中華民國第 57 屆中小學科學展覽會
作品說明書

高級中等學校組　物理與天文學科

051818

激光四射—雷射圈之性質探討

學校名稱：國立臺東高級中學

作者：	指導老師：
高二 張庭禎 高二 林忠慶 高二 朱晉廷	趙臨軒

關鍵詞：雷射圈、折射率、干涉

摘　　要

本研究探討雷射光照射細長圓柱所形成雷射圈的成因及性質，並做出整體的歸納與分析，例如不同材質的圓柱如何影響雷射圈的形成、雷射光入射角與雷射圈半徑的關係，甚至用雷射圈特性反推圓柱折射率等等。

這些現象中最令我們感好奇的是雷射光照射尼龍線等透光材質產生的折射、反射與干涉現象，在實驗中我們發現有一部分雷射光會經由反射或折射路徑投射到尼龍線後方，使雷射圈後面亮度增加且有干涉條紋，亮度方面可由司乃耳定律及反射定律解釋；至於干涉可由微積分、反三角函數等數學推導來解釋。我們相信此研究將來有助於材料工程應用，並可作為光學教學教材。

壹、研究動機

在瀏覽歷屆 IYPT 的題目中，有一題是這樣的：將雷射光打在一個細柱子上，研究其產生的雷射圈。然而，在日常生活中，卻鮮少發現此情況，在平常的認知，當光照在柱子上時，會形成一個影子，那要如何形成一圈雷射圈?為了探討這種現象，就著手這方面的研究。然而，又有了疑問：是否每種柱子都能形成雷射圈?而雷射圈的亮度分布又為何?因此，我們要深入研究這個雷射圈，並利用實驗數據與各種光學情況的理論推導來探討細柱子的光學性質。

貳、研究目的

一、 了解雷射圈在不同條件下的性質

二、 探討同一雷射圈的亮度分布

三、 比較理論推導與實驗數據，探討細柱的光學性質

四、 在雷射圈中製作干涉圖形

参、研究設備及器材

一、 主要器材

雷射筆*4(紅、綠、藍、紫)	Light sensor+固定架	直尺、捲尺、游標尺
三腳架	雷射筆固定架	印有格線的紙(左為描圖紙)

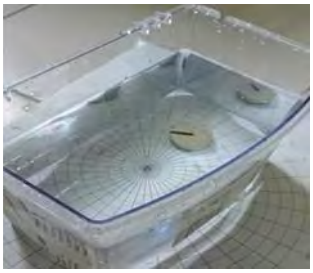
		
格線紙+自製架子	各種圓柱	水缸

表 1：實驗裝置

二、 實驗器材功能說明

(一) 雷射筆及圓柱：利用雷射筆照各式圓柱，產生所要觀察的雷射圈。

(二) Light sensor：用以測量雷射圈亮度，在其中設置自製固定架，確保 Light sensor 垂直於紙面測量。

(三) 測量工具：我們用游標尺測量圓柱直徑，用直尺測量雷射圈寬度及亮紋間距，用捲尺測量大型雷射圈的半徑。

(四) 三腳架：以懸吊的方式固定圓柱，若圓柱為柔軟的線則會下方綁重物以使線繃緊。

(五) 雷射筆固定架：上面裝上量角器，則可測量雷射筆照射的俯角，調整旋鈕，即可開關雷射筆。

(六) 印有格線的紙(雷射圈投影處)：較透明的描圖紙用以測量雷射圈亮度的變化，印有淡色的角度標示，以利測雷射圈的亮度分布；印有極座標的 A3 白紙用以進行測量亮度以外的實驗，並可測量雷射圈半徑，角度及是否雷射圈為正圓形。

(七) 自製架子：用以調高格線紙，使 Light sensor 可以在紙下測量亮度，並在其中鑽洞使圓柱插入，防止其晃動影響測量。

(八) 水缸：用於測量圓柱在水中的相對折射率，下面放格線紙，以便測量各物理量。

肆、研究過程及方法

一、 名詞定義

(一) R：雷射圈半徑；R_1：圓柱半徑；R_2：雷射光點半徑

(二) h：雷射光照在柱子上的高度

(三) θ：雷射筆的俯角；β：雷射圈角度；α：雷射光照入柱子在 x-z 平面上的入射角

(四) d：雷射圈寬度；d_0：雷射光原本截面的弦長，對應 d

(五) I：雷射圈亮度；I_0：原雷射光亮度

(六) 光點長軸(在平行度測量出現)：光正向打在屏幕上時，橢圓或圓光點的長軸。

(七) 實驗報告所說雷射圈前面為面向雷射筆方向，反之為後面，座標定義詳見下頁圖 5。

二、 理論推導

(一) 光滑不透光直圓柱雷射圈

先定義座標方向如右，其中柱子在 y 軸上，雷射圈投影在 x-z 平面上。

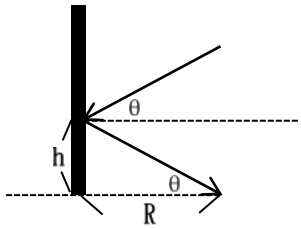


圖 1：圓柱側視圖

1. 求雷射圈半徑

設雷射光與 x-z 平面夾角θ(即雷射光照射柱子的俯角)

則半徑$R = h \times \cot\theta$

2. 求雷射圈寬度

以入射光角度看雷射光在柱子上的投影，若雷射光光點均勻，設其半徑為R_2，圓柱半徑為R_1，雷射圈寬度為 d，入射光和反射光在 x-z 平面上的夾角為β，且$\beta = 2\alpha$，在入射光方向截面的一弦長為d_0，且$R_1 \le R_2 \ll R$(註：φ 與 α相對應，如右下圖，φ 為雷射光照入柱子方向觀察如圖的角度)

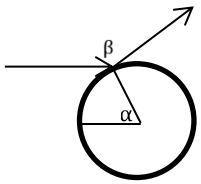


圖 2：圓柱俯瞰圖

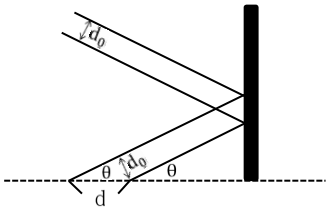


圖 3：圓柱側視圖

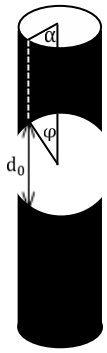


圖 4：由雷射筆方向觀察圓柱

由中間的圖，$d = d_0 \csc\theta \ldots\ldots (a)$

由右圖

$R_1 \sin\alpha = R_2 \sin\varphi \ldots\ldots (b)$

$d_0 = 2R_2 \cos\varphi = 2R_2\sqrt{1 - \sin^2\varphi} \ldots\ldots (c)$

整理(b)式，可得

$$\sin\varphi = \frac{R_1}{R_2}\sin\alpha \ldots\ldots (d)$$

(d)代入(c)式，可得

$$d_0 = 2R_2\sqrt{1 - \frac{{R_1}^2}{{R_2}^2}\sin^2\alpha} \ldots\ldots (e)$$

(e)代入(a)式，得

$$d = 2R_2 \csc\theta\sqrt{1 - \frac{{R_1}^2}{{R_2}^2}\sin^2\alpha} \ldots\ldots (f)$$

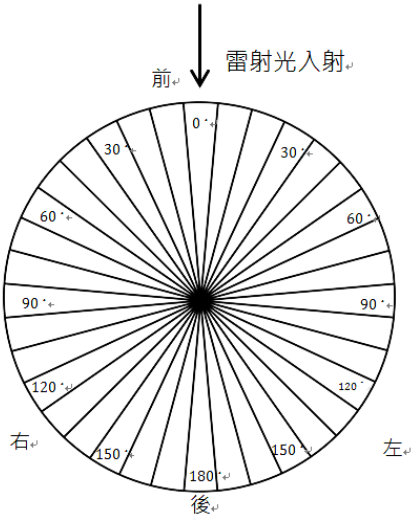


圖 5：座標定義

將(f)轉為 d 與 β 的關係式，得 $d(\beta) = 2R_2 \csc\theta\sqrt{1 - \frac{{R_1}^2}{{R_2}^2}\sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right)}$

3. 求雷射圈亮度

設雷射光正向打在物體上，物體無吸收光線，此時光點亮度I_0

在 x-y 平面上，只考慮右圖的發散方式，由於光總功率相等

$$I_0 d_0 = I_1 d = I_1 d_0 \csc\theta$$

$$\Longrightarrow I_0 = I_1 \csc\theta \ldots\ldots (g)$$

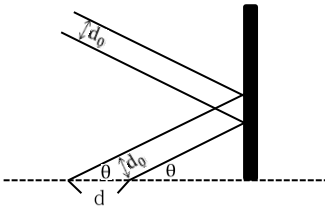


圖 6：圓柱側視圖

考慮雷射光射向圓柱瞬間有斜射、直射狀況，如右

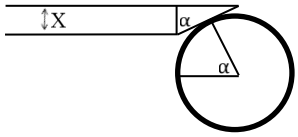


圖 7：圓柱俯瞰圖

$$I_1 x = I_2 x \sec\alpha$$

$$I_2 = I_1 \cos\alpha = I_1 \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) \ldots\ldots (h)$$

因為雷射圈任一點可用 β 角表示，所以在圓柱上 α 角處亮度與在 β 角處亮度成正比

考慮照到圓柱發散後瞬間到投影在桌面向四面八方發散

$$I_2 R_1 = I_3 R$$

$$\Longrightarrow I_3 = I_2 \frac{R_1}{R} \ldots\ldots (i)$$

綜合(g)、(h)、(i)可知

$$I = I_0 \frac{R_1}{R} \sin\theta \cos\left(\frac{\beta}{2}\right)$$

<理論討論 1>

1. 將入射角減小，或將雷射光照在柱子的點上移，則雷射圈會變大
2. 將入射角減小，雷射圈寬度會增加，而亮度減小
3. 雷射圈前面會比後面稍寬，且亮度較亮

(二) 可透射的圓柱

在同一雷射圈中，若柱子不可透射，依照上面理論推導，越後面雷射圈應該越暗，然而，當光透射過柱子時，由於折射的關係，會增加後面部分的亮度，經由雷射圈亮度分析，即可知道光是否有穿透圓柱。

另外，當柱子是可透射時，雷射圈前面部分會主要有兩種形式的光：一種是光照到柱子直接反射；另一種是光照到柱子先折射進去再反射回來，而這兩種光因為反射點不同，因此會有兩層(若柱子極細，則可看到亮帶)。

1. 由第二層亮弧角度計算圓柱折射率

延續以上代號，設雷射光在 x-z 平面入射角 α，折射角 i，而光在柱內經過一次反射後回來與水平線夾角 γ，柱子折射率 n

分別求光的偏向角

第一次折射：α-i

第一次反射：π-2i

第二次折射：α-i

偏向角：π+2α-4i→γ=2α-4i

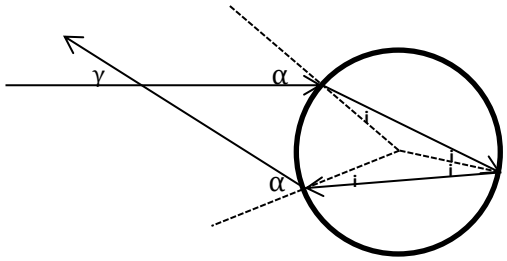


圖 8：亮弧形成示意圖(圖中為其中一道光的路徑)

求 α 在某值時，|γ|有極值，則

$$\frac{d}{d\alpha}(2\alpha-4i)=0$$

$$0=\frac{d}{d\alpha}(2\alpha)-4\frac{d}{d\alpha}\sin^{-1}(\frac{\sin\alpha}{n})\ldots\ldots(a)$$

由連鎖律 $\frac{d}{d\alpha}\sin^{-1}(\frac{\sin\alpha}{n})=\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{\sin\alpha}{n})^2}}\times\frac{1}{n}\times\cos\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}}$ 代回(a)

$$\frac{4\cos\alpha}{\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}}=2\ldots\ldots(b)$$

$$4\cos^2\alpha=n^2-\sin^2\alpha\rightarrow 3\sin^2\alpha=4-n^2$$

$$\sin\alpha=\sqrt{\frac{4-n^2}{3}}(c)\text{或}\sqrt{\frac{n^2-4}{3}}(d)$$

(c)

$$\cos\alpha=\sqrt{\frac{n^2-1}{3}}\text{代回(b)左式}$$

$$\frac{4\sqrt{\frac{n^2-1}{3}}}{\sqrt{n^2-\frac{4-n^2}{3}}}=2(\text{合})$$

(d)

$$\cos\alpha=\sqrt{\frac{7-n^2}{3}}\text{代回(b)左式}$$

$$\frac{4\sqrt{\frac{7-n^2}{3}}}{\sqrt{n^2-\frac{n^2-4}{3}}}=\frac{4\sqrt{7-n^2}}{\sqrt{2n^2-4}}\neq 2(\text{不合})$$

$\because 0 \le \alpha < \frac{\pi}{2} \therefore \sin\alpha \ge 0, \cos\alpha > 0$

$\sqrt{\frac{4-n^2}{3}} \ge 0$ 且 $\sqrt{\frac{n^2-1}{3}} > 0 \rightarrow 1 < n \le 2$ 時符合此極值公式

當$1 < n \le 2$ 時，

所求弧度 $= 2|\gamma| = 2|2\alpha - 4i| = \mathbf{4}\left|\boldsymbol{\alpha - 2\sin^{-1}\frac{\sin\alpha}{n}}\right|$

$$= \mathbf{4}\left|\mathbf{\sin^{-1}\sqrt{\frac{4-n^2}{3}} - 2\sin^{-1}\sqrt{\frac{4-n^2}{3n^2}}}\right|$$

量出亮帶弧度，解方程式，即得 n 值(註 1：由於方程式的 α 有條件限制，因此 γ 的極值未必代表是偏向角最大，但是，在極值時由於 α 與 γ 為連續函數曲線，在極值時亮度會較強)(註 2：本公式是以平面為基礎推導，故此部分實驗過程中盡量在可觀測雷射圈的情況下盡量調小照射柱子俯角，統一 10 度)

2. 公式合理性的證明

此公式原理與彩虹偏向角的概念相似，但由於證明繁瑣，查無類似做相同實驗測折射率的資料，也無理論值比較，因此另外設計一個實驗證明公式正確性，期盼能使推導出的公式使人信服。

※延伸實驗：相對折射率的測量。此實驗選兩種雷射光照射尼龍線，在前面的實驗中已得到實際折射率的數據，現在把其置入水中照樣求其弧度，算出相對折射率，只要經由比較，即可求出水的折射率，若間接算出的水折射率接近所知的 1.33，則可證明實驗有一定的正確性。

(三) 粗糙的圓柱

當雷射光照到粗糙物體時，會有漫射現象，使反射出的光不會都依循相同方向行進，因此，當雷射光照射到粗糙圓柱時，雷射圈會變模糊，甚至消失不見。

(四) 極細圓柱

1. 反折射光的干涉

在做可看到干涉條紋的雷射圈時，會把雷射圈放大，此時將入射角調至極小，因此以下干涉條紋的計算均忽略光 y 軸上的波程差。

當某兩道雷射光的行進方式如右圖時，會產生干涉現象。設一道光入射角 α，經由柱子反射，另一到光入射角 α′，折射角 i，折射出來後和反射光平行。

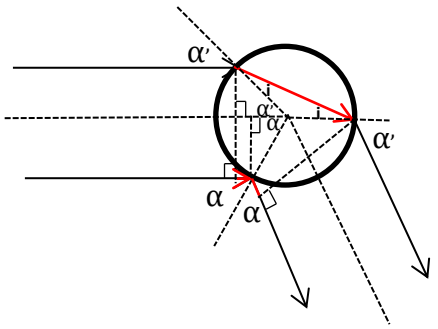


圖 9：反折射光干涉示意圖(圖中為其中一組相對應互相干涉的光之行進路徑，紅色部分為波程差的成因)

$$\pi - 2\alpha = 2(\alpha' - i) \rightarrow \frac{\pi}{2} - \alpha = \alpha' - i \ldots\ldots (a)$$

反射、折射光的所走的距離差

$$= 2R_1\left(\frac{1}{n}\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha'} + \cos\alpha - \cos\alpha'\right)$$

計算波程差時，在介質中距離需乘以 n

$$\rightarrow \Delta x = 2R_1\left(\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha'} + \cos\alpha - \cos\alpha'\right)$$

