# 中華民國第 57 屆中小學科學展覽會
# 作品說明書

---

高級中等學校組　物理與天文學科

051816

## Cheerios Effect 水面上微小浮體運動的影響

學校名稱：臺北市立建國高級中學

| 作者： | 指導老師： |
| --- | --- |
| 高二 仲展麟<br>高二 白奇剛 | 劉怡君 |


關鍵詞：Cheerios Effect、表面張力、浮力

# 摘要

本實驗探討浮體在水面上聚集、吸引的現象，由測量運動討論其運動過程中所受各種力的變化。

討論兩球體吸引的模型，由位移與時間關係圖推測模型，發現其運動與時間接近指數變化，但後段卻有x2與時間t的線性關係。因此可推測其後段模型中阻力與速率成正比。

接著改以密度>1的圖釘，討論其運動與水面上凸高度之關係。發現除了速率與位移有對數關係外，其對數係數也與高度成正比。經由實驗，與容器壁的吸引運動可寫成與相吸運動類似的方程，再利用鏡像法加上修正項得出臨界距離。並由實驗得平均密度與受力的關係，以及表面張力與受力的關係。

未來將探討油滴在水面上的運動，進而發想不同的汙染物於水面上的聚集。

# 壹、 研究動機

早餐吃麥片時，我們常忍不住撥弄著碗裡漂浮的麥片。牛奶上的麥片，常常會聚集在一塊成為麥片集團，令人覺得十分有趣。資料指出，表面張力是此現象的元凶，於是我們著手定量分析這個現象隨著浮體種類以及表面張力的變化。

# 貳、 研究目的

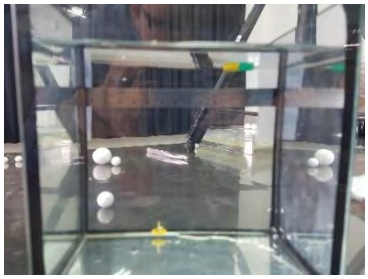
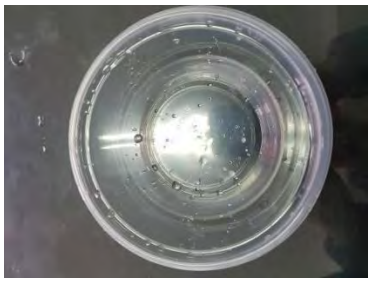
一、找出圓球和圓盤在水面上相吸的作用力與距離關係

二、測量不同直徑的圓球狀浮體與容器壁的相吸運動

三、改變重量對圓球在水面上運動之影響

四、找出圓盤的運動受水面上凸程度的影響

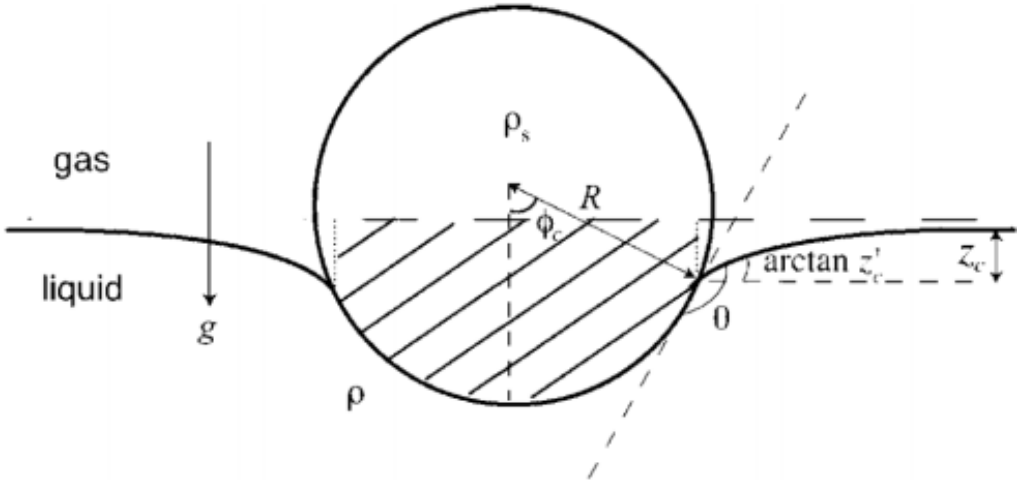
# 參、 研究設備及器材

| | |
|---|---|
| 一、保麗龍球<br> | 二、透明玻璃方型水箱<br>  |
| 三、筆芯<br> | 四、透明圓形水盒<br>  |
| 五、圖釘<br> | 六、螺旋測微器<br> |
| 七、扁水槽<br> | 八、高速攝影機<br> |
| 九、筆記型電腦<br> | 十、數位顯微鏡及手機<br> |

# 肆、 研究方法

一、原理說明

(一)　球體間吸引力造成的運動分析：




定參數如下：

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\rho$ | 水的密度 | $z_c$ | 水面方程式對水平座標微分 |
| $\rho_s$ | 浮體密度 | $\mu$ | 水的阻力係數 |
| $R$ | 浮體半徑 | $\theta$ | 接觸角 |
| $D$ | 浮體密度和水密度比值 | $\phi$ | 球心到接觸點連線與垂直夾角 |
| $\gamma$ | 表面張力係數 | $B$ | $\frac{R^2}{L_c^2}$ |
| $\Sigma$ | 與$\theta$　$\rho_s$　$\rho$ 相關的函數 | $L_c$ | $\sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}}$ |
| $l$ | 兩浮體間距離 | | |

首先列出浮體平衡的方程式：重力與表面張力和浮力平衡。

$$\frac{4}{3}\pi\rho_s gR^3 = 2\pi\gamma R\sin\phi_c \frac{z_c'}{\sqrt{1+z_c'^2}} + \rho\pi gR^3\left(\frac{z_c}{R}\sin\phi_c + \frac{2}{3} - \cos\phi_c + \frac{1}{3}\cos^3\phi_c\right)$$

利用幾何關係將$\theta$代入可得下式

$$z_c'\sin\phi_c = B\left(\frac{2D-1}{3} - \frac{1}{2}\cos\theta + \frac{1}{6}\cos^3\theta\right) \equiv B\Sigma$$

再來討論表面張力造成的高度變化。由楊拉普拉斯方程：

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dh}{dr}\right) = \frac{h}{L_c^2}$$

$$h(r) = -z_c' L_c \frac{K_0(r/L_c)}{K_1(R\sin\phi_c/L_c)} \approx -z_c'\sin\phi_c R K_0(r/L_c)$$

由修正貝索Bessel函數的特性，利用 $K_1(x) \approx 1/x$ for $x \ll 1$ 近似推得上式。因此當討論二球系統時，考慮表面張力造成的能量變化，有：

$$E(l) = -2\pi\gamma R^2 B^2 \Sigma^2 K_0\left(\frac{l}{L_c}\right)$$

$E$ 對$l$微分：

$$F(l) = -2\pi\gamma R B^{5/2}\Sigma^2 K_1\left(\frac{l}{L_c}\right)$$

接著考量到浮體的質量很小，將其視為0，因此水面的阻力將與表面張力平衡。$\mu$ 為與流體性質有關的常數，阻力與半徑的關係未知，下式表達與速率一次方正比，且與半徑成正比的阻力這裡我們可以從實驗中求出阻力中R的冪次。

$$6\pi\mu R\alpha\frac{dl}{dt} = -2\pi\gamma R B^{5/2}\Sigma^2 K_1\left(\frac{l(t)}{L_c}\right)$$

(二)　磁鐵造成水面凹陷可以限制浮體：

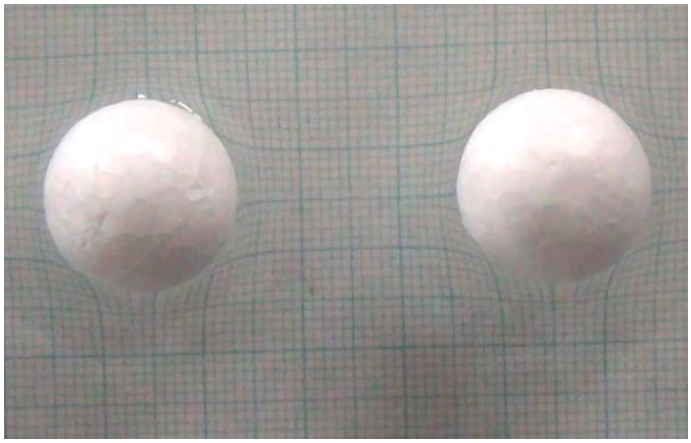
假設水面處有磁場 $B$ ，此時在力平衡狀態下，水面為等位面

可寫成 $V=(\frac{B^2}{2\mu_r\mu_0}-\frac{B^2}{2\mu_0})+\rho gh$ 的形式，也就是水面因為水的反磁性所受的磁力作用力與水壓力平衡造成水面高度變化。定義相對磁導率 $\mu_r=1+\chi$ ，$\chi$ 為磁化率。純水的磁化率測量值約為$-8.0\times10^{-6}$，所以我們可以得出在磁場$B$=1T的時候約可造成0.3~0.4mm的些微水面下降。利用此原理我們可以限制浮體的初始位置。

二、實驗步驟

(一) 測量不同半徑圓球狀(密度<1)浮體在水面的相吸運動

1. 在水槽中裝入水，並置入保力龍球狀浮體，觀察兩者間運動。
2. 架設攝影機進行拍攝，從側面以手機進行拍攝，從上方以攝影機拍攝影片。



3. 先從側邊拍攝靜止狀態下，圓球與水面的接觸角

4. 保持系統水平，利用手機的水平儀。以鑷子將浮體置入水中，多次嘗試其臨界相吸距離並記錄。爾後，開啟電磁鐵製造水位低區。注意此時應注意與器壁的距離要足夠小以免影響運動。
5. 逐漸關閉電磁鐵，觀察二者間相吸運動。
6. 影片錄製完畢後運用tracker分析其運動的位移、速率與時間關係
7. 利用軟體Origin擬合曲線，找出最符合的方程式。
8. 試著分析受力的變化，以及臨界距離隨半徑的改變。

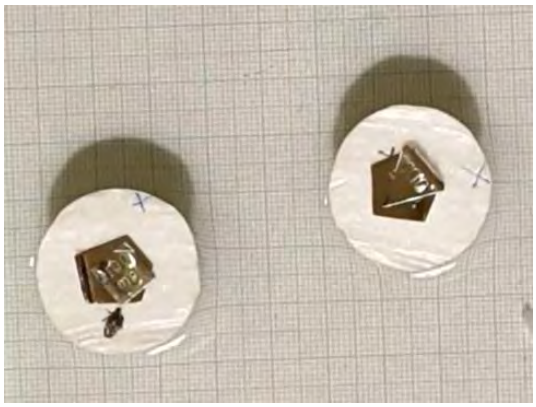
(二) 測量不同半徑的圓球狀浮體與容器壁的相吸運動

1. 再將強電磁鐵至於下方。
2. 架好器材後用鑷子把球置入透明玻璃水槽中。注意與壁的距離，盡量遠離其他三壁。
3. 測量拍攝分析步驟同前步驟。

4. 試著分析受力的變化，以及臨界距離隨半徑的改變

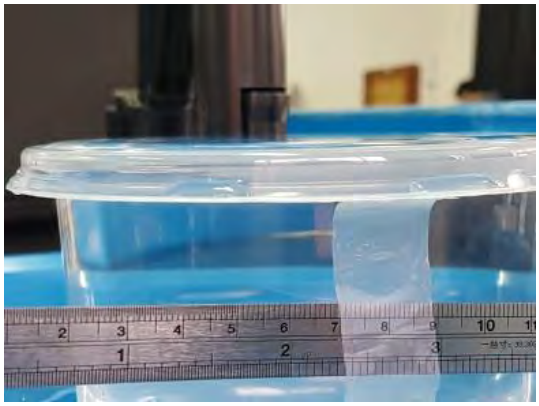
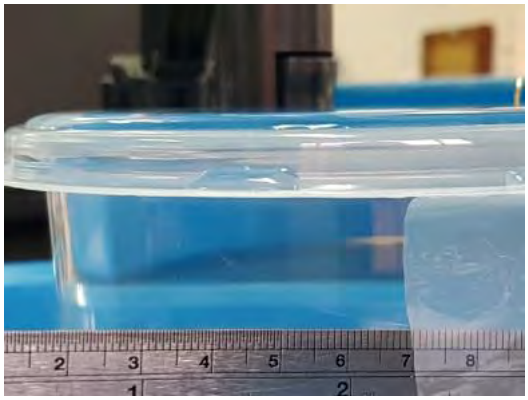
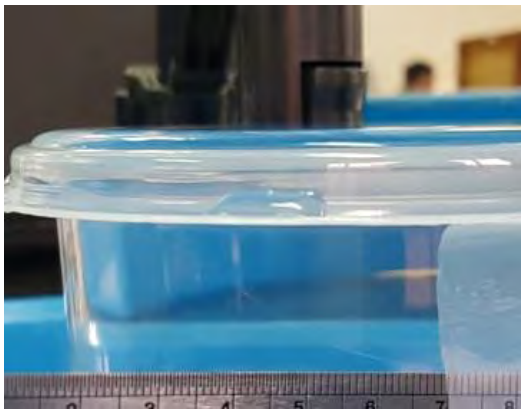
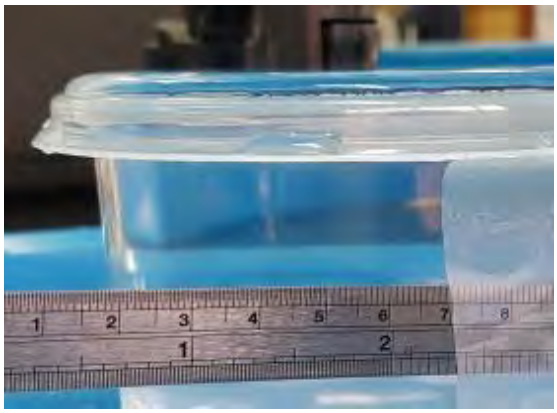
(三) 改變圓球浮體重量(平均密度)對運動之影響

