

中華民國第 57 屆中小學科學展覽會

作品說明書

高級中等學校組 物理與天文學科

第三名

051814

斜面二維運動與摩擦力的探討

學校名稱：國立宜蘭高級中學

作者： 高二 林亮昕	指導老師： 吳旭峯
---------------	--------------

關鍵詞：摩擦力、斜面、二維運動

摘要

本研究探討動摩擦力對物體在二維平面運動的影響，透過實驗設計，可以精確觀測紀錄物體在斜面上二維運動之位置、速度與加速度，推算出二維平面運動摩擦力的方向，並解出物體在粗糙斜面的二維運動的微分方程式，得到六個函數關係式，透過這些函數關係式的轉換，可以模擬出物體的運動的軌跡以及其位置、速度、加速度隨時間變化的情形，與實驗量測的結果相當符合。本研究也探討初速度、斜面傾角、摩擦係數等變因，對斜面二維運動的影響，推導出運動歷時、停止位置與其初速度的關係式，並由實驗量測結果得到印證，進一步發現測量動摩擦係數的新方法，此方法只需測量物體在斜面上運動停止位置與傾角，就可推算出動摩擦係數。

壹、研究動機

高中物理介紹動摩擦力時，多以一維直線運動為例，說明動摩擦力與物體滑動方向(切線)相反，但並未提及物體在二維平面曲線滑動時，此特性是否依然成立。設想一個在粗糙平面上直線滑動的物體，受到一個側向(垂直速度方向)的推力，無論這個推力多小，這個物體都會偏離直線嗎？其結果會是：像車子在斜坡上橫向(垂直下滑方向)前行時，因側向靜摩擦力存在，可使軌跡保持直線？還是會因為沒有可以抵消推力的側向摩擦力，以致物體無法保持直線運動？這個問題的根源在於物體在二維平面曲線滑動時是否存在一個垂直速度方向(法線方向)的摩擦力，本研究試圖藉由實驗量測的數據分析，結合理論模型之推導，以確認法線方向的摩擦力是否存在。

貳、研究目的

- 一、探討斜面上二維運動之摩擦力方向。
- 二、建構斜面上二維運動之理論模型與運動方程式。
- 三、探討影響斜面上二維運動之變因。

參、研究設備及器材

1. 數位相機、腳架、照明燈、壓克力板、木板、發射器、木條、直尺、砝碼、棉線、量角器、個人電腦。
2. 軟體程式：Tracker、MS Excel、Wolfram alpha。

肆、研究過程和方法

一、非光滑斜面上二維運動物體之觀測

(一)觀測裝置說明

1. 腳架：固定相機。
2. 相機：以每秒 80 張的速度紀錄軌跡。
3. 檯燈：補充光源。
4. 壓克力板：作為均質平面。
5. 木板：作為平面防止壓克力板彎曲。
6. 尺：作為發射物體的軌道
7. 發射器(未在圖中)：可調整力道發射物體
8. 木條：改變木條數量使斜面接觸地面位置改變，藉以改變斜面傾角。
9. 砝碼與鉛錘線：用砝碼製造出鉛錘線，測量斜面與相機傾角使兩角度相等。



(二) 斜面動摩擦係數 μ 之測量

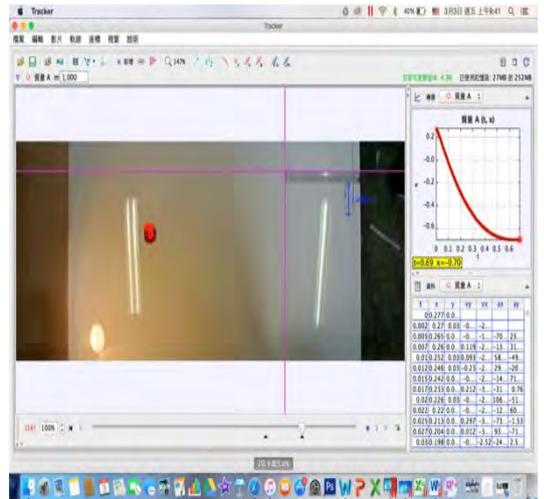
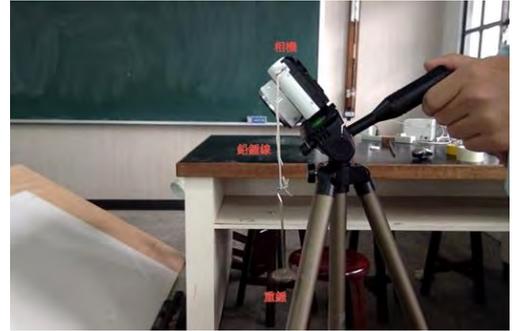
1. 調整斜面傾角使之大於靜摩擦角。
2. 利用懸掛著砝碼的棉線當鉛錘線測量斜面傾角 ϕ ，依此角度調整相機拍攝角度，使之正俯視斜板。(如下圖右)
3. 將物體靜置於斜面上自由釋放，物體將會沿斜面縱軸(y 軸)作直線等加速度運動，以數位相機錄影模式拍攝紀錄其運動過程。
4. 以軟體 Tracker 擷取物體運動影像資料，可測得物體運動之位置及速度對時刻之關係。
5. 以 MS Excel 作物體運動速度-時刻直線函數圖形之斜率，可得其加速度 a 。
6. 利用高中物理所學牛頓第二運動定律，計算後可得斜面之動摩擦係數 μ 。其原理簡述如下：

沿斜面方向合力=質量*加速度

$$\rightarrow mg\sin\phi - mg\cos\phi\mu = ma$$

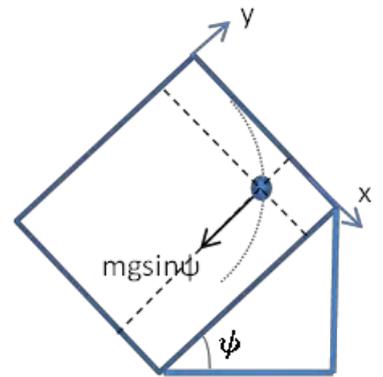
$$\rightarrow \mu = (g\sin\phi - a) / g\cos\phi \text{ ---- (a)}$$

其中 m 為物體質量， g 為重力加速度值。



(三) 斜面二維運動之觀測

1. 利用懸掛著砝碼的棉線當鉛錘線測量斜面傾角 ϕ ，依此標準調整相機拍攝角度，使之正俯視斜板。
2. 利用發射器將圓盤沿斜面橫軸(x 軸)水平方向軌道射出，使物體在斜面上作曲線運動，以數位相機錄影模式拍攝紀錄其運動過程。
3. 以軟體 Tracker 擷取物體運動影像資料，可測得物體不同時刻在 x 軸及 y 軸運動之位置、速度及加速度。
4. 將物體運動之位置、速度、加速度隨時間的變化情形以 MS Excel 作圖分析。
5. 改變物體的發射力道，重複步驟 2~4。
6. 改變物體底部的材質，重複步驟 1~4。
7. 改變斜面傾角重複步驟，重複步驟 1~4。
8. 將實驗結果與光滑斜面二維運動之計算結果進行比較。右圖為光滑斜面二維運動之示意圖，其原理可參考高中物理二 B 之水平拋體運動，運動方程式摘要如下：



立體圖

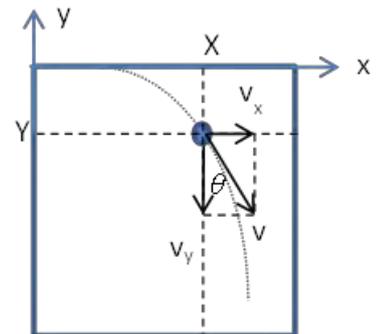
(1) 淨力： $\Sigma F_x = 0$; $\Sigma F_y = -mg\sin\phi$ (沿斜面向上定為 +y 方向)

(2) 加速度： $a_x = 0$; $a_y = -g\sin\phi$

(3) 速度： $v_x = v_0$ (初速度); $v_y = -g\sin\phi t$

(4) 位置： $x = v_0 t$; $y = -(1/2) g\sin\phi t^2$

(5) 軌跡： $y = -g\sin\phi x^2 / (2v_0^2)$



二、斜面上二維運動摩擦力方向之探討

對於法線方向摩擦力 f_N 是否存在，我們採取實驗數據分析與理論推導交互印證的方式進行。先依據實驗觀測結果，進行數據分析，據此初步判斷 f_N 是否存在，再依判斷結果，選擇模型 A 或模型 B，進行微分方程解析，最後再將解析後的理論方程式與實驗觀測結果作對照比較，作進一步確認，以避免實驗上的誤差導致錯誤的結論。

依實驗觀測結果分析判斷法線方向摩擦力 f_N 是否存在，我們使兩種方法，其原理如下：

(一) 法線加速度 a_N 與切線縱軸間夾角 θ 正弦值的函數分析 ($a_N - \sin \theta$)

1. 擷取實驗觀測數據各時刻的加速度分量 a_x 、 a_y 及速度分量 v_x 、 v_y 。
2. 推算切線與縱軸夾角 θ 之正弦值 $\sin \theta$ 與餘弦值 $\cos \theta$ 。

$$\sin \theta = \frac{v_x}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}}; \cos \theta = \frac{v_y}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}}$$

3. 如右上圖所示，將前兩項結果代入下式，可推算出不同 θ 時的法線加速度 a_N 。

$$a_N = a_y \sin \theta - a_x \cos \theta$$

4. 如右圖所示，法線方向之運動方程式如下

$$mg \sin \phi \sin \theta - f_N = ma_N \\ \rightarrow a_N = g \sin \phi \sin \theta - f_N / m \text{----(b)}$$

5. 取實驗數據分析，作法線加速度 a_N 與 $\sin \theta$ 的函數關係圖形。

依上式(b)，若 $f_N=0$ ，該函數圖形應為過原點之直線。反之，若 $f_N \neq 0$ ，該函數圖形不會通過原點。

(二) θ_c 餘弦值與斜面傾角 ϕ 正切值之函數分析 ($\cos \theta_c - \tan \phi$)

在研究過程中，若物體最後停在斜面上，發現物體在斜面上運動時，其 y 分量加速度值 a_y ，有先減少至零再反向增加的情形。

1. 當 a_y 降至 0 時，其 y 分量速度會出現極值 v_{yc} ，紀錄此時刻 x 分量速度值為 v_{xc} ，此時切線與縱軸夾角 θ_c 。
2. 推算 $\cos \theta_c$ ：

$$\cos \theta_c = \frac{v_{yc}}{\sqrt{v_{xc}^2 + v_{yc}^2}}$$

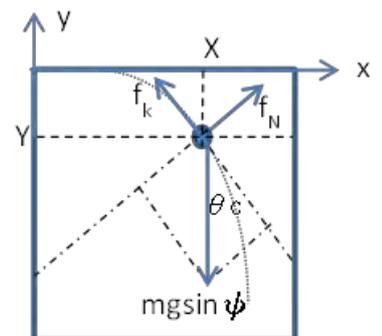
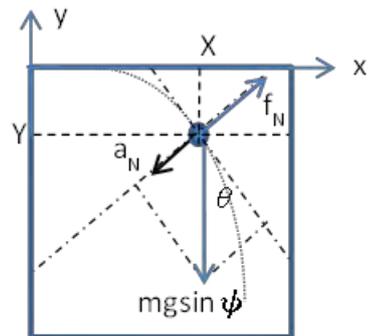
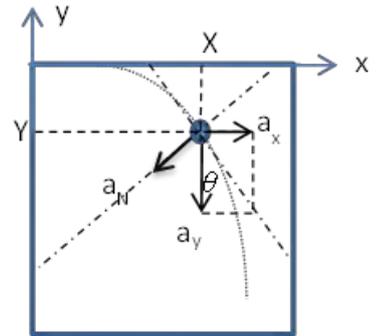
3. 如右圖所示，可列出 y 向運動方程式如下：

$$mg \sin \phi - f_k \cos \theta_c - f_N \sin \theta_c = 0$$

$$\rightarrow mg \sin \phi - mg \mu \cos \phi \cos \theta_c - f_N \sin \theta_c = 0$$

$$\Rightarrow \cos \theta_c = \frac{\tan \phi}{\mu} - \frac{f_N \sin \theta_c}{mg \mu \cos \phi} \text{----(c)}$$

4. 取實驗數據分析，作 $\cos \theta_c$ 與 $\tan \phi$ 的函數關係圖形。依上式(c)，若 $f_N=0$ ，該函數圖形應為過原點之直線。反之，若該圖形為不過原點的非線性函數，則表示 $f_N \neq 0$ 。



三、非光滑斜面二維運動模型之建構分析

1. 模型 A

模型 A 基礎：假設物體運動時除了受恆與運動方向相反的動摩擦力 f_k 外，也存在法線方向的摩擦力 f_N ，即 $f_N \neq 0$ ，如右圖所示。

根據牛頓第二定律，其運動方程式可表示為：

$$X \text{ 方向： } -f_k \sin \theta + f_N \cos \theta = m\ddot{x}$$

$$Y \text{ 方向： } f_k \cos \theta + f_N \sin \theta - mg \sin \phi = m\ddot{y}$$

2. 模型 B

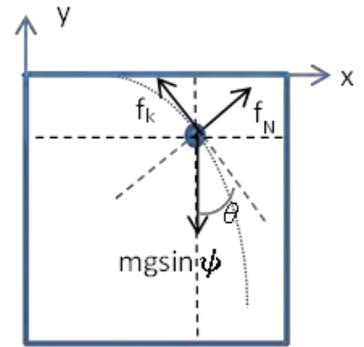
模型基礎：假設物體運動時僅受恆與運動方向相反的動摩擦力 f_k ，不存在法線方向摩擦力 f_N ，即 $f_N = 0$ ，如右圖所示。

其運動方程式可改寫為：

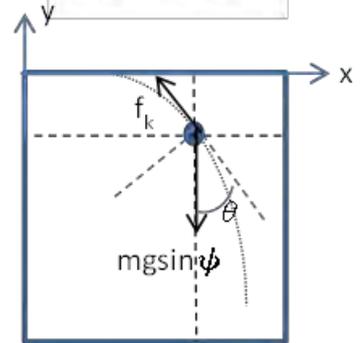
$$X \text{ 方向： } -f_k \sin \theta = m\ddot{x}$$

$$Y \text{ 方向： } f_k \cos \theta - mg \sin \phi = m\ddot{y}$$

若能解出模型 A 與模型 B 的微分方程式，與實驗觀測結果對照，就可釐清二維斜面運動是否存在法線方向摩擦力。



模型 A 俯視圖



模型 B 俯視圖

伍、研究結果

一、斜面上二維運動之摩擦力方向探討

(一) 動摩擦係數之測量

1. 物體在固定傾角 $\phi = 41.09^\circ$ 的斜面上自由釋放後，作直線運動之位置 y 隨時間 t 變化之關係圖，如右〈圖一-1〉所示。由圖趨勢線可觀察到 y 與 t 為二次曲線的函數關係，表示物體在此直線上作等加速度運動。

2. 右〈圖一-2〉，為該物體作直線運動時的速度 v 隨時間 t 變化之關係圖。由圖可以看 v 為 t 的一次線性函數，顯示此運動為等加速度運動，由此 $v-t$ 圖斜率可以成功地找出物體運動之加速度值為 $1.758(m/s^2)$ 。

3. 將 $v-t$ 圖求出的加速度值，代入公式(a)

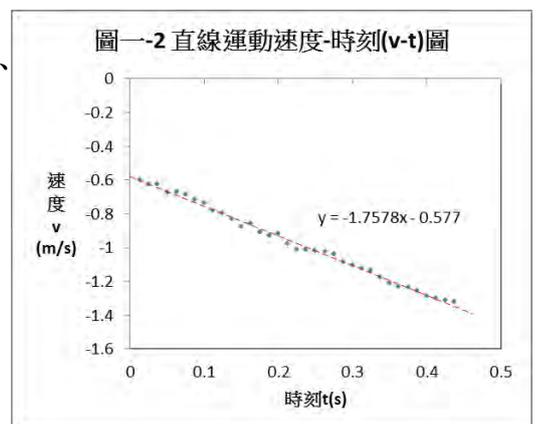
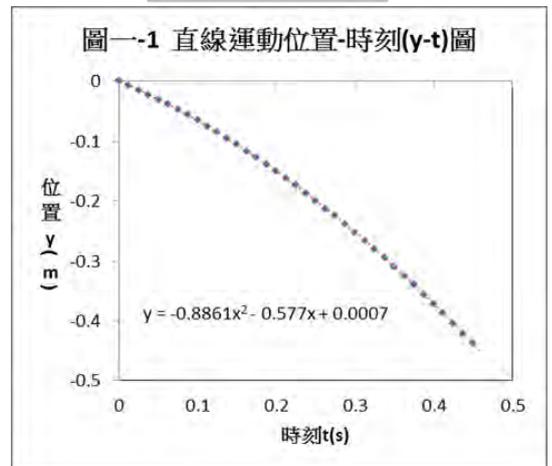
$$\mu = (g \sin \phi - a) / g \cos \phi \text{ ----(a)}$$

可以推算出斜面的動摩擦係數 $\mu = 0.634$ ，其原理詳見[肆、研究過程和方法：一-(二)] (p. 2)。

(二) 斜面上二維運動物體之觀測

1. 位置 (x, y) 隨時間 t 的變化

(1) 〈圖二-1〉為物體在傾角 $\phi = 23.20^\circ$ 的斜面上作二維運動之位置隨時間之變化情形，縱軸上半部為位置分量 x ，縱軸下半部為位置分量 y 。其中實點為物體在非光滑斜面 ($\mu = 0.634$) 上的運動之實際觀測值，實線則是物體



在光滑斜面($\mu=0$)運動的理論計算值，其計算式如下，計算原理詳見[肆、研究過程和方法：一-(三)](p. 2)。

$$x = v_0 t; y = -(1/2) g \sin \phi t^2$$

(2) 〈圖二-1〉顯示，相較於光滑無摩擦的斜面(實線)，物體在非光滑斜面上運動時，其相同時刻的位置值(實點)會較小(近)，表示摩擦力確實阻礙物體在各分量上的前進。

2. 物體在斜面上運動的軌跡

(1) 右〈圖二-2〉為物體在斜面上作二維運動之軌跡，實點為非光滑斜面上的實驗觀測值，實線為光滑斜面上的理論計算值，其計算式如下：

$$y = -g \sin \phi x^2 / (2v_0^2)$$

(2) 由圖可以看出，相較於光滑斜面，物體在非光滑斜面上的運動軌跡向下的彎曲程度較大，隨時間增加兩者間的差異愈明顯。

3. 速度(v_x, v_y)隨時間 t 的變化

(1) 右〈圖二-3〉為物體在斜面上作二維運動之分量速度(v_x, v_y)隨時間 t 之變化情形，其中實點為非光滑斜面($\mu=0.634$)之實驗觀測值，實線為光滑斜面($\mu=0$)之理論計算值： $v_x=v_0$ ； $v_y=-g \sin \phi t$