將上式對 α 微分

$$\rightarrow \frac{d(\Delta x)}{d\alpha} = 2R_1\frac{d}{d\alpha}\left(\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha'} + \cos\alpha - \cos\alpha'\right)$$

$$= 2R_1\left(-\sin\alpha + \left(\frac{-\sin\alpha'\cos\alpha'}{\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha'}} + \sin\alpha'\right) \times \frac{d\alpha'}{d\alpha}\right) \ldots\ldots (b)$$

將(a)左右同時對α′微分

$$-\frac{d\alpha}{d\alpha'} = \frac{d}{d\alpha'}\left(\alpha' - \sin^{-1}\left(\frac{\sin\alpha'}{n}\right)\right) = 1 - \frac{\cos\alpha'}{\sqrt{n^2 - \cos^2\alpha'}}$$

$$\rightarrow \frac{d\alpha'}{d\alpha} = \frac{\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha'}}{\cos\alpha' - \sqrt{n^2 - \sin^2\alpha'}} \ldots\ldots (c)$$

(c)代入(b)

$$\rightarrow \frac{d(\Delta x)}{d\alpha} = 2R_1\left(-\sin\alpha + \sin\alpha' \times \left(1 - \frac{\cos\alpha'}{\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha'}}\right) \times \left(\frac{\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha'}}{\cos\alpha' - \sqrt{n^2 - \sin^2\alpha'}}\right)\right)$$

$$= -2R_1(\sin\alpha + \sin\alpha')$$

上式為波程差對 α 的微分，由於對應雷射圈角度的為 β，故換成對 β 微分(β=2α)

$$\frac{d(\Delta x)}{d\beta} = \frac{d(\Delta x)}{d(2\alpha)} = \frac{1}{2} \times \frac{d(\Delta x)}{d\alpha} = -R_1(\sin\alpha + \sin\alpha')$$

設雷射圈弧長 s，則 $\frac{ds}{d(\Delta x)} \approx \frac{Rd\beta}{d(\Delta x)} = -\frac{R}{R_1(\sin\alpha + \sin\alpha')}$

(雖外反射的光會反相，但不影響微分結果)

亮紋間距 $= \left|\lambda \times \frac{ds}{d(\Delta x)}\right| = \frac{R\lambda}{R_1(\sin\alpha + \sin\alpha')}$ 其中 λ 為光在空氣中波長

而由(a), $\alpha = \frac{\pi}{2} - \alpha' + \sin^{-1}(\frac{\sin\alpha'}{n})$

註：$\frac{ds}{d(\Delta x)}$ 表示單位波程差變化的弧長變化量，當單位波程差為 λ 時，弧長則為亮紋間距

2. 中央之三波源干涉

如右圖，當光通過一個極細的圓柱時，在 β 接近 180 度時會發生如右圖的三波源干涉現象，由於中間透射光與旁邊兩道光的干涉現象可視為反射光與折射光 $\alpha = 90^\circ, \alpha' = 0^\circ$ 的情況，所以干涉條紋會與前面所述干涉有連貫的趨勢，然而，兩端的光互相干涉，只有 β 接近 180 度時才會發生，因此會看到另一種較密集的干涉條紋，能量幾乎蓋過前面所述干涉條紋，而此較密集的部分就是此節要探討的現象，而後面報告中稱此較密集的條紋為中央干涉條紋。

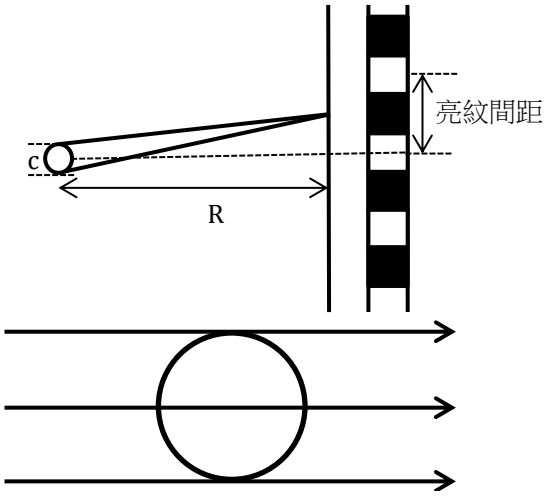


圖 10(上圖)：中央干涉條紋示意圖
圖 11(下圖)：三波源干涉光行進路徑示意圖

在公式推導方面，如果設光波長λ，兩波源距離(即圓柱直徑)為 c，圓柱到條紋距離為 R，則若此點在中央亮帶附近，由數學幾何關係可知：亮紋間距 $= \frac{R\lambda}{c}$。

三、 實驗方法(由於雷射光頗亮，實驗過程中均盡量全程戴墨鏡以避免強光刺眼)

(一) 基本測量

1. 圓柱直徑測量：使用游標尺
2. 雷射圈寬度、雷射光點長軸測量：使用直尺
3. 亮度測量：使用 Light sensor
4. 雷射圈半徑、亮弧角度測量：使用印有極座標刻度的紙
5. 照射在圓柱高度測量：使用直尺
6. 雷射筆俯角測量：把量角器黏在雷射筆固定架上，以棉線垂一迴紋針測量(詳見實驗器材與設備)
7. 干涉條紋測量：以極座標紙和捲尺定義半徑和 β 角，以直尺測量寬度(取附近 6 條亮紋的距離測量，平均即可得到亮紋間距)

(二) 測量原則

若雷射圈有要做各物理量分析，則均使用上述測量方法；若僅討論現象，則用手持柱子用雷射筆照，拍照說明所看到的現象。(註：以下實驗細圓柱均垂直於雷射圈)

(三) 精密度測量

實驗：雷射光平行度測量

實驗目的：測量把雷射光當成平行光的可行性

實驗方法：將雷射光以 1m、4m 距離正向投影在紙上，測量各雷射光點長軸的長度變化

(四) 光滑細針(此部份各組數據均為獨立測量，沒有沿用之情形)

實驗一：雷射圈亮度與 β 角的關係

實驗目的：測量雷射圈亮度隨 β 角的變化是否符合理論值

控制變因：雷射筆俯角(20 度)、雷射光波長(700nm)、雷射圈半徑(8cm)、照射高度

操作變因：雷射圈 β 角

實驗方法：每隔 10 度在右側以 Light sensor 測量一次亮度，與理論值比較

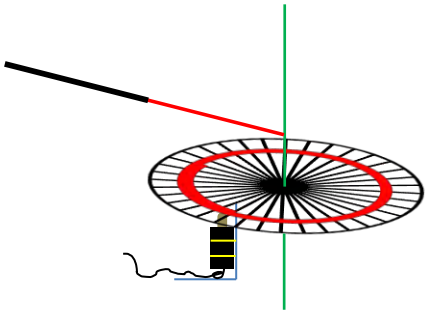


圖 12：亮度測量示意圖

實驗二：雷射圈對稱性測量(此實驗含細尼龍釣魚線亮度測量)

實驗目的：證明雷射圈的亮度分布左右對稱

控制變因：雷射筆俯角(30 度)、雷射光波長(700nm)、雷射圈半徑(10cm)、照射高度

操作變因：雷射圈 β 角(左右分別對照)

實驗方法：每隔 30 度左右分別以 Light sensor 在紙下量一次亮度(細尼龍是左右分別隔 10 度量一次)，分析其趨勢及有無相互對應，此數據非由上一實驗數據擷取

實驗三：雷射圈半徑和亮度的關係

實驗目的：測量雷射圈半徑和亮度關係是否符合理論值

控制變因：雷射圈 β 角(140 度)、雷射光波長(700nm)、雷射筆俯角(30 度)

操作變因： 照射高度

實驗方法：使用 Light sensor 測量亮度，以極座標白紙測量半徑，與理論值比較

實驗四：雷射圈半徑和入射角的關係

實驗目的：測量雷射圈半徑和入射角關係是否符合理論值

控制變因：雷射圈 β 角(0 度)、雷射光波長(700nm)、雷射圈半徑、照射高度

操作變因： 雷射筆俯角

實驗方法：使用貼在雷射筆固定裝置上的量角器掛迴紋針測量俯角，以極座標白紙測量半徑 ，與理論值比較

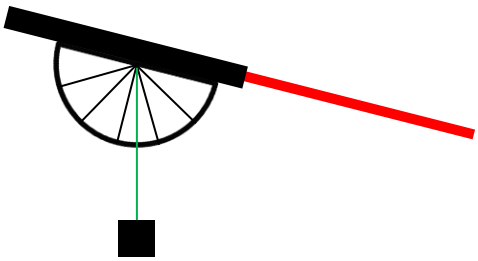


圖 13：雷射筆俯角測量示意圖

實驗五：雷射圈半徑和照射高度的關係

實驗目的：測量雷射圈半徑和照射高度關係是否符合理論值

控制變因：雷射圈 β 角(0 度)、雷射光波長(700nm)、雷射圈半徑、雷射筆俯角(30 度)

操作變因：照射高度

實驗方法：使用直尺量雷射在針上的照射高度，與理論值比較

實驗六：雷射圈入射角和寬度的關係

實驗目的：測量雷射圈入射角和寬度關係是否符合理論值

控制變因：雷射圈 β 角(0 度)、雷射光波長(700nm)、雷射圈半徑、照射高度

操作變因：雷射筆俯角

實驗方法：使用直尺量雷射在針上的照射高度

(五) 折射率測量

實驗一：以前面亮弧推估細圓柱折射率

實驗目的：推算細圓柱折射率

控制變因：雷射筆俯角(10 度) 、雷射圈半徑(填滿整個極座標格線，約 12 公分)

操作變因：雷射光波長及細柱材質

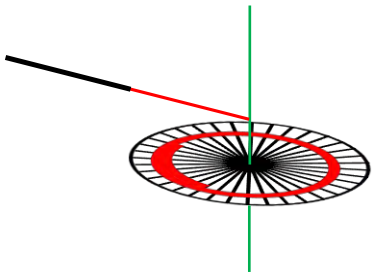


圖 14：亮弧測量示意圖

實驗方法：將雷射光投影在格線紙，測量其亮弧弧度，經由 Geogebra 軟體輸入所推導之方程式，求出折射率

實驗二：圓柱在水中的相對折射率

實驗目的：驗證所推亮弧角度和折射率之關係式

控制變因：雷射筆俯角(13 度，理由是將雷射射入水裡會偏折，經由計算此角度會使雷射射入柱子俯角約 10 度) 、雷射圈半徑

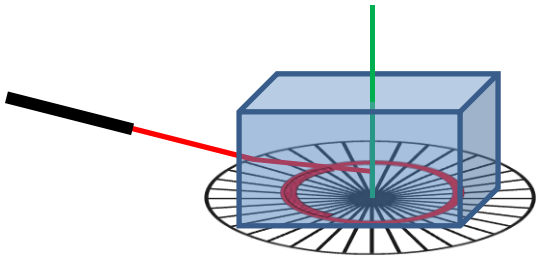


圖 15：水中雷射圈實驗操作示意圖

操作變因：雷射光波長及細柱材質

實驗方法：將以上測量隨機抽取兩項驗證，經由亮弧弧度計算其相對折射率，與原本在空氣中折射率比較，看相除是否能得到水的折射率約 1.33

(六) 干涉條紋(理論值之折射率數據由上組實驗數據而得)

實驗一：反折射干涉條紋測量

實驗目的：驗證所推干涉條紋的公式

控制變因：雷射筆俯角(10 度) 、雷射圈半徑(約 1m)

操作變因：尼龍釣魚線粗細、雷射光波長、雷射圈 β 角

實驗方法：以捲尺延伸格線紙測量 β 角，取附近六個亮紋之間的距離平均而得

實驗二：中央干涉條紋測量

實驗目的：驗證所推干涉條紋的公式

控制變因：雷射筆俯角(10 度) 、雷射圈半徑(約 1m)(註：和上實驗同一雷射圈)

操作變因：尼龍釣魚線粗細、雷射光波長

實驗方法：干涉條紋在中央會有特別密集且等距的現象，取附近六個亮紋之間的距離平均而得(註：前面反折射光干涉的部分 β 角為 180 度時，測量其最接近 180 度但無密集條紋的部分)

(七) 非理想圓柱之雷射圈、玻璃柱

實驗目的：測量不同種類的雷射圈並解釋所觀察的現象之成因

實驗方法：以手持柱子，以雷射筆照射，拍照作分析

伍、研究結果

一、 基本測量結果及基本數據整理

(一) 測量干涉時雷射圈半徑：1m

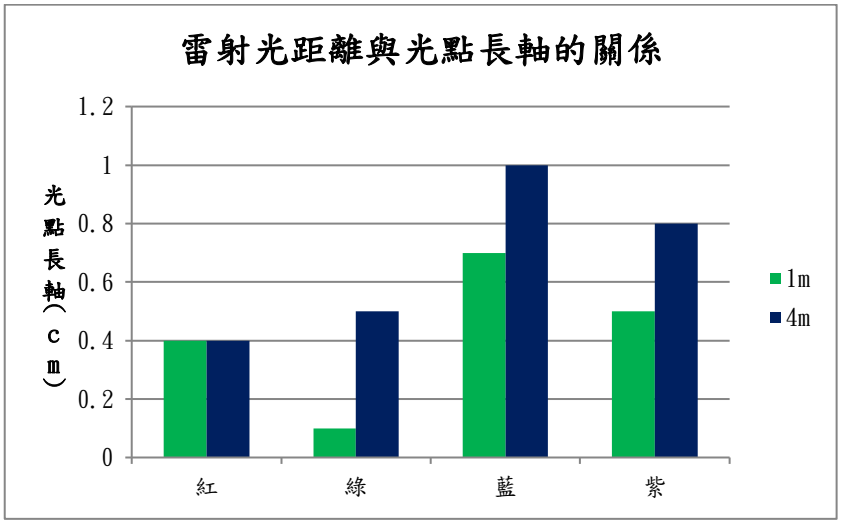
(二) 測量干涉及折射率時雷射筆俯角：10 度(測量相對折射率時約 13 度，因雷射進入水中會折射，經由計算俯角約 13 度雷射會以 10 度入射圓柱)

(三) 雷射光波長：紅 700nm、綠 532nm、藍 450nm、紫 405nm

(四) 圓柱直徑：針 0.8mm、粗玻璃柱 6.1mm、粗尼龍 0.35mm、細尼龍 0.2mm、碳素 0.45mm

(五) Light sensor 亮度：光強 1%=5 流明

二、 雷射光平行度測量



(註：紅雷射光與綠雷射光光點均接近正圓)

如圖，紅色光平行度最高，故以此來做大部分實驗。

三、 光滑細針(不可透光細圓柱)

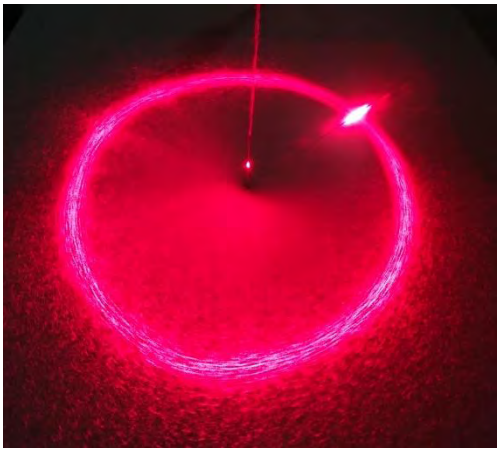
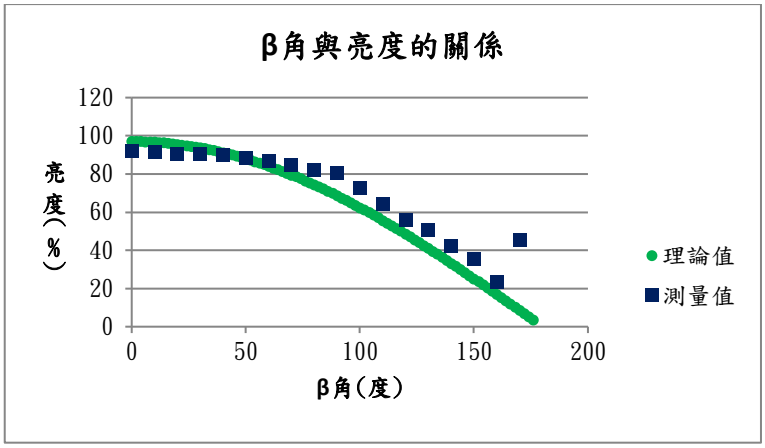