1. 將強電磁鐵至於下方。
2. 架好器材後用鑷子把微量砝碼(毫克)置入保麗龍球中。逐次改變重量。
3. 測量拍攝分析步驟同前步驟。
4. 試著分析受力的變化，以及臨界距離隨半徑的改變



(四) 改變水面上凸高度與器壁吸引圓盤運動之影響

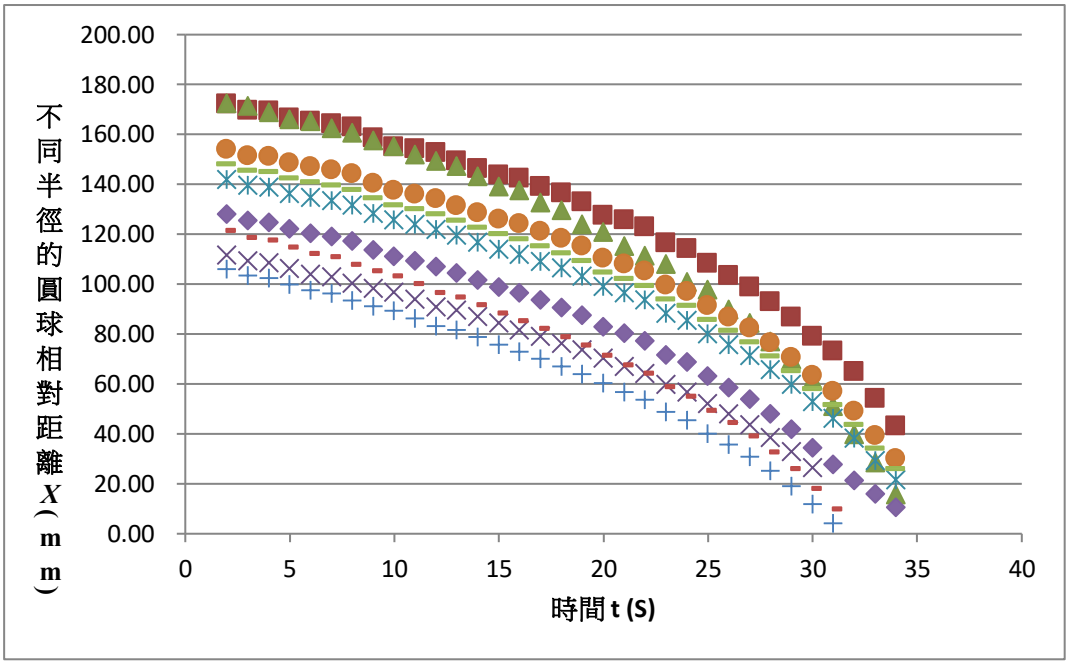
1. 將圓形水槽內的水裝滿，觀察密度大於1的浮體在水面上的運動。根據文獻，水面為凸將吸引，水面為凹則排斥。
2. 改變水量直到不再排斥也不吸引的臨界狀態定為H=0。
3. 逐次改變水量，測量水面高度。分別依次測量分析圖釘受壁吸引的運動，找出水面高度與運動之間的關係，並試著提出合理解釋。

| | |
|---|---|
|  <br>h=1.0mm |  <br>h=1.4mm |
|  <br>h=2.1mm |  <br>h=3.2mm |

# 伍、 研究結果

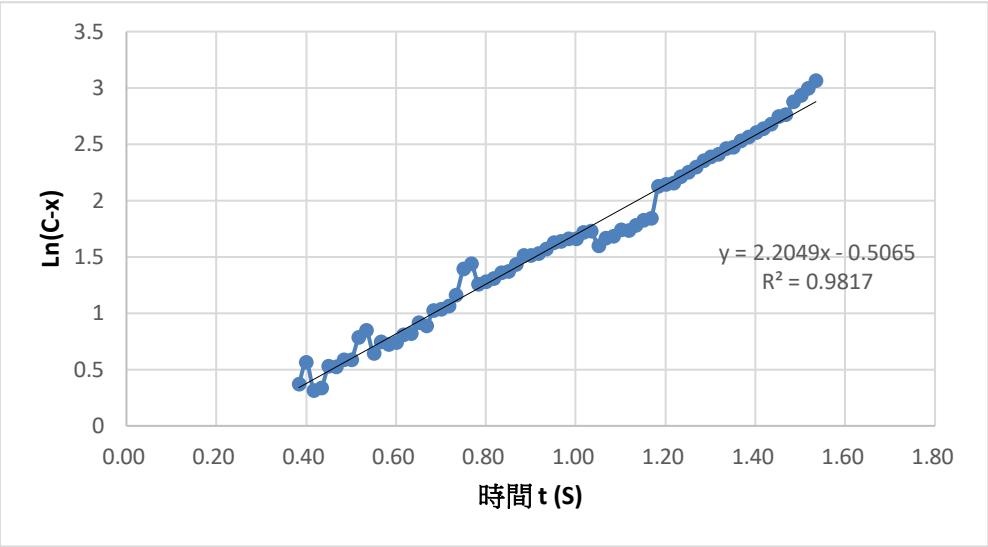
一、測量不同半徑圓球狀(密度<1)浮體在水面的相吸運動

(一) 不同半徑的圓球相吸運動距離時間關係圖



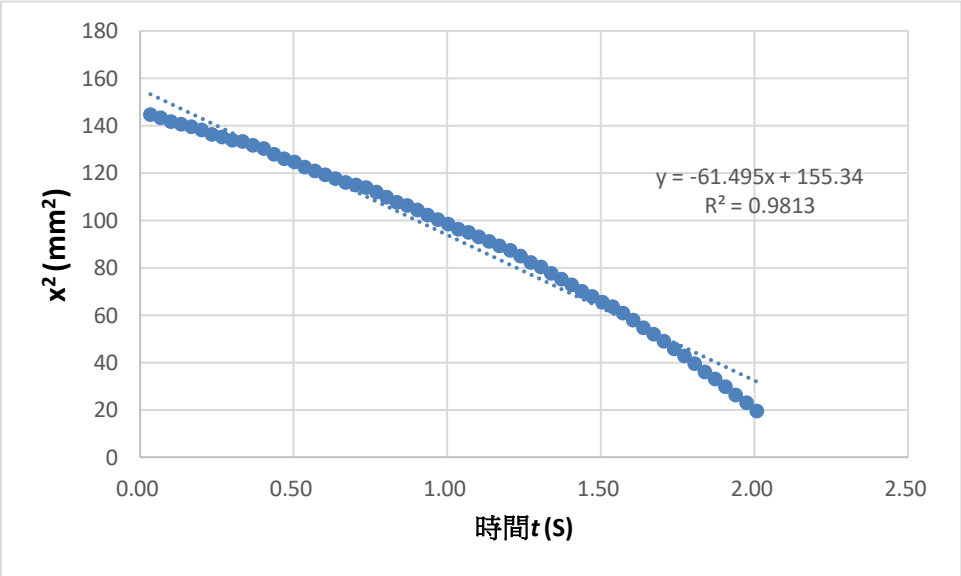

**圖一　不同半徑的圓球相吸運動距離時間關係**

觀察以上曲線，利用origin軟體以指數函數進行近似擬合，發現相關係數高。將距離 $l$ 與時間關係寫成 $l = C + Ae^{\frac{t}{\tau}}$ 其中 $A$ 和 $\tau$ (時間常數)為待定係數，C也是待定常數(臨界吸引距離的理論值)。但是由於分析時我們並非取邊緣作為追蹤點，所以分析臨界距離時要加上常數的修正，將最後相碰的距離修正為0，再分析臨界距離。此處我們得出的結果與理論有所出入，這是因為我們討論了運動的全部過程。在運動的前半部分，受力並不式單純如文獻所引入的阻力。在理論中受表面張力與X成反比，阻力與V成正比，因此運動方程式應為： $\sqrt{C+kt}$ 的形式。以直徑10.2mm的小球為例：




**圖二　　ln(C-x)對 t 關係圖**

理論中的阻力以 $f=-kv$ 推得的運動方程式 $\sqrt{C+kt}$ ，所以$x^2$與時間$t$為線性關係。實驗結果發現後期運動符合。由此驗證阻力的公式在後期可以使用，但前期的阻力則不同。




**圖三　　$x^2$-$t$ 關係圖**

1. 對數曲線符合的區間比理論的$x^2$曲線要多
2. 從$x^2$的曲線可以知道後期和前期所受的阻力形式有差異，比較更多半徑後發現後期(具有一定速率的運動時)的阻力表達式，接近理論，與速率大致呈正比。
3. 在比較作用力時上後期的作用力仍然可以用速率來表達，但前期的數據應捨去。
4. 比較不同半徑的運動狀態時，利用指數形式比較則較為恰當。因為臨界距離，主要是被初期的阻力所影響。

(二)Equation: $l = C + Ae^{\frac{t}{\tau}}$

其中$C$及$A$為函數常數

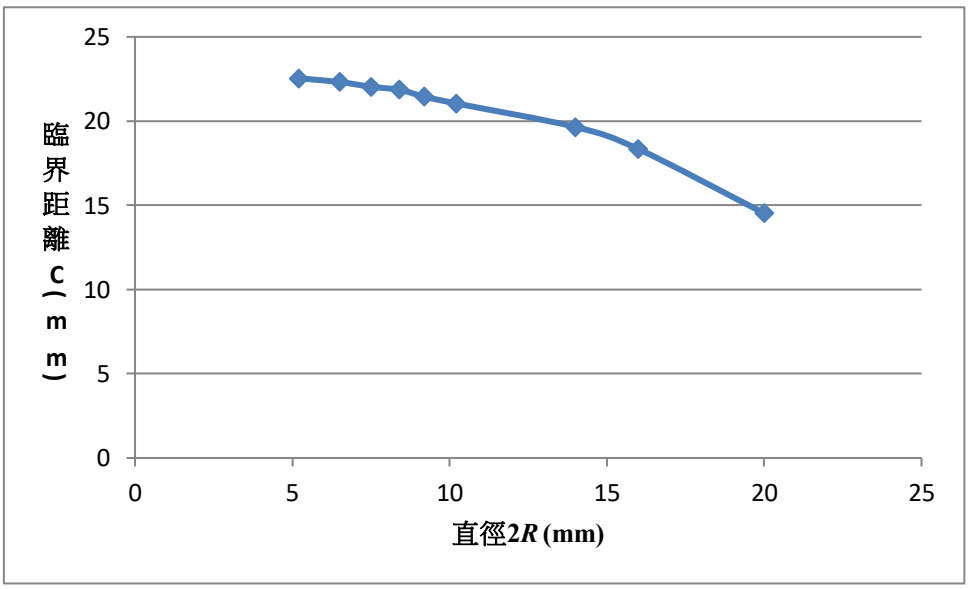
$\tau$ 為時間常數

擬合的結果如下表：

$C$即為臨界距離，即相吸的最遠初始距離

| 直徑 $2R$ (mm) | $C$ (mm) |
|---|---|
| 5.2 | 22.54 |
| 6.5 | 22.32 |
| 7.5 | 22.04 |
| 8.4 | 21.86 |
| 9.2 | 21.45 |
| 10.2 | 21.05 |
| 14 | 19.65 |
| 16 | 18.34 |
| 20 | 14.53 |

表一




**圖四　臨界距離$C$與直徑$2R$關係**

考量到圖形有類似$C = A + B \cdot e^{\frac{2R}{L}}$的形式，用$C = A + B \cdot e^{\frac{2R}{L}}$擬合，發現相關係數高。

| $C = A + B \cdot e^{\frac{2R}{L}}$ | |
|---|---|
| 相關係數平方 | 0.99909 |
| $A$ (mm) | 25.03452 |
| $B$ (mm) | -2.93638 |
| $L$ (mm) | 23.5565 |

表二

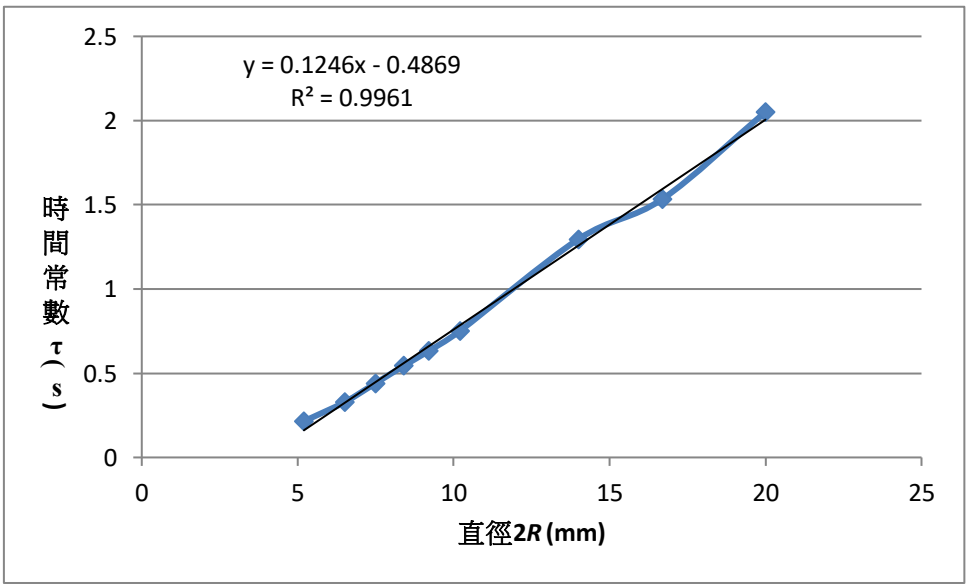
此時，利用擬合的方程式$C = A + B \cdot e^{\frac{2R}{L}}$時，得出臨界半徑：

$$2R_c = 50.46\text{mm} \qquad R_c = 25.23\text{mm}$$

至於時間常數，描述了吸引的速率。此時間常數τ在本實驗中與直徑2$R$有線性關係。

| 直徑 2$R$ (mm) | 時間常數 τ(s) |
|---|---|
| 5.2 | 0.215 |
| 6.5 | 0.328 |
| 7.5 | 0.441 |
| 8.4 | 0.544 |
| 9.2 | 0.632 |
| 10.2 | 0.751 |
| 14 | 1.296 |
| 16 | 1.535 |
| 20 | 2.052 |