(2) 相較於物體在光滑斜面上運動之 v_x 值為等速度，在非光滑斜面上運動之 v_x 則為隨時間逐漸減少，最後至停止，且其變化過程不是等加速度運動歷程。

(3) 物體在光滑斜面上運動之 v_y 量值，為隨時間逐漸增加之等加速度運動；而在非光滑斜面上運動物體之 v_y 之量值，在起始初階段逐漸增加至極大值後，再逐漸減漸少至停止。

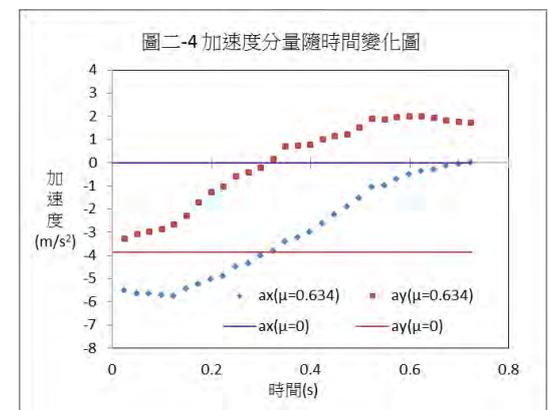
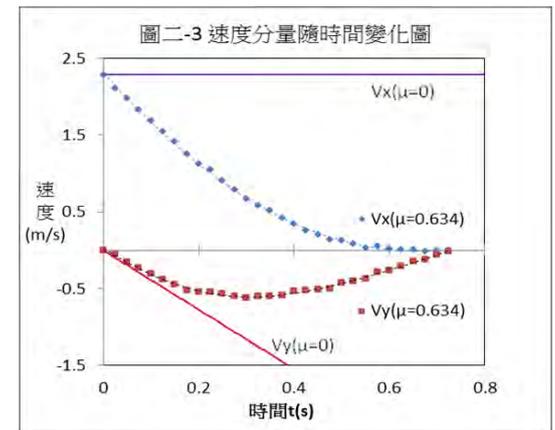
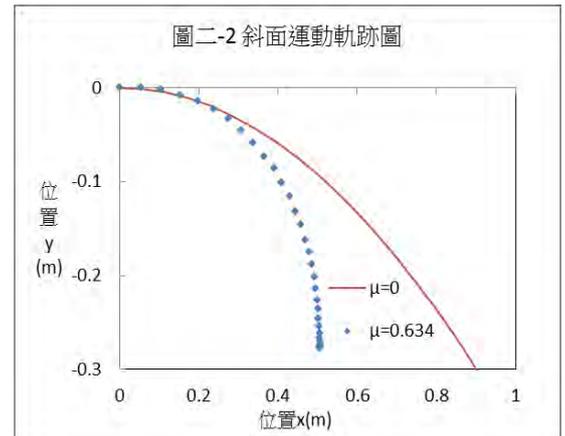
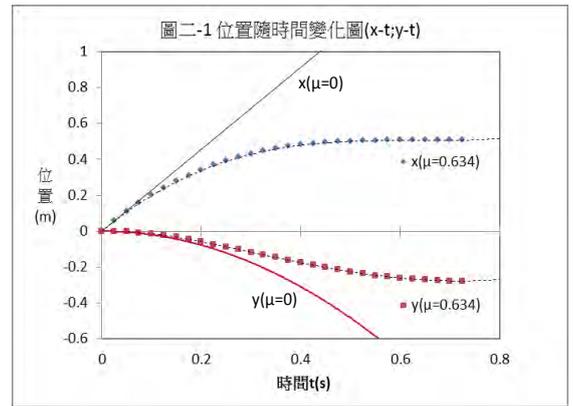
4. 加速度(a_x, a_y)隨時間 t 的變化

(1) 〈圖二-4〉為物體在斜面上作二維運動之分量加速度(a_x, a_y)隨時間 t 之變化情形，其中實點為非光滑斜面($\mu=0.634$)之實驗觀測值，實線為光滑斜面($\mu=0$)之理論計算值，其計算式如下：

$$a_x=0; a_y=-g \sin \phi$$

(2) 〈圖二-4〉顯示，光滑斜面上運動物體之 x 分量加速度 a_x 恒為零，而在非光滑斜面上運動物體，其 a_x 量值則隨時間逐漸減少至零，且 a_x 與 t 的函數並非一次線性。

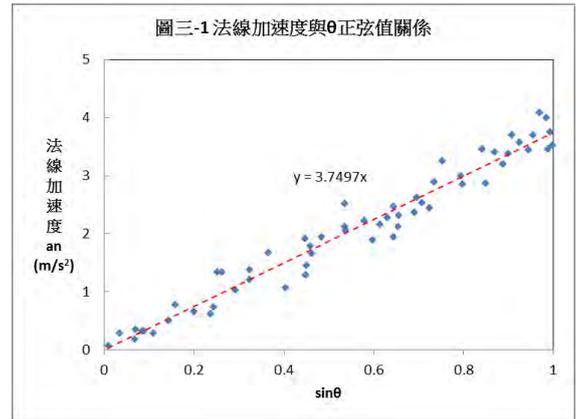
(3) 由右圖也觀察到，光滑斜面運動物體之 y 分量加速度 a_y ，其量值固定，恒為為負方向的等加速度運動；而非光滑斜面上運動物體之 a_y 之量值，則是由負方向逐漸增減少至零後，再轉為正方值逐漸增加，且 a_y 與 t 的函數並非一次線性。



(三)法線方向摩擦力是存在的判斷

1. 法線加速度 a_N 與切線縱軸間夾角 θ 正弦值的函數圖形分析

(1) 右〈圖三-1〉是物體在傾角 23.02 度的斜面上運動時，依[肆、研究過程和方法：二-(一)] (p. 3) 方法，所推算出物體運動之法線加 a_N 與其切線縱軸間夾角 θ 正弦值($\sin\theta$)的函數圖形。較之前其他函數圖形，〈圖三-1〉中各數值點分佈的散亂程度稍大，但整體而言，其分佈還是落在一直線上，以趨勢線分析之，其關係圖形為通過原點之一次線性函數，即 a_N 正比於 $\sin\theta$ 。



(2) 依[肆、研究過程和方法：二-(一)] (p. 3)的關係式(b)：

$$a_N = g \sin\phi \sin\theta - f_N / m \text{ ----(b)}$$

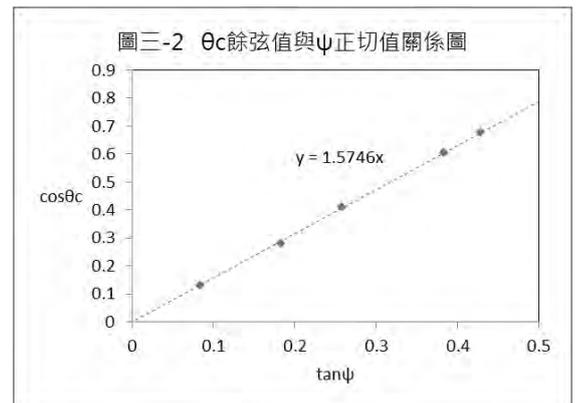
若法線摩擦力 $f_N=0$ ，則關係式(b)中 a_N 與 $\sin\theta$ 的函數關係為過原點的斜直線。而〈圖三-1〉的結果顯示，其實驗所量測出 a_N 與 $\sin\theta$ 的函數圖形恰為一過原點的斜直線，由此可證明：物體在斜面上作二維運動時，只有受到切線方向的動摩擦力 f_k ，**法線方向的摩擦力 f_N 並不存在**。因此(b)式應修正為

$$a_N = g \sin\phi \sin\theta \text{ -----(b'')}$$

(3) 由(b'')式可以推論： a_N 與 $\sin\theta$ 的函數圖形之斜率值應為 $g \sin\phi$ 。〈圖三-1〉中函數圖形的斜率值為 3.7497，將實驗裝置之 $g \sin\phi$ 值為 3.856，兩者間的差異只有 2.76%，相當符合，再次說明二維運動不存在法線方向摩擦力 f_N 。

2. θ_c 餘弦值與斜面傾角 ψ 正切值之函數圖形分析

(1) 在不同傾角 ψ 的同一斜板上，分別測量其物體二維運動之 v_y-t 之關係圖後，依[肆、研究過程和方法二-(二)] (p. 3) 的方法，推算出 v_y 極值處，其切線與縱軸間夾角 θ_c ，作 $\cos\theta_c$ 與 $\tan\psi$ 的關係圖形如右〈圖三-2〉所示。由圖可以看出兩者關係為通過原點的 1 次線性關係函數，即 $\cos\theta_c$ 正比於 $\tan\psi$ 。



(2) 依[肆、研究過程和方法：二-(二)] (p. 3)的關係式(c)：

$$\cos\theta_c = \frac{\tan\phi}{\mu} - \frac{f_N \sin\theta_c}{mg\mu \cos\phi} \text{ ----(c)}$$

若法線摩擦力 $f_N=0$ ，則關係式(c)中的 $\cos\theta_c$ 與 $\tan\psi$ 的函數關係為過原點的斜直線。而〈圖三-2〉的結果顯示，實驗所量測出 $\cos\theta_c$ 與 $\tan\psi$ 的函數圖形恰是過原點的斜直線，由此可再次證明：物體在斜面上作二維運動時，**法線方向的摩擦力 f_N 並不存在**。(c)式因此應修正為下式：

$$\cos\theta_c = \frac{\tan\phi}{\mu} \text{ -----(c'')}$$

(3) 由(c")式可以看出： $\cos \theta_c$ 與 $\tan \phi$ 的函數圖形之斜率值應為 $1/\mu$ ，換言之斜面之摩擦係數 $\mu = \text{該斜率之倒數}$ 。〈圖三-2〉中函數圖形的斜率值為 1.5746，其倒數為 0.635，而實驗斜板之 μ 值為 0.634，兩者間的差異只有 0.17%，相當符合，再次說明 f_N 不存在。

二、非光滑斜面上二維運動之理論模型與運動方程式。

(一)運動方程式之推演

綜合前項實驗結果分析顯示，斜面二維運動法線方向摩擦力 $f_N=0$ ，因此依據 [肆、研究過程和方法：三] (p. 4)，我們以模型 B 進行理論分析，推導出各運動物理量間之之函數關係，推導過程中各物理符號定義詳見 [玖、附錄] (p. A-1)。

模型 B 基礎：物體運動時僅受與運動方向相反的動摩擦力 f_k ，不存在法線方向摩擦力 f_N 。其運動方程式為：

$$\begin{aligned} X \text{ 方向：} \quad & -f_k \sin \theta = m\ddot{x} \\ \Rightarrow & -\frac{f_k}{m} \sin \theta = \ddot{x} \\ & \alpha \equiv \frac{f_k}{m} = g\mu \cos \phi, \text{ 代入上式} \\ \Rightarrow & -\alpha \sin \theta = \ddot{x} \text{ -----(1.1)} \end{aligned}$$

$$\text{或 } -g\mu \cos \phi \sin \theta = \ddot{x} \text{ -----(1.1a)}$$

$$\begin{aligned} Y \text{ 方向：} \quad & f_k \cos \theta - mg \sin \phi = m\ddot{y} \\ \Rightarrow & \frac{f_k}{m} \cos \theta - g \sin \phi = \ddot{y} \\ \Rightarrow & \alpha \cos \theta - g \sin \phi = \ddot{y} \\ & \beta \equiv g \sin \phi, \text{ 代入上式} \\ \Rightarrow & \alpha \cos \theta - \beta = \ddot{y} \text{ -----(1.2)} \end{aligned}$$

$$\text{或 } g \cos \phi \cos \theta - g \sin \phi = \ddot{y} \text{ ---(1.2a)}$$

另外，如右圖所示， θ 為速度方向與 $-y$ 軸夾銳角，由幾何關係可推得下式：

$$\tan \theta = \frac{|v_x|}{|v_y|}$$

本實驗縱(y)軸以沿斜面向上為正方向，而物體沿斜面向下運動， y 向速度分量 $v_y \equiv \dot{y} < 0$ ，因此前式可改寫為

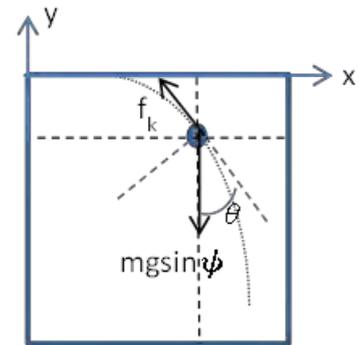
$$\tan \theta = \frac{v_x}{-v_y} = \frac{\dot{x}}{\dot{y}} \text{ -----(1.3)}$$

經由(1.1)(1.2)(1.3)解微分方程後可得下列關係式(一)~(六)，各式之其詳細推導過程請參見附錄：一~六。(p. A-1~p. A-6)

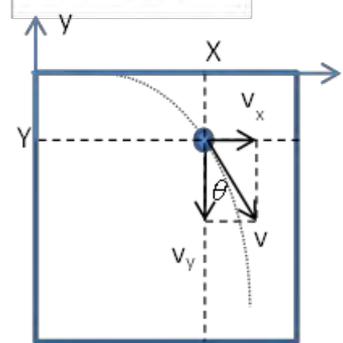
1. 橫向分量加速度 a_x 與分量速度 v_x 之函數關係

$$a_x = -\frac{g\mu \cos \phi}{\cosh\left(\frac{\tan \phi}{\mu} \ln \frac{v_x}{v_{x0}}\right)} \text{ -----(式一)}$$

2. 運動時間 t 與分量速度 v_x 之函數關係



模型 B 俯視圖



$$t = \frac{v_x \left[\frac{\tan \phi}{\mu} \sinh \left(\frac{\tan \phi}{\mu} \ln \frac{v_x}{v_{x0}} \right) - \cosh \left(\frac{\tan \phi}{\mu} \ln \frac{v_x}{v_{x0}} \right) \right] + v_{x0}}{\left[\frac{g(\mu^2 \cos^2 \phi - \sin^2 \phi)}{\mu \cos \phi} \right]} \quad \text{----- (式二)}$$

3 · 橫向位置 x 與分量速度 v_x 之函數關係

$$x = - \frac{v_x^2 \left[\frac{\tan \phi}{\mu} \sinh \left(\frac{\tan \phi}{\mu} \ln \frac{v_x}{v_{x0}} \right) - 2 \cosh \left(\frac{\tan \phi}{\mu} \ln \frac{v_x}{v_{x0}} \right) \right] + 2v_{x0}^2}{g\mu \cos \phi \left[\left(\frac{\tan \phi}{\mu} \right)^2 - 4 \right]} \quad \text{----- (式三)}$$

4 · 縱向加速度 a_y 與分量速度 v_x 之函數關係

$$a_y = -g\mu \cos \phi \tanh \left(\frac{\tan \phi}{\mu} \ln \frac{v_x}{v_{x0}} \right) - g \sin \phi \quad \text{----- (式四)}$$

5 · 縱向速度 v_y 與分量速度 v_x 之函數關係

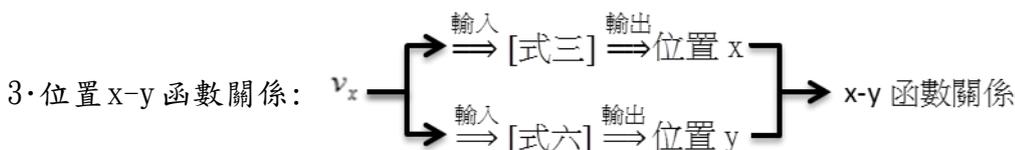
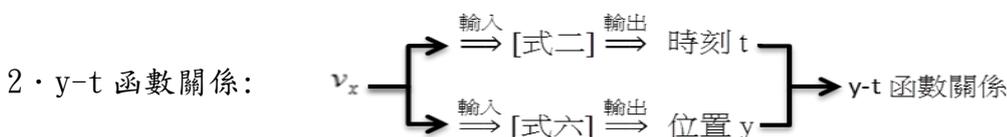
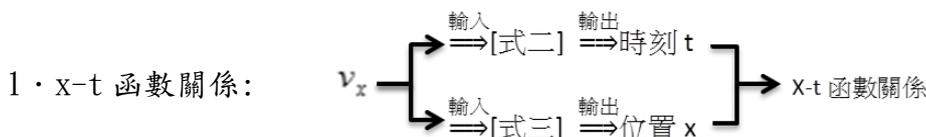
$$v_y = v_x \sinh \left(\frac{\tan \phi}{\mu} \ln \frac{v_x}{v_{x0}} \right) \quad \text{----- (式五)}$$

6 · 縱向位置 y 與分量速度 v_x 之函數關係

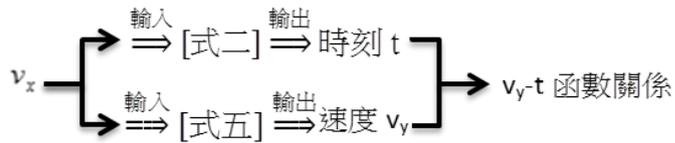
$$y = - \frac{v_x^2 \left\{ \frac{\tan \phi}{\mu} \cosh \left(2 \frac{\tan \phi}{\mu} \ln \frac{v_x}{v_{x0}} \right) - \sinh \left(2 \frac{\tan \phi}{\mu} \ln \frac{v_x}{v_{x0}} \right) \right\} - v_{x0}^2 \left(\frac{\tan \phi}{\mu} \right)}{4g\mu \cos \phi \left[\left(\frac{\tan \phi}{\mu} \right)^2 - 1 \right]} \quad \text{----- (式六)}$$

(二) 理論模擬關係曲線

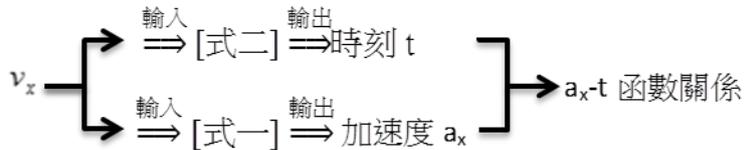
在前項所推導出的關係式，皆以分量速度 v_x 為因變數，依此模擬出各項實驗觀測的函數關係，其方法下列簡易流程分述如下。



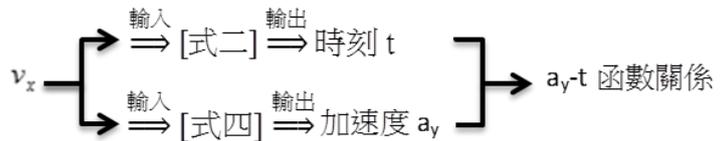
5. 分量速度 v_y-t 函數關係:



6. 分量加速度 a_x-t 函數關係:



7. 分量加速度 a_y-t 函數關係:

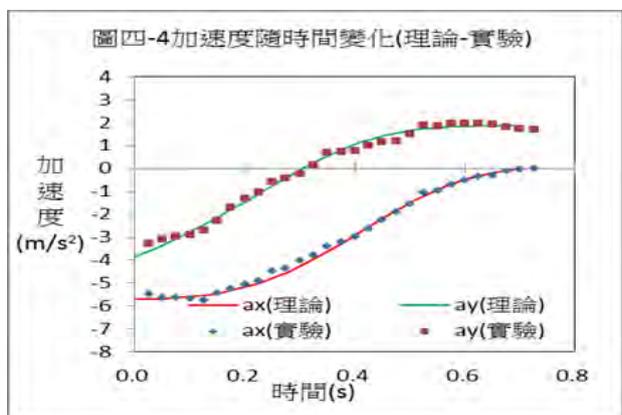
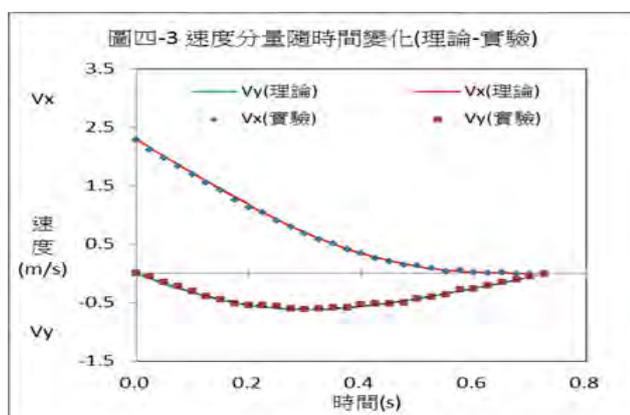
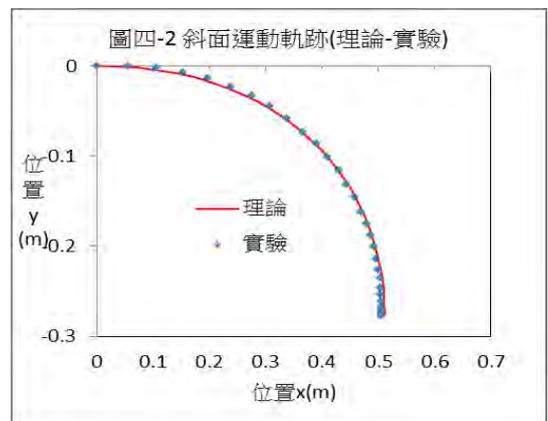
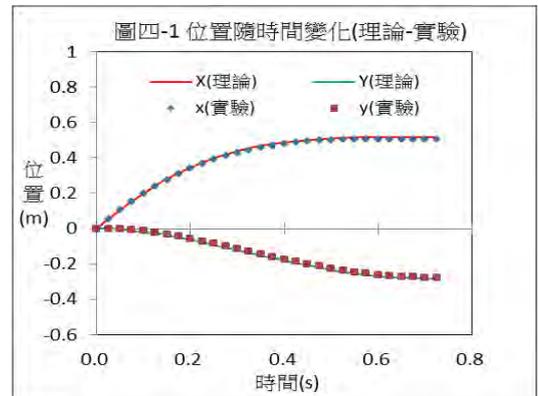


(三) 理論值與實驗值之分析比較

(1) 我們將[伍、研究結果：一-(二)]中實驗觀測條件(初速、傾角、摩擦係數)，代入模型 B 所推演出的函數關係式(式一~式六)，再前頁所說明之方法，模擬出物體在斜面上運動的位置(x, y)-時間 t、軌跡(x-y)、速度(v_x, v_y)-時間 t 以及加速度(a_x, a_y)-時間 t 的理論關係曲線，與實驗量測資料進行比較分析，其結果分別如下〈圖四-1~圖四-4〉所示。

(2) 〈圖四-1~圖四-4〉中的實點為實驗觀測值，實線為理論模擬值，由各圖可以清楚看出，理論模擬曲線與實驗量測值非常吻合。以不存在法線摩擦力為基礎的模型 B，可模擬出與實驗觀測結果相符的曲線，這說明了物體在斜面上進行二維運動，只存在與運動方向(切線)相反的摩擦力，不存在法線方向分量摩擦力。

(3) 以理論模擬所得到的結果，與[伍、研究結果：一-(三)]以實驗數據推論出的結果一致，充份證明了物體運動「不存在法線方向分量摩擦力」的結論。



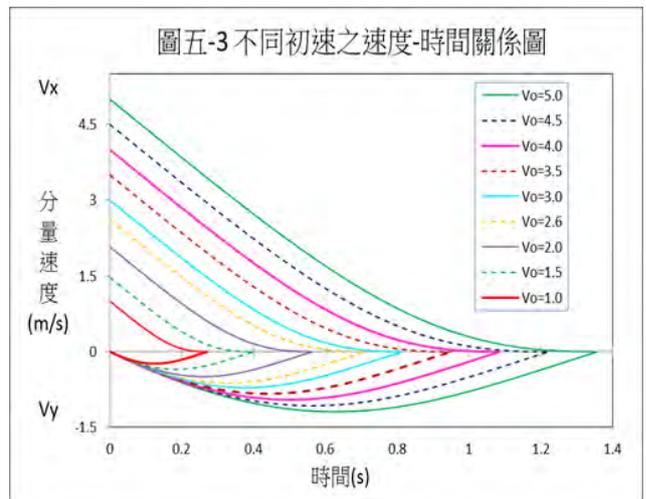
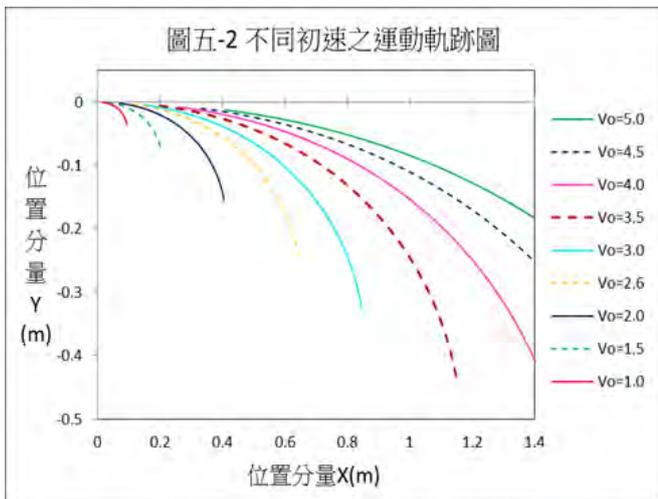
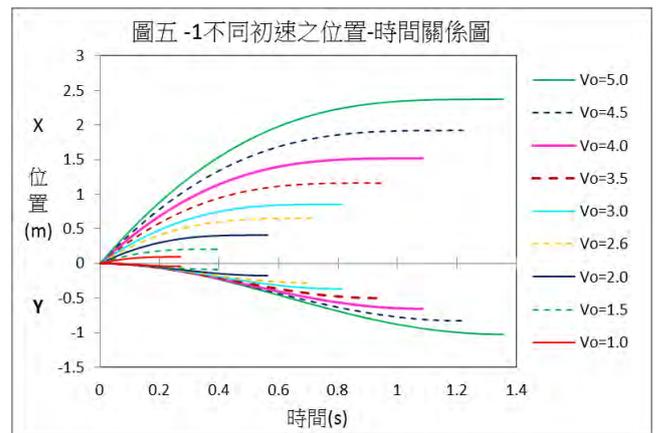
三、影響物體在斜面上二維運動變因之探討

(一) 初速度 v_0 對斜面二維運動運動之影響

在固定斜面上 ($\mu=0.634$; $\phi=20.96^\circ$) 以不同初速度 v_0 拋出物體，模擬其運動的位置-時間、軌跡、速度-時間及加速度-時間的函數關係，結果分別如〈圖五-1~4〉所示，其分析說明如下：

1. 可以由〈圖五-1〉觀察到在不同初速 v_0 的條件下，其 $x-t$ 、 $y-t$ 的函數關係趨勢大致相同，但是 v_0 愈大，物體最終停止位置 (x_f, y_f) 會愈遠，其所花費的時間 t_f 也愈長，其 (x_f, y_f)、 t_f 與 v_0 之間似乎存在某種線性函數關係，將在 [陸、問題與討論] 中進一步的探討。

2. 〈圖五-2〉顯示不同 v_0 的條件下，物體運動得軌跡函數圖形，可以發現 v_0 愈大，其軌跡曲線向下的彎曲幅度愈小，停止位置 (x_f, y_f) 愈遠， x_f 與 y_f 之間是否存在某種的定量函數關係，也將在 [陸、問題與討論] 一併探討。



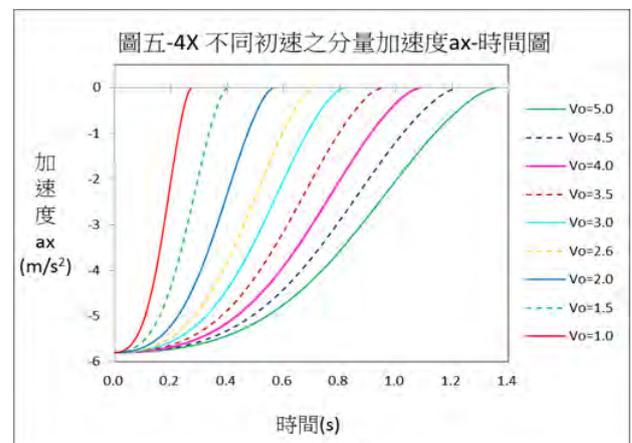
3. 〈圖五-3〉可以觀察到不同初速 v_0 的條件下，物體運動之 v_x-t 、 v_y-t 的函數關係趨勢大致相同， v_x 為減速度下降至零，而 v_y 則先在負 y 向加速達到極值後，再減速至零，其中 v_y 達到極值的時間以及 v_x 、 v_y 降至零的時間，皆隨著 v_0 的增大而增加。

4. 〈圖五-4X〉 a_x-t 函數關係顯示物體 x 向之運動，為一負 x 向的變加速度運動，在不同初速 v_0 的條件下，其 a_x 隨 t 的變化曲線雖有不同，但皆由初加速 $a_{x0} (= -5.80 \text{ m/s}^2)$ 量值逐漸變化至零， a_x 值可由 p. 7 公式(1. 1a)計算而得：

$$-g\mu \cos \phi \sin \theta = \ddot{x} \text{-----(1. 1a)}$$

當 $t=0$ 時， $\theta=90^\circ$

$$\begin{aligned} \Rightarrow a_{x0} &= -g\mu \cos \phi \sin 90^\circ \\ &= -g\mu \cos \phi = -5.80 \text{ (m/s}^2\text{)} \end{aligned}$$



當 $t=t_f$ 時, $\theta \rightarrow 0^\circ$ (其原理詳見[玖、附錄-十三], p. A-10)

$$\Rightarrow a_{xf} = -g\mu \cos\phi \sin 0^\circ = 0$$

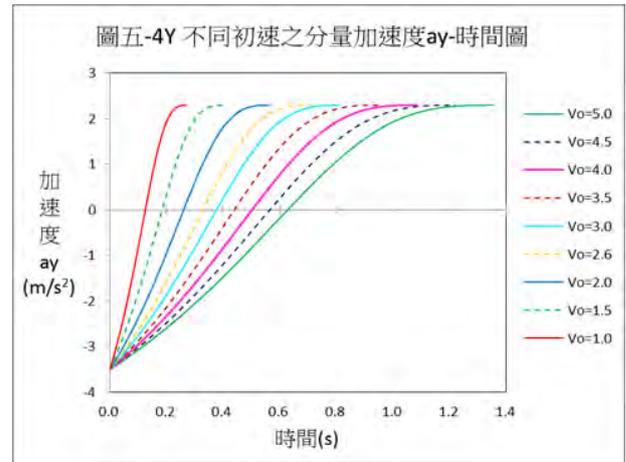
5. 〈圖五-4Y〉 a_y-t 函數關係顯示物體 y 向分量變加速度運動, 在不同初速 v_0 的條件下, 其 a_y 隨 t 的變化曲線雖有不同, 其加速度皆由初值 $a_{y0} = -3.50 \text{ m/s}^2$ 逐漸變化至末值 $a_{yf} = 2.30 \text{ m/s}^2$, a_y 值可依 p. 7 公式(1. 2a)計算而得:

$$g \cos\phi \cos\theta - g \sin\phi = \ddot{y} \text{ -----(1. 2a)}$$

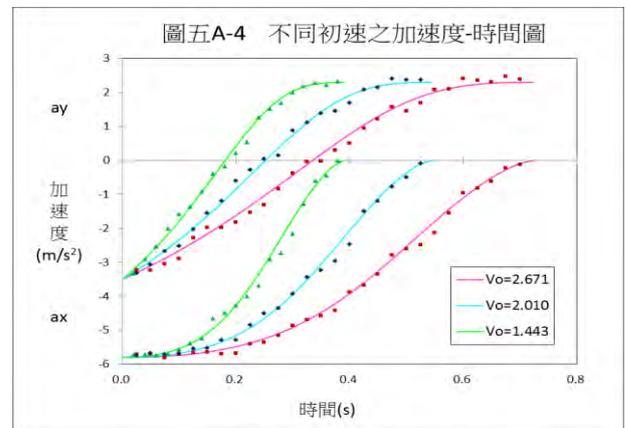
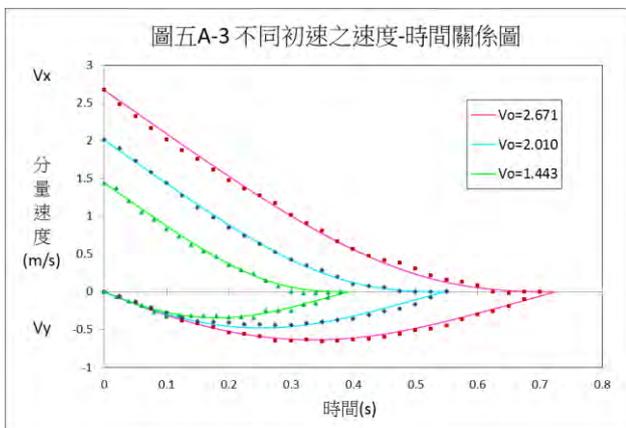
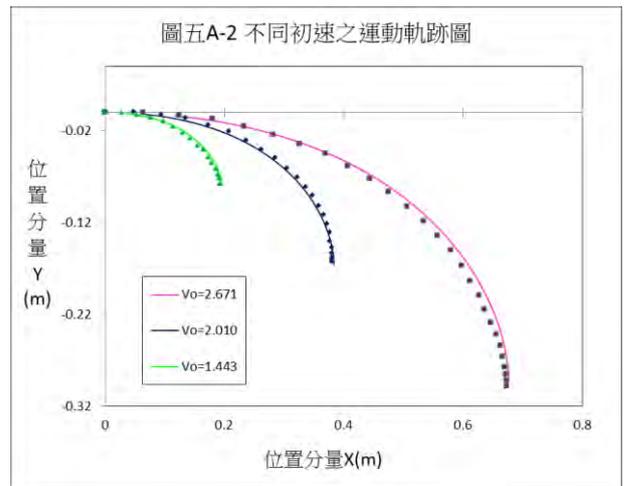
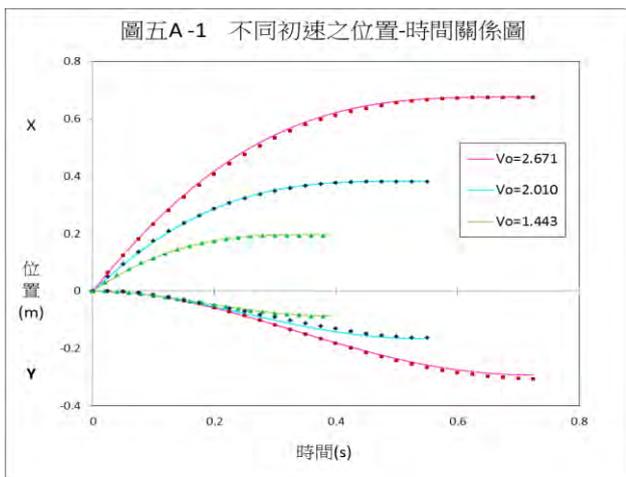
當 $t=0$ 時, $\theta = 90^\circ$

$$\begin{aligned} \Rightarrow a_{y0} &= g\mu \cos\phi \cos 90^\circ - g \sin\phi \\ &= 0 - g \sin\phi = -3.50 \text{ (m/s}^2\text{)} \end{aligned}$$

當 $t=t_f$ 時, $\theta \rightarrow 0^\circ \Rightarrow a_{yf} = g\mu \cos\phi \cos 0^\circ - g \sin\phi = g\mu \cos\phi - g \sin\phi = 2.30 \text{ (m/s}^2\text{)}$