圖 16：細針雷射圈照片

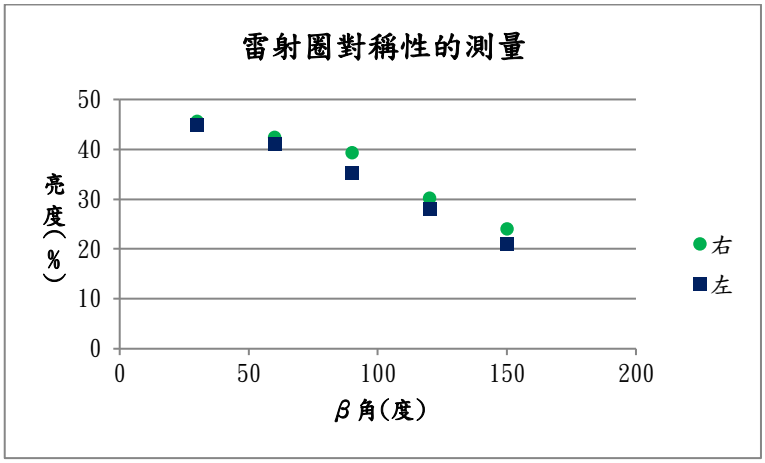
由圖 16 可知，雷射圈前面較亮，後面較暗。

(一) 雷射圈亮度和位置的關係



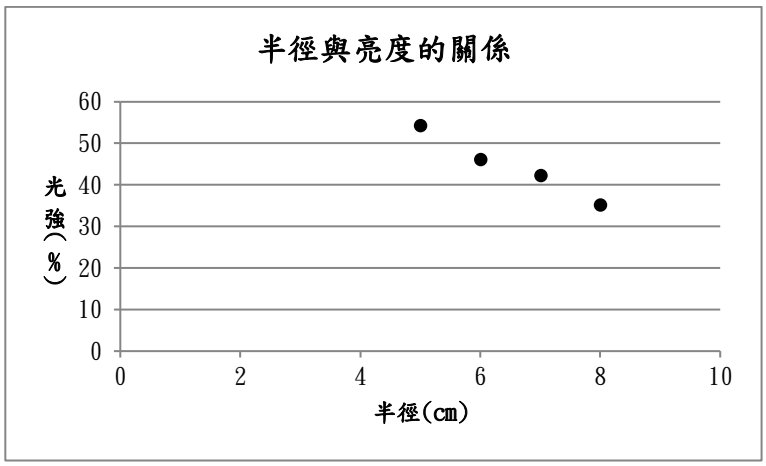
由圖可知雷射圈前面部分比後面部分亮，與理論值趨勢相符，而 β 角 170 度時數據偏高是由於位於 180 度的雷射光點所影響。

(二) 雷射圈亮度左右對稱性的測量



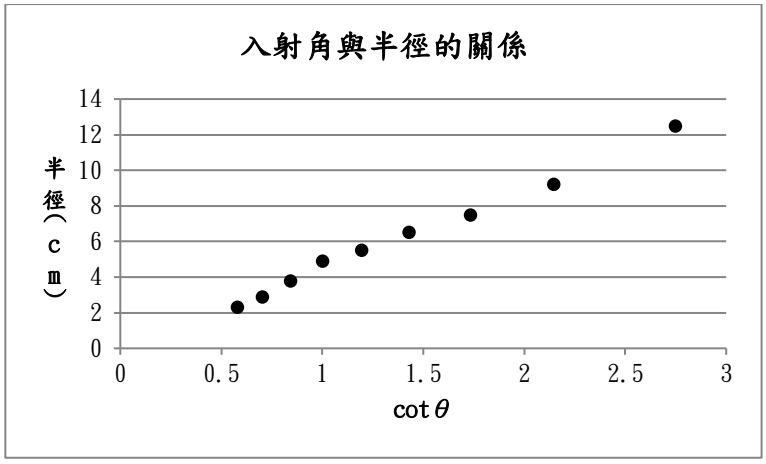
由圖可知雷射圈具有左右對稱的特性，故前一實驗可只量其中一邊亮度(此與上圖實驗數據的控制變因有異，理由詳見討論的補充說明)。

(三) 雷射圈亮度和半徑的關係



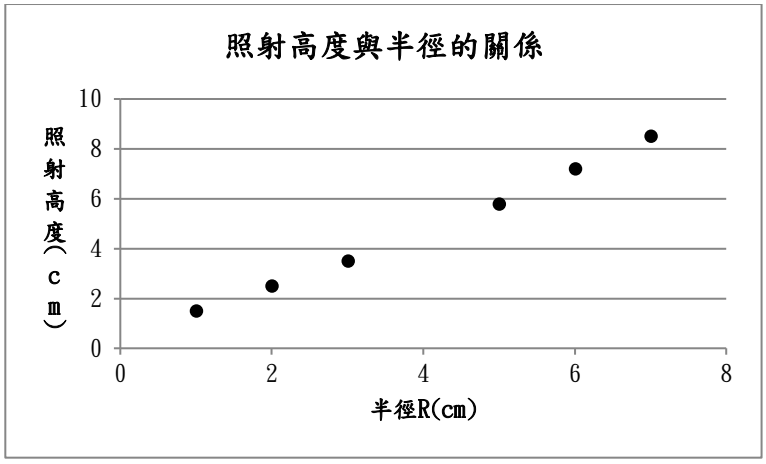
由圖可知半徑與亮度關係有負相關的趨勢。

(四) 雷射筆俯角餘切值和雷射圈半徑的關係



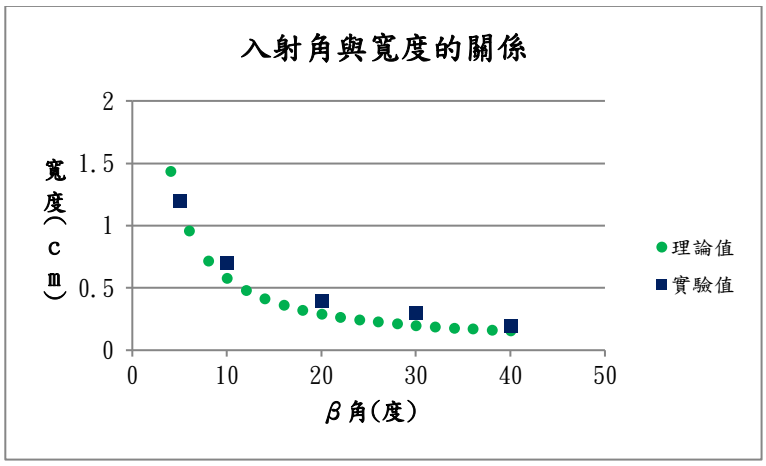
由圖可知雷射筆俯角餘切值和雷射圈半徑的關係有正相關趨勢。

(五) 雷射筆投射在細針位置和雷射圈半徑的關係



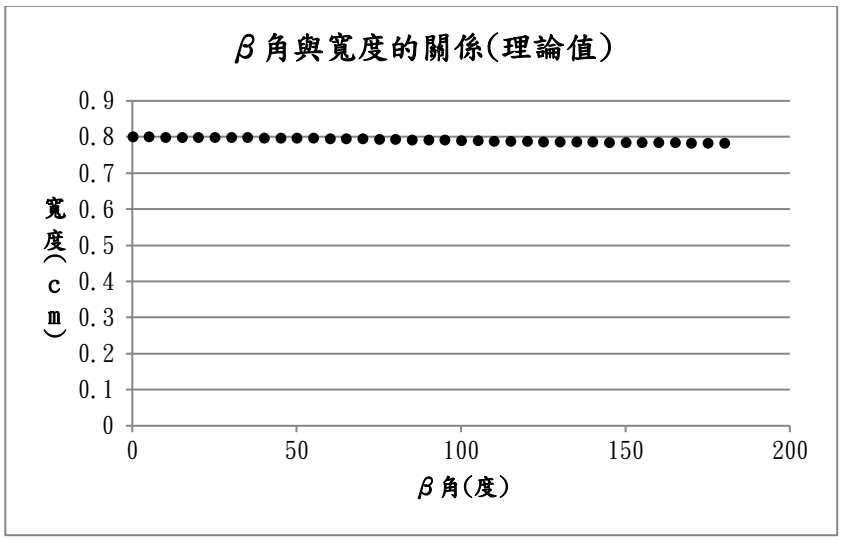
由圖可知照射高度與半徑有正相關趨勢。

(六) 雷射筆俯角和雷射圈寬度的關係



理論值由$d(\beta) = 2R_2\csc\theta\sqrt{1 - \frac{{R_1}^2}{{R_2}^2}\sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right)}$而來，由圖可知理論值與實驗值相當接近。

(七) 同一雷射圈 β 角和寬度的關係：因為以直尺測量寬度皆相同，量不出雷射圈的細微變化，故不整理出實驗數據，理論值是由公式 $d(\beta) = 2R_2\csc\theta\sqrt{1-\frac{{R_1}^2}{{R_2}^2}\sin^2(\frac{\beta}{2})}$ 而來（R_2=0.2cm，θ=30 度，R_1=0.04cm)。



(八) 雷射筆投射在細針位置和寬度的關係：因為以直尺測量寬度皆相同，故省略。

四、 粗玻璃柱(可透光粗圓柱)

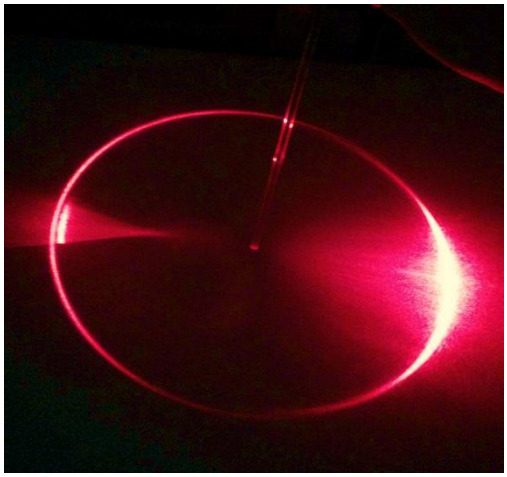


圖 17：玻璃柱雷射圈照片

如圖，雷射圈後面(圖右側)亮度較亮，而前面(圖左側)有亮弧出現。

五、 尼龍釣魚線(可透光極細圓柱)

圖 18：細尼龍線雷射圈照片

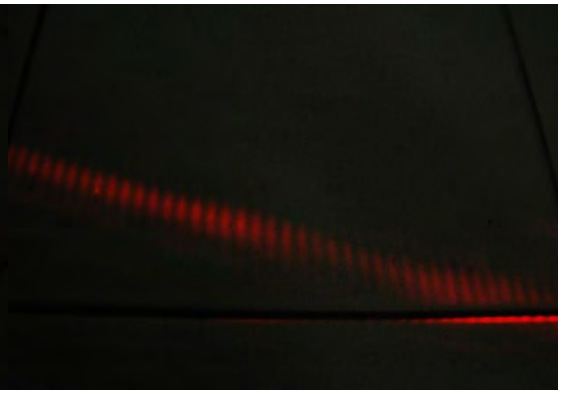


圖 19：細尼龍線雷射圈照片—反折射干涉條紋

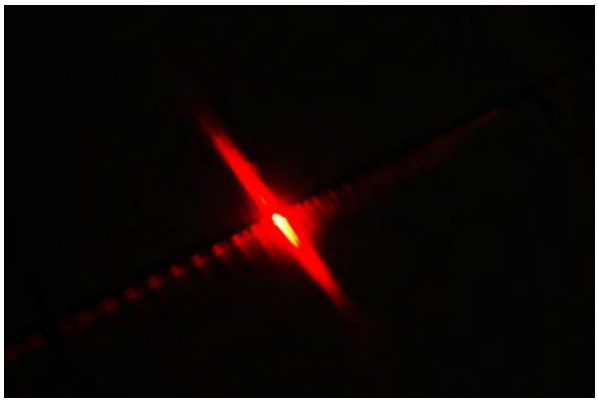


圖 20：細尼龍線雷射圈照片—中央干涉條紋及鄰近之反折射干涉條紋

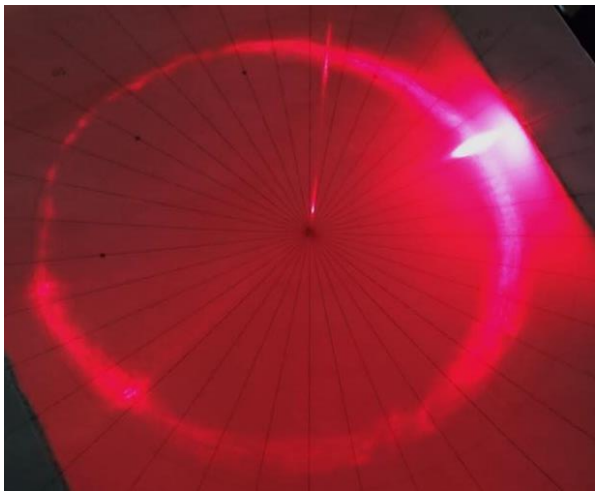
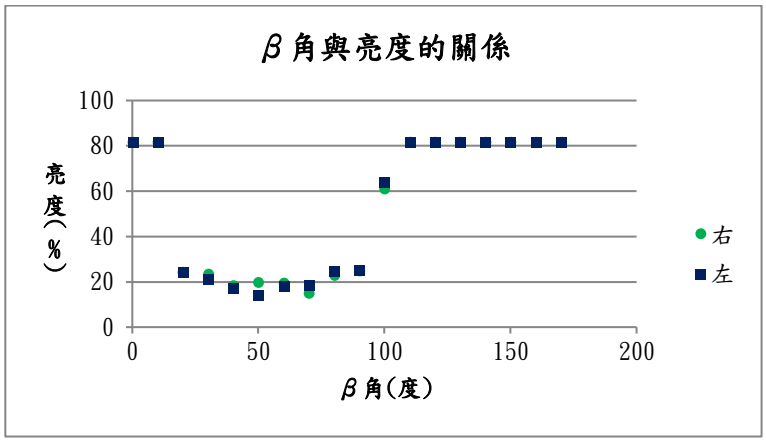


圖 21：粗尼龍線雷射圈照片及亮弧測量示範

如上四圖，其性質與玻璃柱相似，而有干涉條紋出現，而干涉條紋在不同區域也有不同特性。

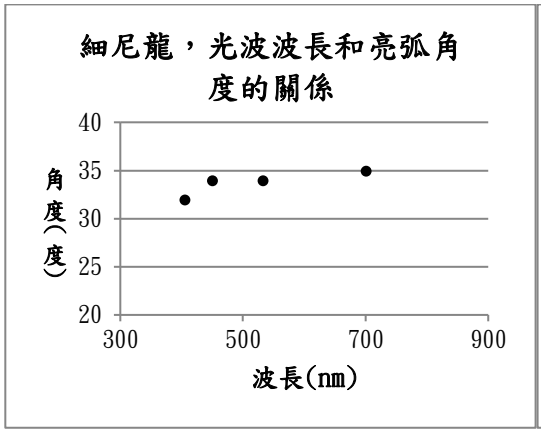
(一) 細釣魚線-雷射圈 β 角與亮度的關係(部分數據已到達 Light sensor 最大可測量範圍，故測不出變化)

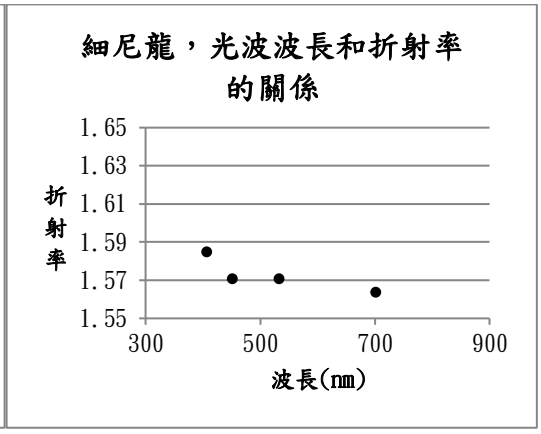


如圖，雷射圈後方亮度較亮，而前方亮帶偵測到的亮度也較高。

(註：上方數據亮度 81%左右的部分為亮度超過可偵測範圍，由 100%再扣除當時背景亮度而得，因此並非實際亮度)