表三



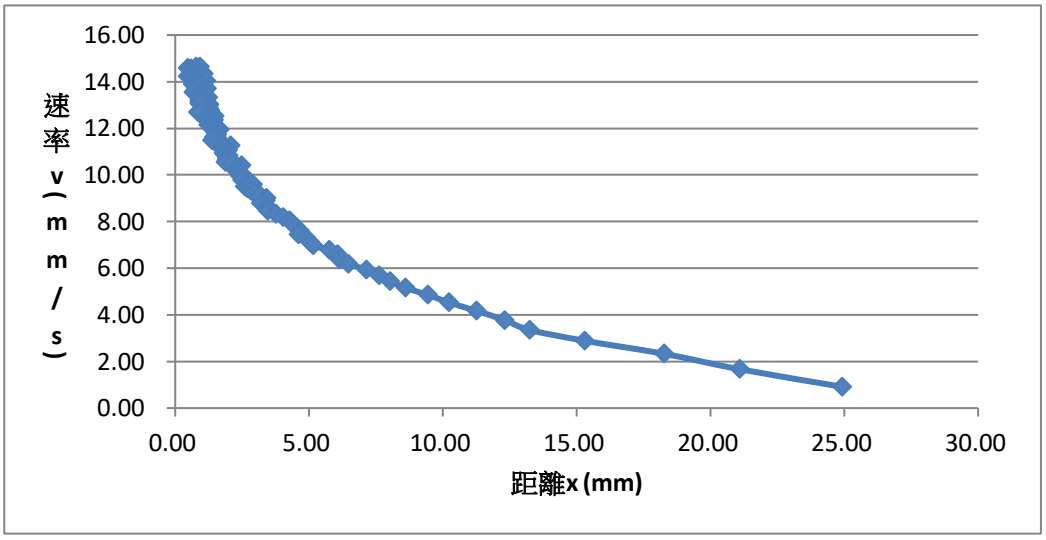

**圖五　時間常數 τ 與直徑 2*R* 關係圖**

(三)速率與距離關係

實驗結果顯示，在後期的運動有 $v=\frac{k}{x}+C$ 其中係數 $k$ 隨著半徑增加有變大的趨勢。

從理論模型中(見附錄或參考資料1)可推得受力與半徑的關係應為$R$的函數，且為遞增。

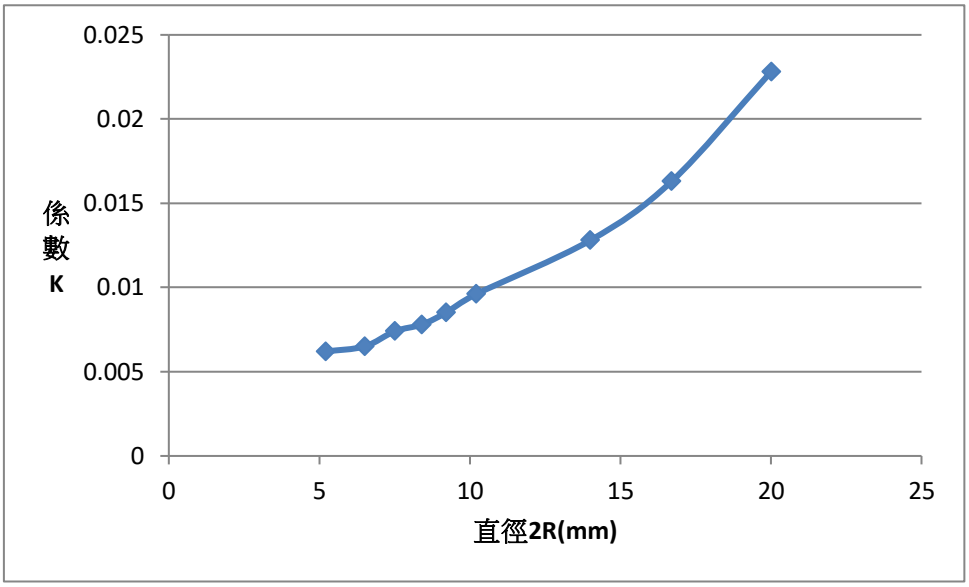
下圖顯示完整過程的速率$v$與距離容器壁距離$x$，後段接近反比的函數。




**圖六　速率 v 隨球與壁間距離 x 變化**

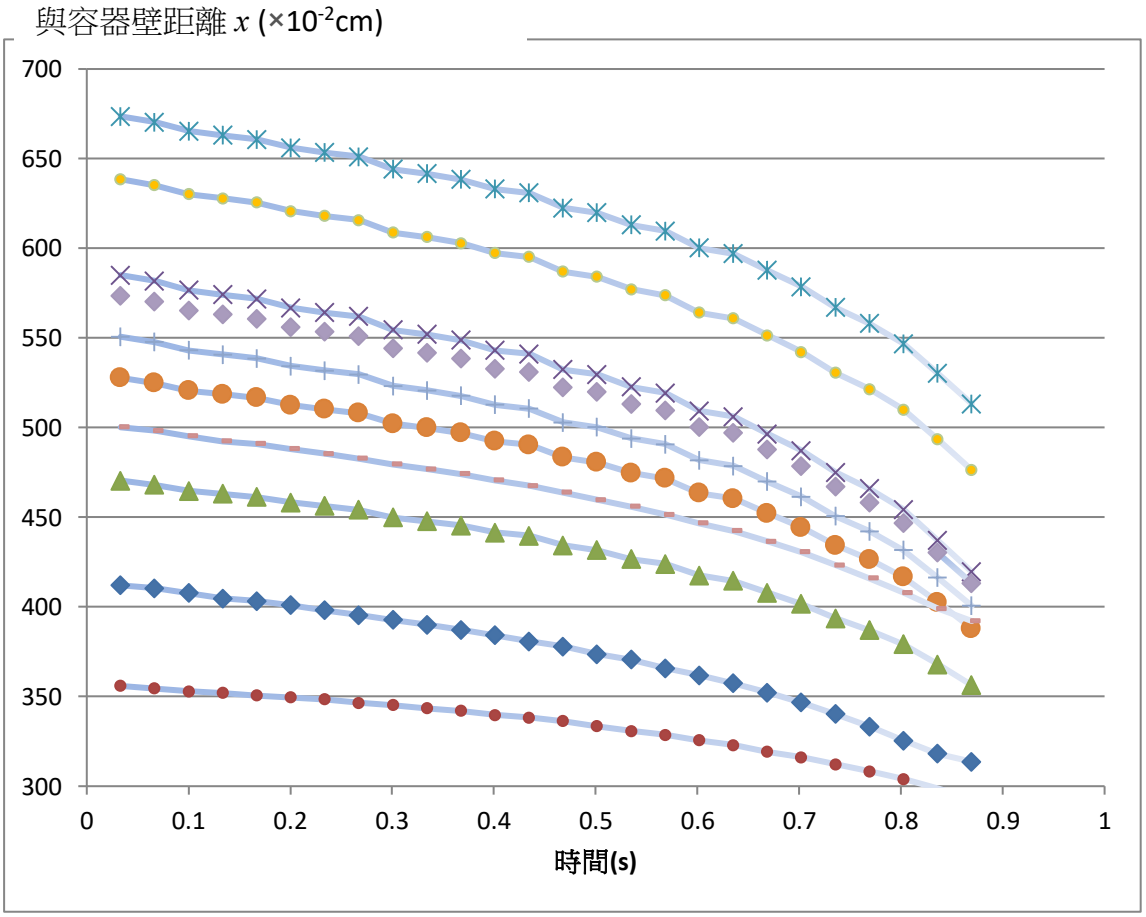
| $2R$ (mm) | 係數 $k$ ($m^2/s$) |
|---|---|
| 5.2 | 0.0062 |
| 6.5 | 0.0065 |
| 7.5 | 0.0074 |
| 8.4 | 0.0078 |
| 9.2 | 0.0085 |
| 10.2 | 0.0096 |
| 14 | 0.0128 |
| 16.7 | 0.0163 |
| 20 | 0.0228 |

表四




圖七　係數 $k$ 與直徑 $2R$ 關係圖

二、測量不同直徑的圓球狀浮體與容器壁的相吸運動




圖八　與容器壁距離 $x$ 與時間 $t$ 關係圖

(一) 臨界距離隨半徑變化

經由分析，發現與容器壁的吸引與靜電學中的靜像法有類似之處。不過，並不是直接對稱，而要加上一個與半徑相關的修正項。我們發現「容器壁的臨界距離」恰好為「兩球臨界距離」的一半加上與半徑相關的修正項。

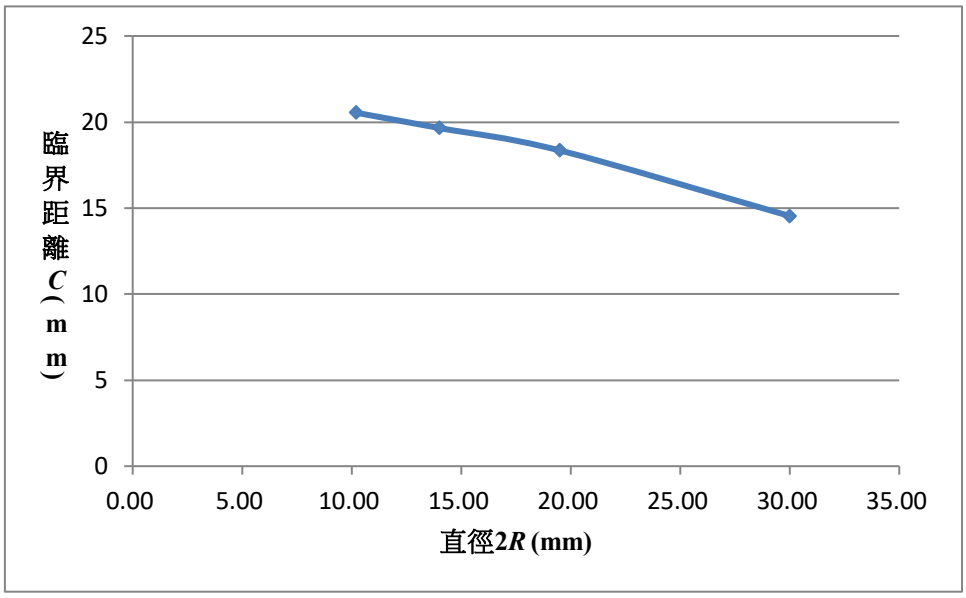
| 直徑 $2R$(mm) | $l = C + Ae^{\frac{t}{\tau}}$ | |
|---|---|---|
| 10.2 | 相關係數平方 | 0.99475 |
| | $C$ (mm) | 20.54073 |
| | $A$ (mm) | -0.56763 |
| | $\tau$ (s) | 0.75132 |
| 14.0 | 相關係數平方 | 0.98776 |
| | $C$ (mm) | 19.65071 |
| | $A$ (mm) | -0.38592 |
| | $\tau$ (s) | 1.29684 |
| 19.5 | 相關係數平方 | 0.98918 |
| | $C$ (mm) | 18.3493 |
| | $A$ (mm) | -3.7918 |
| | $\tau$ (s) | 1.53507 |
| 30.0 | 相關係數平方 | 0.98715 |
| | $C$ (mm) | 14.53749 |
| | $A$ (mm) | -1.47859 |
| | $\tau$ (s) | 2.87895 |

表五

由上表得到臨界距離$C$(已修正過)對直徑$2R$的關係：

| $2R$ (mm) | $C$ (mm) |
|---|---|
| 10.2 | 20.54073 |
| 14.0 | 19.65071 |
| 19.5 | 18.3493 |
| 30.0 | 14.53749 |

表六




**圖九　臨界距離 $C$ 與直徑 $2R$ 關係圖**

考量到圖形有類似$C = A + B \cdot e^{\frac{2R}{L}}$的形式，我們同樣用$C = A + B \cdot e^{\frac{2R}{L}}$擬合，發現相關係數相當高。

| $C = A + B \cdot e^{\frac{2R}{L}}$ | |
|---|---|
| 相關係數平方 | 0.99909 |
| $A$ (mm) | 25.03452 |
| $B$ (mm) | -2.93638 |
| $L$ (mm) | 23.5565 |