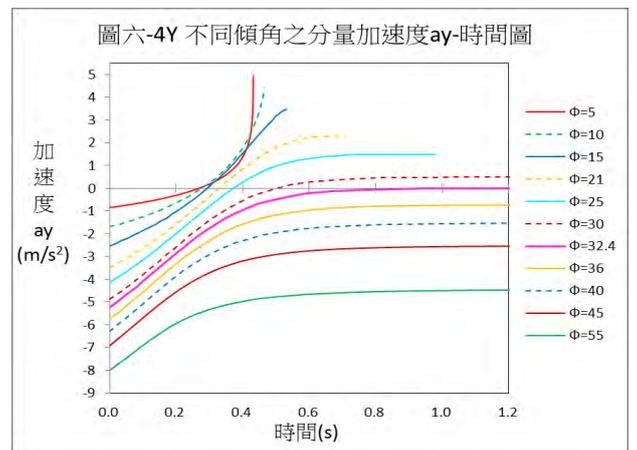
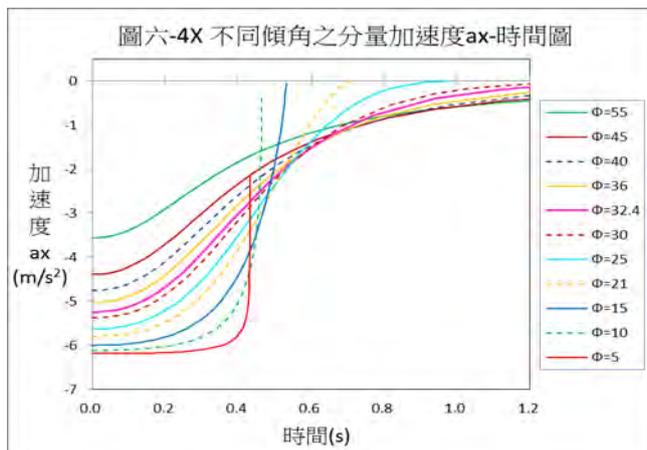
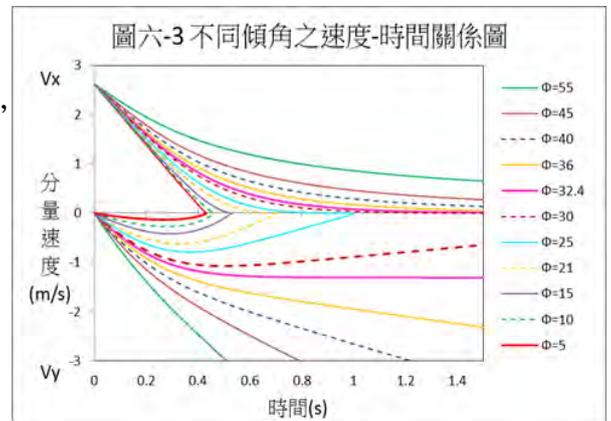
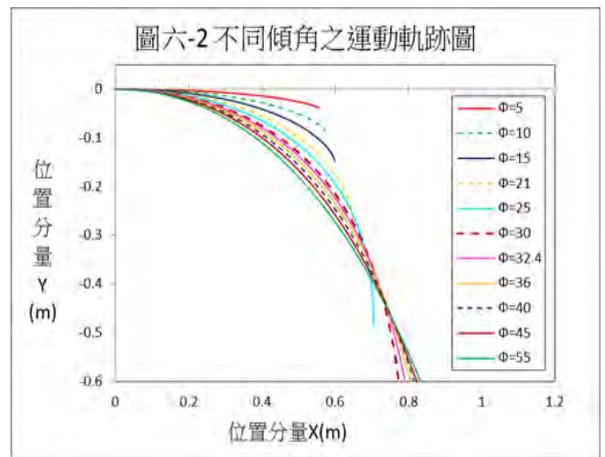
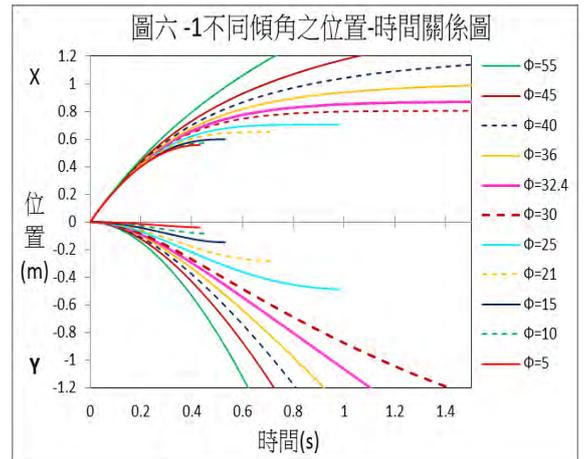
6. 下頁〈圖五 A-1〉~〈圖五 A-4〉為傾角 $\phi = 20.96^\circ$ 、動摩擦係數 $\mu = 0.634$ 之斜面, 在不同初速度條件下, 其物體運動實驗觀測與理論模擬之函數關係比較, 其中實點為實驗值, 實線為理論值, 可以發現初速度對各函數圖形的影響, 實際觀測結果相當符合理論模擬的趨勢預測。



(二) 斜面傾角 ϕ 對斜面二維運動運動之影響

在不同傾角 ϕ 的同一斜面上 ($\mu=0.634$)，模擬以相同初速度 $v_0(=2.620 \text{ m/s})$ 拋出物體，其運動的位置-時間、軌跡、速度-時間及加速度-時間的函數關係，其結果分別如〈圖六-1~4〉所示，其分析說明如下：

1. 在〈圖六-1〉可以觀察到，物體運動的位置 x 隨時間的變化，最終都趨近一水平狀態，即達成定值(停止位置)，傾角 ϕ 愈大，此定值愈大。但 ϕ 值對位置 y 隨時間變化的影響，則以傾角 32.39° ($=\tan^{-1} \mu = \tan^{-1} 0.634$) 為分界，當 $\phi < 32.39^\circ$ ，位置 y 會逐漸停下來；當 $\phi \geq 32.39^\circ$ ，位置 y 則不會停下來，相同的情形也可以在〈圖六-2〉運動軌跡中觀察到。
2. 在〈圖六-3〉更可以清楚的顯示，無論傾角 ϕ 為何，物體 x 分量為減速運動， v_x 值逐皆逐漸降至零。 ϕ 值愈大， v_x 降至零經歷的時間愈長。
3. 〈圖六-3〉中 ϕ 值對 v_y 隨時間 t 變化的影響，可分為三種狀況討論：
 - (1) $\phi < 32.39^\circ$ ： v_y 先負向加速至極值後，再正向減速至零。
 - (2) $\phi = 32.39^\circ$ ： v_y 先負向加速至極值後，再以等速度方式一直運動下去。
 - (3) $\phi > 32.39^\circ$ ： v_y 一直負向加速運動下去。
4. 〈圖六-4X〉 a_x-t 圖顯示物體 x 向之運動，為一負 x 向的變加速度運動，不論傾角為何，其 a_x 值逐漸減至零，初加速值 $a_{x0}(=-g \mu \cos \phi)$ 隨傾角 ϕ 不同而異，當 ϕ 值愈大，其負向 a_{x0} 量值愈小。
5. 〈圖六-4Y〉也顯示，當小 ϕ 值時，物體只有在停止前，其運動加速度才會急劇變化，其餘大部份過程則趨近於等加速度運動。此一現象也在〈圖六-3〉發現，當小傾角時，其 v_x-t 關係曲線在趨近一直線的等加速度運動。



6.〈圖六-4Y〉 a_y-t 函數關係顯示物體 y 向分量為變加速度運動，其初加速度值 a_{y0} ($=-g\sin\phi$) 隨傾角 ϕ 不同而異，當 ϕ 值愈大，其負向 a_{y0} 量值愈大。

7.〈圖六-4Y〉也顯示 ϕ 值對 a_y 隨時間 t 變化的影響，可分為三種狀況討論：

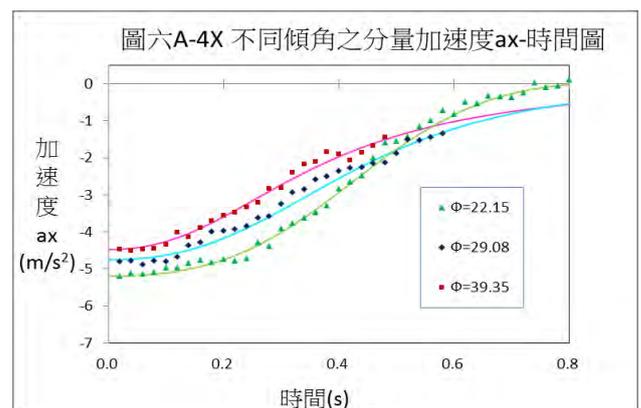
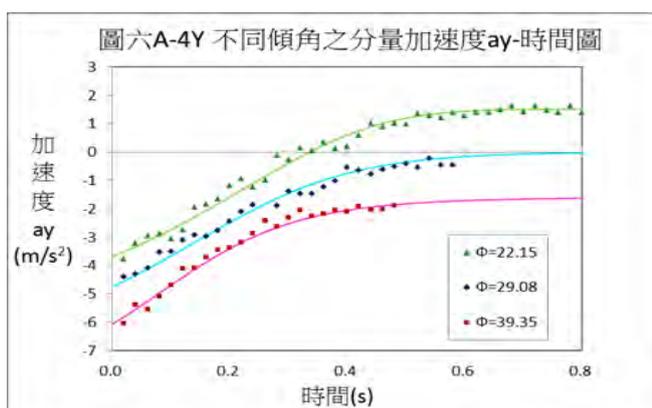
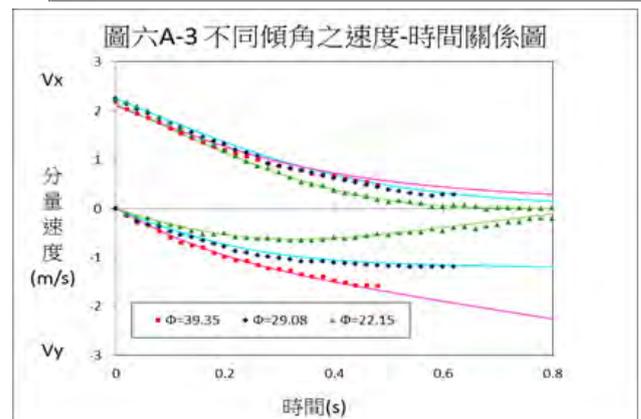
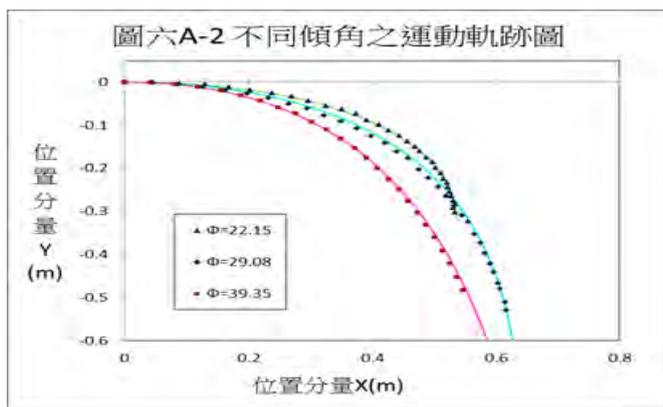
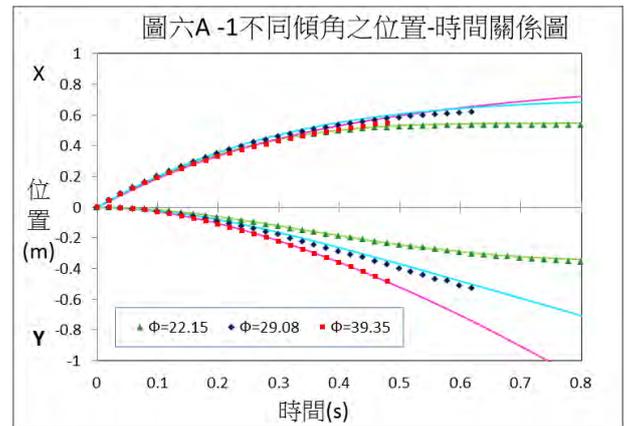
(1) $\phi < 32.39^\circ$ ：負向 a_y 量值隨時間先遞減至零，最後再正向遞增至 a_{yf} ，且 ϕ 值愈大，其正向 a_{yf} 量值愈小。(∵此時 $a_{yf}=g\mu\cos\phi-g\sin\phi > 0$)

(2) $\phi = 32.39^\circ$ ： a_y 量值隨時間逐漸遞減，最後趨近為零之定值。

(∵此時 $a_{yf}=g\mu\cos\phi-g\sin\phi = g\tan\phi\cos\phi-g\sin\phi = g\sin\phi-g\sin\phi = 0$)

(3) $\phi > 32.39^\circ$ ： a_y 量值隨時間逐漸遞減，最後趨近一小於零的定值 a_{yf} ，且 ϕ 值愈大，其負向 a_{yf} 量值愈大。(∵此時 $a_{yf}=g\mu\cos\phi-g\sin\phi < 0$)

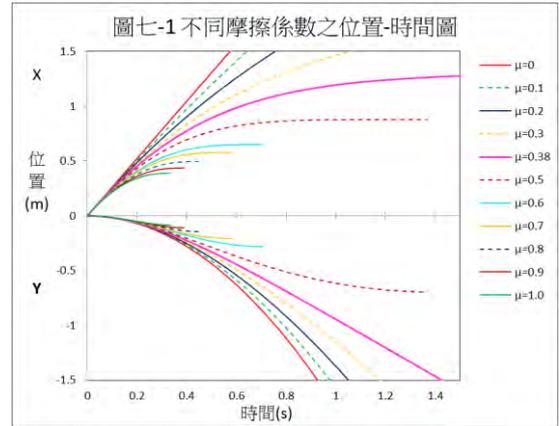
8.〈圖六 A-1〉～〈圖六 A-4〉為動摩擦係數 $\mu=0.583$ 之斜面，在不同傾角 ϕ 的條件下，以近乎相同的初速度 ($v_0=2.177\sim 2.250$ m/s) 拋出，其物體運動實驗觀測與理論模擬之函數關係比較，其中實點為實驗值，實線為理論值，可以發現傾角對各函數圖形的影響，其實際觀測結果與理論模擬的趨勢預測相當符合。



(三) 摩擦係數 μ 對斜面二維運動運動之影響

模擬在固定傾角 $\phi (=20.96^\circ)$ 但不同摩擦係數的斜面上，以固定初速 $v_0 (=2.620$ m/s) 拋出的物體，其運動的位置-時間、軌跡、速度-時間及加速度-時間的函數關係，其結果分別如〈圖七-1~4〉所示，其分析說明如下：

1. 在〈圖七-1〉可以觀察到，物體運動的位置 x 隨時間 t 的變化，最終都趨近一水平狀態，即達成定值(停止位置)，當斜面的動摩擦係數 μ 愈小，此定值愈大，達成停止的時間也愈長，且當 μ 值 = 0 時， $x-t$ 關係呈直線，代表此時為等速度運動，此模擬結果與 p. 4 光滑斜面運動關係式： $x = v_0 t$ 相符合。

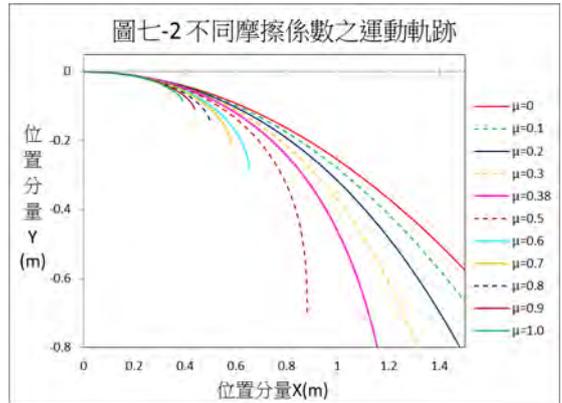


2. 〈圖七-1〉中 μ 值對位置 y 隨時間變化的影響，則以 $\mu = 0.383 (= \tan \phi = \tan 20.96^\circ)$ 為分界，當 $\mu \geq 0.383$ ，位置 y 會逐漸停下來；當 $\mu < 0.383$ ，位置 y 則不會停下來，相同的情形也可以在〈圖七-2〉運動軌跡中觀察到。當 $\mu = 0$ 時其模擬結果也與 p. 4 光滑斜面運動關係式(如下)相符合。

$$\text{位置 } y = -(1/2) g \sin \phi t^2$$

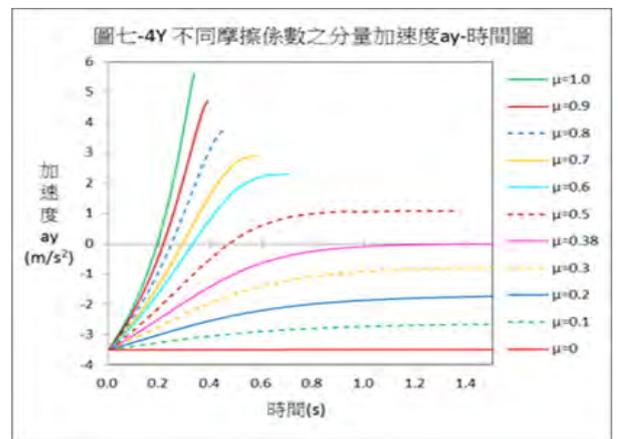
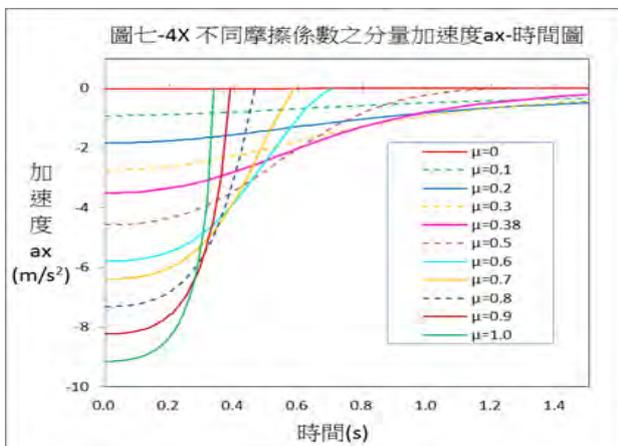
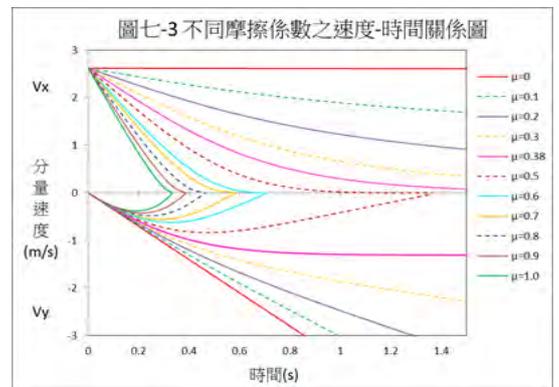
$$\text{軌跡: } y = -g \sin \phi x^2 / (2v_0^2)$$

3. 〈圖七-3〉顯示，無論摩擦數 μ 值為何，物體 x 分量為減速運動， v_x 值逐皆逐漸降至零， μ 值愈小， v_x 降至零經歷的時間愈長。只有當 $\mu = 0$ 時， v_x 為等速度，此模擬結果與 p. 2 光滑斜面運動關係式： $v_x = v_0$ 相符合。



4. 〈圖七-3〉中 μ 值對 v_y 隨時間 t 變化的影響，可分為三種狀況討論：

- (1) $\mu > 0.383$: v_y 先負向加速至極值後，再正向減速至零。
- (2) $\mu = 0.383$: v_y 先負向加速至極值後，再以等速度方式一直運動下去。
- (3) $\mu \leq 0.383$: v_y 一直負向加速運動下去。當 $\mu = 0$ 時， v_y-t 的關係為一斜直線，即此時 v_y 為等加速度運動，此模擬結果與 p. 2 光滑斜面運動關係式： $v_y = -g \sin \phi t$ 相符合。



5. 〈圖七-4X〉 a_x-t 圖顯示物體 x 向之運動，為負 x 向的變加速度運動，不論 μ 值為何，其 a_x 值皆由初加速值 a_{x0} 逐漸減至零，而 $a_{x0}(=-g\mu\cos\phi)$ 隨 μ 值不同而異，當 μ 值愈小，其負向的 a_{x0} 量值愈小。當 $\mu=0$ 時， a_x 值=0，此模擬結果與 p. 2 光滑斜面運動關係式： $a_x=0$ 相符合。