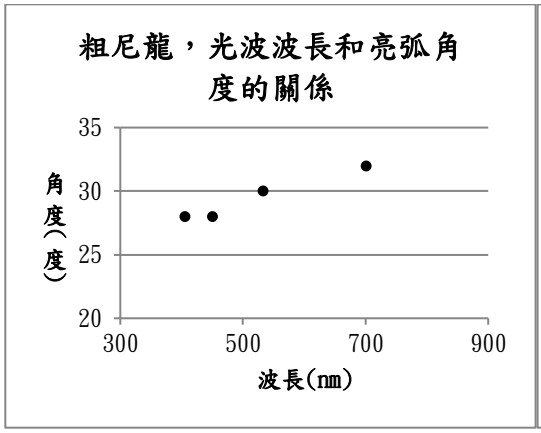
(二) 細尼龍釣魚線折射率測量

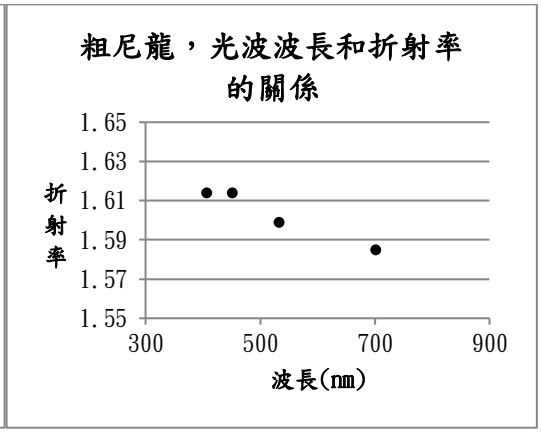




如圖，利用公式由亮弧角度推出折射率，可知細尼龍線折射率約 1.55~1.6 之間。

(三) 粗尼龍釣魚線折射率測量





如圖，由亮弧角度推出粗尼龍線折射率約 1.58~1.62 之間。

(四) 尼龍線，折射率公式的驗證(以圖說明)

1. 紅雷射*粗尼龍線

空氣中亮弧角度： 28 度；水中亮弧角度：130 度

空氣中折射率：1.585 → 水中折射率：1.206 → 水折射率：1.314

2. 綠雷射*細尼龍線

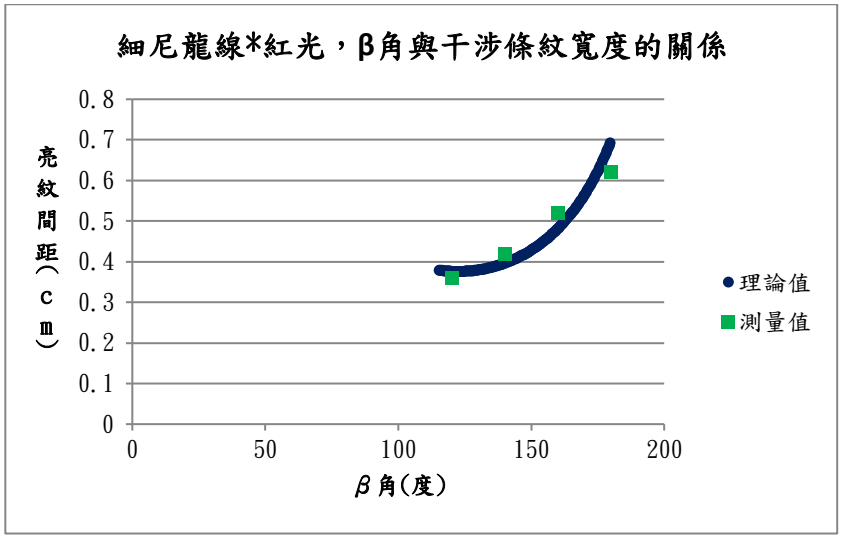
空氣中亮弧角度：34 度；水中亮弧角度：145 度

空氣中折射率：1.571 → 水中折射率：1.175 → 水折射率：1.337

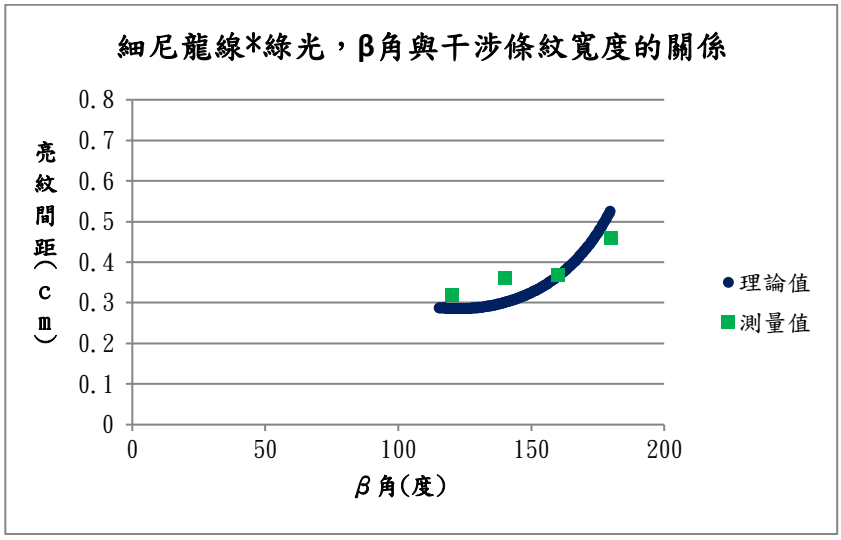
由上，間接推出水折射率約 1.31~1.34，符合實際情況。

(五) 反折射光干涉

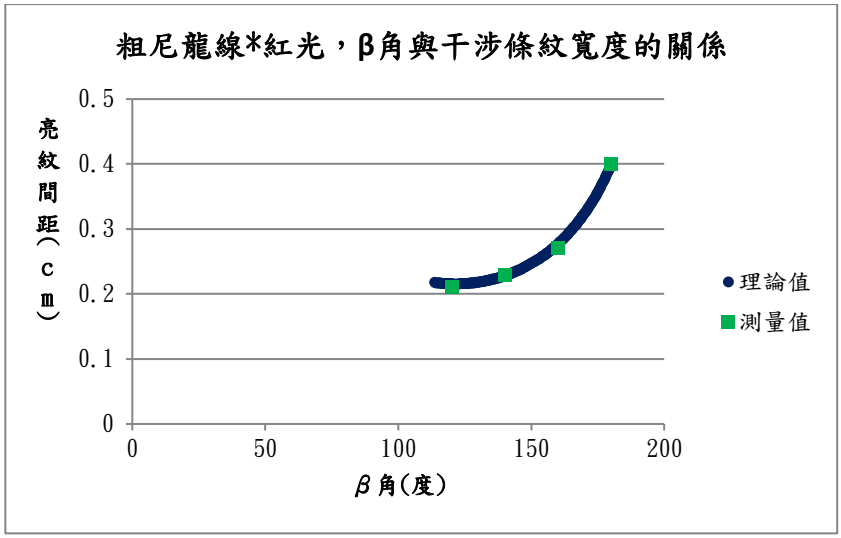
1. 細尼龍線*紅光，β 角與反折射光干涉條紋寬度的關係



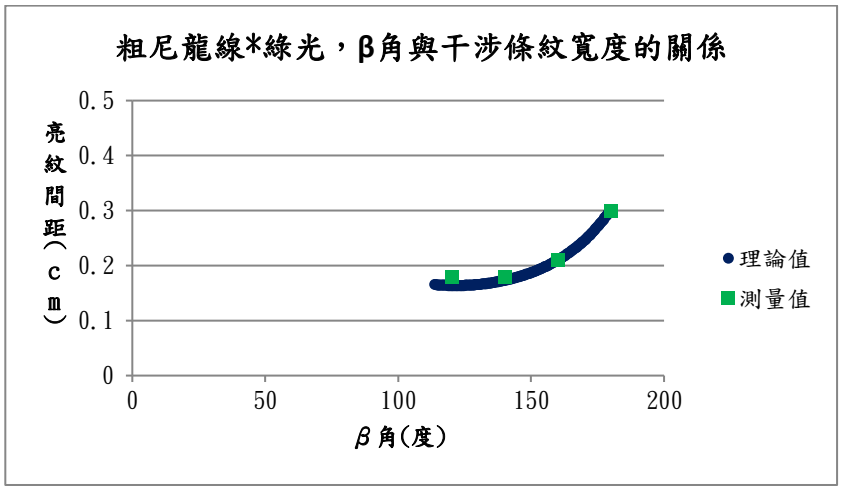
2. 細尼龍線*綠光，β 角與反折射光干涉條紋寬度的關係



3. 粗尼龍線*紅光，β 角與反折射光干涉條紋寬度的關係

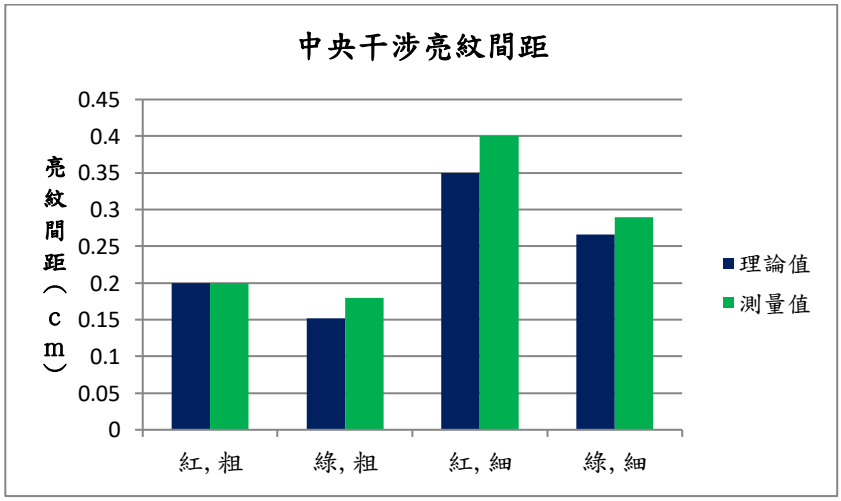


4. 粗尼龍線*綠光，β 角與反折射光干涉條紋寬度的關係



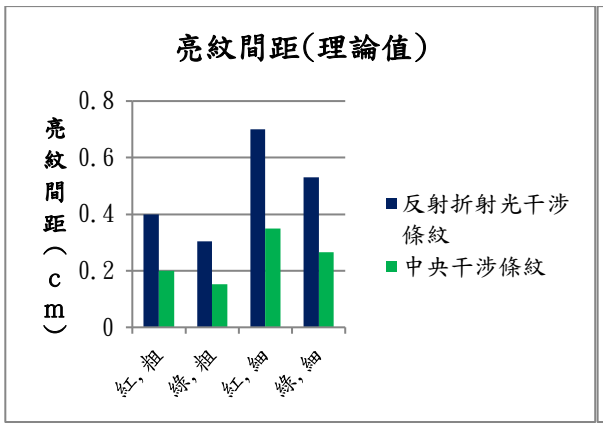
由上四圖，可知若 β 角、雷射光波長增加，圓柱半徑減小，則干涉條紋寬度增加。

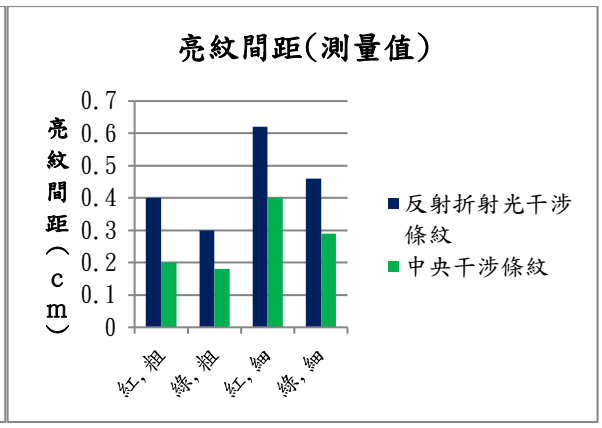
(六) 粗細尼龍線，中央干涉條紋與理論值對照



如圖，長條圖數據幾乎兩兩相等，符合公式：亮紋間距= $\frac{R\lambda}{c}$

(七) β 角近 180 度時兩種干涉條紋寬度之關係





如圖，中央反折射干涉條紋寬度較通過圓柱兩端干涉條紋密，理論值與實際值相符。

六、 碳素釣魚線(可透光細圓柱)

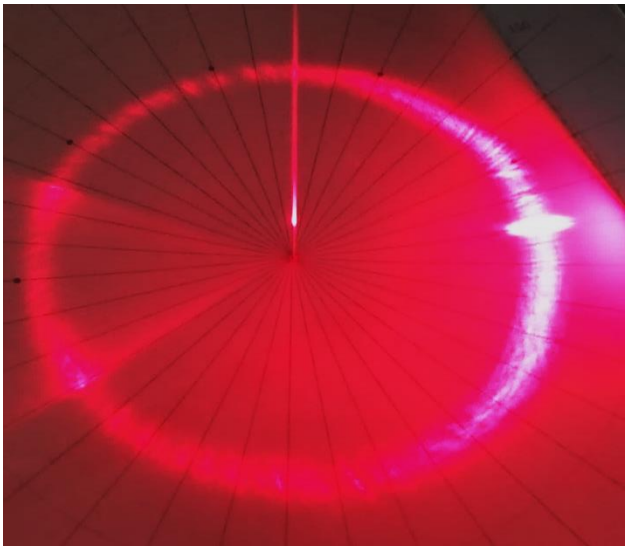
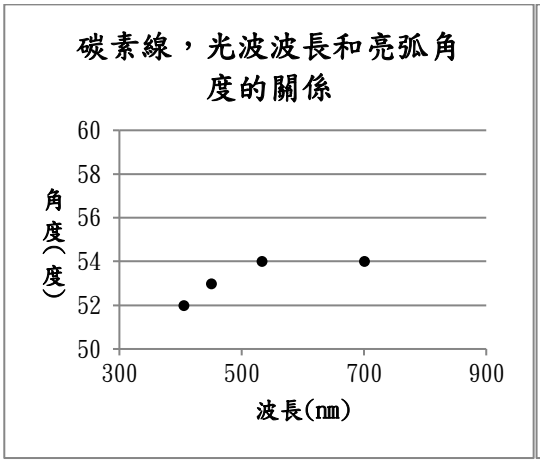
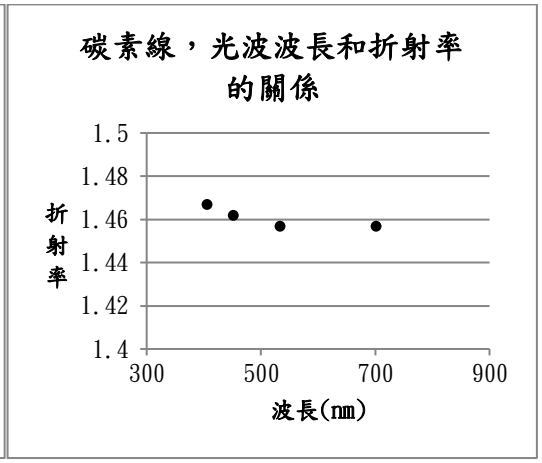


圖 22：碳素線雷射圈照片及亮弧角度測量示範





如圖，可求出碳素線折射率約 1.45~1.47 之間。

七、 吸管(可透光圓柱)

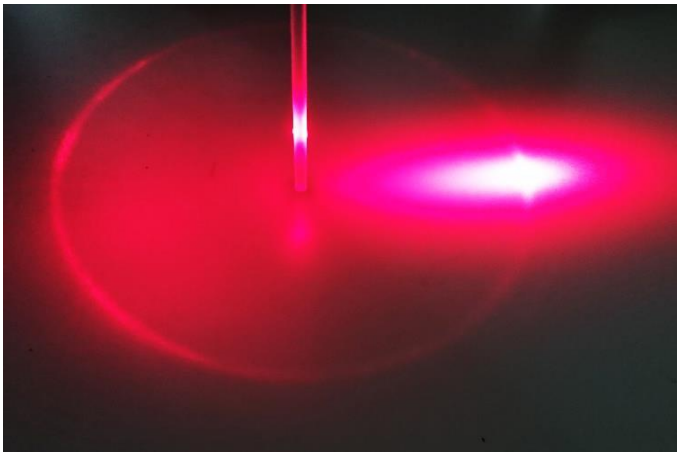


圖 23：吸管雷射圈照片

如圖，吸管雷射圈後面有光暈，可見其可透光。

八、 熱熔膠(可透光圓柱)