表七

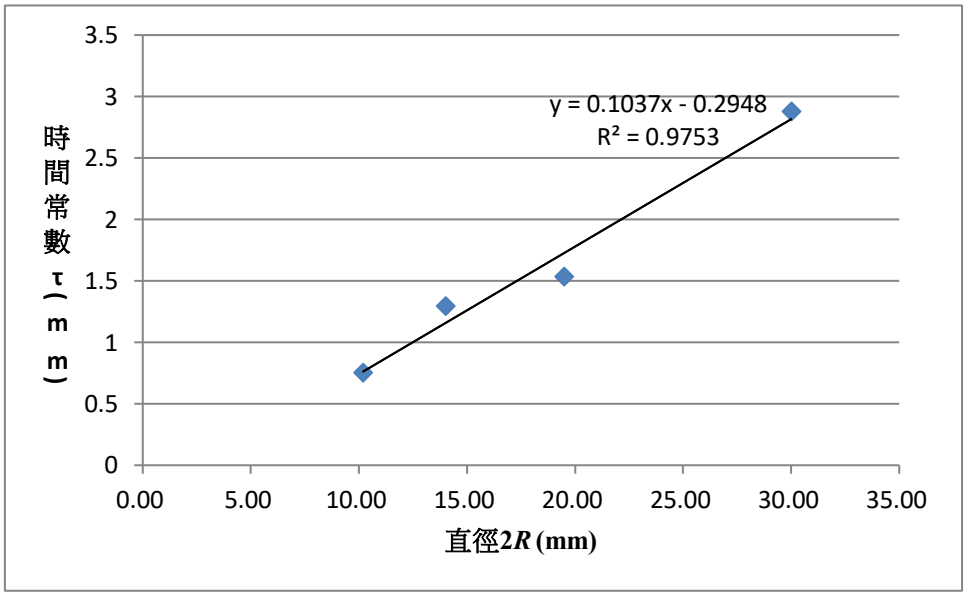
此時，利用擬合的方程式$C = A + B \cdot e^{\frac{2R}{L}}$時，得出臨界半徑：

$2R_c$ =50.46mm　　$R_c$ =25.23mm

直徑2$R$與時間常數τ之間關係：

| 2R (mm) | 時間常數 τ(s) |
|---|---|
| 10.2 | 0.75132 |
| 14 | 1.29684 |
| 19.5 | 1.53507 |
| 30 | 2.87895 |

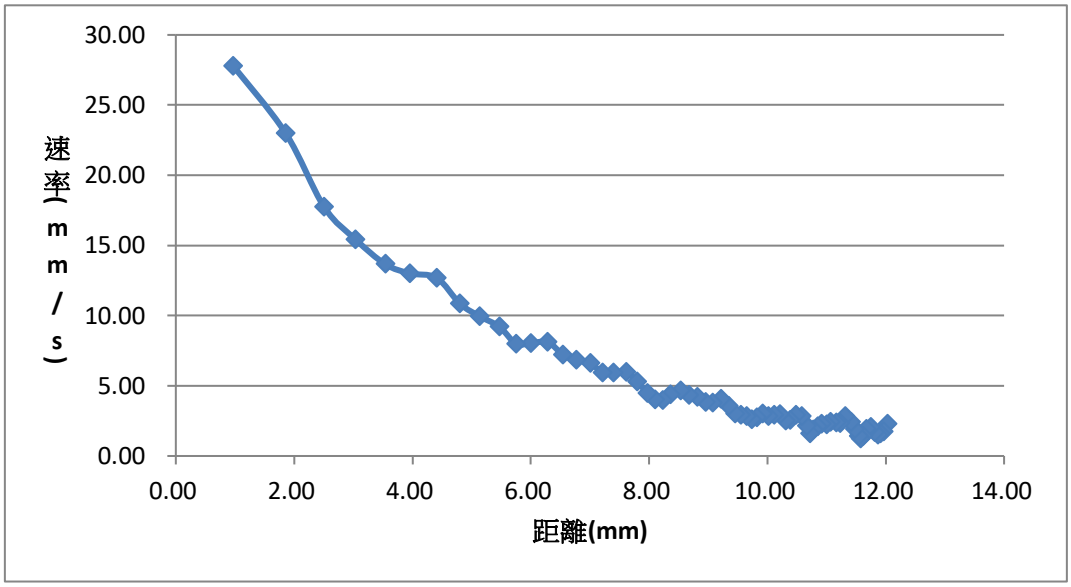
表八




**圖十　時間常數 τ 與直徑 2*R* 關係圖**

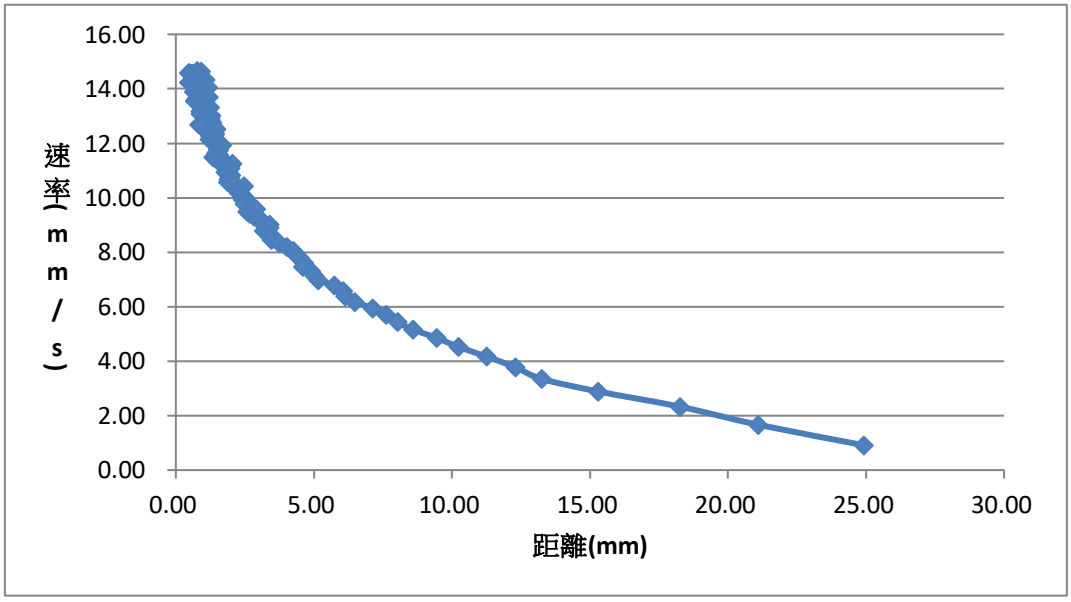
(二)速率隨球與壁間距離變化關係圖

$2R$ =10.2mm



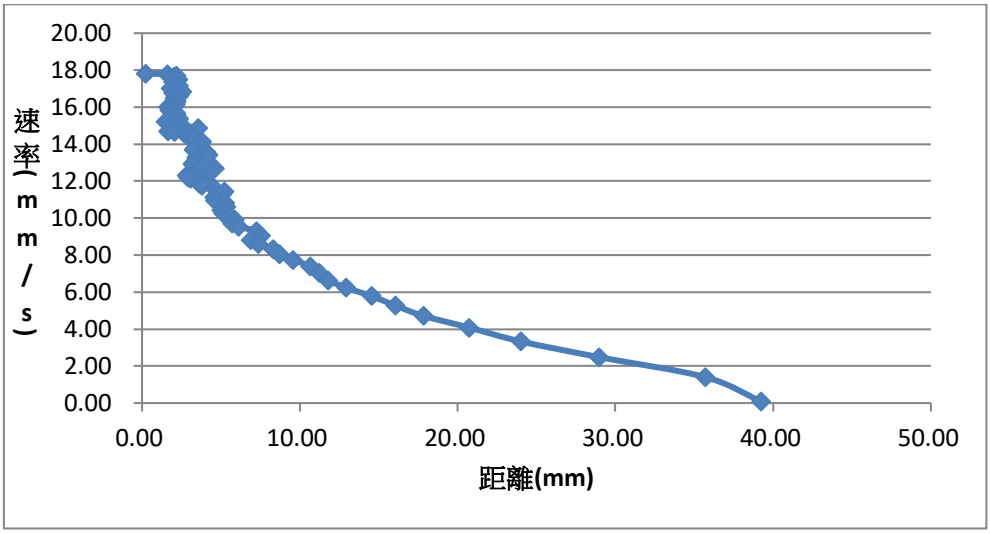

圖十一　速率隨球與壁間距離變化

2R =14.1mm



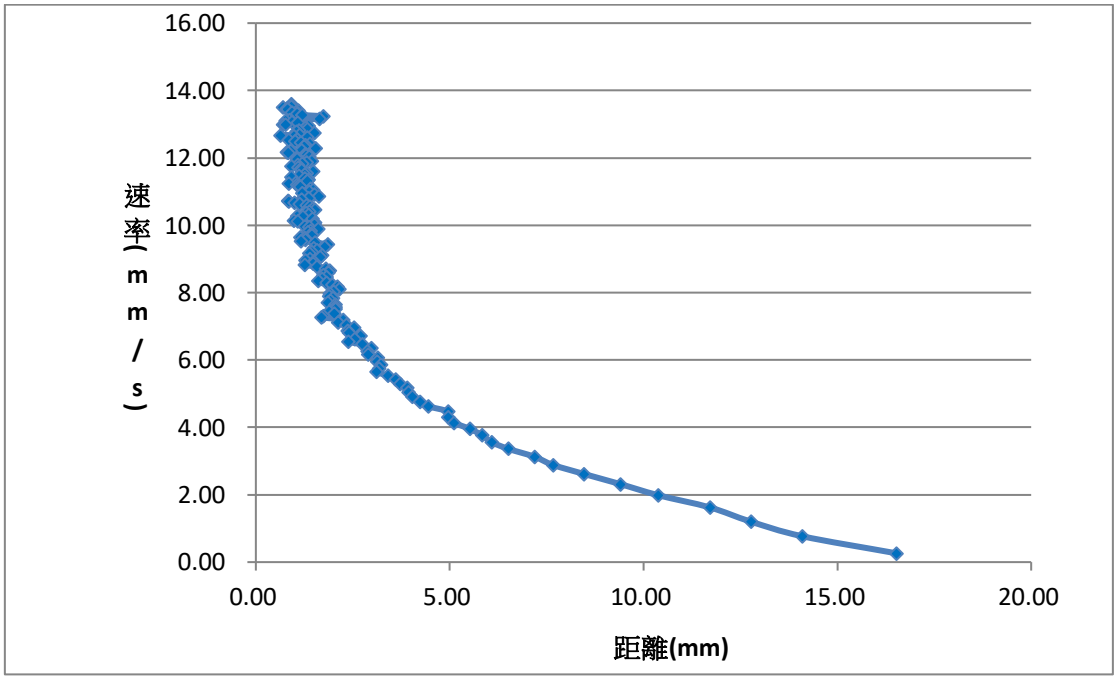

圖十二　速率隨球與壁間距離變化

2R =19.5mm




圖十三　速率隨球與壁間距離變化

2R=30.0mm

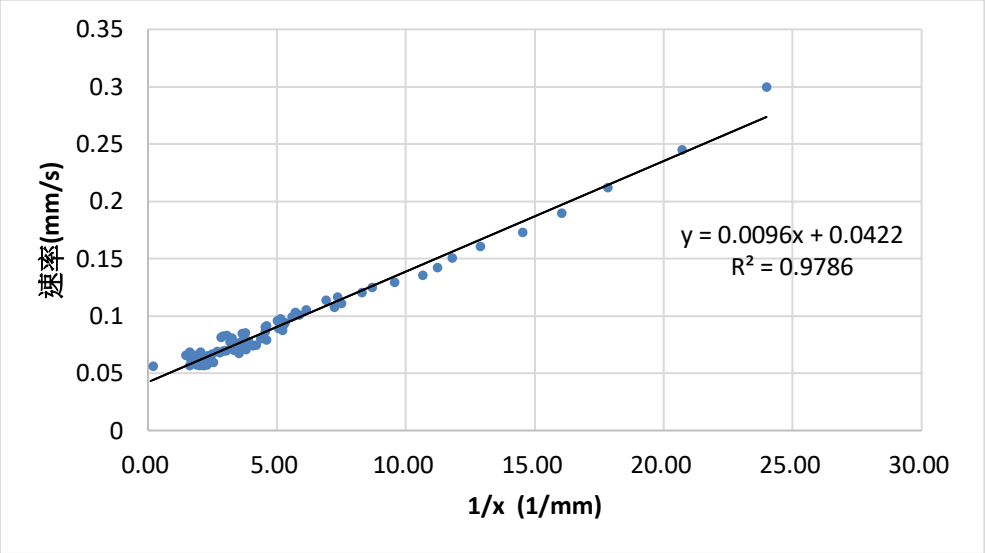



圖十四　速率隨球與壁間距離變化

觀察以上圖形，我們發現與兩球相吸理論中推導所得到的一階修正貝索函數十分相近。已知一階修正貝索函數在$x$足夠小的狀況下可近似為$1/x$，由於受力正比於速率，所以速率理論上應該與$1/x$成正比。此時我們速率對距離的倒數這兩個變量作圖，得到線性關係。考慮誤差，我們可以將速率寫成：$v=\frac{k}{x}+C$ 的形式。