6. 〈圖七-4Y〉 a_y-t 函數關係顯示物體 y 向分量為變加速度運動，不論 μ 值為何，其初加速值 $a_{y0}(-g\sin\phi)$ 皆相同。而 μ 值對 a_y 隨時間 t 變化的影響，可分為三種狀況討論：

(1) $\mu > 0.383$ ：負向 a_y 量值隨時間先遞減至零，最後再正向遞增至 a_{yf} ，且 μ 值愈大，其正向 a_{yf} 量值愈大。(∵此時 $a_{yf}=g\mu\cos\phi-g\sin\phi > 0$)

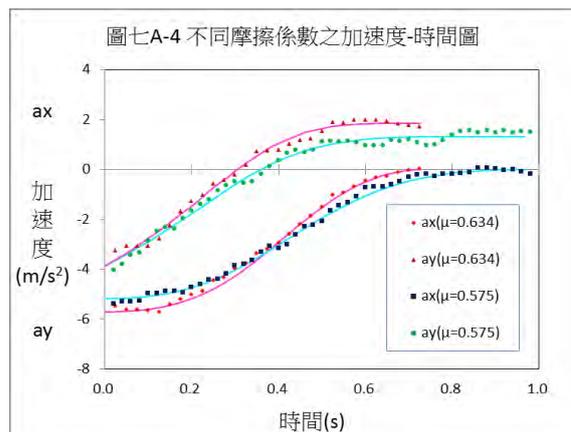
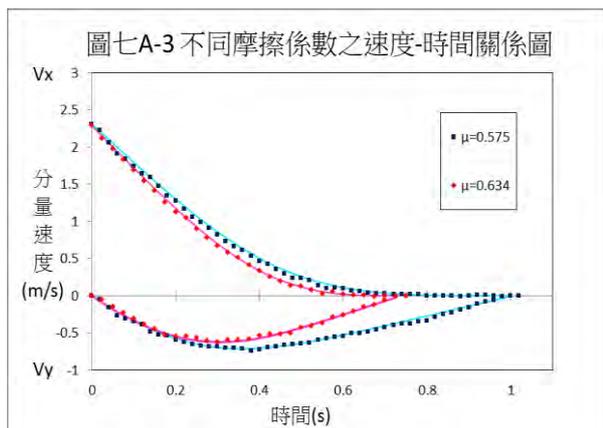
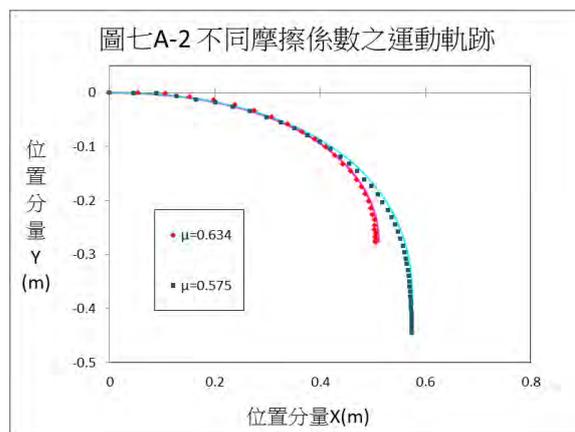
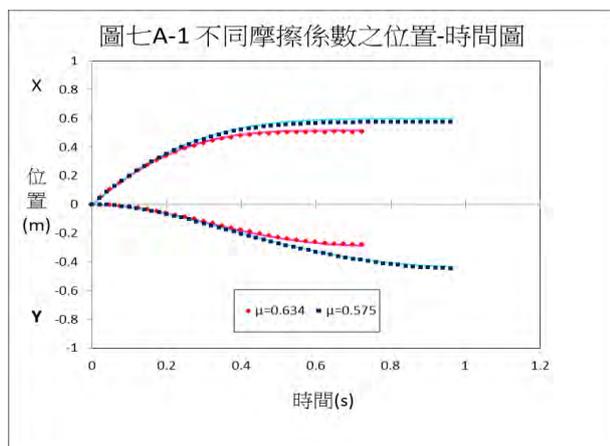
(2) $\mu = 0.383$ ：負向 a_y 量值隨時間逐漸遞減，最後趨近為零之定值。

(∵此時 $a_{yf}=g\mu\cos\phi-g\sin\phi = g\tan\phi\cos\phi-g\sin\phi = g\sin\phi-g\sin\phi=0$)

(3) $\mu < 0.383$ ：負向 a_y 量值隨時間逐漸遞減，最後趨近一小於零的定值 a_{yf} ，且 μ 值愈小，其負向 a_{yf} 量值愈大(∵此時 $a_{yf}=g\mu\cos\phi-g\sin\phi < 0$)。

(4) $\mu = 0$ ： a_y 為一等加速度運動，此模擬結果與 p. 2 光滑斜面運動關係式： $a_y=-g\sin\phi$ 相符合。

7. 〈圖七 A-1〉～〈圖七 A-4〉為傾角 $\phi=23.20^\circ$ ，但動摩擦係數 μ 值不同之斜面，在初速度近乎相同條件下($v_0=2.299\sim 2.309$ m/s)，其物體運動實驗觀測與理論模擬之函數關係比較，其中實點為實驗值，實線為理論值，可發現動摩擦係數對各函數圖形的影響，其實驗觀測結果與理論模擬預測趨勢很符合



陸、問題與討論

一、物體最終停留在斜板上的條件

如右圖所示，x 向受淨力恒與分量速度 v_x 方向相反，故 v_x 必逐漸降至零。因此若物體要在斜面上停止，其原本在 $-y$ 向的分量速度 v_y 值，應要隨運動時間增加逐漸降至零，換言之，y 向受淨力應為 $+y$ 方向，此時 y 向摩擦力分量值 ($f_k \cos \theta$) 需大於 y 向重力分量值 ($mg \sin \phi$)，以方程式表示：

$$f_k \cos \theta > mg \sin \phi$$

$$\Rightarrow (\mu mg \cos \phi) \cos \theta > mg \sin \phi$$

$$\Rightarrow \cos \theta > \sin \phi / \mu \cos \phi = \tan \phi / \mu$$

$\because \cos \theta < 1$ ，代入前式

$$\Rightarrow \tan \phi / \mu < 1$$

$$\Rightarrow \tan \phi < \mu$$

即當斜板傾角 ϕ 的正切值小於動摩擦係數 μ 時，物體最終會停在斜板上。

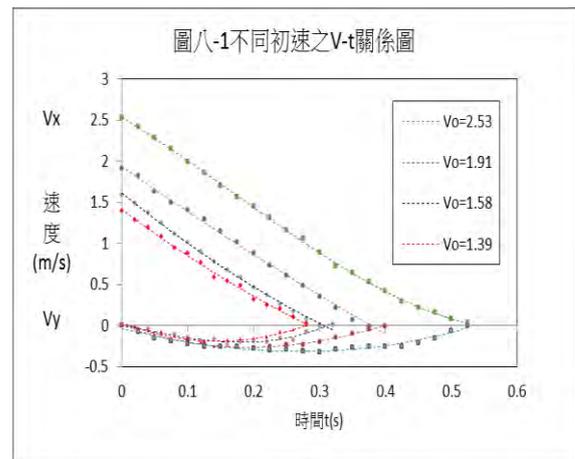
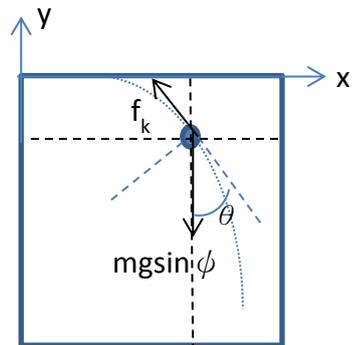
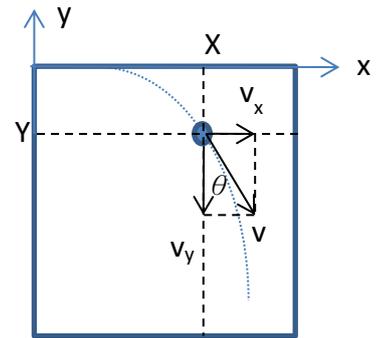
二、物體停在斜板上運動歷時 t_f 與初速 v_{x0} 的關係

1. 物體在傾角 $\phi = 10.37^\circ$ 、摩擦係數 $\mu = 0.585$ 的斜板上，以不同橫軸初速 v_{x0} 拋出，測量其分量速度 v_x 、 v_y 隨時間之變化情形，其結果如下〈圖八-1〉所示，由圖可以觀察到，當 v_{x0} 愈大， v_x 、 v_y 降至零的運動歷時 t_f 愈長。

2. 為探討 t_f 與 v_{x0} 的定量函數關係，利用公式(二)進行理論推導，將運動時刻 t 取極限 $v_x \rightarrow 0$ 時以求得 t_f ，再與實驗觀測結果進行比較。理論推導過程如下：

$$t = \frac{v_x \left[\frac{\tan \phi}{\mu} \sinh \left(\frac{\tan \phi}{\mu} \ln \frac{v_x}{v_{x0}} \right) - \cosh \left(\frac{\tan \phi}{\mu} \ln \frac{v_x}{v_{x0}} \right) \right] + v_{x0}}{\left[\frac{g(\mu^2 \cos^2 \phi - \sin^2 \phi)}{\mu \cos \phi} \right]} \quad \text{----- (式二)}$$

$$t_f = \lim_{v_x \rightarrow 0} t = \lim_{v_x \rightarrow 0} \frac{v_x \left[\frac{\tan \phi}{\mu} \sinh \left(\frac{\tan \phi}{\mu} \ln \frac{v_x}{v_{x0}} \right) - \cosh \left(\frac{\tan \phi}{\mu} \ln \frac{v_x}{v_{x0}} \right) \right] + v_{x0}}{\left[\frac{g(\mu^2 \cos^2 \phi - \sin^2 \phi)}{\mu \cos \phi} \right]}$$

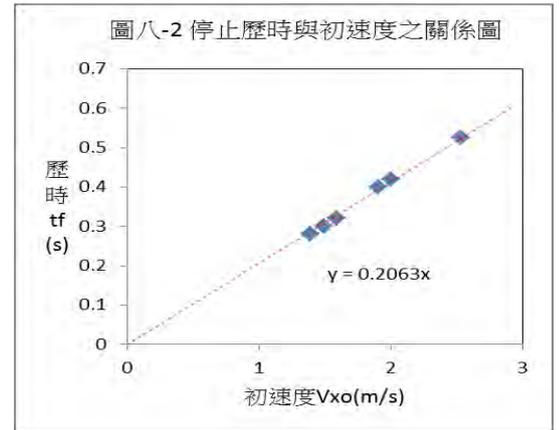


$$\Rightarrow t_f = \frac{\mu \cos \phi}{g(\mu^2 \cos^2 \phi - \sin^2 \phi)} v_{x0} \text{ -----(式七)}$$

(式七)的推導過程詳見[玖、附錄七](p. A-6)。

3. 在(式七)中 v_{x0} 的係數項為 $g; \mu; \phi$ 所組成之函數。若在 $g; \mu; \phi$ 固定的條件下，最終停止歷時 t_f 與初速 v_{x0} 的函數關係圖，應為一過原點之斜直線。

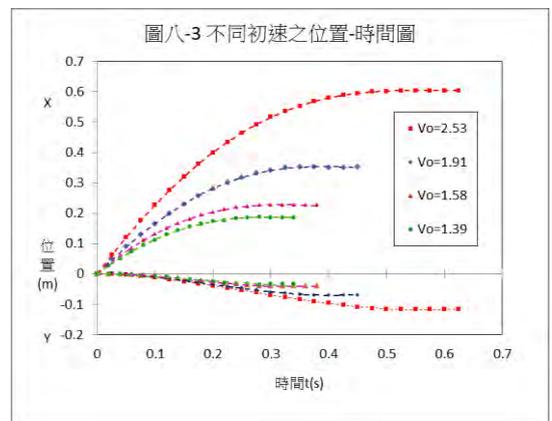
4. 將〈圖八-1〉的實驗結果，擷取不同的初速 v_{x0} 拋出物體的 t_f 值，作成 $t_f - v_{x0}$ 的函數關係圖，如右〈圖八-2〉所示，可發現其結果幾為一過原點的斜直線，與推導出的理論公式(七)所預測之結果相同，其中實驗斜率為 0.2063，與理論值的計算結果 0.2242 相差 7.99%，再次說明理論模型的正確性。



三、物體停在斜板上的位置 (X_f, y_f) 與初速 v_{x0} 的關係

1. 物體在傾角 $\phi = 10.37^\circ$ 、摩擦係數 $\mu = 0.585$ 的斜板上，以不同橫軸初速 v_{x0} 拋出，所測量分量位置 x 、 y 隨時間 t 之變化情形，如下〈圖八-3〉所示，圖中曲線達水平時，即代表物體在斜面上停止的位置 (X_f, y_f) 。由圖可以觀察到，當 v_{x0} 愈大，其停止位置 (X_f, y_f) 距離出發處愈遠。

2. 為探討 (X_f, y_f) 與初速 v_{x0} 之關係，先利用公式(三)與(公式六)進行理論推導，分別將橫軸位置 x 、縱軸位置 y 取其極限 $v_x \rightarrow 0$ 時，以求得最終位置 (X_f, y_f) ，再與實驗觀測結果進行比較。理論推導過程如下：



(1) x_f 的推導：

$$x = - \frac{v_x^2 \left[\frac{\tan \phi}{\mu} \sinh \left(\frac{\tan \phi}{\mu} \ln \frac{v_x}{v_{x0}} \right) - 2 \cosh \left(\frac{\tan \phi}{\mu} \ln \frac{v_x}{v_{x0}} \right) \right] + 2v_{x0}^2}{g\mu \cos \phi \left[\left(\frac{\tan \phi}{\mu} \right)^2 - 4 \right]} \text{ -----(式三)}$$

$$x_f = \lim_{v_x \rightarrow 0} x = - \lim_{v_x \rightarrow 0} \frac{v_x^2 \left[\frac{\tan \phi}{\mu} \sinh \left(\frac{\tan \phi}{\mu} \ln \frac{v_x}{v_{x0}} \right) - 2 \cosh \left(\frac{\tan \phi}{\mu} \ln \frac{v_x}{v_{x0}} \right) \right] + 2v_{x0}^2}{g\mu \cos \phi \left[\left(\frac{\tan \phi}{\mu} \right)^2 - 4 \right]}$$

$$\Rightarrow x_f = - \frac{2v_{x0}^2}{g\mu \cos \phi \left[\left(\frac{\tan \phi}{\mu} \right)^2 - 4 \right]} \text{ -----(式八)}$$

(式八)的詳細推導過程請參見[玖、附錄八](p. A-6)

(2) y_f 的推導：

$$y = -\frac{v_x^2 \left\{ \frac{\tan \phi}{\mu} \cosh \left(2 \frac{\tan \phi}{\mu} \ln \frac{v_x}{v_{x0}} \right) - \sinh \left(2 \frac{\tan \phi}{\mu} \ln \frac{v_x}{v_{x0}} \right) \right\} - v_{x0}^2 \left(\frac{\tan \phi}{\mu} \right)}{4g\mu \cos \phi \left[\left(\frac{\tan \phi}{\mu} \right)^2 - 1 \right]} \quad \text{----- (式六)}$$

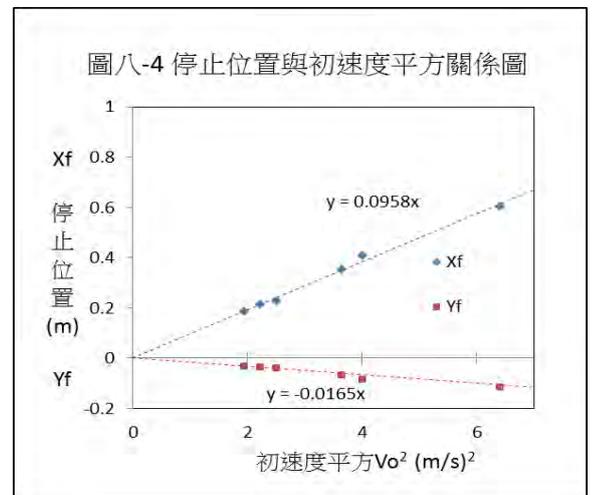
$$y_f = \lim_{v_x \rightarrow 0} y = -\lim_{v_x \rightarrow 0} \frac{v_x^2 \left\{ \frac{\tan \phi}{\mu} \cosh \left(2 \frac{\tan \phi}{\mu} \ln \frac{v_x}{v_{x0}} \right) - \sinh \left(2 \frac{\tan \phi}{\mu} \ln \frac{v_x}{v_{x0}} \right) \right\} - v_{x0}^2 \left(\frac{\tan \phi}{\mu} \right)}{4g\mu \cos \phi \left[\left(\frac{\tan \phi}{\mu} \right)^2 - 1 \right]}$$

$$\Rightarrow y_f = \frac{\frac{\tan \phi}{\mu} v_{x0}^2}{4g\mu \cos \phi \left[\left(\frac{\tan \phi}{\mu} \right)^2 - 1 \right]} \quad \text{----- (式九)}$$

(式九)的推導過程請詳細參見[玖、附錄九](p. A-7)

3. 由(式八)與(式九)中，可以推論出：若在 $g; \mu; \phi$ 值固定的條件下， x_f, y_f 皆與初速 v_{x0} 的平方成正比，若作 $x_f - v_{x0}^2, y_f - v_{x0}^2$ 函數關係圖，皆應為一過原點之斜直線。

4. 擷取實驗觀測中不同初速 v_{x0} 的 x_f 與 y_f 的結果，分別作 x_f, y_f 對 v_{x0}^2 的函數關係圖，如圖〈圖八-4〉所示，可以明顯看出 $x_f - v_{x0}^2, y_f - v_{x0}^2$ 函數關係曲線皆如理論所預測，為過原點之直線，其斜率分別為 0.0958、-0.0165，與理論計算值 0.0948、-0.0155 分別相差 1.02% 與 6.81%。



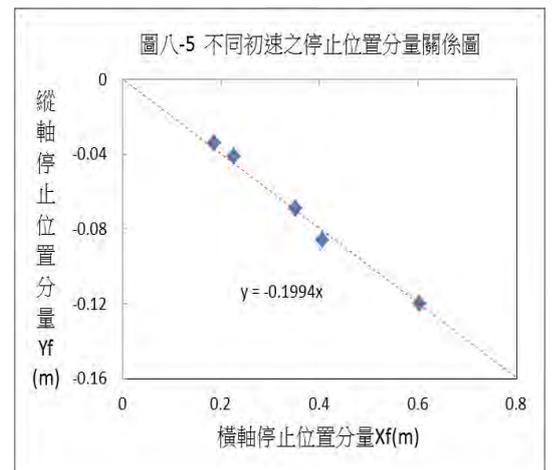
四、由測量最終停止位置(x_f, y_f)推算斜板的摩擦係數 μ

1. 將公式八與公式九聯立兩式相除，經過推導後(詳細過程請參見[玖、附錄十](p. A-8)，可以得到下列關係式：

$$y_f = -\frac{\tan \phi}{8\mu} \frac{\left(\frac{\tan \phi}{\mu} \right)^2 - 4}{\left(\frac{\tan \phi}{\mu} \right)^2 - 1} x_f \quad \text{----- (十)}$$