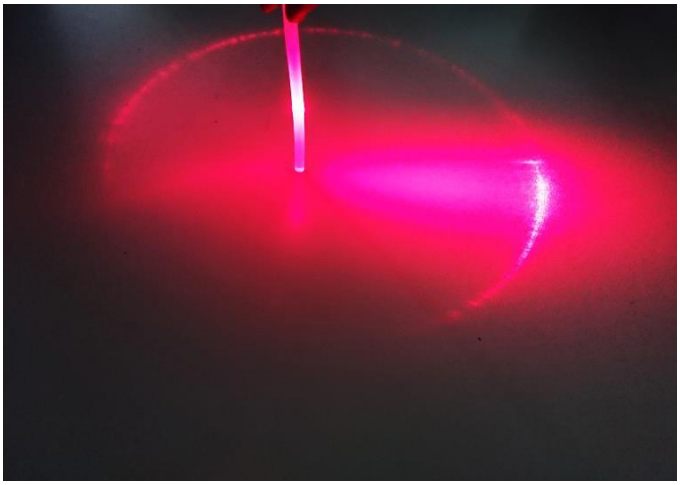


圖 24：熱熔膠雷射圈照片

如圖，熱熔膠雷射圈後面亮度較亮，而雷射圈不完整，可見其較粗且可透光。

九、 漆包線(不可透光極細圓柱)

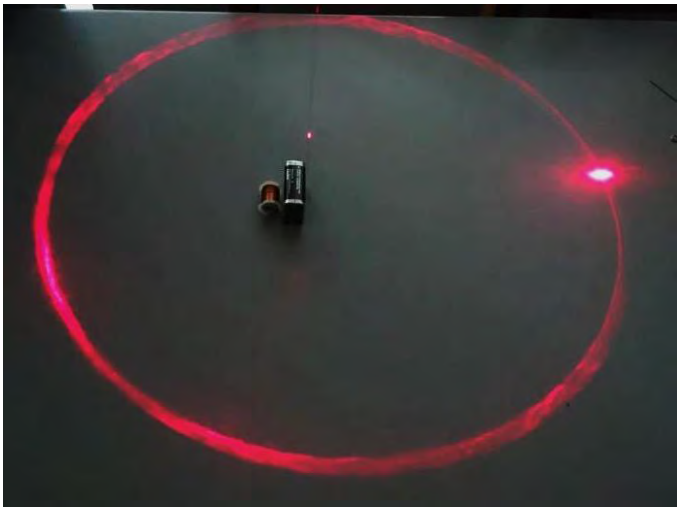


圖 25：漆包線雷射圈照片

如圖，漆包線雷射圈較為完整，而前面部分亮度較亮，可見其較光滑且不透光。

十、 迴紋針(不可透光細圓柱)

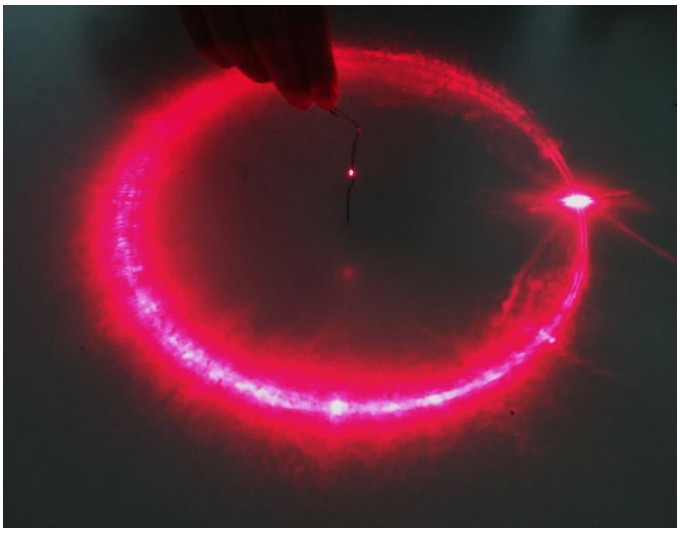


圖 26：迴紋針雷射圈照片

如圖，迴紋針雷射圈較為完整，前面部分亮度較亮，可見圓柱表面光滑且不透光。

十一、 筆芯(不可透光粗糙細圓柱)

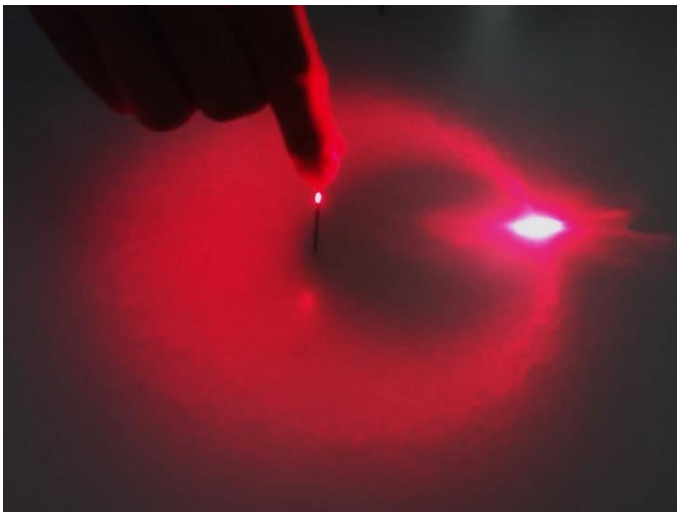


圖 27：筆芯雷射圈照片

如圖，筆芯雷射圈較為模糊，可見圓柱表面粗糙。

陸、討論

一、實驗誤差的可能因素與解決

(一) 背景亮度：亮度數據均先扣除當時背景亮度，約 4%至 20%不等，另外當雷射圈通過描圖紙時，亮度會減小，故亮度只討論相對的情況。

(二) 雷射圈其他部分亮度的干擾：由於當 β 角接近 180 度時，也會接近原雷射光點，因為雷射光點會直接照在 180 度的位置，功率頗高，因此易影響附近度數的測量，使接近 180 度的測量值比理論值高。此外，為了不破壞光感應器，不測 β 角為 180 度時的亮度。

(三) 雷射筆的亮度變化：當雷射使用過久，其內部會過熱，此時它的保護機制是降低亮度，然而，這會影響到測量值，因此我們在數次測量間會間隔足夠時間，使雷射筆充分冷卻，盡量讓亮度不要降低。

(四) 描圖紙的標記格線：雷射圈投影在描圖紙上，然而為了定位角度，我們會使用格線來幫忙，為了避免格線會干擾測量的亮度，因此光感應器盡量貼近描圖紙，與之成垂直，並避開有線的地方(即在線與線的中間測量)。

(五) 人為操作誤差：雷射光點極小，柱子極細，要使它穩穩地對準柱子不能偏移，並非易事。因此，我們用工具固定雷射筆，旋轉螺絲就能開關，使雷射圈亮度更穩定。

(六) 釣魚線折射率之測量：在此階段亮弧的角度測量是以釣魚線為中心進行測量，但實際上亮弧的圓心應該在圓柱前方一小段距離，如右圖(註：雷射光並不會剛好聚焦於同一點，而會類似有球面像差的現象，因此圓心為一個範圍，當圓柱夠細，實際圓心可視為同一點。)會使角度測出來有些許誤差，解決方法是增加雷射圈半徑，使亮弧實際圓心與釣魚線距離遠小於半徑，減少誤差。

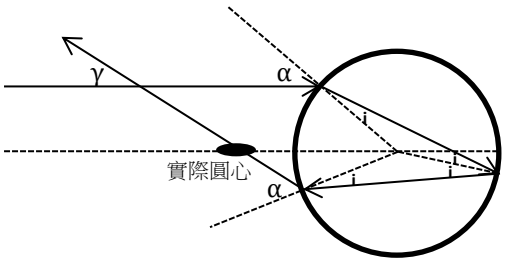


圖 28：亮弧形成示意圖

(七) 雷射光不完全平行：除了紅色光外，均發現雷射光有些許不平行的現象，因此多數實驗都以紅色光操作，唯以光波波長為變因之實驗才會使用其他色光。

(八) 測量工具：直尺、游標尺、捲尺、印有放射狀圖形的紙均為實驗的測量工具，然而測量必有誤差，若所量的物體極細，則誤差相對而言會較明顯。

二、實驗數據分析

(一) 雷射筆平行度測量：此測量的用意在我們可否視雷射光為平行光，由實驗數據可知，紅雷射光最為平行，而光點形狀也接近正圓形，因此，除了要做以不同顏色雷射光做操作變因外，我們均以紅色雷射光進行實驗。

(二) 光滑細針各物理量的測量：我們使用一個接近理想光滑不透光細圓柱進行實驗，藉由與所推導的公式比較，探討其可否用反射定律解釋，並證明其有對稱性。由數據可知，各項測量數值均接近理論值，唯亮度部分在 β 接近 180 度時有偏高的現象，我們因此認為由於接近後面雷射光點，測量值會較高。另外，因將細針雷射圈放大後在後面有看到模糊的干涉條紋(在釣魚線數據中，對應中央干涉條紋，但針較粗，干涉條紋不明顯)，因此我們推測也有可能是光通過細圓柱有繞射現象，增加後面雷射圈之亮度。

(三) 粗玻璃柱現象之探討：藉由一個大家公認會透光之物體，探討其雷射圈的各種物理現象，如會出現亮弧、後面亮度會增加，來比較圓柱透光和不透光的情形，並可用以推測當雷射光照未知物體時，有無透射現象。

(四) 釣魚線之折射率測量：實驗到此已進入應用階段，藉由公式推導和實驗結果來比較亮弧角度和圓柱折射率的關係，由數據可知光在尼龍線的折射率約落在 1.56~1.61 之間，且波長越短，折射率越高，此結果與尼龍實際折射率相符，也說明了公式的準確性，藉由此結果，即能輕易測量出細圓柱折射率，對於材料檢測上會有相當大的幫助。

(五) 釣魚線在水中相對折射率測量：將釣魚線置入水中，測量其相對折射率，與其在空氣中的折射率比較，間接推出水的折射率，由數據可知間接算出的水折射率極接近實際值(1.33)，說明推導之公式有正確性。

(六) 釣魚線之反射折射光干涉測量：在物理課本中我們對雙狹縫的干涉並不陌生，但是要在實驗室外觀測到雙狹縫干涉有一定難度，在此我們用日常生活常見的物品—釣魚線和雷射筆來做干涉實驗。利用前面所測得知數據，將入射角減小，即可把雷射圈放大，亮度減小，更容易觀測到干涉條紋。經由數據比較，也可看到干涉條紋不一定如課本所描述的間距相等，而是隨角度而變，所測量之數據也和理論值頗為相似，說明了所推導公式的合理性。

(七) 釣魚線之中央干涉測量：我們發現釣魚線雷射圈當 β 接近 180 度時，會有較旁邊密集的干涉條紋，因此在推導過程中說明是「通過圓柱兩側雷射光」干涉的結果，經由與高三選修物理的雙狹縫干涉比較，推出 亮紋間距 $= \frac{R\lambda}{c}$ 的關係式，經由數據分析發現實驗結果與公式吻合，進而說明此密集條紋的確是通過圓柱兩側雷射光干涉的結果。

(八) 非理想雷射圈：若柱子非完全光滑，則會有漫射現象，由照片可發現吸管、熱熔膠、筆芯的漫射現象較明顯，顯示其表面較為粗糙，而漆包線、迴紋針較光滑，另外，由亮度分布也可看出吸管和熱熔膠是可以透射的(後方亮度較前面大)，而熱熔膠條因為直徑較粗，無法形成完整一圈。最後，將整個研究整理成下表：

圓柱種類	表面	是否透光	粗細	折射率	雷射圈特色
針	光滑	否	細	無	雷射圈前面較亮，後面較暗
玻璃柱	光滑	是	粗	無測量	雷射圈後面較亮，前面有亮弧
尼龍線	光滑	是	極細	粗 1.58~1.62 細 1.55~1.60	雷射圈後面較亮，前面有亮弧，且干涉條紋明顯
碳素線	光滑	是	細	1.45~1.47	雷射圈後面較亮，前面有亮弧
吸管	稍粗糙	是	粗	無測量	吸管為空心結構，因此在後面部分聚光能力稍弱，仍可觀察到模糊光點
熱熔膠	粗糙	是	粗	無測量	雷射圈後面較亮
漆包線	光滑	否	極細	無	雷射圈前面較亮，後面較暗
迴紋針	光滑	否	細	無	雷射圈前面較亮，後面較暗
筆芯	粗糙	否	細	無	雷射圈模糊

表 2：各種圓柱比較

三、補充說明(亮度測量)

在亮度測量之中，我們總共做了四組數據，分別針對 β 角、半徑與雷射圈的亮度關係，以及對稱性的測量，包含細針及釣魚線的實驗。但是在測量 β 角與雷射圈的亮度的關係時數據不太理想，原因是測量數據多，前面實驗報告所述測量方法無法測的迅速，導致雷射電池電量成了亮度變化的原因之一，因此採用手持 Light sensor 的方法，使 Light sensor 緊貼紙面測量，連帶微調實驗裝置，確保雷射圈穩定性，因此控制變因隨之改變，各組數據會有異，但每組數據趨勢仍符合理論值。

柒、結論

在我們做的諸多實驗中，實驗內容看似繁雜，但主要可以分成三大部分：第一部分為基本操作，對於雷射光照在柱子上的現象進行解釋，再探討何種情況下雷射圈會有何不同；第二部分為在測量折射率方面的應用，對於難以直接測量折射率的圓柱，有一個新的簡易測量方法，並延續第一部分的基礎進行實驗操作；第三部分為干涉條紋的觀察，不同於雙狹縫，使用常見的釣魚線作干涉實驗，使干涉條紋可以在實驗室外觀察，在教學上也會有所幫助。

由光滑細針的各項實驗可知，所測得之各種數據與用反射定律推導出的公式趨勢相同，幫助我們對於雷射圈基本性質有所了解；由釣魚線、玻璃柱的實驗，可知若圓柱可透光，後方亮度會較亮，而在前面會形成亮弧，接著，我們在藉由亮弧角度粗估折射率，算出折射率尼龍線約 1.55~1.60，碳素線約 1.45~1.47，與在材料上的實際折射率(尼龍約 1.52~1.58，碳素約 1.4~1.43)差異不大，且有量出折射率隨光波波長增加而遞減，說明公式有一定的應用價值，可用在測量極細圓柱的折射率，在材料檢測上也會有所幫助。另外，也用相對折射率的方法將尼龍置入水中，測量水的折射率來驗證公式，使可信度更高。在干涉實驗方面，藉由公式推導出不同條件下的亮紋寬度，與理論公式證明相符，因此可作為教學上之參考，應用方面則可利用干涉條紋寬度來反推細柱直徑。

捌、參考資料及其他

1.David Halliday,Robert Resnick,Jearl Walker (2009) • 第 35 章：干涉 • 載於物理(下) (1-38 頁) • 全華

2.陸健榮(2008) • 光學 • 載於 2009 年國際物理奧林匹亞競賽國家代表隊選訓教材第二冊 (139-170 頁) • 物理奧林匹亞國家代表隊選訓委員會

3.折射率 • 維基百科 • 取自 https：//zh.wikipedia.org/wiki/%E6%8A%98%E5%B0%84%E7%8E%87

4.*Cirle of* light. (2015).IYPT Reference kit,from http://kit.ilyam.org/SD_2015_IYPT_Reference_kit.pdf

5. 什麼情況下適合使用碳素釣線呢 (2015 年 11 月 6 日) • *壹讀* • 取自 https://read01.com/LdOkNL.html

6.彩虹 • 維基百科 • 取自 https：//zh.wikipedia.org/zh-tw/%E5%BD%A9%E8%99%B9

【評語】051818

本作品能為理論公式設計並進行相關延伸實驗。但是主要的研究議題呈現尚不夠清楚。實驗結果對材料的性質討論仍可再進一步探究，對於角度的量測方式也可再做改進。

作品海報

摘　　要

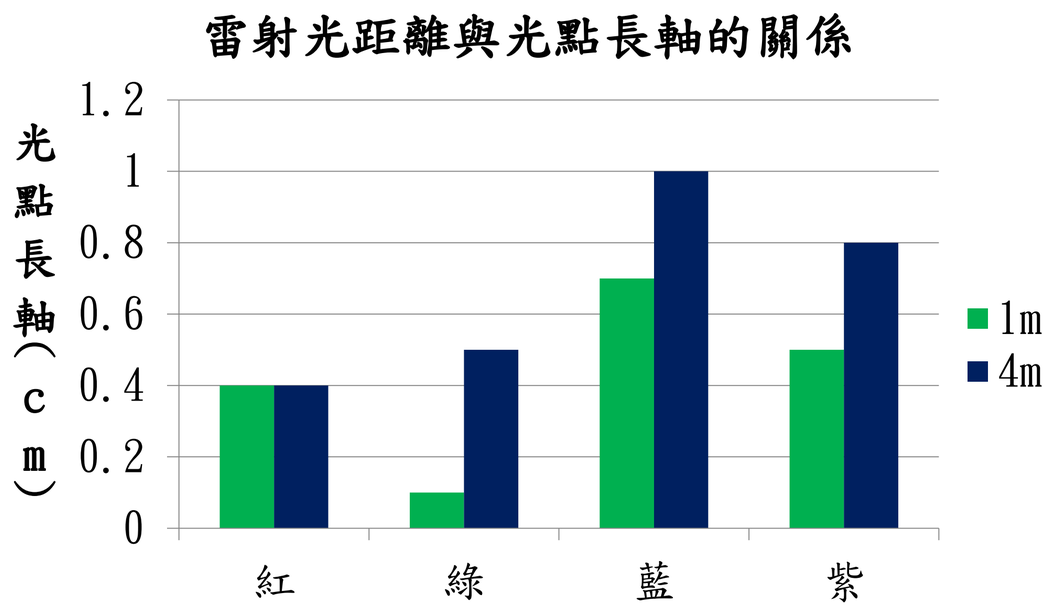
本研究探討雷射光照射細長圓柱所形成雷射圈的成因及性質，並做歸納分析。實驗中我們發現部分雷射光會經由反射或折射路徑投射到尼龍線後方，使雷射圈後面變亮且有干涉條紋，亮度方面可由折射及反射定律解釋；干涉可由物理光學來解釋。我們相信此研究將來有助於材料工程應用，並可作為光學教學教材。

