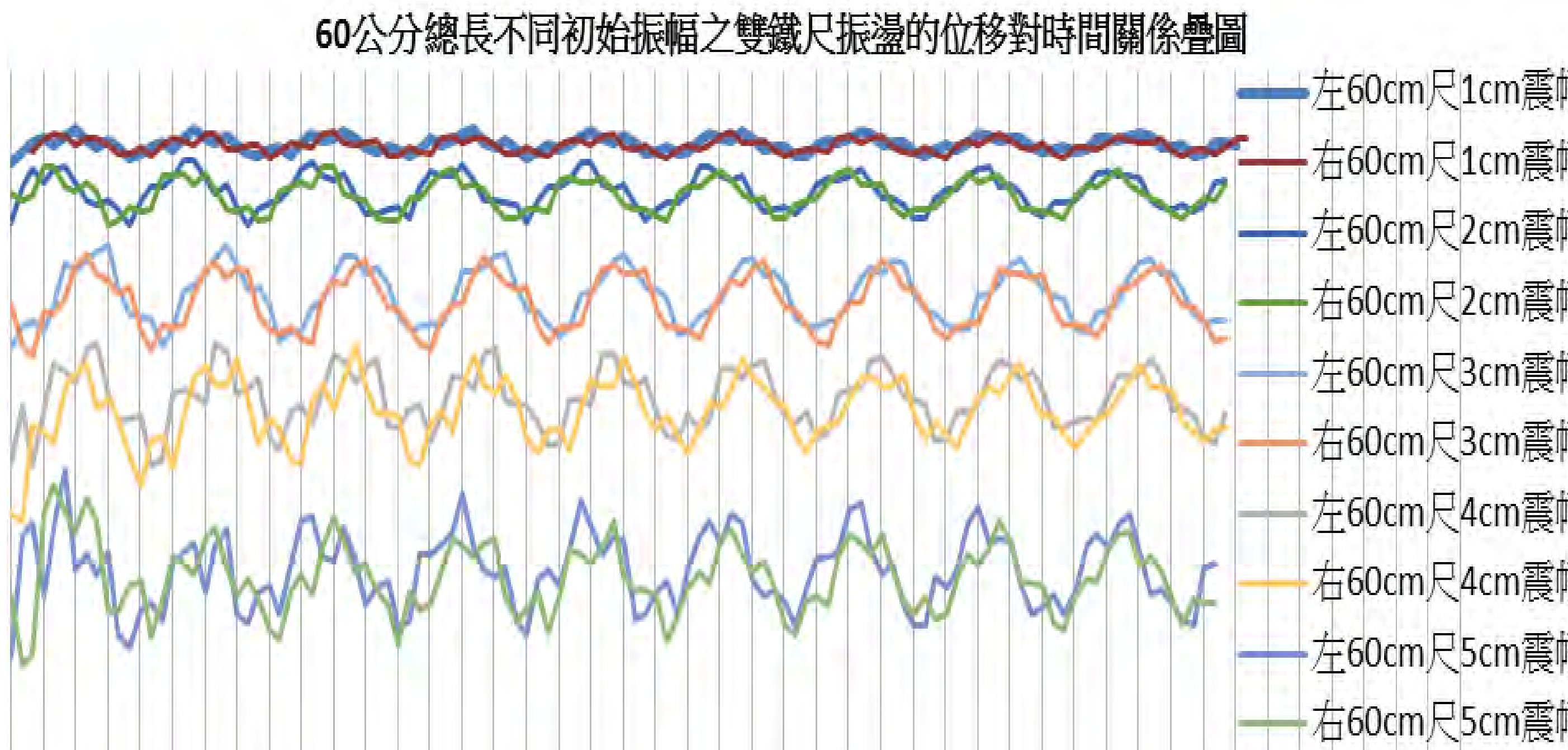
- 1. 雙鐵尺的振盪波形有明顯的同步波形（綠色圈圈）及互補波形（黃色圈圈）兩種。
- 2. 互補波形的週期較同步波形短，並且類似耦合，故稱之為耦合週期（如黃箭頭）；而振盪週期即如圖中綠箭頭所示。