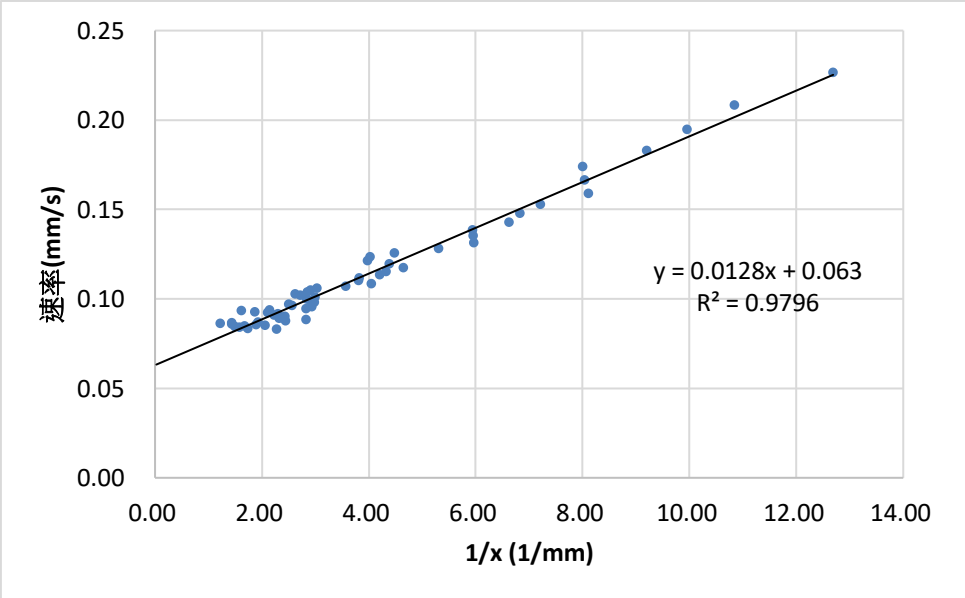
但是由第一個實驗知道，阻力在本實驗中只有在吸引的後期會接近理論中的與速率正比形式。所以在以下的線性化過程中必須要略去吸引初期的數據。

2R=10.2mm



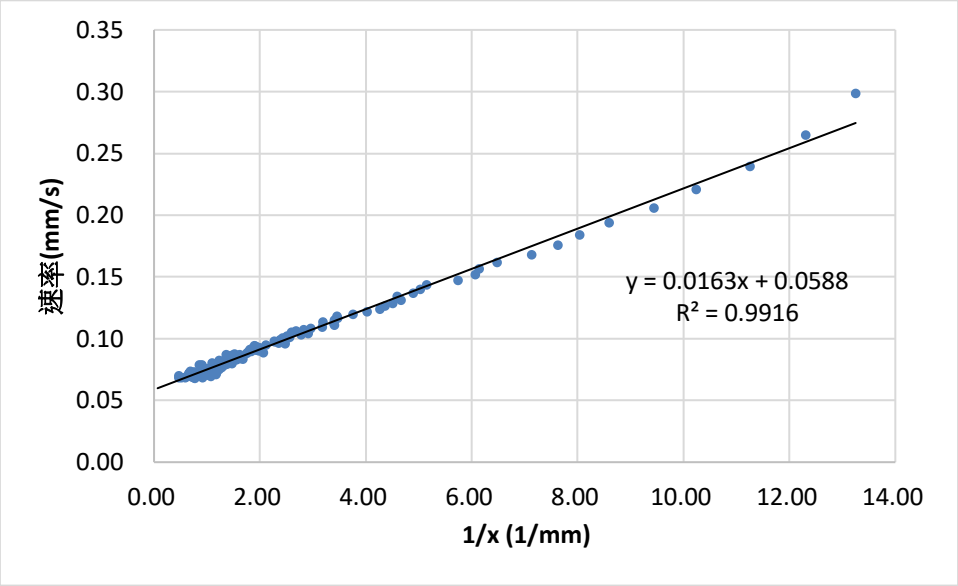

**圖十五　v-1/x 關係圖**

2R=14.0mm



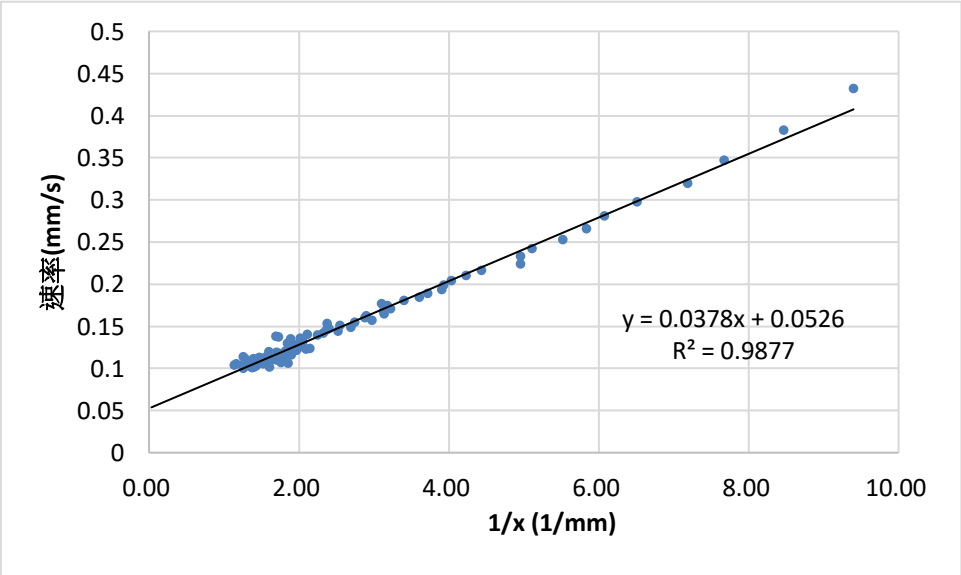

**圖十六　v-1/x 關係圖**

2R=19.5mm




圖十七　**v-1/x 關係圖**

2R=30.0mm




圖十八　**v-1/x 關係圖**

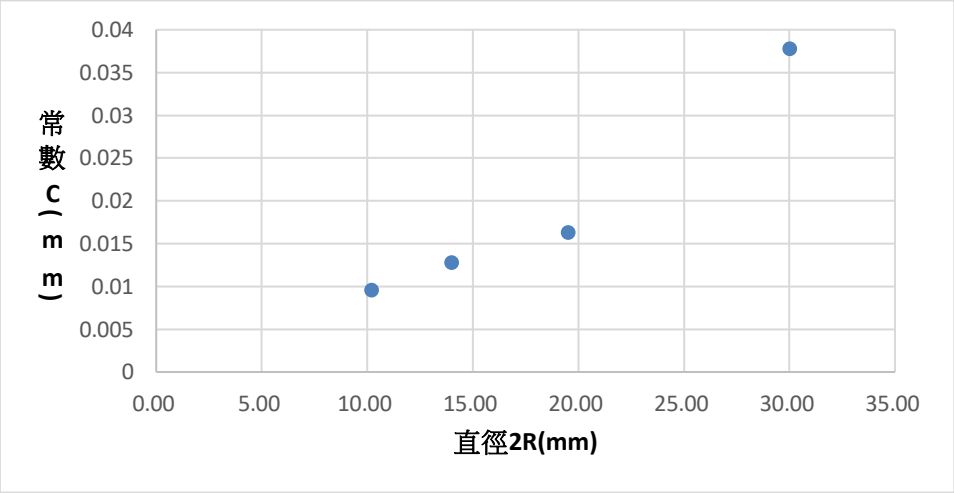
$v=\frac{k}{x}+C$ 中的負一次方係數$k$隨著半徑增加有變大的趨勢。從先前的理論模型中可推得受力與半徑的關係應為$R$的函數，且為遞增。而係數的量值則應該依阻力模型的不同而有所差異。

| $2R$ (mm) | $k$ ($m^2/s$) |
|---|---|
| 10.2 | 0.0096 |
| 14 | 0.0128 |
| 19.5 | 0.0163 |
| 30 | 0.0378 |

表九

| $2R$ (mm) | $C$ (mm) |
|---|---|
| 10.2 | 0.0422 |
| 14.0 | 0.063 |
| 19.5 | 0.0588 |
| 30.0 | 0.0526 |
| 標準差 | 6.12875E-05 |
| 平均值 | 0.05415 |