研究目的

1. 了解雷射圈在不同條件下的性質
2. 比較理論與實驗數據，探討細柱光學性質
3. 在雷射圈中製作干涉圖形
4. 探討同一雷射圈的亮度分布

雷射光平行性測量

測量雷射光是否為平行光，如右圖，可知紅色雷射光最為平行，因此多數實驗採用。

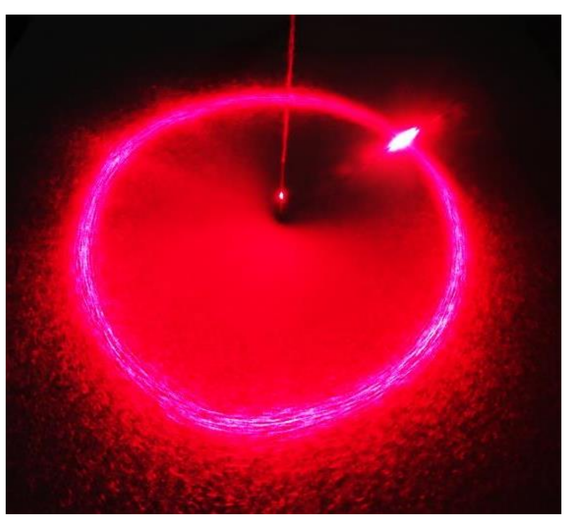


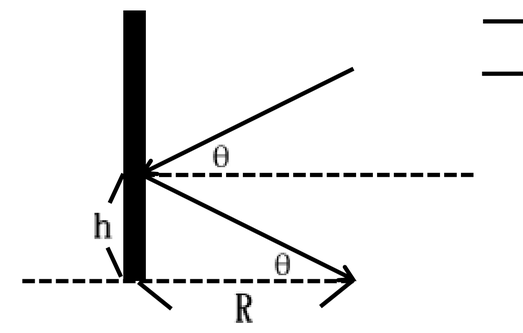
光滑不透光直圓柱雷射圈

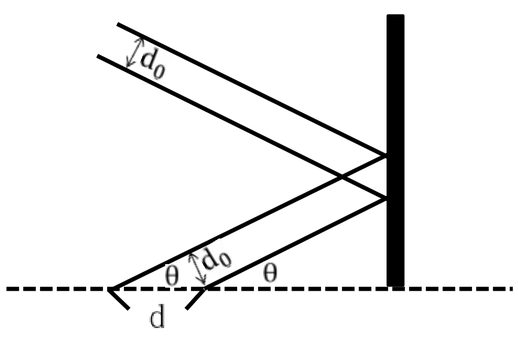
名詞定義

1. R：雷射圈半徑；R_1：圓柱半徑；R_2：雷射光點半徑；h：雷射光照在柱子上的高度
2. θ：雷射筆的俯角；β：雷射圈角度；α：雷射光照入柱子在x-z平面上的入射角
3. d：雷射圈寬度；d_0：雷射光原本截面的弦長，對應d
4. I：雷射圈亮度；I_0：原雷射光亮度

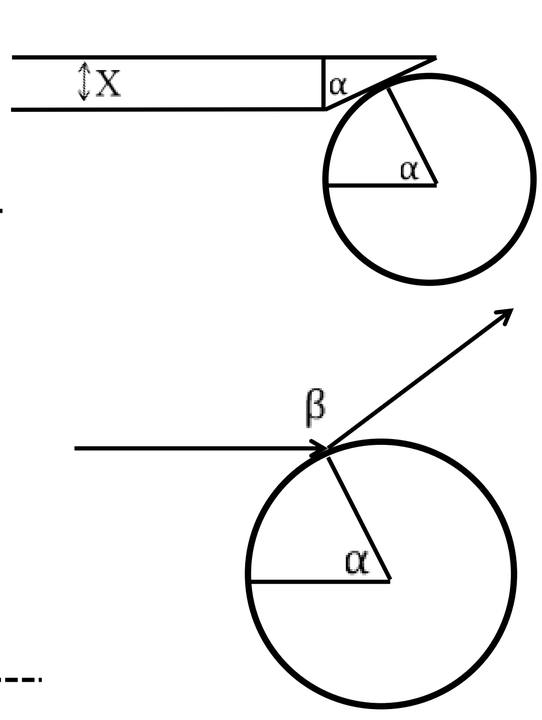
雷射圈各物理量之間關係



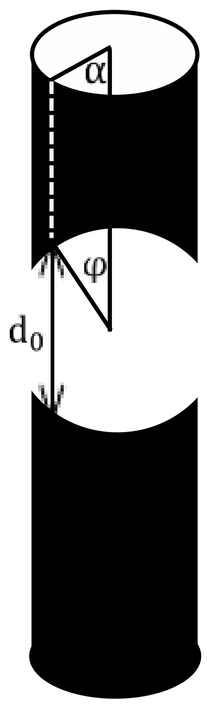




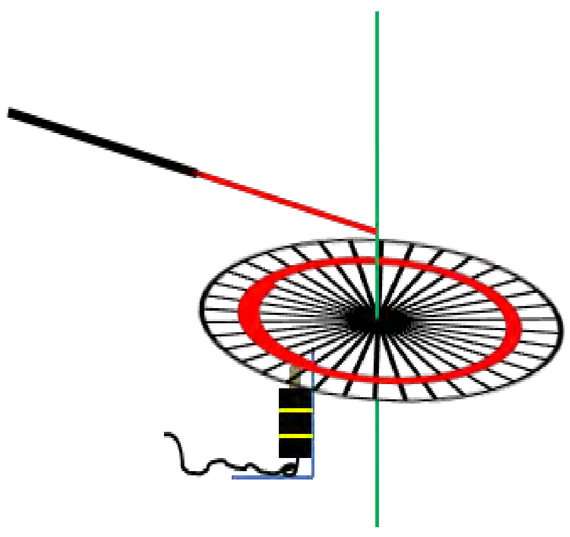
圓柱側視圖



圓柱俯視圖



以雷射筆方向看圓柱



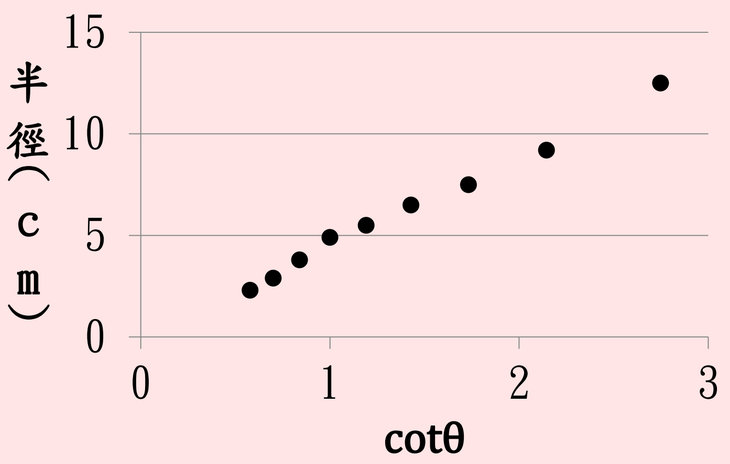
亮度測量示意圖

$$R = h \times \cot\theta$$

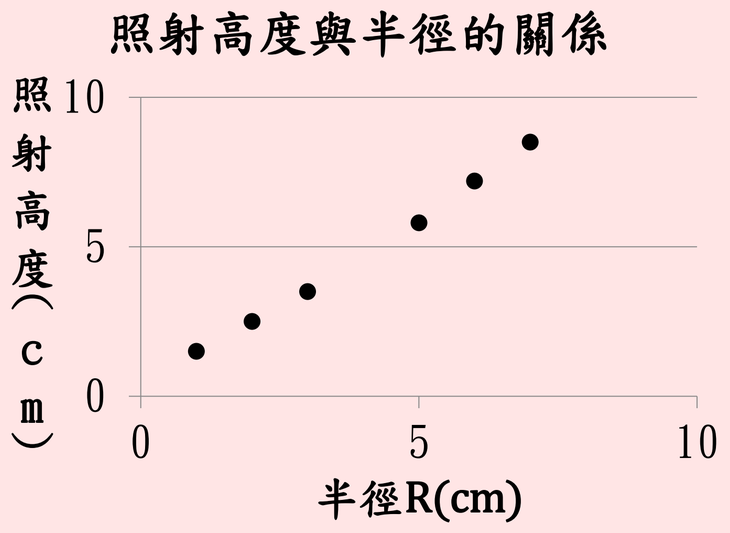
$$I = I_0 \frac{R_1}{R} \sin\theta \cos\left(\frac{\beta}{2}\right)$$

$$d(\beta) = 2R_2 \csc\theta \sqrt{1 - \frac{{R_1}^2}{{R_2}^2} \sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right)}$$

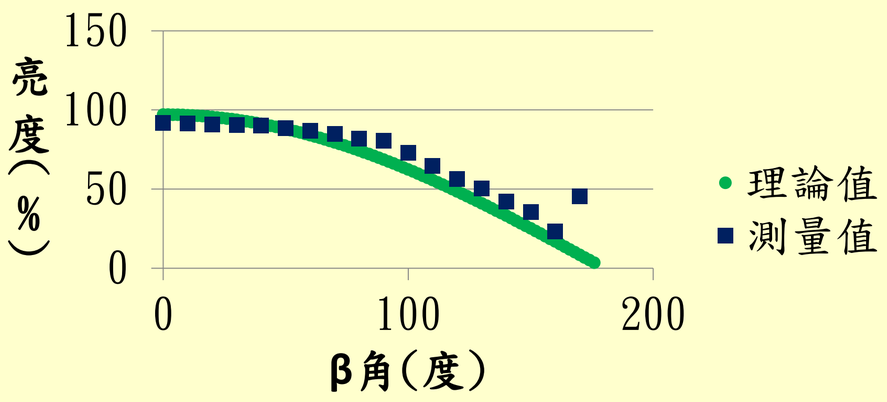
入射角與半徑的關係



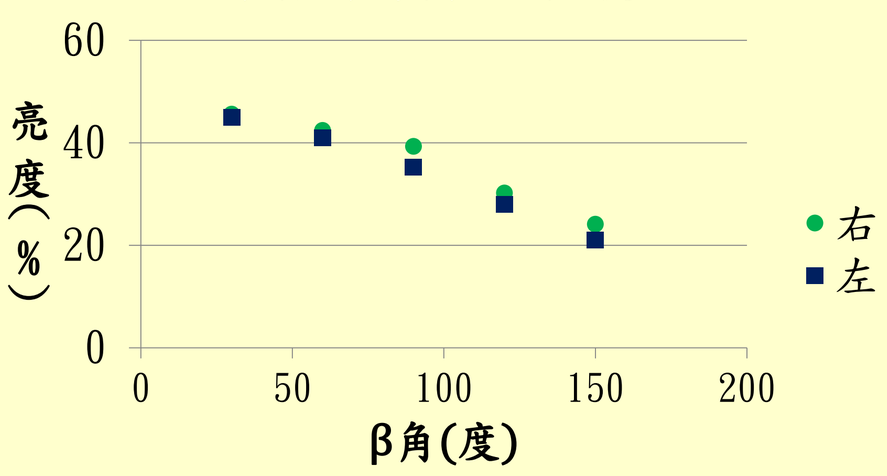
照射高度與半徑的關係



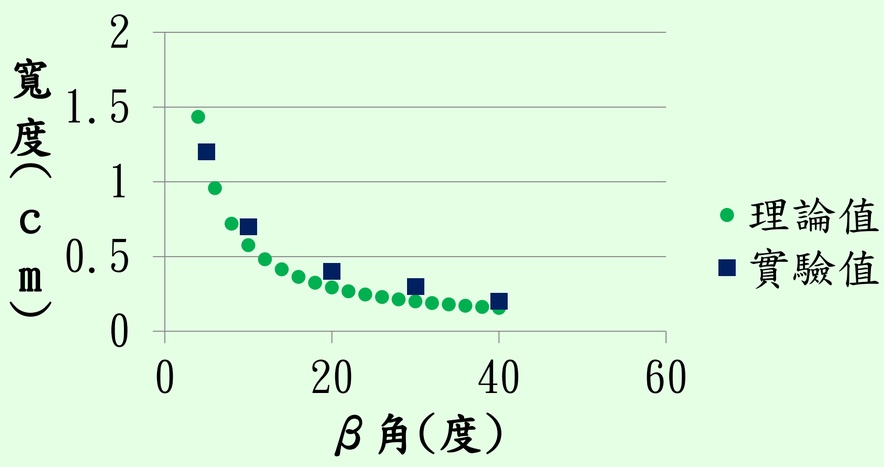
β角與亮度的關係



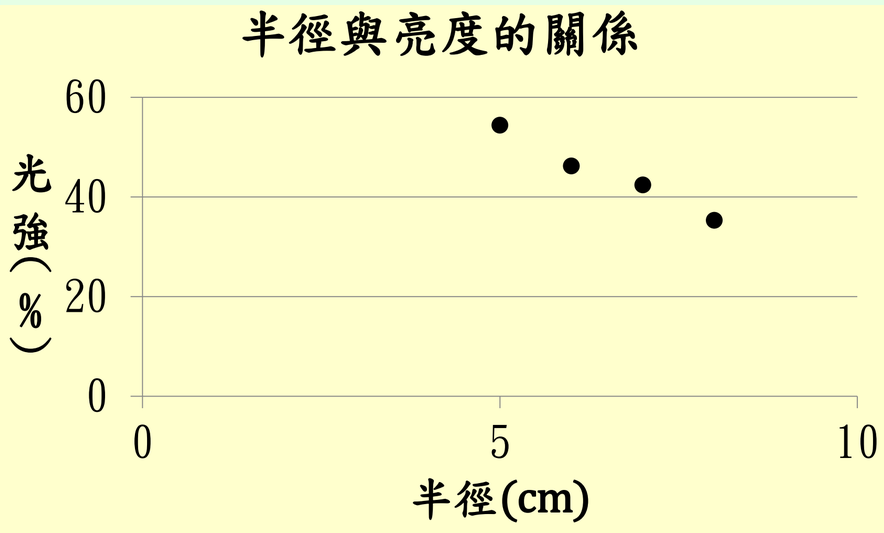
雷射圈對稱性的測量



入射角與寬度的關係



半徑與亮度的關係

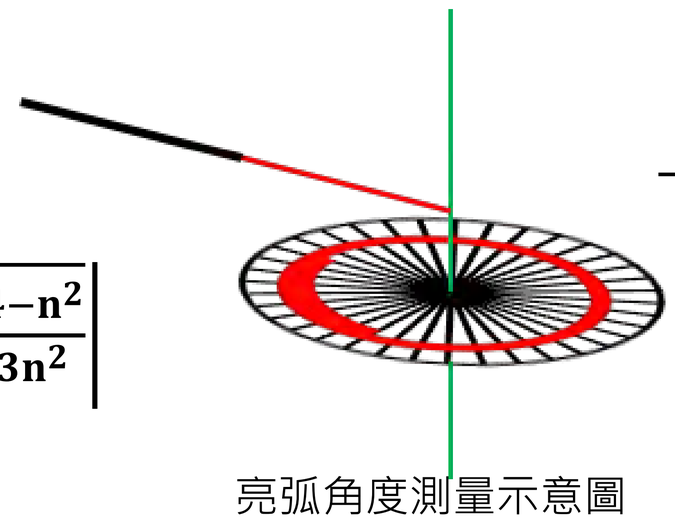


可透光雷射圈

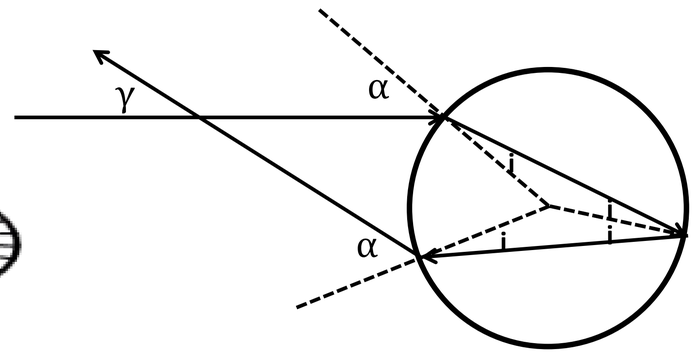
特徵：後面亮度較亮，前面有亮弧

應用：利用亮弧角度計算折射率

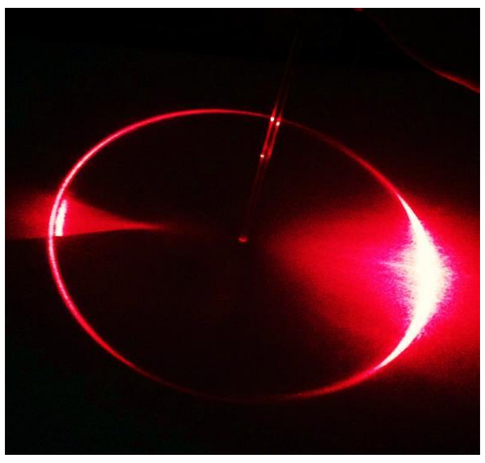
$$*\text{亮弧角度} = 4\left|\sin^{-1}\sqrt{\frac{4-n^2}{3}} - 2\sin^{-1}\sqrt{\frac{4-n^2}{3n^2}}\right|$$