(二) 實驗 b：探討初始振幅對振盪、耦合週期的影響

固定以 60cm 作為尺的總長，以 1、2、3、4、5cm 的初始振幅，疊圖比較一段時間內的週期數。

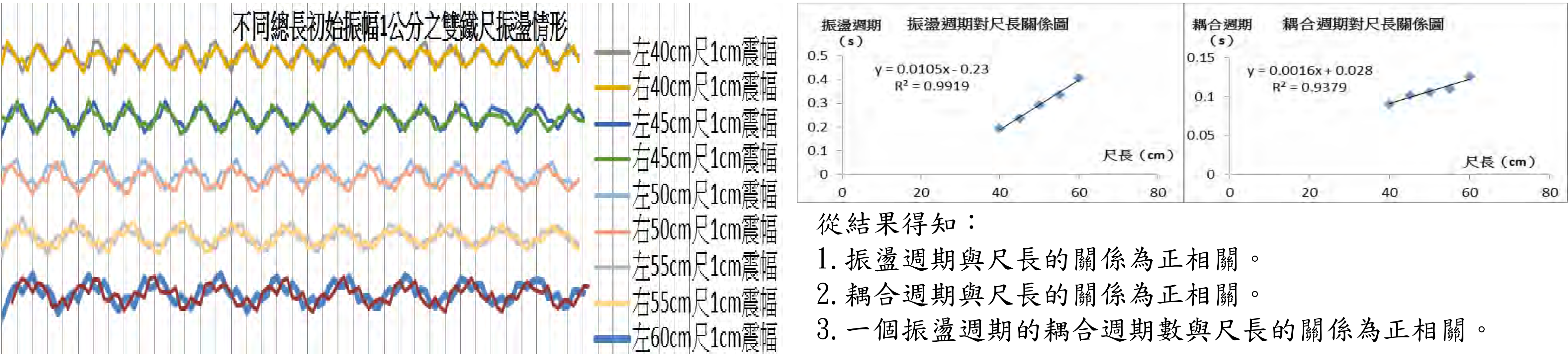
分析完畢可得知：

- (1) 振盪週期不受初始振幅影響。
- (2) 耦合週期不受初始振幅影響。
- (3) 耦合週期與振盪週期的比值不受初始振幅影響。



(五) 實驗 c：探討鐵尺的總長對振盪、耦合週期的影響

固定 1cm 振幅，以 40、45、50、55、60cm 為鐵尺總長，用 tracker 追蹤並疊圖，再比較一段時間的週期數。



(六) 小結：振盪、耦合週期和一個振盪週期內的耦合週期數均與初始振幅無關，與尺長成正相關。

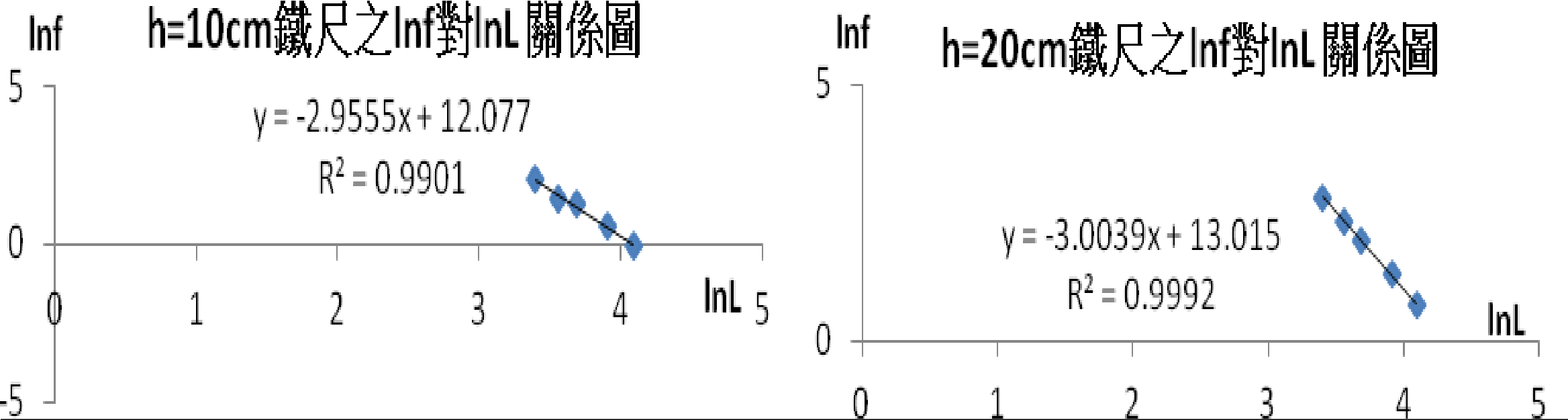
陸、討論與實驗結論

一、鐵尺彎曲實驗

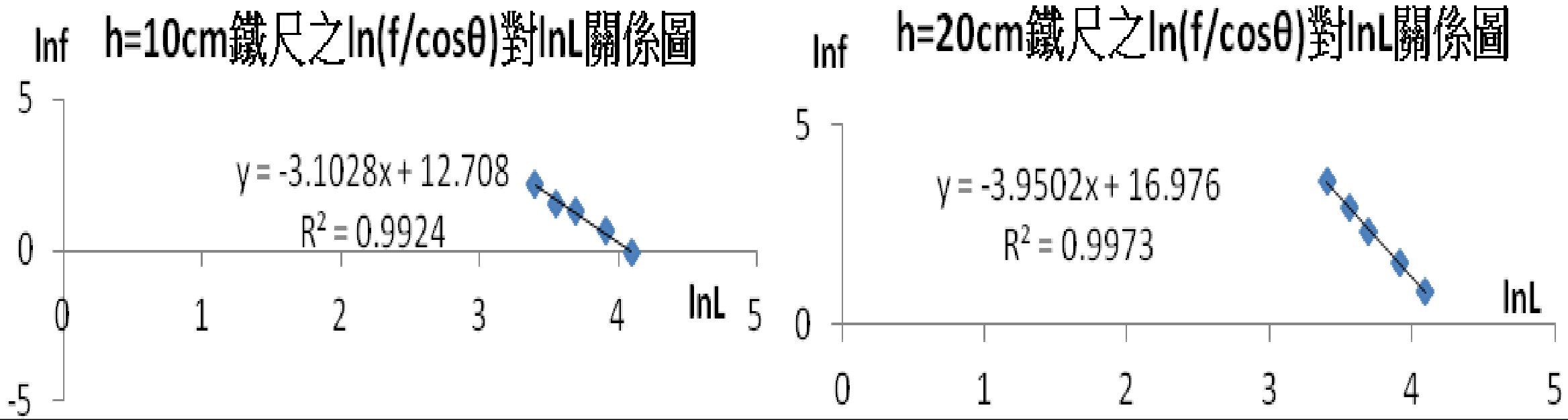
文獻一中已做出 F ($F=f/\cos\theta$) 和 h 成正比，和尺長的 3 次方成反比，而本研究的則是 f 與 h 成正比並和尺長 L 的 3.02 次方成反比的結論。乍看之下結論相似，卻有一個很大的不同點，即在於拉力的方向。

我們發現該文獻中數據之彎曲程度都較小，於是進行以下兩種彎曲程度的分析：

1. f-L 關係圖（我們的實驗方法）



2. f/cosθ-L 關係圖（文獻的實驗方法）



固定的 h （彎曲程度）較大時，只有有效分力的 f 才會滿足 $f \propto L^{-3.02}$ 。

我們認為這是因為文獻一使用的硬金屬塊彎曲程度不大，即 θ 極小。此時 $\cos\theta$ 趨近於 1 而 F 也趨於與 f 相等。

本實驗的特色在於我們推出能真正使彈性彎曲體彎曲的有效分力方向，而推論所得的關係在大小角度都適用。

1. 不論鐵尺總長或彎曲程度，使鐵尺彎曲之有效分力 f 方向恆與端點的切線方向垂直。
2. 鐵尺彎曲滿足 $h \propto \theta L$ （大小角度均滿足此關係）、 $f \propto hL^{-3.02}$ 。