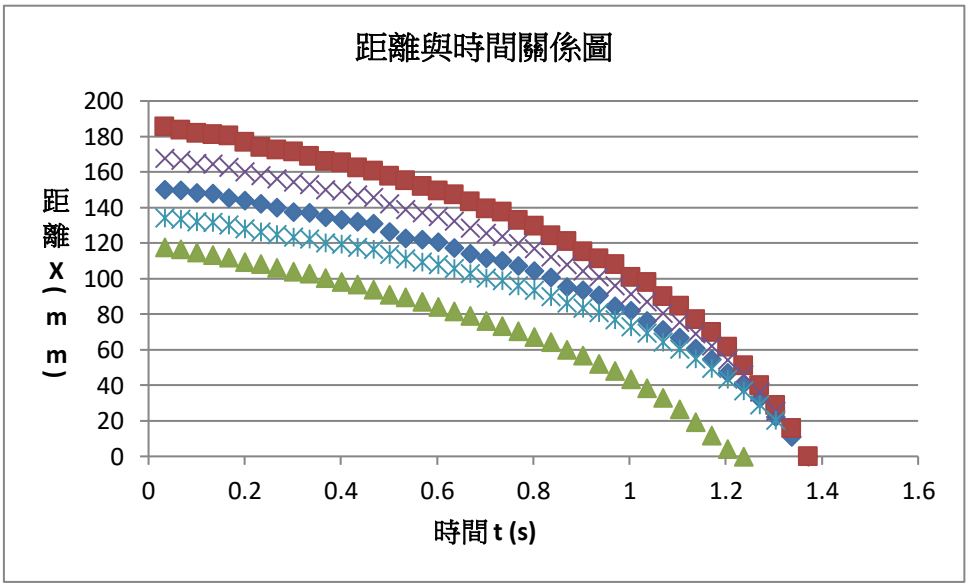
表十




**圖十九　常數 C 與直徑 2R 關係圖**

三、改變重量對圓球在水面上運動之影響

(一) 距離x與時間t關係圖



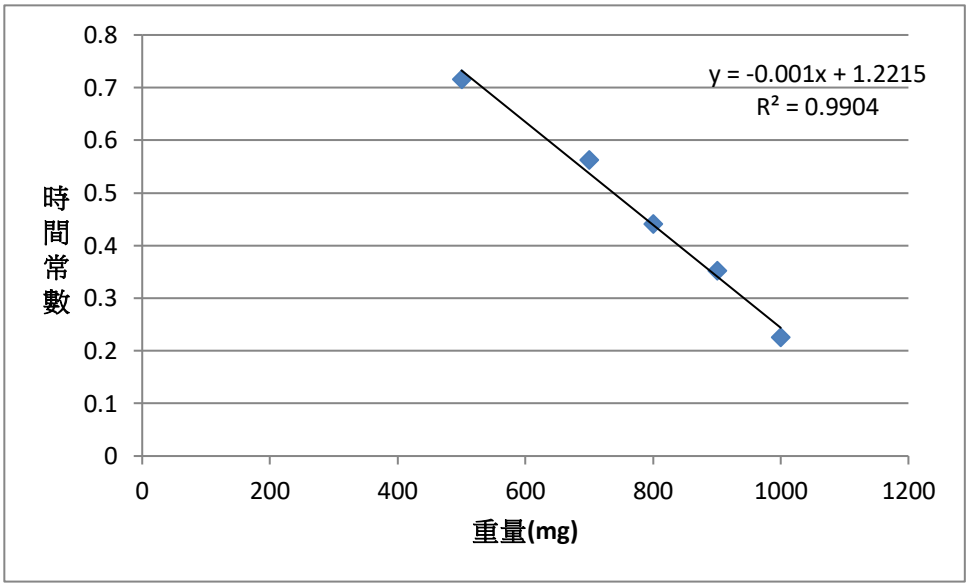

**圖二十　X-t 關係圖**

(二) 重量與時間常數關係圖

由上(一)的圖形擬合，得出之時間常數與重量有線性關係。

重量較重時，由於接觸角的改變，導致表面張力橫向分量增加，影響運動。

或是從能量角度下手，由於等效重量增加，等效位能同時也增加，表面張力固然增加。

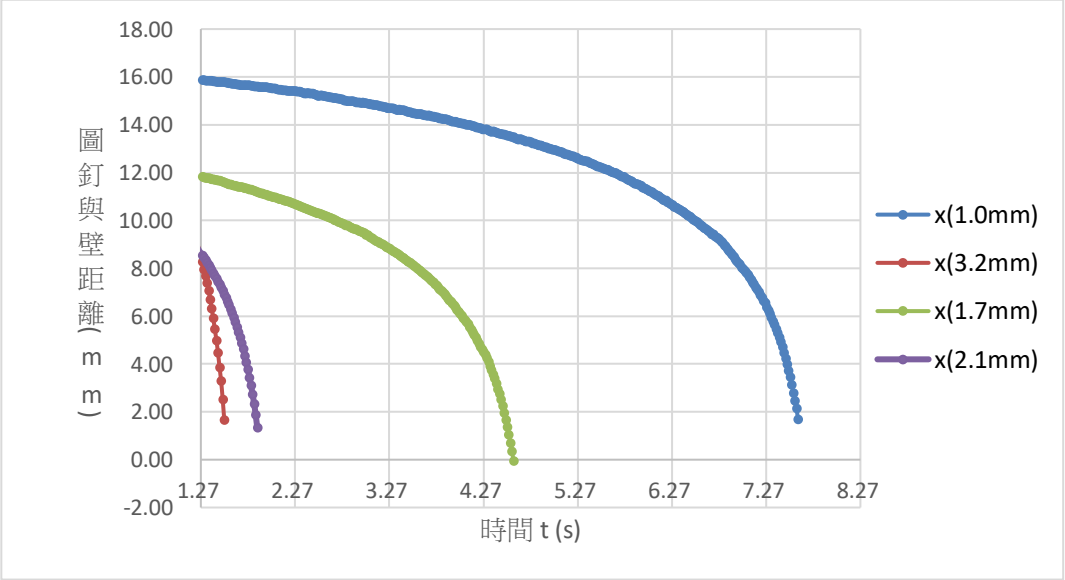



**圖二十一　時間常數與重量關係圖**

四、改變水面上凸高度與器壁吸引圓盤運動之影響

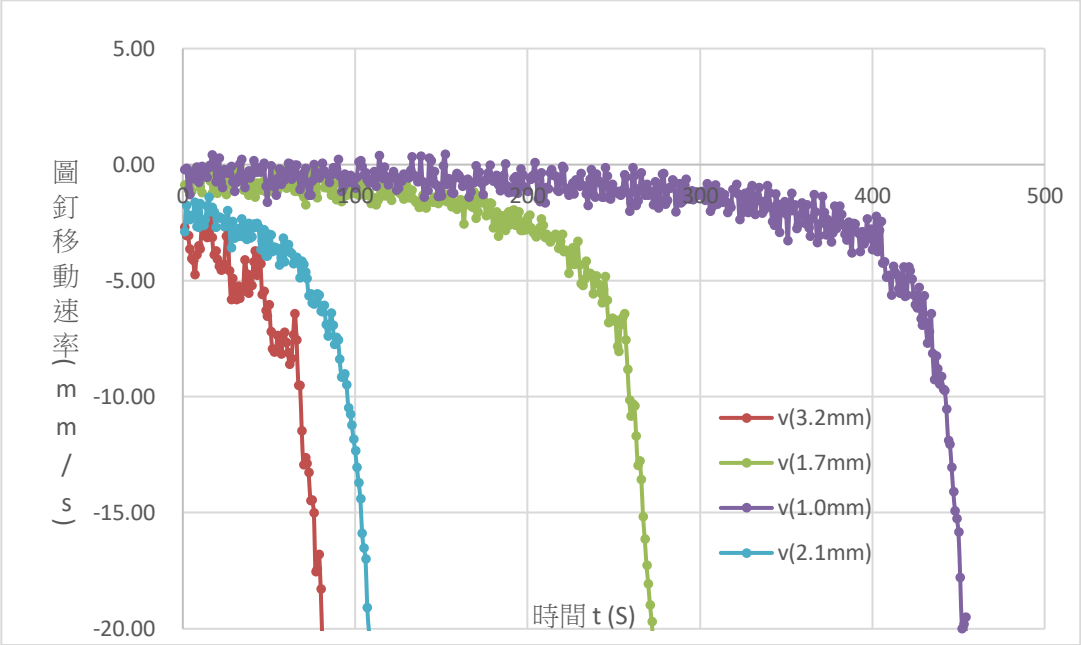
(一) 圓盤與壁之間距離隨時間的變化

同樣可以得到一個指數下降的形式，水面高度則影響衰減率。



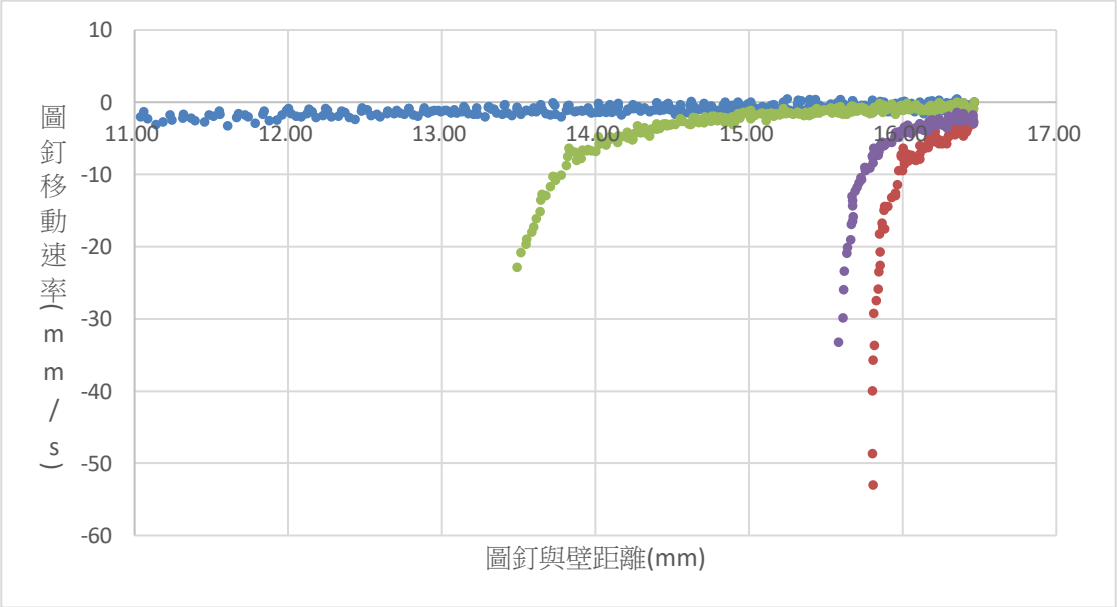

**圖二十二　x-t 關係圖**

(二) 圓盤速率隨時間的變化(不同高度)




**圖二十三　v-t 關係圖**

(三) 速率與距離之間關係圖(不同高度)

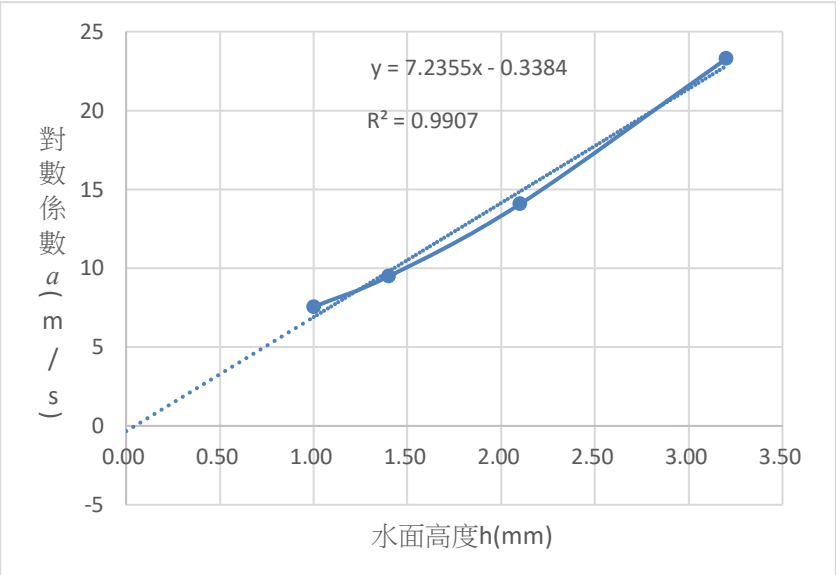



**圖二十四　v-x 關係圖**

若將上圖以對數函數座近似，可以寫成$V = a\ln(X) + b$的形式。整理數據，分析對數係數$a$與高度$h$的變化，發現大致呈線性關係，高度越高，速率隨距離的增加率越高。圖中的線性關係理論上為正比，其截距應為誤差所造成。

| 水面高度 *h*(mm) | 對數係數 *a*(m/s) |
|---|---|
| 1.0 | 7.55 |
| 1.4 | 9.48 |
| 2.1 | 14. 06 |
| 3.2 | 23.27 |

表十一




**圖二十五　*a-h* 關係圖**

# 陸、 討論

一、圓球的相吸距離與時間可寫成$l = C + Ae^{\frac{t}{\tau}}$的關係。此處我們得出的結果與理論有所出入，這是因為我們討論了運動的全部過程。我們認為在運動的前半部分，受力並不式單純如文獻所引入的阻力。在理論中受表面張力與$x$成反比，阻力與$v$正比，因此運動方程式應為：$\sqrt{C+kt}$的形式。顯然，理論與實驗在相碰前瞬間較為符合，在前期阻力的形式有所不同，這也使在臨界距離之外的小球無法吸引，所以知道阻力在後段接近$f = -kv$的形式。

二、$l = C + Ae^{\frac{t}{\tau}}$描述整體的運動，包含前期克服阻力的緩慢運動，$\sqrt{C+kt}$描述物體在後期的運動，表達阻力的形式為$f = -kv$。

三、圓球相吸的臨界距離又可寫成$C = A + B \cdot e^{\frac{2R}{L}}$的形式，隨著半徑增大臨界距離有逐漸下降的趨勢。這代表巨大的球體較容易吸引。

四、球體與容器壁相吸的臨界距離與半徑可以寫成$C = A + B \cdot e^{\frac{2R}{L}}$的關係，其中$B$為負值。表示當R越大時，臨界距離也會越小，而且下降速率會越來越快。當直徑大於臨界直徑$2R_c$(約為50.46mm)時，臨界距離小於0。

五、球體與容器壁相吸的速率與距離的關係可寫成$v = \frac{k}{x} + C$的形式，比較後發現$C$大致為一固定常數。$k$則是隨著半徑增加而迅速增加。

六、使用阻力與表面張力合力造成的合力=0的模型，利用表面張力與速率有正比關係(在吸引的後段)，發現結果得出的表面張力與距離間變化，與理論推導的結果符合：在$x$足夠小的狀況下，可以近似和$\frac{1}{x}$成正比。

七、圖釘在凸起水面上的運動速率可以寫成$V = a\ln(X) + b$的形式，其中$X$與壁之間距離。$a$為與水面高度$h$近似成正比的係數，表示高度越高，圖釘向外壁漂移的速率隨$X$增加越快。

八、由實驗結果大於臨界距離就無法相吸。我們推測原因有二：水面的凹凸性受兩球影響進而改變表面張力的橫向分量，以及在運動過程中會先經歷一段等速度運動過程，爾後的運動則大致呈指數方程式的形式。

# 柒、 結論

本實驗討論球體在水面上的運動過程，發現相吸與球被壁吸引的運動過程類似，且整體而言可以指數函數近似，前半部分，物體移動較為緩慢，後半部分則因阻力與速率成正比，應是接近 $\sqrt{C+kt}$ 的形式，這個階段可以從速率直接推知受力。從圖釘的實驗可以知道，在相碰前的時間內水面會有劇烈的高度改變，使受力的形式與浮體球不同。凸起的水面實驗中，圓盤與壁相吸的引力因水面高度增加而遞增，而速率與距離則是對數關係與前面實驗有所差異。

本實驗希望未來能藉由細部的觀察，幫助大眾深入了解生活化的現象中的物理原理，並深入坦討其理論模型。

# 捌、 參考資料及其他


一、Dominic Vella and L. Mahadevan, “The Cheerios effect”, Am. J.Phys. 73(9) 817~825 (September 2005)

二、臺灣二OO六年國際科學展覽會利用浮沉子測量液體表面張力並演示 ”Cheerios effect” 嘉義高級中學

三、洪碩成等，2011，”「液表」人才—同性相吸，異性相斥”，中華民國第 51 屆中小學 科展高中組物理科，國立臺灣科學教育館，台北。

## 【評語】051816

本件作品利用攝影法方式討論浮體的運動現象。也利用研究方法處理了一些問題。但是實驗整體設計可以再求周延，探討新的面向，例如設計如何量測真正的受力？而不僅侷限於運動現象的整理。

## 作品海報

# 研究動機

吃麥片時，我們常忍不住撥弄著碗裡漂浮的麥片。牛奶上的麥片，常常會聚集在一塊成為麥片集團，令人覺得十分有趣。資料指出，表面張力是此現象的主因，於是我們著手定量分析這個現象隨著浮體種類以及表面張力的變化。

# 研究目的

一、找出圓球在水面上相吸的作用力與距離與半徑關係
二、找出圓球和容器壁相吸的運動並分析受力
三、找出圓盤的運動受水面上凸程度的影響
四、找出不同重量浮體相吸的運動及作用力。

# 研究設備及器材

保麗龍球、圖釘、透明玻璃方型水箱、透明圓形水盒、扁水槽、螺旋測微器、高速攝影機、數位顯微鏡及手機、微量砝碼(500mg、200mg、100mg、50mg)

# 研究方法

拍照錄影 → 軟體分析 → 理論探究

拍照錄影：架設攝影機進行拍攝，從側面以手機進行拍攝，從上方以攝影機拍攝影片。從側邊拍攝浮體與水面的接觸角，上面拍攝浮體間的運動。

軟體分析：運用tracker分析其運動的位移、速率與時間關係。利用軟體Origin擬合曲線，找出最符合的方程式。

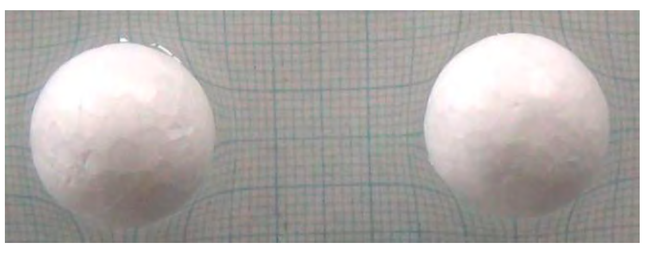
理論探究：利用*v-t*、*v-x*、*x-t*分析其運動及受力。利用力平衡與楊拉普拉斯方程分析其運動。

## 實驗注意事項及細節

- 利用水的反磁性，以磁鐵造成水面凹陷可以限制浮體初始位置。
- 浮體與容器壁間有吸引力，因此做實驗時始符體盡量遠離容器壁。
- 密度大小決定相吸或相斥，因此要注意浮體的選取。