由此式可推論出：在斜板 μ, ϕ 值固定的條件下，其 y_f 與 x_f 為正比的函數關係。換言之。若物體以不同初速 v_{x0} 拋出，其在斜板上最終位置(x_f, y_f)雖有遠近不同(式八、式九)，但其 $y_f - x_f$ 的函數圖形，應為一過原點的直線，且其斜率值與初速 v_{x0} 無關。

2. 右〈圖八-5〉為傾角 $\phi = 10.46$ 與摩擦係數 $\mu = 0.585$ 的斜板上，以不同橫軸初速 v_{x0} 拋出後，所測量出物體的停留位置分量關係。由圖中也可看到各組物體的停留在斜板上位置(x_f, y_f)分佈在一過原點的直線上。與理論的預測符合，此直線的斜率實驗值為 -0.1994，與理論計算值 -0.2123 相差 6.47%。



3. 由(公式十), 可知 y_f 與 x_f 的比值為 μ 與 ϕ 所組成的函數, 換言知, 若斜板的傾角 ϕ 已知, 只需測得物體停留位置分量比值 y_f/x_f , 即可推算出斜板的 μ 值。依此由(式十)開始推導, 可以得到由 μ 與 r 的函數關係, 詳細過程請參見[玖、附錄十](p. A-8), 其結果如下:

$$\mu = \frac{\tan \phi}{\frac{8}{3} \left| \frac{y_f}{x_f} \right| + 2 \sqrt{\frac{4}{3} + \frac{64}{9} \left| \frac{y_f}{x_f} \right|^2} \cos \left\{ \frac{1}{3} \cos^{-1} \left[\frac{\frac{4}{3} \left| \frac{y_f}{x_f} \right| + \frac{512}{27} \left| \frac{y_f}{x_f} \right|^3}{\left(\frac{4}{3} + \frac{64}{9} \left| \frac{y_f}{x_f} \right|^2 \right)^{\frac{3}{2}}} \right] - 2\pi \right\}} \quad \text{-----}(十-A)$$

由上式可知, 只需測量斜面傾角與物體最終停止位置的分量比值 $\left| \frac{y_f}{x_f} \right|$, 不需量測其初速度或軌跡, 就可推算出斜板的動摩擦係數, 相當方便。

5. 下〈表一〉是以不同方法求得之摩擦係數比較, 其中 μ_A 是依關係式(十 A)以停止位置 (x_f, y_f) 直接計算值, 而 μ_o 則是利用[肆、研究過程與方法:一-(二)](p. 2), 觀測物體在斜面上直線運動, 推算出加速度後, 再帶入公式(a), 所推算出的係數值。由〈表一〉中可以看到, 不同傾角的斜板進行量測計算, 兩種方法所求得的摩擦係數差異百分比大約在 0.32%~7.26%之間, 結果皆相當接近, 所以關係式(十 A)的方法不失為一種簡單且快速估算斜面動摩擦係數的方法。

傾角 Φ (度)	4.82	10.37	14.48	20.96	23.20
位置 x_f (m)	0.478	0.214	0.594	0.659	0.506
位置 y_f (m)	0.034	0.036	0.142	0.273	0.277
直接計算 μ_A	0.601	0.588	0.624	0.648	0.636
觀測推算 μ_o	0.634	0.634	0.634	0.634	0.634
差異 (%)	-5.21%	-7.26%	-1.58%	2.21%	0.32%

柒、結論

- 一、利用數位攝影紀錄物體斜面二維運動，藉由軟體擷取其影像，可以精確測量出物體運動軌跡以及位置、速度、加速度隨時間的變化情形。
- 二、將實驗量測數據經由兩種不同的方法進行分析，皆顯示斜面上二維運動物體受到的摩擦力，只有軌跡切線方向的動摩擦力，並不存在軌跡法線方向分量的摩擦力。
- 三、以摩擦力只存在軌跡切線方向的模型為基礎，成功地解出物體斜面上二維運動的微分方程式，得到由初速度、傾角、摩擦係數等變數所組成的六個函數關係式。
- 四、經由六個函數關係式轉換變數，可以模擬出物體在斜面進行二維運動的軌跡，以及其位置、速度、加速度隨時間變化的函數關係曲線。而且理論模擬出函數關係曲線，與實驗量測結果相當符合，證明了法線方向分量的摩擦力確實不存在。
- 五、成功推導出物體最終停在斜面上運動歷時、位置的函數關係式，預測歷時會與初速度成正比，各分量位置會與初速平方成正比，並經由實驗結果證實了此項預測。
- 六、發現測量動摩擦數的新方法，只需要測量物體在斜面上最終停止位置與傾角，利用所推導出的關係式，就可推算出斜板的動摩擦係數，大幅提升動摩擦係數測量的便利性。

捌、參考資料及其他

- 一、高中基礎物理[二 B], 龍騰文化。
- 二、維基百科 <https://zh.wikipedia.org/wiki>
- 三、程式軟體 Wolfram Alpha

玖、附錄

推導過程中各物理符號定義如下表示。

符號	意義	正負	符號	意義	正負
f_k	動摩擦力量值	正	x	橫軸位置(朝右為正)	正
m	質量	正	$\dot{x}; v_x$	x 分量速度	正
g	地表重力加速度值	正	$\dot{x}_0; v_{x0}$	x 分量初速度	正
μ	動摩擦係數	正	$\ddot{x}; a_x$	x 向加速度分量	負
ϕ	斜面與水平面之夾銳角	正	y	縱軸位置(朝上為正)	負
θ	切線方向與 y 軸夾銳角	正	$\dot{y}; v_y$	y 向速度分量	負
α	$\alpha \equiv \frac{f_k}{m} = g\mu \cos \phi$	正	$\ddot{y}; a_y$	加速度 y 向分量	+/-
β	$\beta \equiv \frac{mg \sin \phi}{m} = g \sin \phi$	正	x_f	物體最終停止時 x 軸位置	正
k	$k \equiv \frac{\beta}{\alpha} = \tan \phi / \mu$	正	y_f	物體最終停止時 y 軸位置	負
t	物體運動的時刻	正	r	$r \equiv x_f / y_f $	正
t_f	物體運動至停止之時距	正			

一、 $a_x - v_x$ 關係式(式一)之推導

$$-\alpha \sin \theta = \ddot{x} \quad \text{-----}(1.1); \quad \alpha \cos \theta - \beta = \ddot{y} \quad \text{-----}(1.2); \quad \tan \theta = \frac{\dot{x}}{-\dot{y}} = \frac{v_x}{-v_y} \quad \text{-----}(1.3)$$

$$\text{而由(1.1)和(1.2)平方和可得(1.4): } \alpha^2 = \ddot{x}^2 + (\ddot{y} + \beta)^2 \Rightarrow \ddot{y} = -\beta \pm \sqrt{\alpha^2 - \ddot{x}^2}$$

$$\because \ddot{y} > -\beta \Rightarrow \ddot{y} = -\beta + \sqrt{\alpha^2 - \ddot{x}^2} \quad \text{-----}(1.4), \text{ 而由(1.1)和(1.2)移項後相除和可得 (1.5):}$$

$$\frac{-\alpha \sin \theta}{\alpha \cos \theta} = \frac{\ddot{x}}{\ddot{y} + \beta} \Rightarrow -\tan \theta = \frac{\ddot{x}}{\ddot{y} + \beta} \quad \text{-----}(1.5), \text{ 並由(1.3)(1.5)可得(1.6):}$$

$$-\tan \theta = \frac{\ddot{x}}{\ddot{y} + \beta} = \frac{\dot{x}}{\dot{y}} \quad \text{-----}(1.6), \quad \Rightarrow \ddot{x}\dot{y} = \dot{x}\ddot{y} + \dot{x}\beta, \quad \Rightarrow \frac{\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^2} = -\frac{\beta}{\dot{x}} \Rightarrow \left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)' = -\frac{\beta}{\dot{x}}$$

$$\text{將(1.6)結果代入前式: } \Rightarrow \left(\frac{\ddot{y} + \beta}{\ddot{x}}\right)' = -\frac{\beta}{\dot{x}}, \quad \text{將(1.4)結果代入前式} \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{\alpha^2 - \ddot{x}^2}}{\ddot{x}}\right)' = -\frac{\beta}{\dot{x}}$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{\left(\frac{\alpha}{\ddot{x}}\right)^2 - 1}\right)' = -\frac{\beta}{\dot{x}} \Rightarrow \frac{d\left(\sqrt{\left(\frac{\alpha}{\ddot{x}}\right)^2 - 1}\right)}{d\dot{x}} \frac{d\dot{x}}{dt} = -\frac{\beta}{\dot{x}} \Rightarrow \ddot{x} d\left(\sqrt{\left(\frac{\alpha}{\ddot{x}}\right)^2 - 1}\right) = -\frac{\beta}{\dot{x}} d\dot{x} \quad \text{-----}(1.7)$$

$$\text{令 } \sqrt{\left(\frac{\alpha}{\ddot{x}}\right)^2 - 1} = z \quad \text{-----}(1.8) \quad \Rightarrow \ddot{x} = -\frac{\alpha}{\sqrt{z^2 + 1}} \quad (\because \ddot{x} < 0), \text{ 代回 (1.7) 式}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow -\frac{\alpha}{\sqrt{z^2+1}} dz &= -\frac{\beta}{\alpha} d\dot{x} & \Rightarrow \int_{z_0}^z -\frac{\alpha}{\sqrt{z^2+1}} dz &= \int_{\dot{x}_0}^{\dot{x}} -\frac{\beta}{\alpha} d\dot{x} & \Rightarrow -\alpha \sinh^{-1}(z) \Big|_{z_0}^z &= -\beta \ln \Big|_{\dot{x}_0}^{\dot{x}} \\ \Rightarrow -\alpha(\sinh^{-1}(z) - \sinh^{-1}(z_0)) &= -\beta \ln \frac{\dot{x}}{\dot{x}_0} & \Rightarrow \alpha(\sinh^{-1}(z) - \sinh^{-1}(z_0)) &= \beta \ln \frac{\dot{x}}{\dot{x}_0} \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$\because -\alpha \sin \theta = \ddot{x} \quad (1.1) \quad \text{當 } t=0 \quad z=z_0, \quad \theta=90^\circ \Rightarrow \ddot{x} = -\alpha$$

$$\text{將此結果代入(1.8)} \Rightarrow z_0 = \sqrt{\left(\frac{\alpha}{-\alpha}\right)^2 - 1} = 0, \text{ 將此結果代入(1.9)}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \alpha(\sinh^{-1}(z) - \sinh^{-1}(0)) &= \beta \ln \frac{\dot{x}}{\dot{x}_0} & \Rightarrow \alpha \sinh^{-1}(z) &= \beta \ln \frac{\dot{x}}{\dot{x}_0} & \Rightarrow \sinh\left(\frac{\beta}{\alpha} \ln \frac{\dot{x}}{\dot{x}_0}\right) &= z = \sqrt{\left(\frac{\alpha}{\ddot{x}}\right)^2 - 1} \\ \Rightarrow -\sqrt{\sinh^2\left(\frac{\beta}{\alpha} \ln \frac{\dot{x}}{\dot{x}_0}\right) + 1} &= \frac{\alpha}{\ddot{x}} \quad (\because \ddot{x} < 0) & \Rightarrow \cosh\left(\frac{\beta}{\alpha} \ln \frac{\dot{x}}{\dot{x}_0}\right) &= -\frac{\alpha}{\ddot{x}} \end{aligned} \quad (1.10)$$

$$\Rightarrow \ddot{x} = -\frac{\alpha}{\cosh\left(\frac{\beta}{\alpha} \ln \frac{\dot{x}}{\dot{x}_0}\right)} \quad (1.11) \quad \Rightarrow a_x = -\frac{g\mu \cos \phi}{\cosh\left(\frac{\tan \phi}{\mu} \ln \frac{v_x}{v_{x0}}\right)} \quad (\text{式一})$$

二、 $t-v_x$ 關係式(式二)之推導

$$\cosh\left(\frac{\beta}{\alpha} \ln \frac{\dot{x}}{\dot{x}_0}\right) = -\frac{\alpha}{\ddot{x}} \quad (1.10), \quad \ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt}, \quad \text{代入前式}$$

$$\Rightarrow \cosh\left(\frac{\beta}{\alpha} \ln \frac{\dot{x}}{\dot{x}_0}\right) = -\frac{\alpha}{\left(\frac{d\dot{x}}{dt}\right)} \Rightarrow \cosh\left(\frac{\beta}{\alpha} \ln \frac{\dot{x}}{\dot{x}_0}\right) d\dot{x} = -\alpha dt \quad (2.1)$$

$$\Rightarrow \int_{\dot{x}_0}^{\dot{x}} \cosh\left(\frac{\beta}{\alpha} \ln \frac{\dot{x}}{\dot{x}_0}\right) d\dot{x} = \int_0^t -\alpha dt, \text{ 經由積分式(A1)可得下式: (詳見附錄十一-1, p. A-9),}$$

$$\Rightarrow \frac{\dot{x} \left[\frac{\beta}{\alpha} \sinh\left(\frac{\beta}{\alpha} \ln \frac{\dot{x}}{\dot{x}_0}\right) - \cosh\left(\frac{\beta}{\alpha} \ln \frac{\dot{x}}{\dot{x}_0}\right) \right]}{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 - 1} \Big|_{\dot{x}_0}^{\dot{x}} = -\alpha t$$

$$\Rightarrow \frac{\dot{x} \left[\frac{\beta}{\alpha} \sinh\left(\frac{\beta}{\alpha} \ln \frac{\dot{x}}{\dot{x}_0}\right) - \cosh\left(\frac{\beta}{\alpha} \ln \frac{\dot{x}}{\dot{x}_0}\right) \right]}{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 - 1} - \frac{\dot{x}_0 \left[\frac{\beta}{\alpha} \sinh\left(\frac{\beta}{\alpha} \ln \frac{\dot{x}_0}{\dot{x}_0}\right) - \cosh\left(\frac{\beta}{\alpha} \ln \frac{\dot{x}_0}{\dot{x}_0}\right) \right]}{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 - 1} = -\alpha t$$

$$\Rightarrow \frac{\dot{x} \left[\frac{\beta}{\alpha} \sinh\left(\frac{\beta}{\alpha} \ln \frac{\dot{x}}{\dot{x}_0}\right) - \cosh\left(\frac{\beta}{\alpha} \ln \frac{\dot{x}}{\dot{x}_0}\right) \right]}{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 - 1} - \frac{\dot{x}_0 \left[\frac{\beta}{\alpha} \sinh(0) - \cosh(0) \right]}{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 - 1} = -\alpha t$$

$$\Rightarrow \frac{\dot{x} \left[\frac{\beta}{\alpha} \sinh\left(\frac{\beta}{\alpha} \ln \frac{\dot{x}}{\dot{x}_0}\right) - \cosh\left(\frac{\beta}{\alpha} \ln \frac{\dot{x}}{\dot{x}_0}\right) \right]}{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 - 1} - \frac{\dot{x}_0(-1)}{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 - 1} = -\alpha t$$

$$\Rightarrow \frac{\dot{x} \left[\frac{\beta}{\alpha} \sinh \left(\frac{\beta}{\alpha} \ln \frac{\dot{x}}{\dot{x}_0} \right) - \cosh \left(\frac{\beta}{\alpha} \ln \frac{\dot{x}}{\dot{x}_0} \right) \right] + \dot{x}_0}{\left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^2 - 1} = -\alpha t$$

$$\Rightarrow t = \frac{\dot{x} \left[\frac{\beta}{\alpha} \sinh \left(\frac{\beta}{\alpha} \ln \frac{\dot{x}}{\dot{x}_0} \right) - \cosh \left(\frac{\beta}{\alpha} \ln \frac{\dot{x}}{\dot{x}_0} \right) \right] + \dot{x}_0}{\frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha}} \quad \text{-----}(2.2)$$

$$\Rightarrow t = \frac{v_x \left[\frac{\tan \phi}{\mu} \sinh \left(\frac{\tan \phi}{\mu} \ln \frac{v_x}{v_{x0}} \right) - \cosh \left(\frac{\tan \phi}{\mu} \ln \frac{v_x}{v_{x0}} \right) \right] + v_{x0}}{\left[\frac{g(\mu^2 \cos^2 \phi - \sin^2 \phi)}{\mu \cos \phi} \right]} \quad \text{-----}(式二)$$

三、 $x-v_x$ 關係式(式三)之推導

由(2.1): $\cosh \left(\frac{\beta}{\alpha} \ln \frac{\dot{x}}{\dot{x}_0} \right) d\dot{x} = -\alpha dt \Rightarrow \cosh \left(\frac{\beta}{\alpha} \ln \frac{\dot{x}}{\dot{x}_0} \right) \dot{x} \frac{d\dot{x}}{dx} = -\alpha \Rightarrow \dot{x} \cosh \left(\frac{\beta}{\alpha} \ln \frac{\dot{x}}{\dot{x}_0} \right) d\dot{x} = -\alpha dx$