二、鐵尺之阻尼振盪實驗

結果類比到建築中，可解釋為何鋼筋不能太長——鋼筋越長，地震時能量衰減就愈慢。

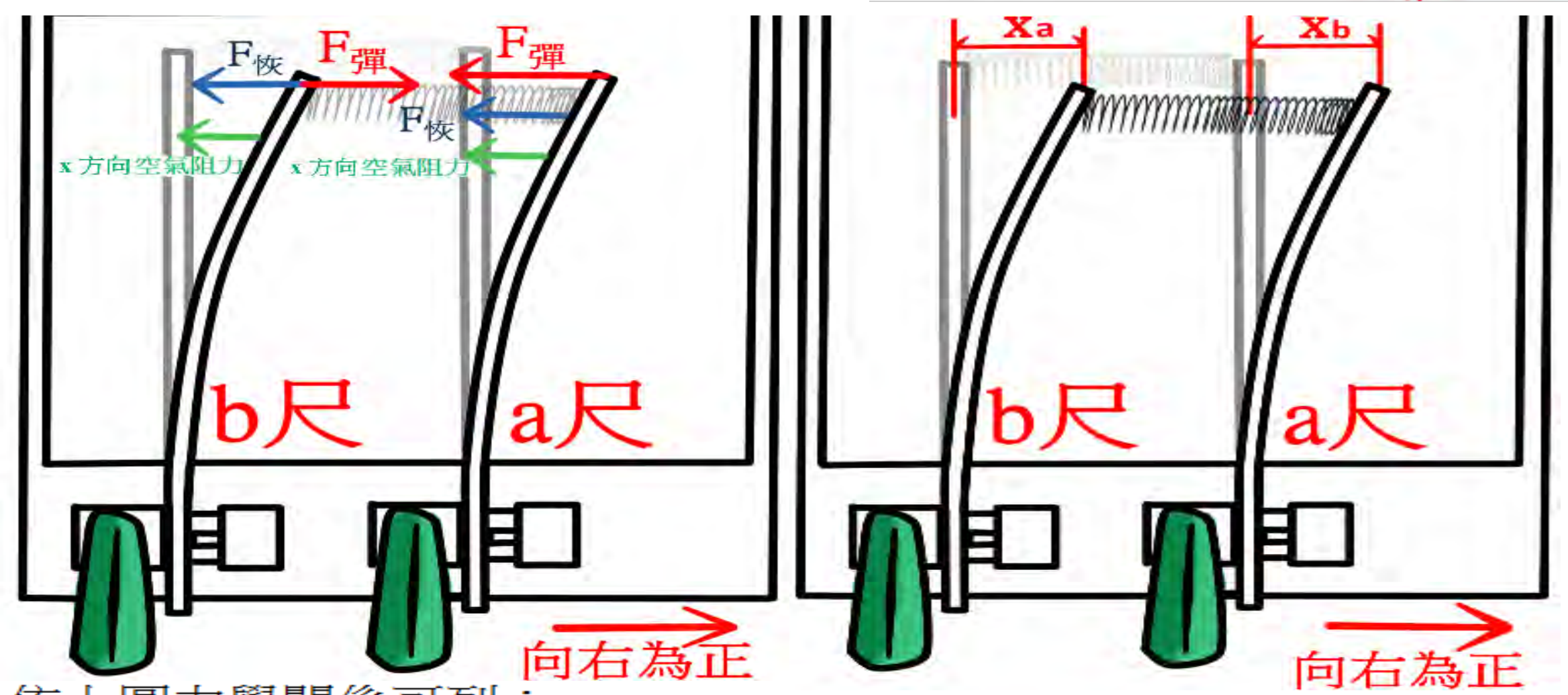
1. 尺的振幅為隨時間衰減的正弦波，週期不隨時間改變。
2. 振幅衰減方程式為 $A=A_0e^{-\gamma t}$ ， $\gamma \propto m^{-1}L^{-1.67}$ ，無關初振幅。

三、雙鐵尺以彈簧連接之耦合振盪實驗

以單邊鐵尺來說，端點所受恢復力等效於彎曲實驗中與有效拉力

$f_1 = \frac{c_0 h}{L^{3.02}}$ 等大反向的作用力 f_2 。

取垂直原處的分力 f_3 (= $f_2 \cos\theta$)



依上圖力學關係可列：

$$\begin{cases} m \cdot \frac{d^2 x_A}{dt^2} = -k' x_A - k(x_A - x_B) - b \cdot \frac{dx_A}{dt} \\ m \cdot \frac{d^2 x_B}{dt^2} = -k' x_B + k(x_A - x_B) - b \cdot \frac{dx_B}{dt} \end{cases}$$