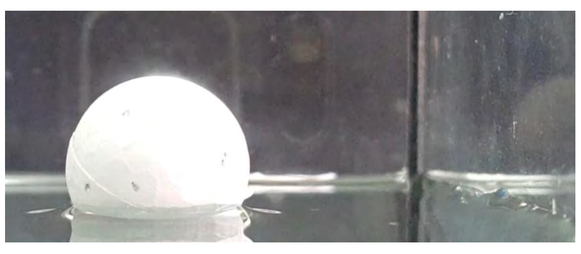
## 實驗一：圓球狀浮體在水面的相吸運動

為了得知圓球狀浮體在水面上相吸的運動與半徑的關係，運用Tracker分析其運動，畫出*v-t*、*v-x*、*x-t*圖。利用數據分析其運動和受力。



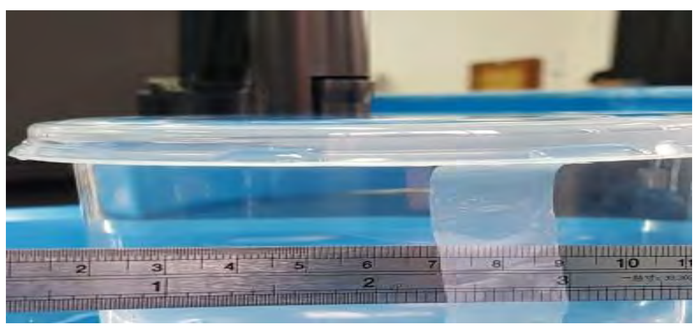
## 實驗二：圓球狀浮體與容器壁的相吸運動

為了得知圓球狀浮體在水面上與器壁相吸的運動與半徑的關係，運用Tracker分析其運動，畫出*v-t*、*v-x*、*x-t*圖。並以理論分析其結果。



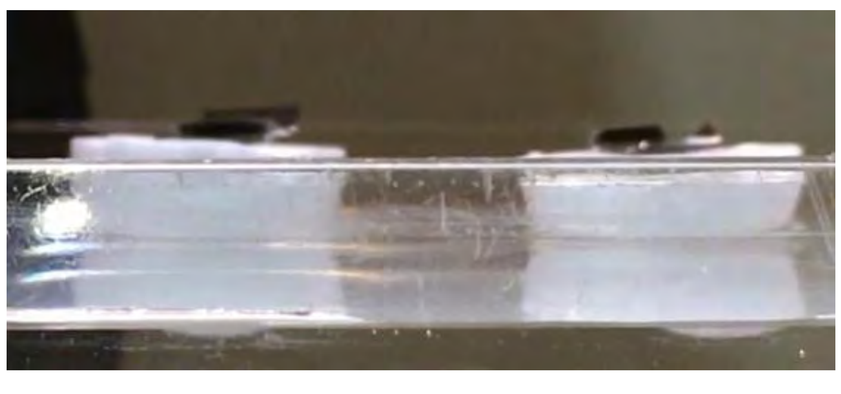
## 實驗三：水面上凸高度與器壁吸引圓盤運動之影響

為了得知圓球狀浮體在上凸水面上與器壁相吸的運動。改變水量直到不再排斥也不吸引的臨界狀態定為H=0。逐次改變水量，測量水面高度。運用Tracker分析其運動，畫出*v-t*、*v-x*、*x-t*圖並以理論分析其結果。



## 實驗四：不同重量圓球狀浮體在水面的相吸運動

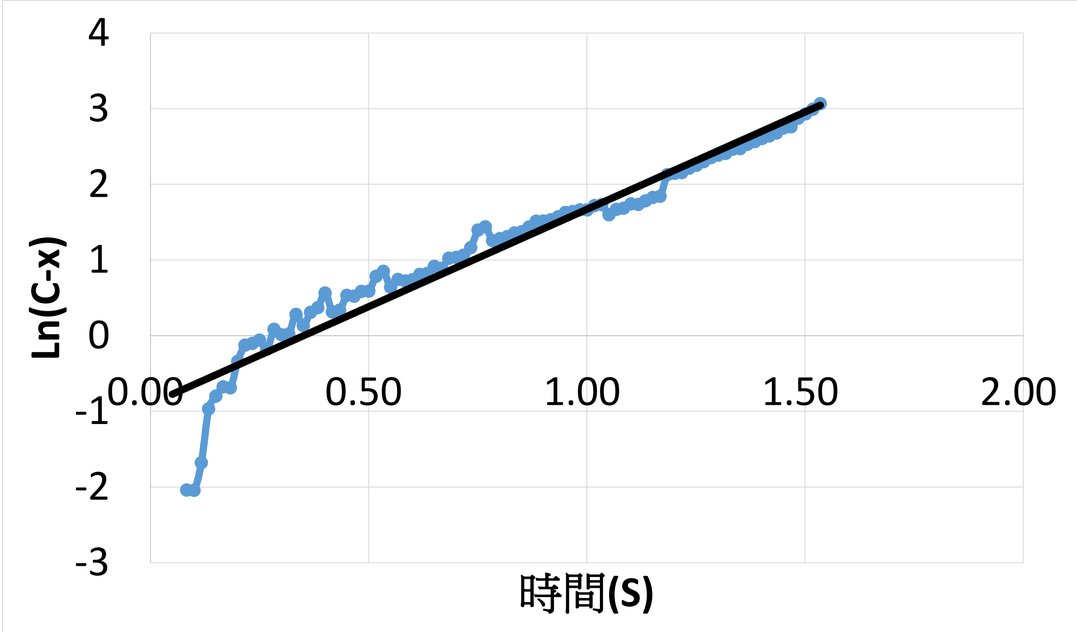
為了得知不同重量圓球狀浮體在水面上相吸的運動，運用Tracker分析其運動，畫出*v-t*、*v-x*、*x-t*圖。利用數據分析其運動和受力。



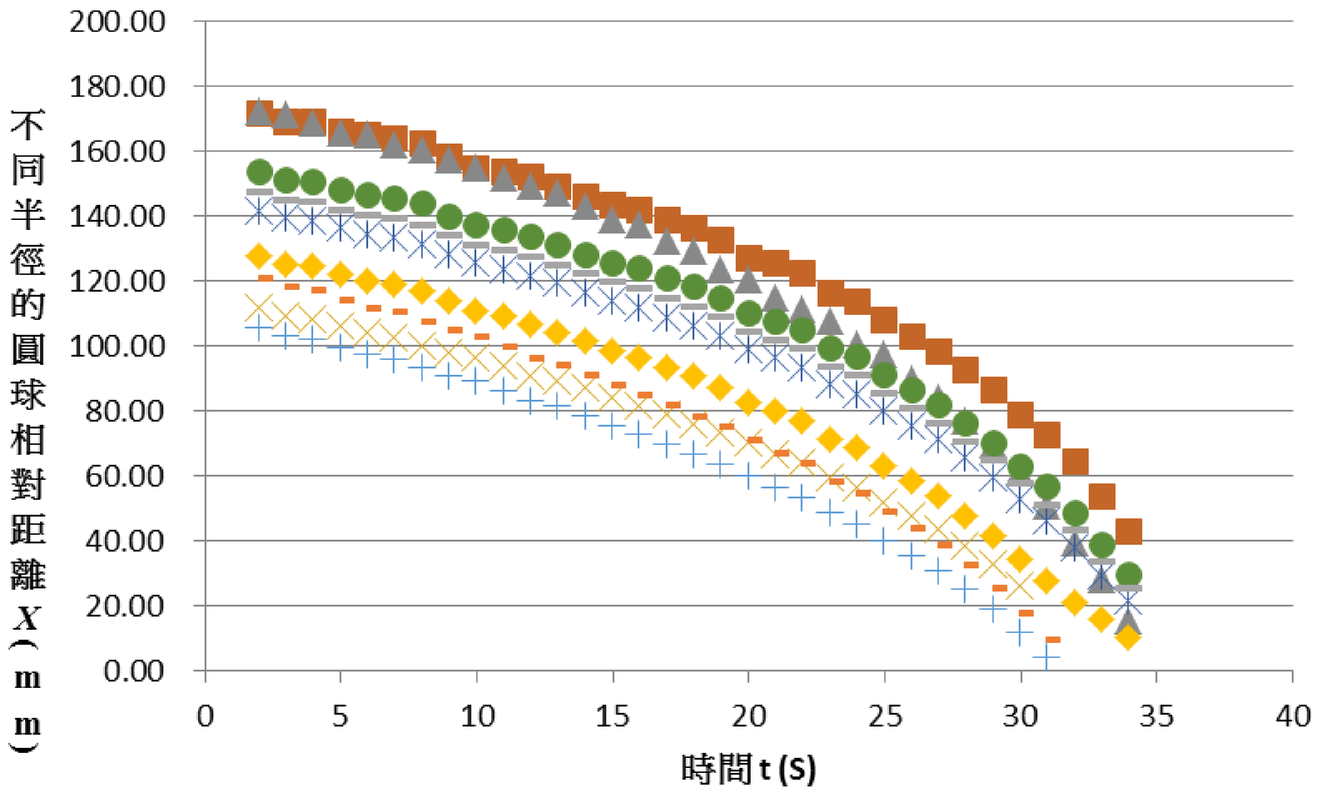
# 研究結果

## 不同半徑圓球狀(密度<1)浮體在水面的相吸運動

整段運動為左圖的對數方程式較相符，而運動後期則是為以$x^2$與時間$t$的線性關係較相符。



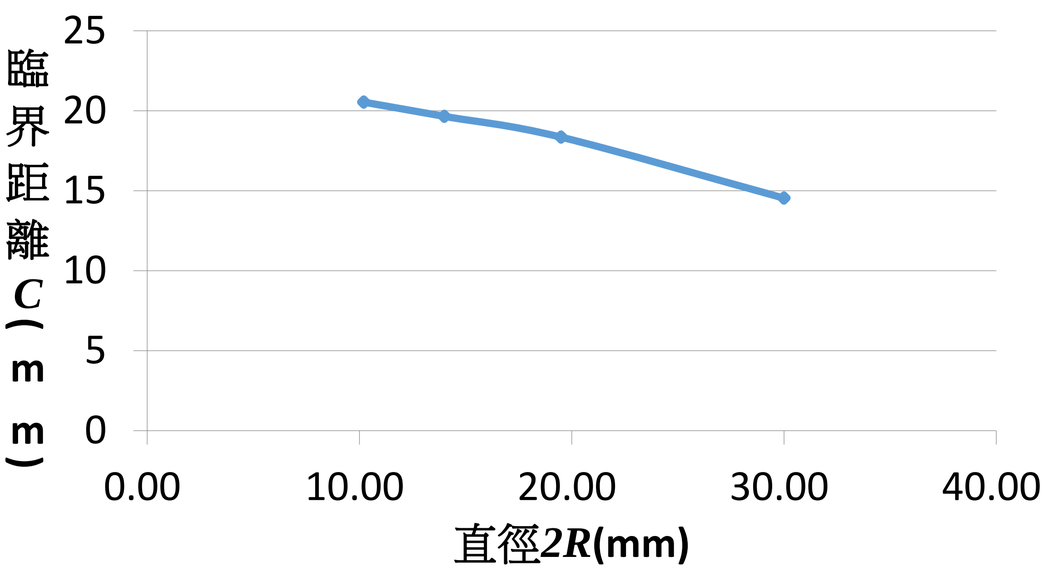

*ln(C-x)* 對 *t* 關係圖



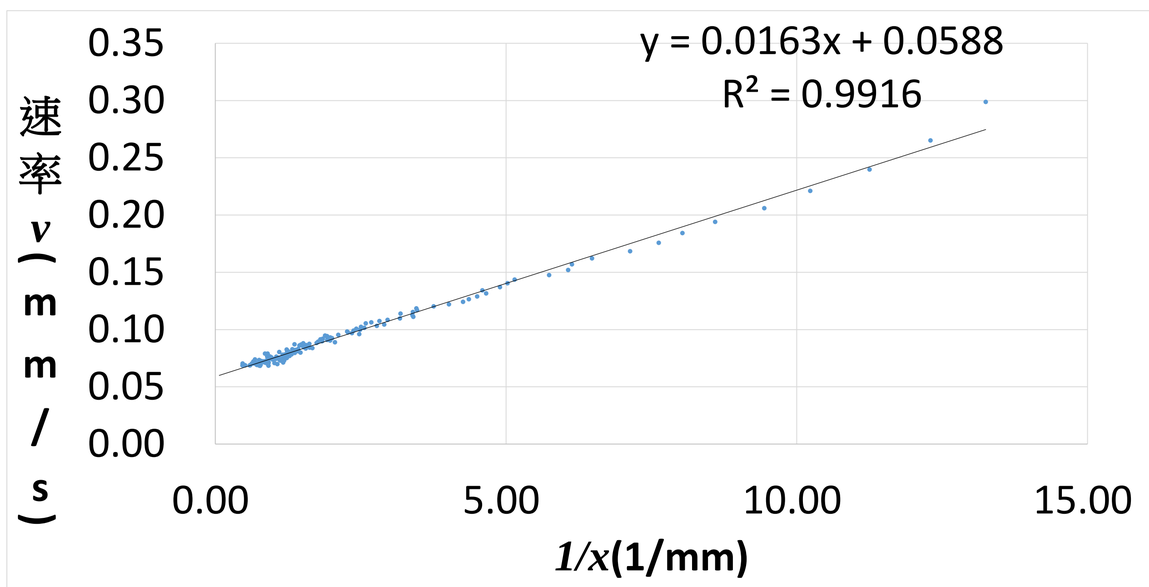

*x-t*關係圖

## 測量不同直徑的圓球狀浮體與容器壁的相吸運動

左圖的方程式擬和後發現C(臨界距離) $C=A+Be^{\frac{2R}{L}}$ 之相關係數高。
右圖取運動後期數據，以速率對距離的倒數兩個變量作圖，得到線性關係。