$\Rightarrow -\alpha \int_0^x dx = \int_{\dot{x}_0}^{\dot{x}} u \cosh \left(\frac{\beta}{\alpha} \ln \frac{\dot{x}}{\dot{x}_0} \right) d\dot{x}$, 經由積分運算式(A2)可得:

$$\Rightarrow -\alpha x = \dot{x}^2 \left[\frac{\frac{\beta}{\alpha} \sinh \left(\frac{\beta}{\alpha} \ln \frac{\dot{x}}{\dot{x}_0} \right) - 2 \cosh \left(\frac{\beta}{\alpha} \ln \frac{\dot{x}}{\dot{x}_0} \right)}{\left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^2 - 4} \right] \Big|_{\dot{x}_0}^{\dot{x}}$$

$$\Rightarrow x = -\frac{1}{\alpha} \left\{ \dot{x}^2 \left[\frac{\frac{\beta}{\alpha} \sinh \left(\frac{\beta}{\alpha} \ln \frac{\dot{x}}{\dot{x}_0} \right) - 2 \cosh \left(\frac{\beta}{\alpha} \ln \frac{\dot{x}}{\dot{x}_0} \right)}{\left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^2 - 4} \right] - \dot{x}_0^2 \left[\frac{\frac{\beta}{\alpha} \sinh(0) - 2 \cosh(0)}{\left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^2 - 4} \right] \right\}$$

$$\Rightarrow x = -\frac{1}{\alpha} \left\{ \dot{x}^2 \left[\frac{\frac{\beta}{\alpha} \sinh \left(\frac{\beta}{\alpha} \ln \frac{\dot{x}}{\dot{x}_0} \right) - 2 \cosh \left(\frac{\beta}{\alpha} \ln \frac{\dot{x}}{\dot{x}_0} \right)}{\left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^2 - 4} \right] - \dot{x}_0^2 \frac{(-2)}{\left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^2 - 4} \right\}$$

$$\Rightarrow x = -\frac{\dot{x}^2 \left[\frac{\beta}{\alpha} \sinh \left(\frac{\beta}{\alpha} \ln \frac{\dot{x}}{\dot{x}_0} \right) - 2 \cosh \left(\frac{\beta}{\alpha} \ln \frac{\dot{x}}{\dot{x}_0} \right) \right] + 2\dot{x}_0^2}{\alpha \left[\left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^2 - 4 \right]} \quad \text{-----}(3.1)$$

$$\Rightarrow x = -\frac{v_x^2 \left[\frac{\tan \phi}{\mu} \sinh \left(\frac{\tan \phi}{\mu} \ln \frac{v_x}{v_{x0}} \right) - 2 \cosh \left(\frac{\tan \phi}{\mu} \ln \frac{v_x}{v_{x0}} \right) \right] + 2v_{x0}^2}{g\mu \cos \phi \left[\left(\frac{\tan \phi}{\mu} \right)^2 - 4 \right]} \quad \text{-----}(式三)$$

四、 $a_x - v_x$ 關係式(式四)之推導

$$\ddot{y} = -\beta + \sqrt{\alpha^2 - \dot{x}^2} \quad \text{-----(1.4);} \quad \ddot{x} = -\frac{\alpha}{\cosh\left(\frac{\beta}{\alpha} \ln \frac{\dot{x}}{\dot{x}_0}\right)} \quad \text{-----(1.11)}$$

將(1.11)代入 (1.4)，可得：
$$\ddot{y} + \beta = \sqrt{\alpha^2 - \frac{\alpha^2}{\cosh^2\left(\frac{\beta}{\alpha} \ln \frac{\dot{x}}{\dot{x}_0}\right)}} \Rightarrow \ddot{y} + \beta = \alpha \sqrt{\frac{\cosh^2\left(\frac{\beta}{\alpha} \ln \frac{\dot{x}}{\dot{x}_0}\right) - 1}{\cosh^2\left(\frac{\beta}{\alpha} \ln \frac{\dot{x}}{\dot{x}_0}\right)}}$$

$$\Rightarrow \ddot{y} + \beta = \alpha \sqrt{\frac{\sinh^2\left(\frac{\beta}{\alpha} \ln \frac{\dot{x}}{\dot{x}_0}\right)}{\cosh^2\left(\frac{\beta}{\alpha} \ln \frac{\dot{x}}{\dot{x}_0}\right)}} \Rightarrow \ddot{y} + \beta = \alpha \left| \tanh\left(\frac{\beta}{\alpha} \ln \frac{\dot{x}}{\dot{x}_0}\right) \right| \Rightarrow \ddot{y} = \alpha \left| \tanh\left(\frac{\beta}{\alpha} \ln \frac{\dot{x}}{\dot{x}_0}\right) \right| - \beta$$

$$\because \dot{x} < \dot{x}_0 \therefore \ln \frac{\dot{x}}{\dot{x}_0} < \ln(1) = 0, \quad \text{又} \because \alpha > 0 \text{ 且 } \beta > 0 \therefore \frac{\beta}{\alpha} \ln \frac{\dot{x}}{\dot{x}_0} < 0 \therefore \tanh\left(\frac{\beta}{\alpha} \ln \frac{\dot{x}}{\dot{x}_0}\right) < 0$$

$$\Rightarrow \ddot{y} = -\alpha \tanh\left(\frac{\beta}{\alpha} \ln \frac{\dot{x}}{\dot{x}_0}\right) - \beta \quad \text{---(4.1)} \Rightarrow a_y = -g\mu \cos\phi \tanh\left(\frac{\tan\phi}{\mu} \ln \frac{v_x}{v_{x0}}\right) - g \sin\phi \quad \text{---(式四)}$$

五、 $v_y - v_x$ 關係式(式五)之推導

$$\dot{y} - \dot{y}_0 = \int_0^t \ddot{y} dt = \int_{\dot{x}_0}^{\dot{x}} \ddot{y} \frac{dt}{d\dot{x}} d\dot{x} \quad \text{-----(5.1), 由式(2.2): } t = \frac{\dot{x} \left[\frac{\beta}{\alpha} \sinh\left(\frac{\beta}{\alpha} \ln \frac{\dot{x}}{\dot{x}_0}\right) - \cosh\left(\frac{\beta}{\alpha} \ln \frac{\dot{x}}{\dot{x}_0}\right) \right] + \dot{x}_0}{\alpha^2 - \beta^2}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{dt}{d\dot{x}} &= \frac{d \left\{ \frac{\dot{x} \left[\frac{\beta}{\alpha} \sinh\left(\frac{\beta}{\alpha} \ln \frac{\dot{x}}{\dot{x}_0}\right) - \cosh\left(\frac{\beta}{\alpha} \ln \frac{\dot{x}}{\dot{x}_0}\right) \right] + \dot{x}_0}{\alpha^2 - \beta^2} \right\}}{d\dot{x}} = \frac{\alpha}{\alpha^2 - \beta^2} \frac{d \left\{ \dot{x} \left[\frac{\beta}{\alpha} \sinh\left(\frac{\beta}{\alpha} \ln \frac{\dot{x}}{\dot{x}_0}\right) - \cosh\left(\frac{\beta}{\alpha} \ln \frac{\dot{x}}{\dot{x}_0}\right) \right] \right\}}{d\dot{x}} \\ &= \frac{\alpha}{\alpha^2 - \beta^2} \frac{d \left\{ \dot{x} \left[\frac{\beta}{\alpha} \sinh\left(\frac{\beta}{\alpha} \ln \frac{\dot{x}}{\dot{x}_0}\right) - \cosh\left(\frac{\beta}{\alpha} \ln \frac{\dot{x}}{\dot{x}_0}\right) \right] \right\}}{d\dot{x}} \\ &= \frac{\alpha}{\alpha^2 - \beta^2} \left\{ \frac{d\dot{x} \left[\frac{\beta}{\alpha} \sinh\left(\frac{\beta}{\alpha} \ln \frac{\dot{x}}{\dot{x}_0}\right) - \cosh\left(\frac{\beta}{\alpha} \ln \frac{\dot{x}}{\dot{x}_0}\right) \right]}{d\dot{x}} + \dot{x} \frac{d \left[\frac{\beta}{\alpha} \sinh\left(\frac{\beta}{\alpha} \ln \frac{\dot{x}}{\dot{x}_0}\right) - \cosh\left(\frac{\beta}{\alpha} \ln \frac{\dot{x}}{\dot{x}_0}\right) \right]}{d\dot{x}} \right\} \\ &= \frac{\alpha}{\alpha^2 - \beta^2} \left\{ \left[\frac{\beta}{\alpha} \sinh\left(\frac{\beta}{\alpha} \ln \frac{\dot{x}}{\dot{x}_0}\right) - \cosh\left(\frac{\beta}{\alpha} \ln \frac{\dot{x}}{\dot{x}_0}\right) \right] + u \left[\frac{\beta}{\alpha} \cosh\left(\frac{\beta}{\alpha} \ln \frac{\dot{x}}{\dot{x}_0}\right) \frac{\beta}{\alpha} \frac{1}{\dot{x}} - \sinh\left(\frac{\beta}{\alpha} \ln \frac{\dot{x}}{\dot{x}_0}\right) \frac{\beta}{\alpha} \frac{1}{\dot{x}} \right] \right\} \\ &= \frac{\alpha}{\alpha^2 - \beta^2} \left[\frac{\beta}{\alpha} \sinh\left(\frac{\beta}{\alpha} \ln \frac{\dot{x}}{\dot{x}_0}\right) - \cosh\left(\frac{\beta}{\alpha} \ln \frac{\dot{x}}{\dot{x}_0}\right) + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 \cosh\left(\frac{\beta}{\alpha} \ln \frac{\dot{x}}{\dot{x}_0}\right) - \frac{\beta}{\alpha} \sinh\left(\frac{\beta}{\alpha} \ln \frac{\dot{x}}{\dot{x}_0}\right) \right] \\ &= \frac{\alpha}{\alpha^2 - \beta^2} \left[\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 - 1 \right] \cosh\left(\frac{\beta}{\alpha} \ln \frac{\dot{x}}{\dot{x}_0}\right) = -\frac{1}{\alpha} \cosh\left(\frac{\beta}{\alpha} \ln \frac{\dot{x}}{\dot{x}_0}\right) \quad \text{-----(5.2)} \end{aligned}$$

將(5.2)代入(5.1)， $\Rightarrow \dot{y} - \dot{y}_0 = \int_{\dot{x}_0}^{\dot{x}} \left[-\alpha \tanh\left(\frac{\beta}{\alpha} \ln \frac{\dot{x}}{\dot{x}_0}\right) - \beta \right] \left[-\frac{1}{\alpha} \cosh\left(\frac{\beta}{\alpha} \ln \frac{\dot{x}}{\dot{x}_0}\right) \right] d\dot{x}$
 $\Rightarrow \dot{y} - 0 = \int_{\dot{x}_0}^{\dot{x}} \left[\sinh\left(\frac{\beta}{\alpha} \ln \frac{\dot{x}}{\dot{x}_0}\right) + \frac{\beta}{\alpha} \cosh\left(\frac{\beta}{\alpha} \ln \frac{\dot{x}}{\dot{x}_0}\right) \right] d\dot{x} \Rightarrow \dot{y} = \int_{\dot{x}_0}^{\dot{x}} \sinh\left(\frac{\beta}{\alpha} \ln \frac{\dot{x}}{\dot{x}_0}\right) du + \frac{\beta}{\alpha} \int_{u_0}^u \cosh\left(\frac{\beta}{\alpha} \ln \frac{\dot{x}}{\dot{x}_0}\right) d\dot{x}$

經由積分運算式(A3)和(A1)可得 (詳見:附錄十一-1, p. A-9; 十一-3, p. A-10)

$$\Rightarrow \dot{y} = \frac{\dot{x} \left[\frac{\beta}{\alpha} \cosh\left(\frac{\beta}{\alpha} \ln \frac{\dot{x}}{\dot{x}_0}\right) - \sinh\left(\frac{\beta}{\alpha} \ln \frac{\dot{x}}{\dot{x}_0}\right) \right] \Big|_{\dot{x}_0}^{\dot{x}} + \frac{\beta}{\alpha} \dot{x} \left[\frac{\beta}{\alpha} \sinh\left(\frac{\beta}{\alpha} \ln \frac{\dot{x}}{\dot{x}_0}\right) - \cosh\left(\frac{\beta}{\alpha} \ln \frac{\dot{x}}{\dot{x}_0}\right) \right] \Big|_{\dot{x}_0}^{\dot{x}}}{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 - 1}$$

$$\Rightarrow \dot{y} = \frac{\dot{x}}{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 - 1} \left[\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 - 1 \right] \sinh\left(\frac{\beta}{\alpha} \ln \frac{\dot{x}}{\dot{x}_0}\right) \Big|_{\dot{x}_0}^{\dot{x}}$$

$$\Rightarrow \dot{y} = \frac{\dot{x}}{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 - 1} \left[\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 - 1 \right] \sinh\left(\frac{\beta}{\alpha} \ln \frac{\dot{x}}{\dot{x}_0}\right) - \frac{\dot{x}_0}{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 - 1} \left[\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 - 1 \right] \sinh\left(\frac{\beta}{\alpha} \ln \frac{\dot{x}_0}{\dot{x}_0}\right)$$

$$\Rightarrow \dot{y} = \dot{x} \sinh\left(\frac{\beta}{\alpha} \ln \frac{\dot{x}}{\dot{x}_0}\right) - \dot{x}_0 \sinh(0) \Rightarrow \dot{y} = \dot{x} \sinh\left(\frac{\beta}{\alpha} \ln \frac{\dot{x}}{\dot{x}_0}\right) \text{ -----(5.3)}$$

$$\Rightarrow v_y = v_x \sinh\left(\frac{\tan \phi}{\mu} \ln \frac{v_x}{v_{x0}}\right) \text{ -----(式五)}$$

六、 $y - v_x$ 關係式(式六)之推導

$$\dot{y} = \dot{x} \sinh\left(\frac{\beta}{\alpha} \ln \frac{\dot{x}}{\dot{x}_0}\right) \text{ -(5.3); } \frac{dt}{d\dot{x}} = -\frac{1}{\alpha} \cosh\left(\frac{\beta}{\alpha} \ln \frac{\dot{x}}{\dot{x}_0}\right) \text{ -(5.2); } y - y_0 = \int_0^t \dot{y} dt = \int_{\dot{x}_0}^{\dot{x}} \dot{y} \frac{dt}{d\dot{x}} d\dot{x}$$

將(5.3)及(5.2)代入前式， $\Rightarrow y - y_0 = \int_{\dot{x}_0}^{\dot{x}} \dot{x} \sinh\left(\frac{\beta}{\alpha} \ln \frac{\dot{x}}{\dot{x}_0}\right) \left[-\frac{1}{\alpha} \cosh\left(\frac{\beta}{\alpha} \ln \frac{\dot{x}}{\dot{x}_0}\right) \right] d\dot{x}$

$$\Rightarrow y - y_0 = \int_{\dot{x}_0}^{\dot{x}} \dot{x} \sinh\left(\frac{\beta}{\alpha} \ln \frac{\dot{x}}{\dot{x}_0}\right) \left[-\frac{1}{\alpha} \cosh\left(\frac{\beta}{\alpha} \ln \frac{\dot{x}}{\dot{x}_0}\right) \right] d\dot{x} \Rightarrow y - y_0 = -\frac{1}{\alpha} \int_{\dot{x}_0}^{\dot{x}} u \sinh\left(\frac{\beta}{\alpha} \ln \frac{\dot{x}}{\dot{x}_0}\right) \cosh\left(\frac{\beta}{\alpha} \ln \frac{\dot{x}}{\dot{x}_0}\right) d\dot{x}$$

經由積分式(A4)可得 (詳見:附錄十一-4, p. A-10)

$$\Rightarrow y = -\frac{1}{\alpha} \frac{\dot{x}^2 \left\{ \frac{\beta}{\alpha} \cosh\left[2\left(\frac{\beta}{\alpha} \ln \frac{\dot{x}}{\dot{x}_0}\right)\right] - \sinh\left[2\left(\frac{\beta}{\alpha} \ln \frac{\dot{x}}{\dot{x}_0}\right)\right] \right\}}{4 \left[\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 - 1 \right]} \Big|_{\dot{x}_0}^{\dot{x}}$$

$$\Rightarrow y = -\frac{1}{\alpha} \left(\frac{\dot{x}^2 \left\{ \frac{\beta}{\alpha} \cosh\left(\frac{2\beta}{\alpha} \ln \frac{\dot{x}}{\dot{x}_0}\right) - \sinh\left(\frac{2\beta}{\alpha} \ln \frac{\dot{x}}{\dot{x}_0}\right) \right\}}{4 \left[\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 - 1 \right]} - \frac{\dot{x}_0^2 \left\{ \frac{\beta}{\alpha} \cosh\left(\frac{2\beta}{\alpha} \ln \frac{\dot{x}}{\dot{x}_0}\right) - \sinh\left(\frac{2\beta}{\alpha} \ln \frac{\dot{x}}{\dot{x}_0}\right) \right\}}{4 \left[\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 - 1 \right]} \right)$$

$$\Rightarrow y = -\frac{1}{\alpha} \left(\frac{\dot{x}^2 \left\{ \frac{\beta}{\alpha} \cosh\left(\frac{2\beta}{\alpha} \ln \frac{\dot{x}}{\dot{x}_0}\right) - \sinh\left(\frac{2\beta}{\alpha} \ln \frac{\dot{x}}{\dot{x}_0}\right) \right\}}{4 \left[\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 - 1 \right]} - \frac{\dot{x}_0^2 \left\{ \frac{\beta}{\alpha} \cosh(0) - \sinh(0) \right\}}{4 \left[\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 - 1 \right]} \right)$$

$$\Rightarrow y = -\frac{1}{\alpha} \left[\frac{\dot{x}^2 \left\{ \frac{\beta}{\alpha} \cosh\left(\frac{2\beta}{\alpha} \ln \frac{\dot{x}}{\dot{x}_0}\right) - \sinh\left(\frac{2\beta}{\alpha} \ln \frac{\dot{x}}{\dot{x}_0}\right) \right\}}{4 \left[\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 - 1 \right]} - \frac{\dot{x}_0^2 \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)}{4 \left[\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 - 1 \right]} \right]$$

$$\Rightarrow y = -\frac{\dot{x}^2 \left\{ \frac{\beta}{\alpha} \cosh\left(\frac{2\beta}{\alpha} \ln \frac{\dot{x}}{\dot{x}_0}\right) - \sinh\left(\frac{2\beta}{\alpha} \ln \frac{\dot{x}}{\dot{x}_0}\right) \right\} - \dot{x}_0^2 \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)}{4\alpha \left[\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 - 1 \right]} \quad \text{-----}(6.1)$$

$$\Rightarrow y = -\frac{v_x^2 \left\{ \frac{\tan \phi}{\mu} \cosh\left(2 \frac{\tan \phi}{\mu} \ln \frac{v_x}{v_{x0}}\right) - \sinh\left(2 \frac{\tan \phi}{\mu} \ln \frac{v_x}{v_{x0}}\right) \right\} - v_{x0}^2 \left(\frac{\tan \phi}{\mu}\right)}{4g\mu \cos \phi \left[\left(\frac{\tan \phi}{\mu}\right)^2 - 1 \right]} \quad \text{-----}(式六)$$