其中 k' 為鐵尺彎曲後所受恢復力之等效彈力係數， k 為彈簧之彈力係數， b 為空氣阻力係數。

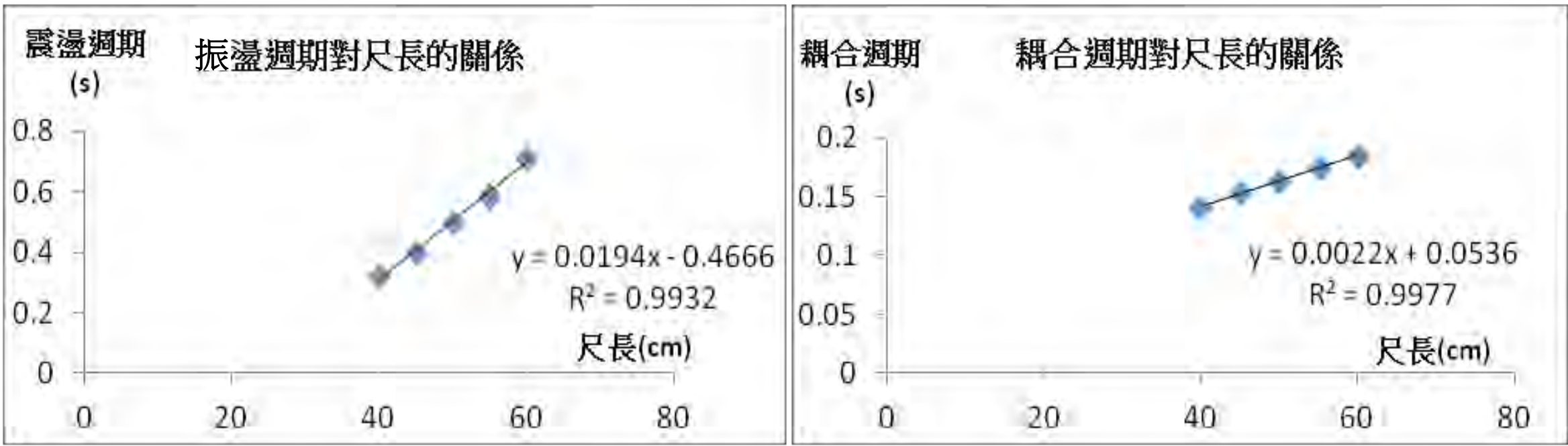
經過一連串解方程式可得：

$$\begin{cases} x_A = A_0 \cdot e^{-\gamma t} \cdot \cos\left[\frac{(\omega' - \omega'')t}{2} + \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right] \cdot \cos\left[\frac{(\omega' + \omega'')t}{2} + \frac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right] \\ x_B = -A_0 \cdot e^{-\gamma t} \cdot \sin\left[\frac{(\omega' + \omega'')t}{2} + \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right] \cdot \sin\left[\frac{(\omega' - \omega'')t}{2} + \frac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right] \end{cases}$$

其中 $\omega' = \sqrt{\left(\frac{c_0}{mL^{3.02}}\right) - \gamma^2}$ ， $\omega'' = \sqrt{\left(\frac{c_0}{mL^{3.02}} + \frac{2k}{m}\right) - \gamma^2}$ ，

$\theta_1 = \tan^{-1} \frac{\gamma}{\omega'}$ ， $\theta_2 = \tan^{-1} \frac{\gamma}{\omega''}$ ，而其中 $\frac{b}{2m} = \gamma$