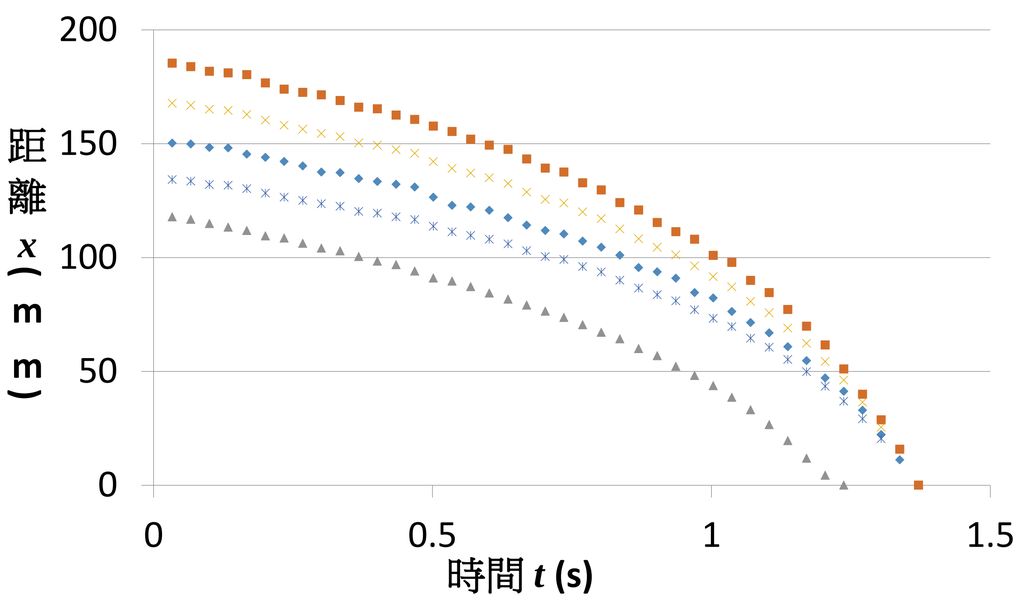

*C-2R*關係圖



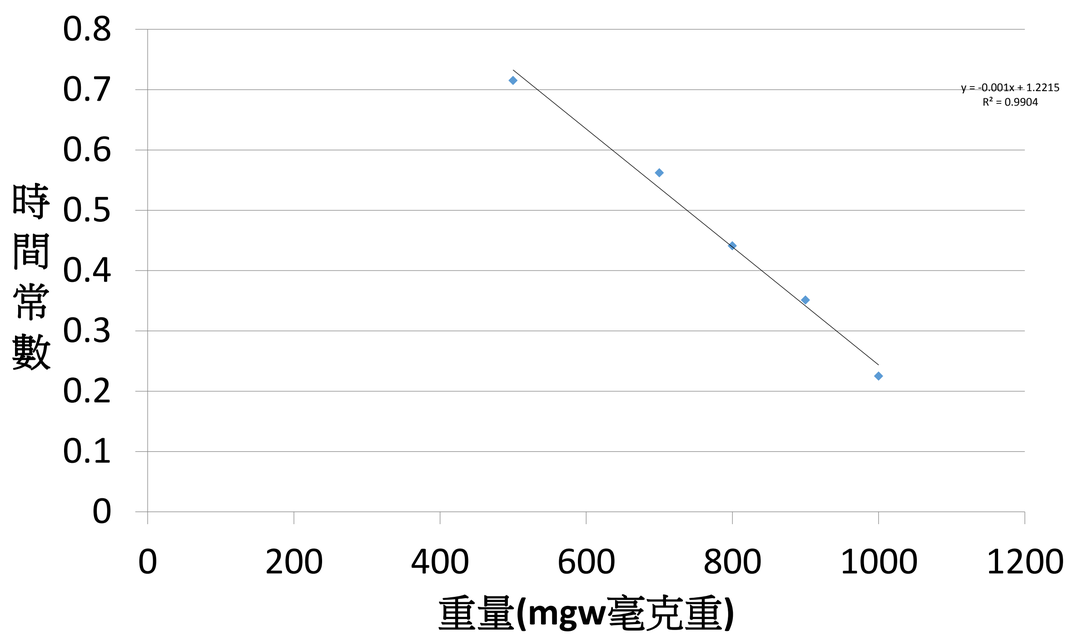

*v - 1/x*關係圖

## 不同重量浮體相吸的運動

重量較重時，由於接觸角的改變，導致表面張力橫向分量增加，影響運動。
或是從能量角度下手，由於等效重量增加，等效位能同時也增加，表面張力固然增加。

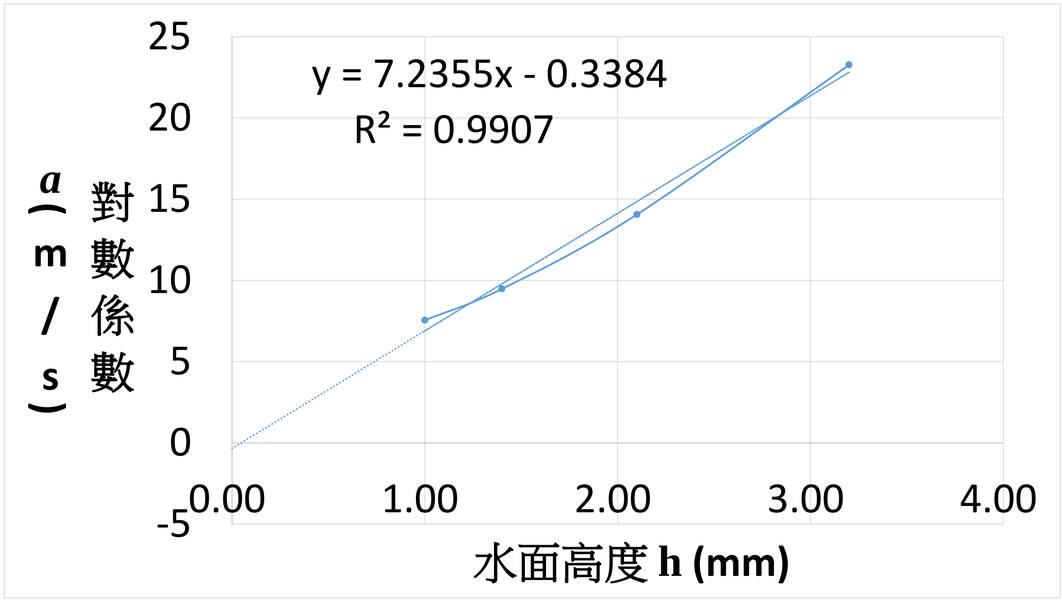



*x-t*關係圖

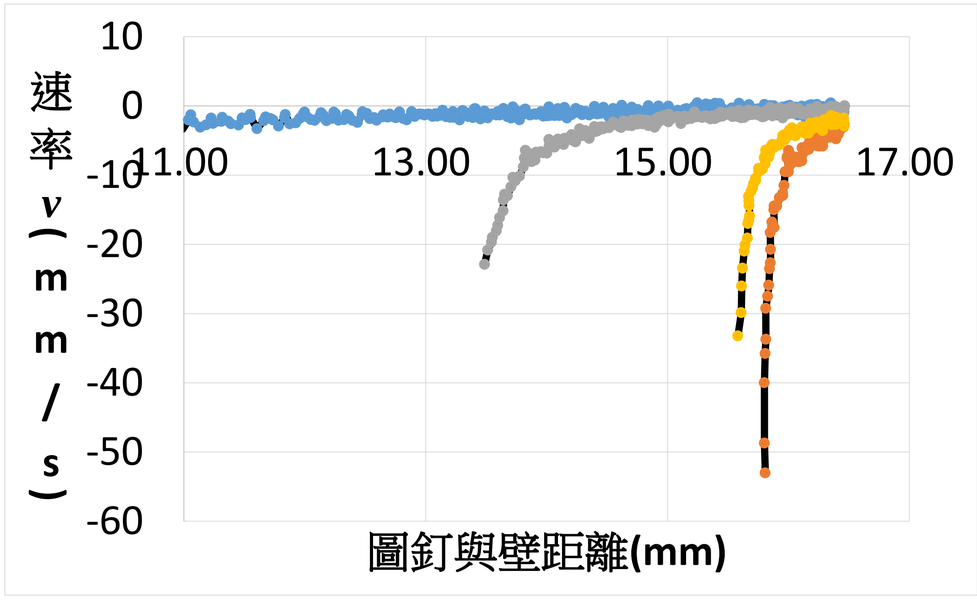



## (四)改變水面上凸高度與器壁吸引圓盤運動之影響

將上圖以對數函數座近似，可以寫成$V = a\ln(X) + b$ 的形式。
整理數據，分析對數係數$a$與高度$h$的變化，呈線性關係，高度越高，速率隨距離的增加率越高。
圖中的線性關係理論上為正比，其截距應為誤差所造成。




*a-h*關係圖

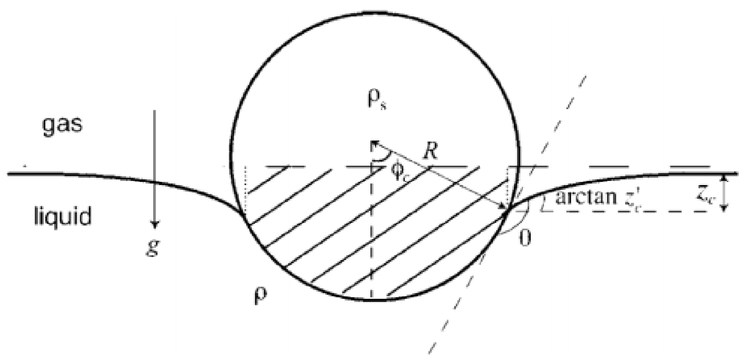



*v-x*關係圖

# 理論分析

浮體力平衡 → 拉普拉斯方程 → 表面張力能 → 阻力表面張力

球體在水中利用重力、浮力與表面張力平衡。




由楊拉普拉斯及修正貝索Bessel函數，討論表面張力造成的高度變化。

考慮表面張力及高度造成的能量和作用力變化。

利用浮體在水中的阻力與表面張力平衡，探討物體的運動。

## 浮體在水中的力平衡

$$\frac{4}{3}\pi\rho_s gR^3 = 2\pi\gamma R\sin\phi_c \frac{z_c'}{\sqrt{1+z_c'^2}} + \rho\pi gR^3\left(\frac{z_c}{R}\sin\phi_c + \frac{2}{3} - \cos\phi_c + \frac{1}{3}\cos^3\phi_c\right)$$

用幾何關係將 $\theta$ 帶入 →

$$z_c'\sin\phi_c = B\left(\frac{2D-1}{3} - \frac{1}{2}\cos\theta + \frac{1}{6}\cos^3\theta\right) \equiv B\Sigma$$

## 楊拉普拉斯方程Young-Laplace equation

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dh}{dr}\right) = \frac{h}{L_c^2}$$

$K_1(x) \approx 1/x$ for $x \ll 1$ →

$$h(r) = -z_c' L_c \frac{K_0(r/L_c)}{K_1(R\sin\phi_c/L_c)} \approx -z_c'\sin\phi_c R K_0(r/L_c)$$

## 表面張力能

$$E(l) = -2\pi\gamma R^2 B^2 \Sigma^2 K_0\left(\frac{l}{L_c}\right)$$

E對L微分 →

$$F(l) = -2\pi\gamma R B^{5/2}\Sigma^2 K_1\left(\frac{l}{L_c}\right)$$

## 阻力與表面張力平衡

浮體質量很小視為0，因此水面的阻力與表面張力平衡。
阻力與速率一次方正比
藉由實驗可求出阻力中R的冪次。

$$6\pi\mu R\alpha\frac{dl}{dt} = -2\pi\gamma R B^{5/2}\Sigma^2 K_1\left(\frac{l(t)}{L_c}\right)$$

# 結論

1. $l = C + Ae^{\frac{t}{\tau}}$ 描述整體的運動，包含前期克服阻力的緩慢運動，$\sqrt{C+kt}$ 描述物體在後期的運動，阻力的形式為 $f=-kv$。
2. 圓球相吸的臨界距離可寫成 $C=A+Be^{\frac{2R}{L}}$ 的形式，隨著半徑增大臨界距離逐漸下降。代表巨大的球體較容易吸引。
3. 球體與容器壁相吸的臨界距離與半徑寫成 $C=A+Be^{\frac{2R}{L}}$ 的關係，B為負。R越大，臨界距離越小，下降速率越快。
4. 球體與容器壁相吸的速率與距離的關係可寫成 $v=\frac{k}{x}+C$ 的形式，C為常數。k隨著半徑增加而增加。
5. 阻力與表面張力合力=0的模型，表面張力與速率有正比關係(吸引後段)，得出表面張力與距離間變化，在x足夠小的狀況下，近似和 $\frac{1}{x}$ 成正比。
6. 圖釘在凸起水面上的運動速率可以寫成 $V=a\ln(X)+b$的形式，$x$為與壁之間距離。
   $a$為與水面高度$h$近似成正比的係數，高度越高，圖釘向外壁漂移的速率隨$x$增加越快。
7. 實驗結果大於臨界距離就無法相吸。推測原因有二：
   (1)水面的凹凸性受兩球影響進而改變表面張力的橫向分量。
   (2)在運動前期為等速度運動，後期運動則呈指數方程的形式。
8. 重量較重時，由於接觸角的改變，導致表面張力橫向分量增加，影響運動。或是從能量角度下手，
   由於等效重量增加，等效位能同時也增加，表面張力固然增加。

# 未來展望

這個實驗描述兩物體在水上的相吸運動，藉由改變半徑和重量等不同變因改變接觸角，來研究其相吸運動的變化。並由實驗得平均密度與受力的關係，以及表面張力與受力的關係。未來將探討油滴在水面上的運動，進而發想不同的汙染物於水面上的聚集。

# 參考資料


(1)Dominic Vella and L. Mahadevan, “The Cheerios effect”, Am. J.Phys. 73(9) 817~825 (September 2005)
(2)臺灣二00六年國際科學展覽會利用浮沉子測量液體表面張力並演示 ”Cheerios effect”嘉義高級中學洪碩成等，2011，”「液表」人才—同性相吸，異性相斥”，中華民國第 51 屆中小學 科展高中組物理科，國立臺灣科學教育館，台北。