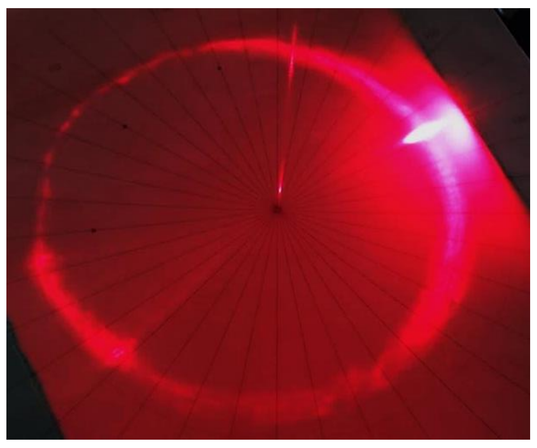


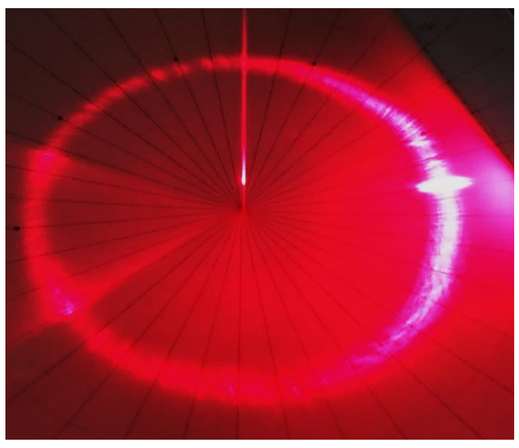
亮弧角度測量示意圖

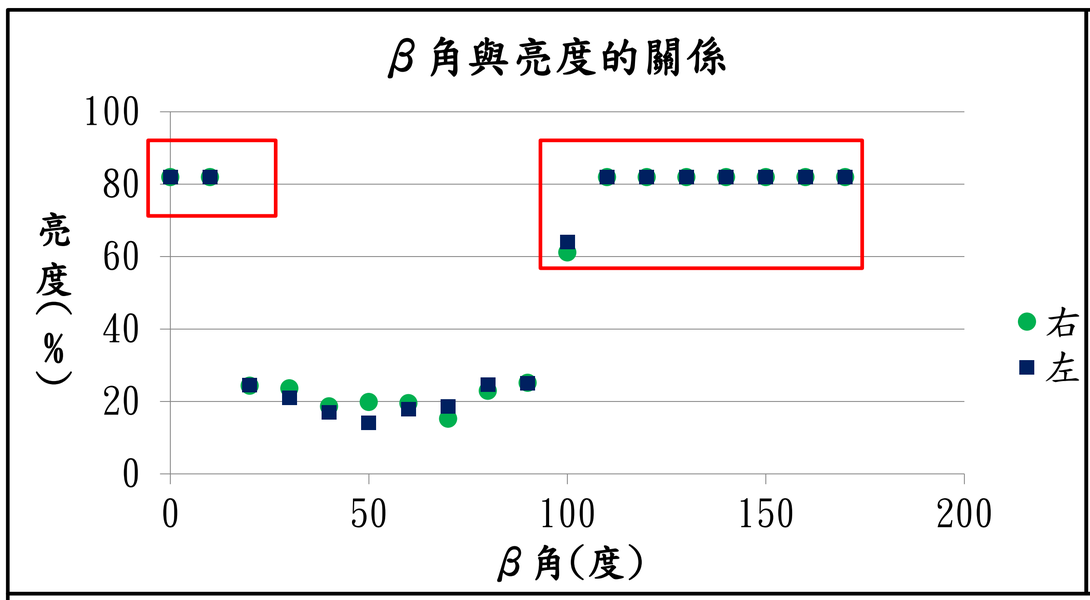


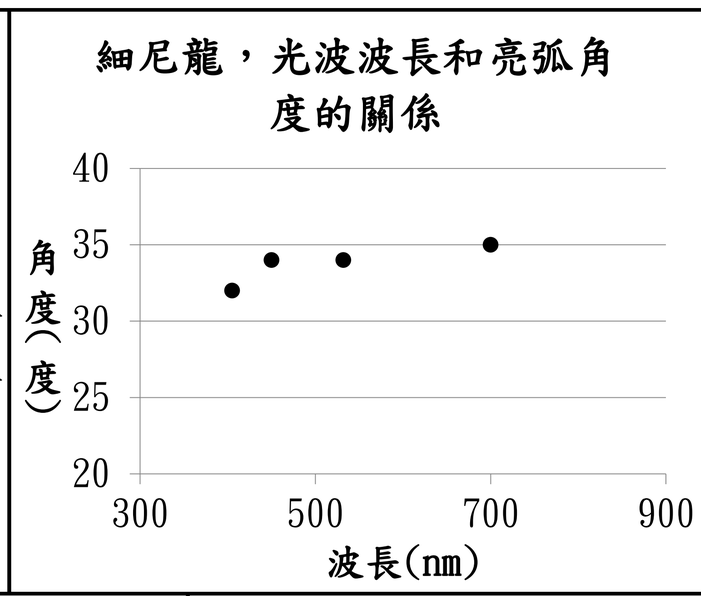
亮弧形成原理示意圖

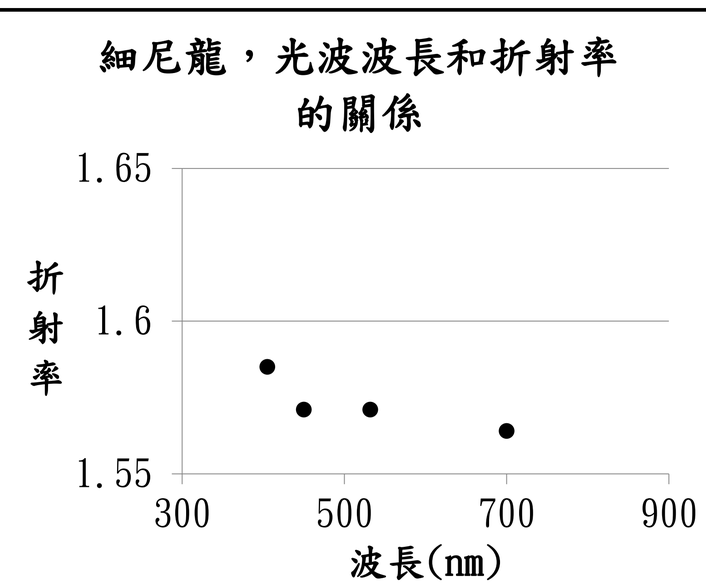


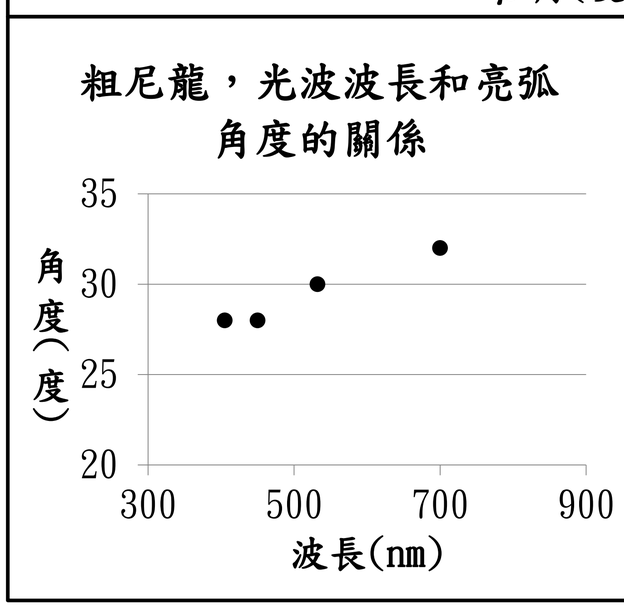


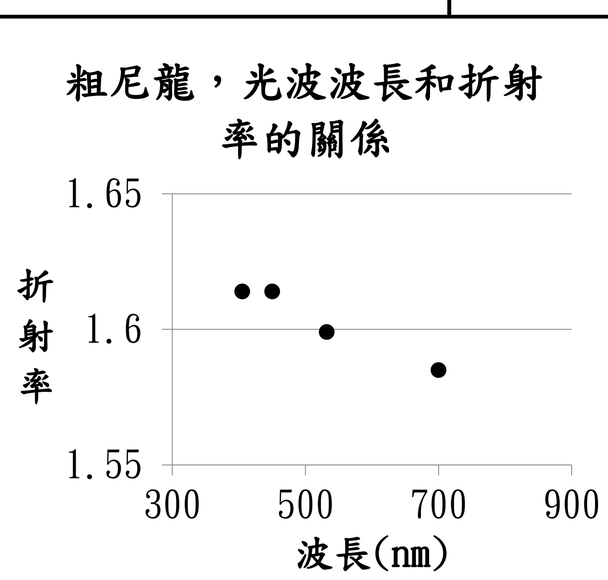


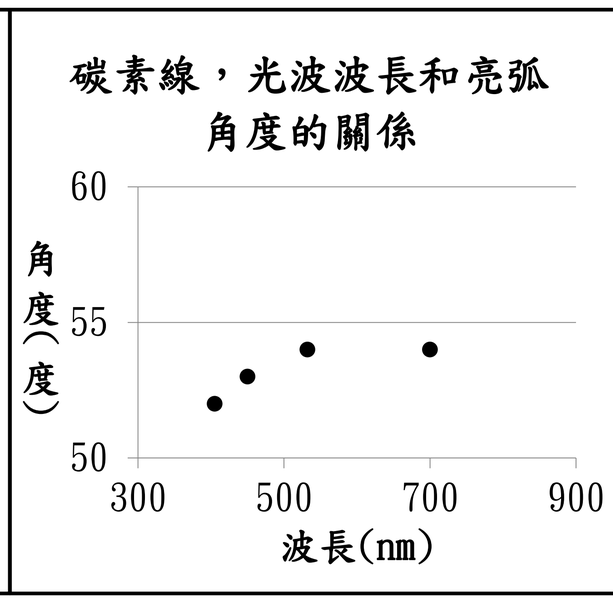


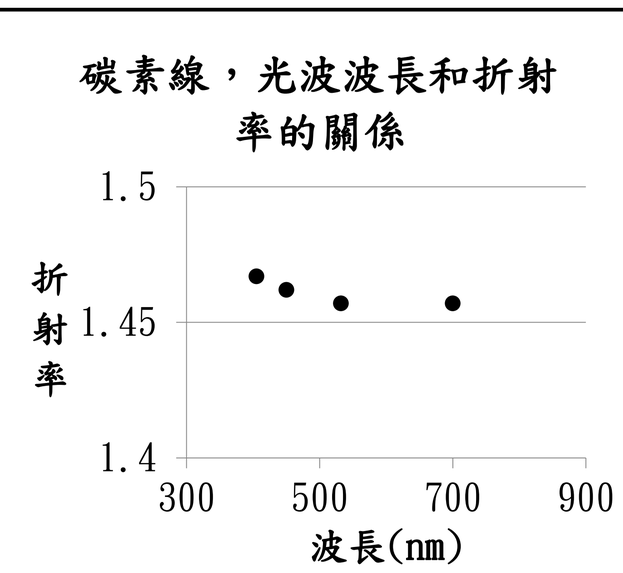












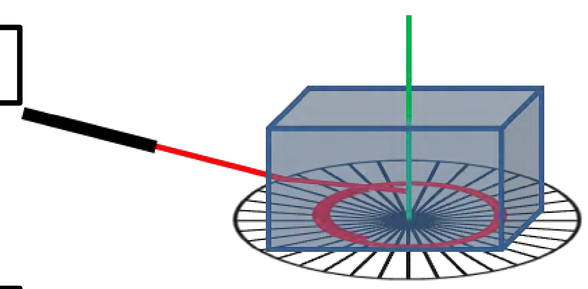
※檢測:由空氣和水中亮弧間接計算出水折射率，看其是否接近1.33

1.粗尼龍*紅光

空氣中折射率：1.585 → 水中折射率：1.206 → 水折射率：1.314

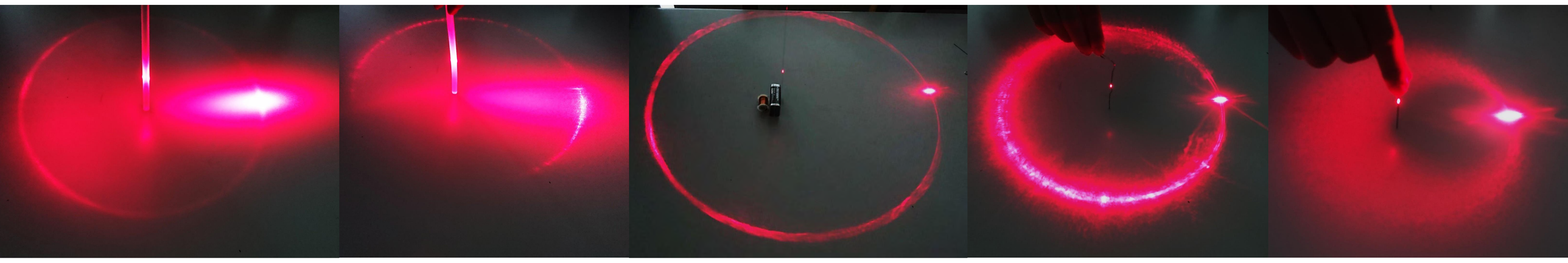
2.細尼龍*綠光

空氣中折射率：1.571 → 水中折射率：1.175 → 水折射率：1.337



水中亮弧角度測量示意圖

其他圓柱雷射圈



吸管　熱熔膠條　漆包線　迴紋針　筆芯

可透射　光滑　粗糙

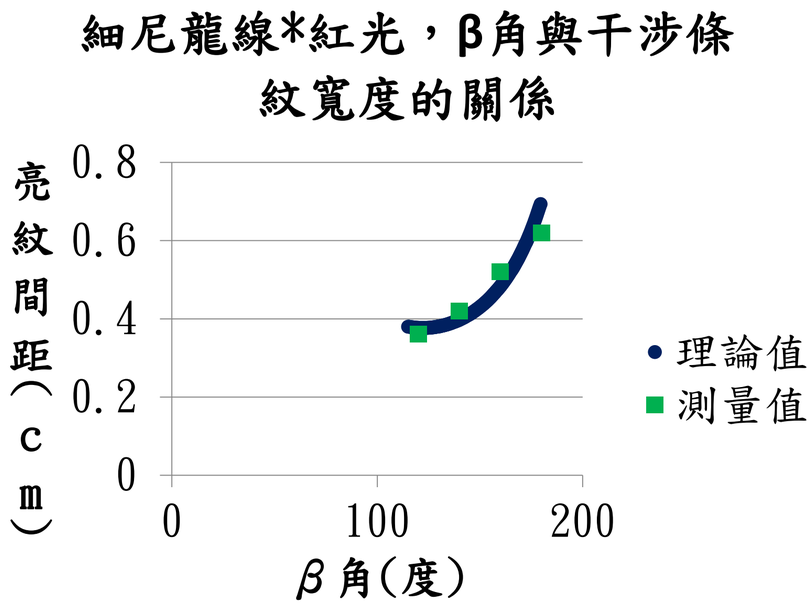
極細圓柱（可透光）雷射圈

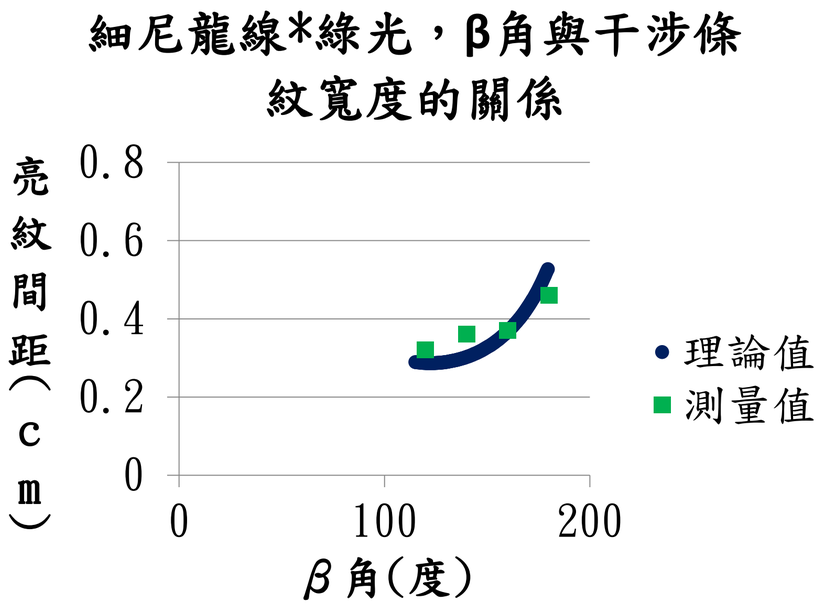
特徵：照射透光圓柱時，會產生干涉現象

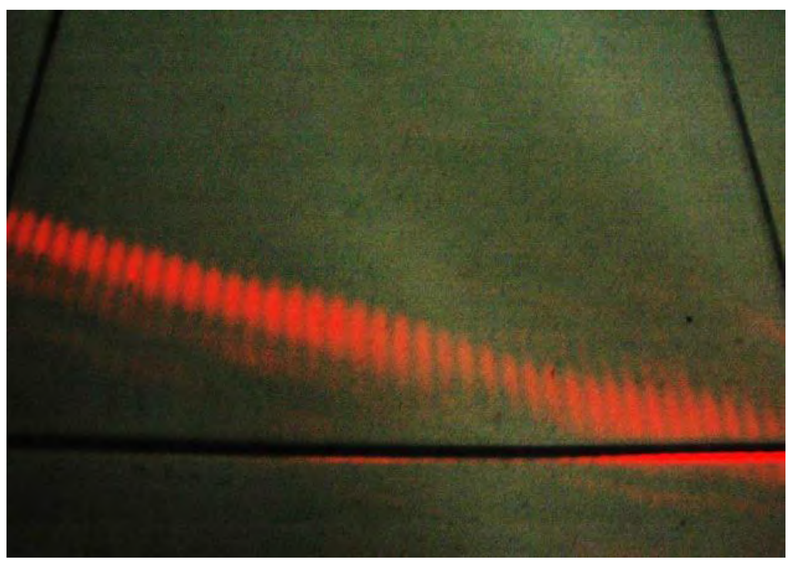