將實際數據代入上式，可作下圖與實驗結果比較。

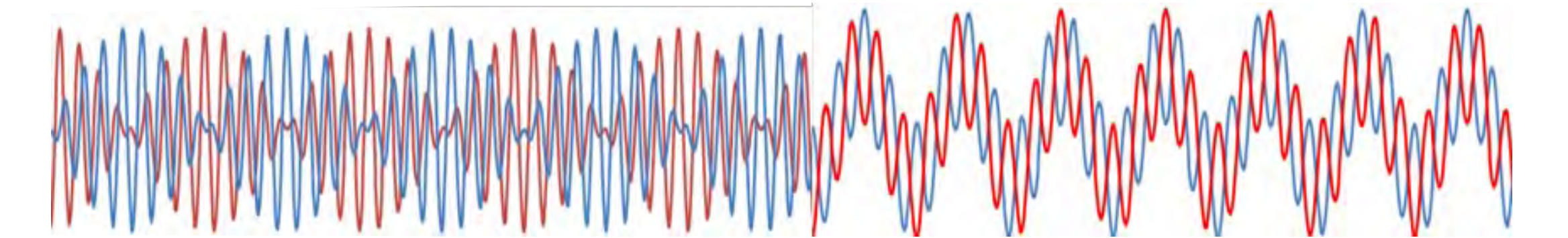


此實驗之耦合現象與弱耦合的差異：

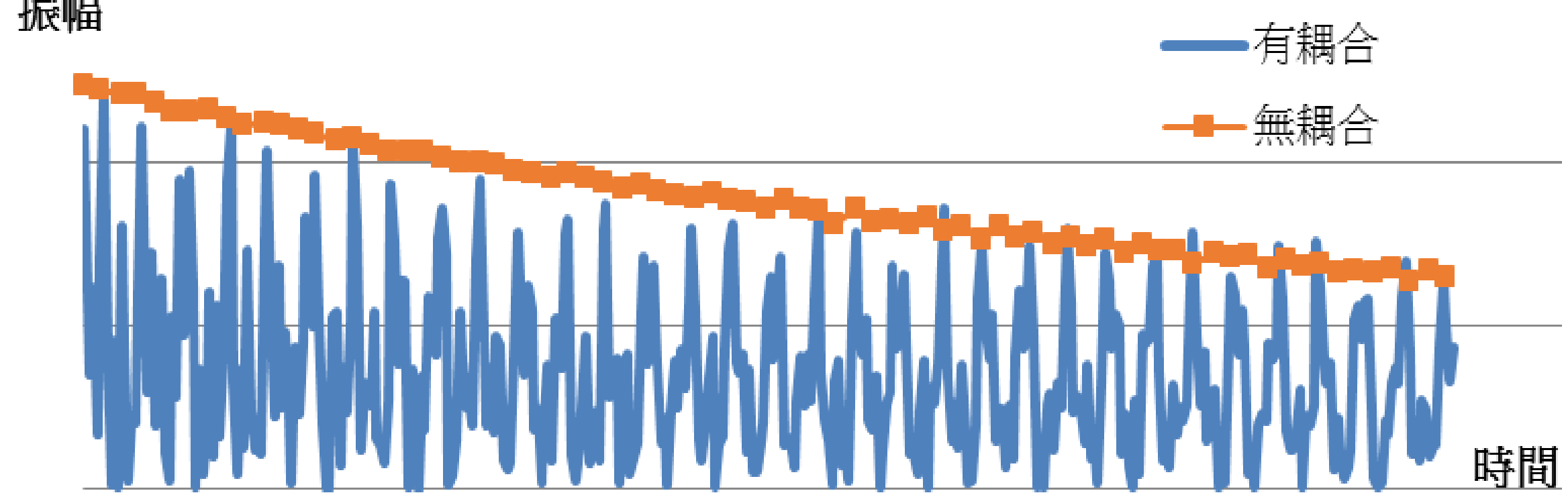
本實驗可比擬為下列的耦合實驗裝置，弱耦合結論在 $k_2 \gg k_1$ 時才會成立；而此實驗等效 k_2 即為 $\frac{c_0}{L^{3.02}}$ ，又數據中最大的 k_2 發生在 $L=40\text{cm}$ 時，故其值為 $\frac{2.485}{0.4^{3.02}} = 38.488$ (N/m)。彈簧 k_1 固定為 74.64N/m，可見本實驗之 k_1 反而大於 k_2 ，不滿足形成弱耦合的條件。



弱耦合其耦合週期較振盪週期大（左圖）；而本實驗的波形之耦合週期小於振盪週期（右圖），有別於一般我們常見的耦合形式。



尺長60cm振幅1cm耦合振盪振幅與阻尼振盪（無耦合）最大振幅對時間關係疊合圖



由上圖可看出，耦合並不會顯著地影響振幅衰減。

1. 雙鐵尺的振盪波形有明顯的同步波形（振盪波形）及互補波形（耦合波形）兩種，而振盪週期較耦合週期長，與弱耦合模型不同。
2. 耦合振盪不會影響每一隻尺的振幅衰減情形。
3. 振盪週期與耦合週期均與初始振幅無關。
4. 振盪週期與耦合週期均與鐵尺的總長成正相關。
5. 一個振盪週期包含的耦合週期數與鐵尺總長成正相關。

柒、參考資料

一、《Thermal expansion and the bi-material strip》
<https://www.doitpoms.ac.uk/tlplib/thermal-expansion/printall.php>

二、《解阻尼振盪微分方程》ezphysics.nchu.edu.tw/prophys/basicexp/expnote/dampi

三、《力學耦合振盪》<http://www.phys.nthu.edu.tw/~exphy/Download/ex12.pdfng/exp8.pdf>