亮紋間距（反折射光干涉）$= \left|\lambda \times \frac{ds}{d(\Delta x)}\right| = \frac{R\lambda}{R_1(\sin\alpha + \sin\alpha')}$

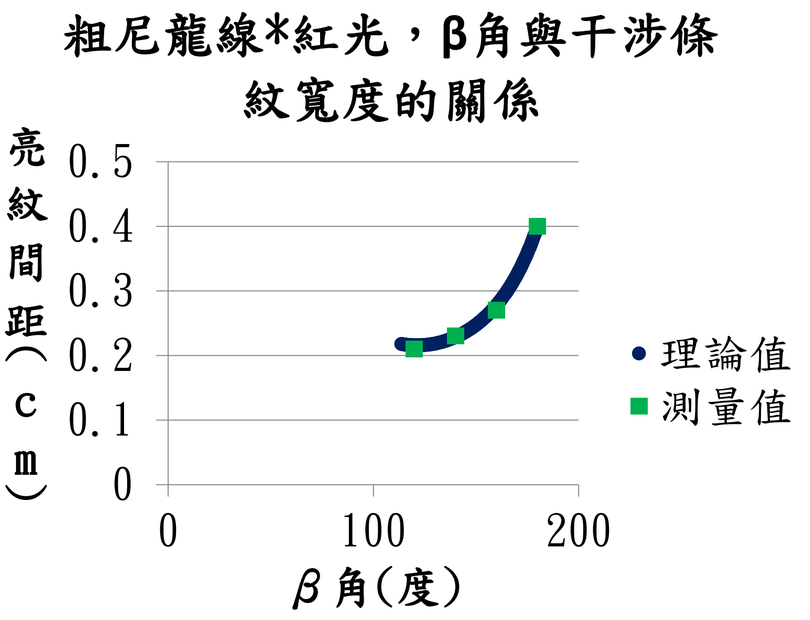
其中$\alpha = \frac{\pi}{2} - \alpha' + \sin^{-1}(\frac{\sin\alpha'}{n})$

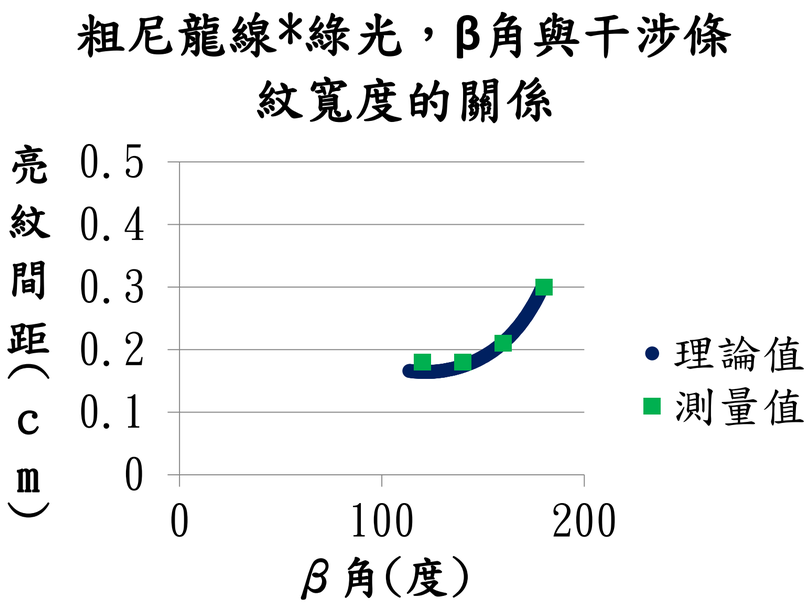
反折射光干涉

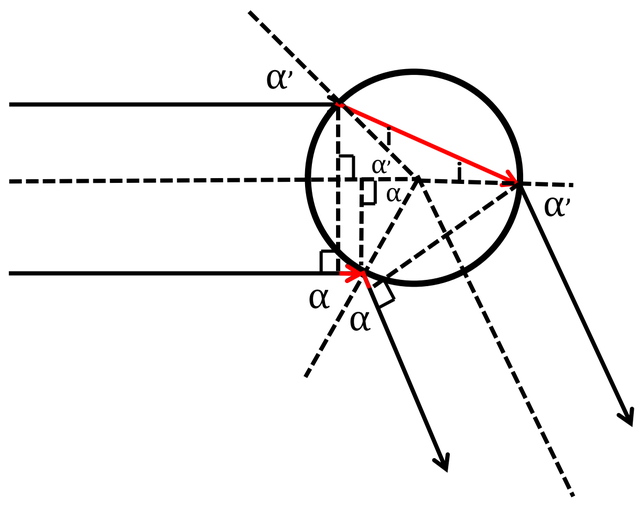










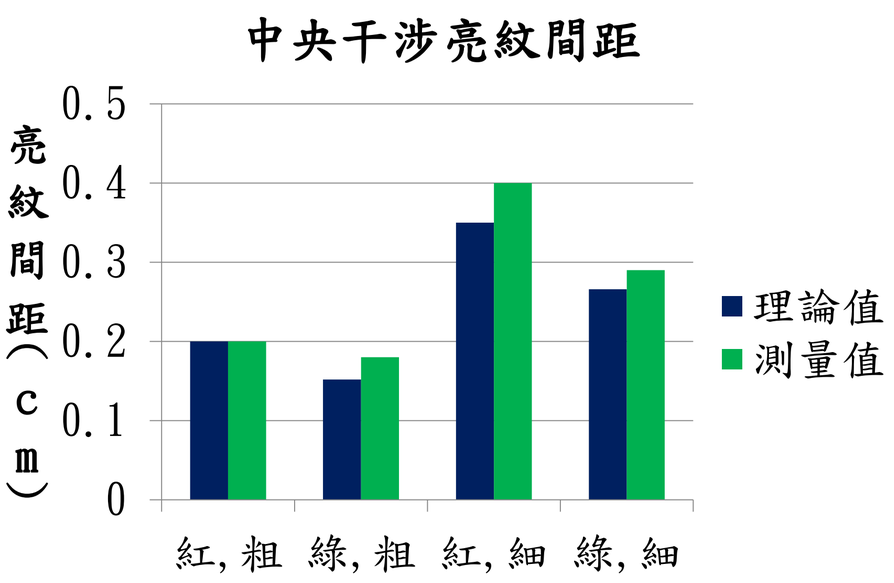


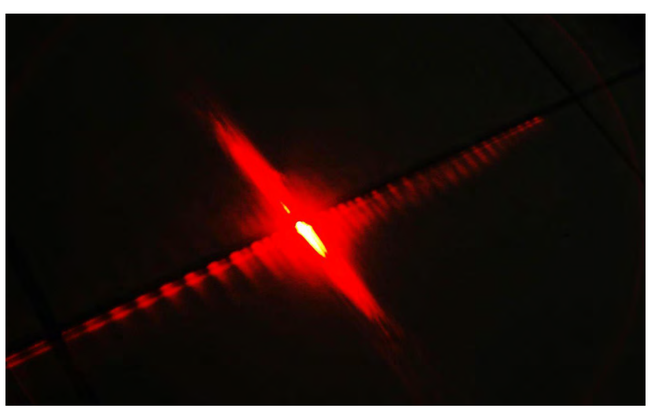
反折射光干涉原理示意圖

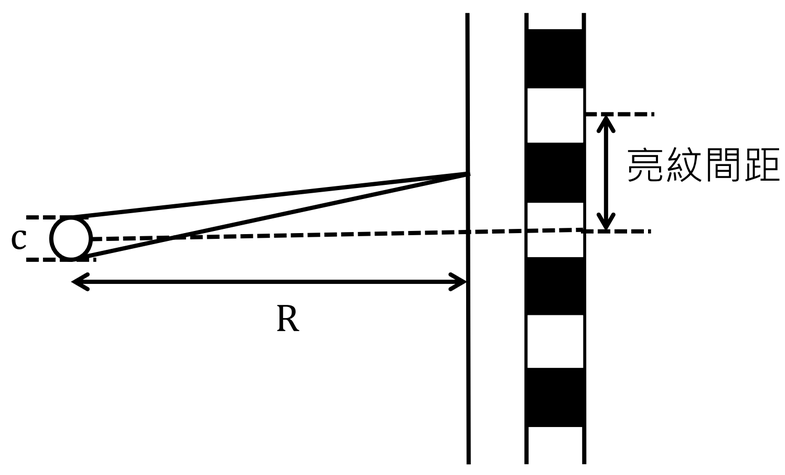
(紅色部分為波程差成因)

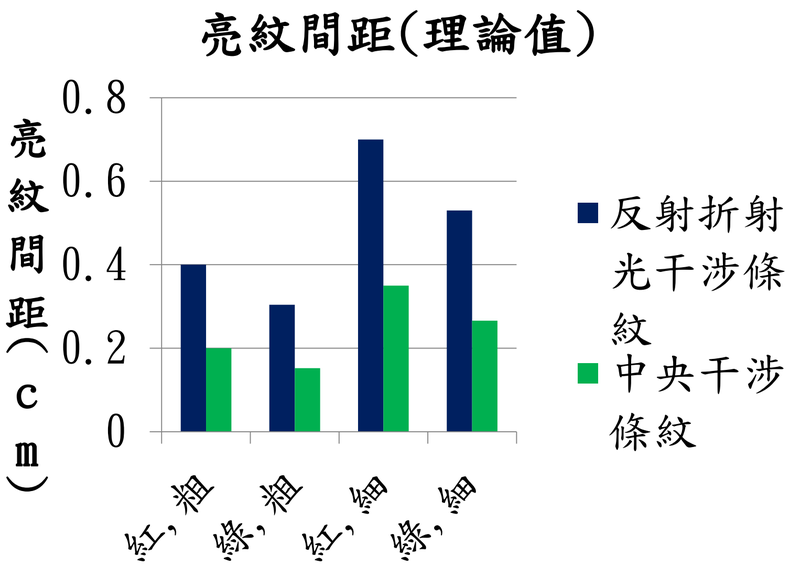
中央干涉（β接近180度時）

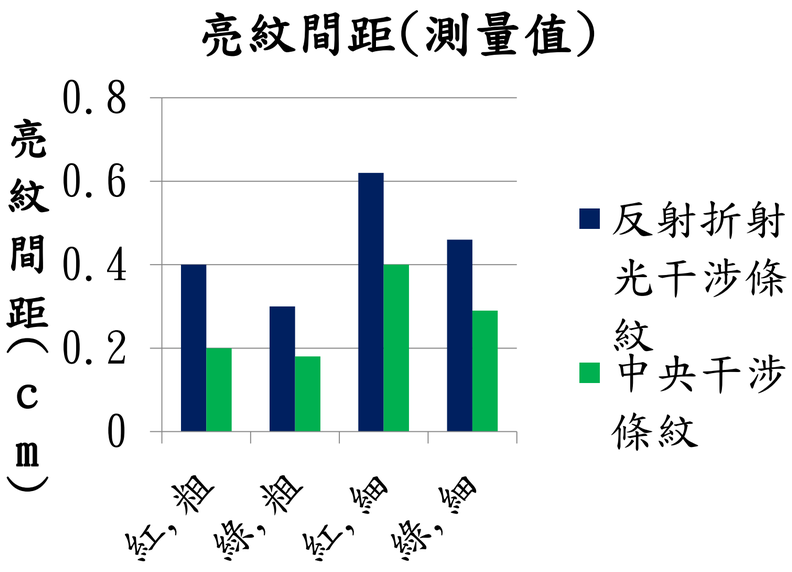
*亮紋間距 $= \frac{R\lambda}{c}$

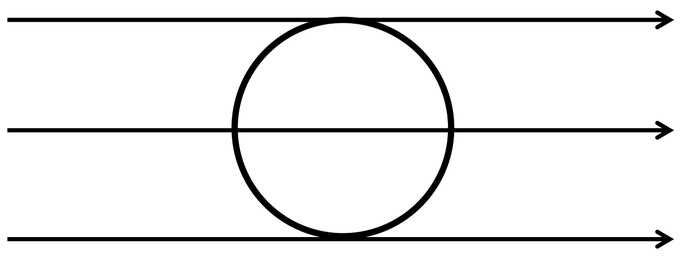












上圖：中央干涉條紋示意圖

下圖 ：三波源干涉光行進路徑示意圖

結論及未來展望

1. 不可透射圓柱後面亮度較暗；可透射圓柱後面亮度較亮且前面有亮弧
2. 所測出尼龍折射率：1.55~1.60；碳素折射率：1.45~1.47
3. 干涉條紋間距會隨圓柱、雷射光、以及位置的不同而變
4. 應用：希望可用此推測未知物體結構、設計保全系統