七、 $t_f - v_x$ 關係式(式七)之推導

$$t = \frac{\dot{x} \left[\frac{\beta}{\alpha} \sinh\left(\frac{\beta}{\alpha} \ln \frac{\dot{x}}{\dot{x}_0}\right) - \cosh\left(\frac{\beta}{\alpha} \ln \frac{\dot{x}}{\dot{x}_0}\right) \right] + \dot{x}_0}{\frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha}} \quad \text{-----}(2.2) \quad , \text{ 將(2.2)代入下式}$$

$$t_f = \lim_{\dot{x} \rightarrow 0} t = \lim_{\dot{x} \rightarrow 0} \frac{\dot{x} \left[\frac{\beta}{\alpha} \sinh\left(\frac{\beta}{\alpha} \ln \frac{\dot{x}}{\dot{x}_0}\right) - \cosh\left(\frac{\beta}{\alpha} \ln \frac{\dot{x}}{\dot{x}_0}\right) \right] + \dot{x}_0}{\frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha}} = \lim_{\dot{x} \rightarrow 0} \frac{\dot{x} \left[\frac{\beta}{\alpha} \sinh\left(\frac{\beta}{\alpha} \ln \frac{\dot{x}}{\dot{x}_0}\right) - \cosh\left(\frac{\beta}{\alpha} \ln \frac{\dot{x}}{\dot{x}_0}\right) \right] + \dot{x}_0}{\frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha}}$$

$$= -\lim_{\dot{x} \rightarrow 0} \frac{\dot{x} \left[\frac{\beta}{\alpha} \frac{e^{\frac{\beta}{\alpha} \ln \frac{\dot{x}}{\dot{x}_0}} - e^{-\frac{\beta}{\alpha} \ln \frac{\dot{x}}{\dot{x}_0}}}{2} - \frac{e^{\frac{\beta}{\alpha} \ln \frac{\dot{x}}{\dot{x}_0}} + e^{-\frac{\beta}{\alpha} \ln \frac{\dot{x}}{\dot{x}_0}}}{2} \right] + \dot{x}_0}{\frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha}} = -\lim_{\dot{x} \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} \dot{x} \left[\left(\frac{\beta}{\alpha} - 1\right) e^{\frac{\beta}{\alpha} \ln \frac{\dot{x}}{\dot{x}_0}} - \left(\frac{\beta}{\alpha} + 1\right) e^{-\frac{\beta}{\alpha} \ln \frac{\dot{x}}{\dot{x}_0}} \right] + \dot{x}_0}{\frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha}}$$

$$= -\lim_{\dot{x} \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} \dot{x} \left[\left(\frac{\beta}{\alpha} - 1\right) \left(\frac{\dot{x}}{\dot{x}_0}\right)^{\frac{\beta}{\alpha}} - \left(\frac{\beta}{\alpha} + 1\right) \left(\frac{\dot{x}}{\dot{x}_0}\right)^{-\frac{\beta}{\alpha}} \right] + \dot{x}_0}{\frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha}} = -\lim_{\dot{x} \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{\beta}{\alpha} - 1\right) \dot{x}^{1+\frac{\beta}{\alpha}} - \frac{1}{2} \left(\frac{\beta}{\alpha} + 1\right) \dot{x}^{1-\frac{\beta}{\alpha}} + \dot{x}_0}{\frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha}}$$

$$= \frac{\alpha}{\alpha^2 - \beta^2} \dot{x}_0 = \frac{\mu \cos \phi}{g(\mu^2 \cos^2 \phi - \sin^2 \phi)} v_{x0} \quad \text{-----}(式七)$$

八、 $x_f - v_x$ 關係式(式八)之推導

$$x = -\frac{\dot{x}^2 \left[\frac{\beta}{\alpha} \sinh\left(\frac{\beta}{\alpha} \ln \frac{\dot{x}}{\dot{x}_0}\right) - 2 \cosh\left(\frac{\beta}{\alpha} \ln \frac{\dot{x}}{\dot{x}_0}\right) \right] + 2\dot{x}_0^2}{\alpha \left[\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 - 4 \right]} \quad \text{---(3.1) , 將(3.1)代入下式 ,}$$

$$\begin{aligned}
x_f &= \lim_{\dot{x} \rightarrow 0} x = -\lim_{\dot{x} \rightarrow 0} \frac{\dot{x}^2 \left[\frac{\beta}{\alpha} \sinh\left(\frac{\beta}{\alpha} \ln \frac{\dot{x}}{\dot{x}_0}\right) - 2 \cosh\left(\frac{\beta}{\alpha} \ln \frac{\dot{x}}{\dot{x}_0}\right) \right] + 2\dot{x}_0^2}{\alpha \left[\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 - 4 \right]} \\
&= -\lim_{\dot{x} \rightarrow 0} \frac{\dot{x}^2 \left[\left(\frac{\beta}{2\alpha} - 1\right) e^{\frac{\beta}{\alpha} \ln \frac{\dot{x}}{\dot{x}_0}} - \left(\frac{\beta}{2\alpha} + 1\right) e^{-\frac{\beta}{\alpha} \ln \frac{\dot{x}}{\dot{x}_0}} \right] + 2\dot{x}_0^2}{\alpha \left[\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 - 4 \right]} = -\lim_{\dot{x} \rightarrow 0} \frac{\dot{x}^2 \left[\left(\frac{\beta}{2\alpha} - 1\right) \left(\frac{\dot{x}}{\dot{x}_0}\right)^{\frac{\beta}{\alpha}} - \left(\frac{\beta}{2\alpha} + 1\right) \left(\frac{\dot{x}}{\dot{x}_0}\right)^{-\frac{\beta}{\alpha}} \right] + 2\dot{x}_0^2}{\alpha \left[\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 - 4 \right]} \\
&= -\lim_{\dot{x} \rightarrow 0} \frac{\dot{x}^2 \left[\left(\frac{\beta}{2\alpha} - 1\right) \left(\frac{\dot{x}}{\dot{x}_0}\right)^{\frac{\beta}{\alpha}} - \left(\frac{\beta}{2\alpha} + 1\right) \left(\frac{\dot{x}}{\dot{x}_0}\right)^{-\frac{\beta}{\alpha}} \right] + 2\dot{x}_0^2}{\alpha \left[\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 - 4 \right]} = -\lim_{\dot{x} \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{\beta}{2\alpha} - 1\right) \dot{x}^{2+\frac{\beta}{\alpha}} - \left(\frac{\beta}{2\alpha} + 1\right) \dot{x}^{2-\frac{\beta}{\alpha}} + 2\dot{x}_0^2}{\alpha \left[\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 - 4 \right]} \\
&= -\frac{2\dot{x}_0^2}{\alpha \left[\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 - 4 \right]} \quad \text{---(8.1)} = -\frac{2\nu_{x0}^2}{g\mu \cos \phi \left[\left(\frac{\tan \phi}{\mu}\right)^2 - 4 \right]} \quad \text{---(式八)}
\end{aligned}$$

九、 $y_f - v_x$ 關係式(式九)之推導

$$y = -\frac{\dot{x}^2 \left\{ \frac{\beta}{\alpha} \cosh\left(\frac{2\beta}{\alpha} \ln \frac{\dot{x}}{\dot{x}_0}\right) - \sinh\left(\frac{2\beta}{\alpha} \ln \frac{\dot{x}}{\dot{x}_0}\right) \right\} - \dot{x}_0^2 \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)}{4\alpha \left[\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 - 1 \right]} \quad \text{---(6.1)}$$

$$\begin{aligned}
\text{將(6.1)代入下式, } y_f &= \lim_{\dot{x} \rightarrow 0} y = -\lim_{\dot{x} \rightarrow 0} \frac{\dot{x}^2 \left\{ \frac{\beta}{\alpha} \cosh\left(\frac{2\beta}{\alpha} \ln \frac{\dot{x}}{\dot{x}_0}\right) - \sinh\left(\frac{2\beta}{\alpha} \ln \frac{\dot{x}}{\dot{x}_0}\right) \right\} - \dot{x}_0^2 \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)}{4\alpha \left[\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 - 1 \right]} \\
&= -\lim_{\dot{x} \rightarrow 0} \frac{\dot{x}^2 \left\{ \frac{\beta}{\alpha} \frac{e^{\frac{2\beta}{\alpha} \ln \frac{\dot{x}}{\dot{x}_0}} + e^{-\frac{2\beta}{\alpha} \ln \frac{\dot{x}}{\dot{x}_0}}}{2} - \frac{e^{\frac{2\beta}{\alpha} \ln \frac{\dot{x}}{\dot{x}_0}} - e^{-\frac{2\beta}{\alpha} \ln \frac{\dot{x}}{\dot{x}_0}}}{2} \right\} - \dot{x}_0^2 \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)}{4\alpha \left[\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 - 1 \right]} \\
&= -\lim_{\dot{x} \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} \dot{x}^2 \left\{ \left(\frac{\beta}{\alpha} - 1\right) e^{\frac{2\beta}{\alpha} \ln \frac{\dot{x}}{\dot{x}_0}} + \left(\frac{\beta}{\alpha} + 1\right) e^{-\frac{2\beta}{\alpha} \ln \frac{\dot{x}}{\dot{x}_0}} \right\} - \dot{x}_0^2 \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)}{4\alpha \left[\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 - 1 \right]} = -\lim_{\dot{x} \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} \dot{x}^2 \left\{ \left(\frac{\beta}{\alpha} - 1\right) \left(\frac{\dot{x}}{\dot{x}_0}\right)^{\frac{2\beta}{\alpha}} + \left(\frac{\beta}{\alpha} + 1\right) \left(\frac{\dot{x}}{\dot{x}_0}\right)^{-\frac{2\beta}{\alpha}} \right\} - \dot{x}_0^2 \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)}{4\alpha \left[\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 - 1 \right]}
\end{aligned}$$

$$= -\lim_{\dot{x} \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{\beta-1}{\alpha} \right) \dot{x}^{2(1+\frac{\beta}{\alpha})} + \frac{1}{2} \left(\frac{\beta+1}{\alpha} \right) \dot{x}^{2(1-\frac{\beta}{\alpha})} - \dot{x}_0^2 \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)}{4\alpha \left[\left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^2 - 1 \right]} = \frac{\frac{\beta}{\alpha} \dot{x}_0^2}{4\alpha \left[\left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^2 - 1 \right]} \quad (9.1) = \frac{\frac{\tan \phi}{\mu} v_{x0}^2}{4g\mu \cos \phi \left[\left(\frac{\tan \phi}{\mu} \right)^2 - 1 \right]} \quad \text{(式九)}$$

十、 $x_f - y_f$ 關係式(式十)、(式十-A)之推導

$$x_f = -\frac{2u_0^2}{\alpha \left[\left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^2 - 4 \right]} \quad (8.1); \quad y_f = \frac{\frac{\beta}{\alpha} u_0^2}{4\alpha \left[\left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^2 - 1 \right]} \quad (9.1)$$

兩式聯立相除

$$\Rightarrow \frac{x_f}{y_f} = -\frac{8\alpha}{\beta} \left[\frac{\left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^2 - 1}{\left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^2 - 4} \right] \quad (10.1); \quad \Rightarrow x_f = -\frac{8\alpha}{\beta} \left[\frac{\left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^2 - 1}{\left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^2 - 4} \right] y_f \quad (10.2)$$

$$\Rightarrow x_f = -\frac{8\mu}{\tan \phi} \left[\frac{\left(\frac{\tan \phi}{\mu} \right)^2 - 1}{\left(\frac{\tan \phi}{\mu} \right)^2 - 4} \right] y_f \quad \Rightarrow y_f = -\frac{\tan \phi}{8\mu} \left[\frac{\left(\frac{\tan \phi}{\mu} \right)^2 - 4}{\left(\frac{\tan \phi}{\mu} \right)^2 - 1} \right] x_f \quad (+)$$

由(10.1)

$$\Rightarrow \left| \frac{x_f}{y_f} \right| = \frac{-x_f}{y_f} = \frac{8\alpha}{\beta} \left[\frac{\left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^2 - 1}{\left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^2 - 4} \right], \quad \Leftrightarrow \left| \frac{x_f}{y_f} \right| \equiv r; \quad \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\tan \phi}{\mu} \equiv k, \quad \text{代回前式, } \Rightarrow r = \frac{8}{k} \left(\frac{k^2 - 1}{k^2 - 4} \right)$$

$$\Rightarrow k^3 - \frac{8}{r} k^2 - 4k + \frac{8}{r} = 0 \quad (10.3), \quad \text{此一元三次方程式判別式 } \Delta \text{ (詳見: 附錄十二, p. A-10)}$$

$$\Delta = \left(\frac{32}{6r} - \frac{512}{27r^3} - \frac{4}{r} \right)^2 + \left(-\frac{4}{3} - \frac{64}{9r^2} \right)^3 = \left(\frac{32}{6r} - \frac{512}{27r^3} - \frac{4}{r} \right)^2 + \left(-\frac{4}{3} - \frac{64}{9r^2} \right)^3$$

$$= \left(\frac{4}{3r} - \frac{512}{27r^3} \right)^2 - \left(\frac{4}{3} + \frac{64}{9r^2} \right)^3 = \frac{16(9r^2 - 128)^2}{729r^6} - \frac{64(3r^2 + 16)^3}{729r^6}$$

$$= \frac{16(81r^4 - 2304r^2 + 16384 - 108r^6 - 1728r^4 - 9216r^2 - 16384)}{729r^6}$$

$$= \frac{16(-108r^6 - 1647r^4 - 11520r^2)}{729r^6} = -\frac{16(12r^4 + 183r^2 + 1280r^2)}{81r^4}$$

由此可見 $\Delta < 0$, 故此方程式有相異三實根, 分別為:

$$k_1 = \frac{8}{3r} + 2\sqrt{\frac{4}{3} + \frac{64}{9r^2}} \cos \left\{ \frac{1}{3} \left(\cos^{-1} \left[\frac{\frac{4}{3r} + \frac{512}{27r^3}}{\left(\frac{4}{3} + \frac{64}{9r^2} \right)^{\frac{3}{2}}} \right] \right) \right\} \quad (10.4)$$

$$k_2 = \frac{8}{3r} + 2\sqrt{\frac{4}{3} + \frac{64}{9r^2}} \cos \left\{ \frac{1}{3} \left[\cos^{-1} \left[\frac{\frac{4}{3r} + \frac{512}{27r^3}}{\left(\frac{4}{3} + \frac{64}{9r^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \right] + 2\pi \right] \right\} \text{-----}(10.5)$$

$$k_3 = \frac{8}{3r} + 2\sqrt{\frac{4}{3} + \frac{64}{9r^2}} \cos \left\{ \frac{1}{3} \left[\cos^{-1} \left[\frac{\frac{4}{3r} + \frac{512}{27r^3}}{\left(\frac{4}{3} + \frac{64}{9r^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \right] - 2\pi \right] \right\} \text{-----}(10.6)$$

k_1 、 k_2 、 k_3 隨 r 的函數圖形分別如下(橫坐標為 r) 皆為遞減函數且其極限運算分別如下:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} k_1 = \lim_{r \rightarrow \infty} \left\{ \frac{8}{3r} + 2\sqrt{\frac{4}{3} + \frac{64}{9r^2}} \cos \left\{ \frac{1}{3} \left[\cos^{-1} \left[\frac{\frac{4}{3r} + \frac{512}{27r^3}}{\left(\frac{4}{3} + \frac{64}{9r^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \right] \right] \right\} \right\} = 2\sqrt{\frac{4}{3}} \cos \left\{ \frac{\cos^{-1}[0]}{3} \right\} = 2\sqrt{\frac{4}{3}} \cos \left\{ \frac{\pi}{6} \right\} = 2$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} k_2 = \lim_{r \rightarrow \infty} \left\{ \frac{8}{3r} + 2\sqrt{\frac{4}{3} + \frac{64}{9r^2}} \cos \left\{ \frac{1}{3} \left[\cos^{-1} \left[\frac{\frac{4}{3r} + \frac{512}{27r^3}}{\left(\frac{4}{3} + \frac{64}{9r^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \right] + 2\pi \right] \right\} \right\} = 2\sqrt{\frac{4}{3}} \cos \left\{ \frac{\cos^{-1}[0] + 2\pi}{3} \right\} = 2\sqrt{\frac{4}{3}} \cos \left\{ \frac{5\pi}{6} \right\} = -2$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} k_3 = \lim_{r \rightarrow \infty} \left\{ \frac{8}{3r} + 2\sqrt{\frac{4}{3} + \frac{64}{9r^2}} \cos \left\{ \frac{1}{3} \left[\cos^{-1} \left[\frac{\frac{4}{3r} + \frac{512}{27r^3}}{\left(\frac{4}{3} + \frac{64}{9r^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \right] - 2\pi \right] \right\} \right\} = 2\sqrt{\frac{4}{3}} \cos \left\{ \frac{\cos^{-1}[0] - 2\pi}{3} \right\} = 2\sqrt{\frac{4}{3}} \cos \left\{ -\frac{\pi}{2} \right\} = 0$$

由於 $\frac{\tan \phi}{\mu} < 1$, 故其解為唯一且為 k_3 , 故

$$\frac{\tan \phi}{\mu} = \frac{8}{3r} + 2\sqrt{\frac{4}{3} + \frac{64}{9r^2}} \cos \left\{ \frac{1}{3} \left[\cos^{-1} \left[\frac{\frac{4}{3r} + \frac{512}{27r^3}}{\left(\frac{4}{3} + \frac{64}{9r^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \right] - 2\pi \right] \right\} \Rightarrow \mu = \frac{\tan \phi}{\frac{8}{3r} + 2\sqrt{\frac{4}{3} + \frac{64}{9r^2}} \cos \left\{ \frac{1}{3} \left[\cos^{-1} \left[\frac{\frac{4}{3r} + \frac{512}{27r^3}}{\left(\frac{4}{3} + \frac{64}{9r^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \right] - 2\pi \right] \right\}}$$

$$\Rightarrow \mu = \frac{\tan \phi}{\frac{8}{3} \left| \frac{y_f}{x_f} \right| + 2\sqrt{\frac{4}{3} + \frac{64}{9} \left| \frac{y_f}{x_f} \right|^2} \cos \left\{ \frac{1}{3} \left[\cos^{-1} \left[\frac{\frac{4}{3} \left| \frac{y_f}{x_f} \right| + \frac{512}{27} \left| \frac{y_f}{x_f} \right|^3}{\left(\frac{4}{3} + \frac{64}{9} \left| \frac{y_f}{x_f} \right|^2\right)^{\frac{3}{2}}} \right] - 2\pi \right] \right\}} \text{---(十-A)}$$

十一、積分運算 (因篇幅受限, 只列結果)

$$1 \cdot \text{積分運算式(A1)}: \int \cosh(a + b \ln x) dx = \frac{x \{ b [\sinh(a + b \ln x)] - \cosh(a + b \ln x) \}}{(b^2 - 1)} + c$$

$$2 \cdot \text{積分運算式(A2)}: \int x \cosh(a + b \ln x) dx = \frac{x^2 \{b[\sinh(a + b \ln x)] - 2 \cosh(a + b \ln x)\}}{4 - b^2} + c$$

$$3 \cdot \text{積分運算式(A3)}: \int \sinh(a + b \ln x) dx = \frac{x \{b[\cosh(a + b \ln x)] - \sinh(a + b \ln x)\}}{(b^2 - 1)} + c$$

$$4 \cdot \text{積分運算式(A4)}: \int x \sinh(a + b \ln x) \cosh(a + b \ln x) dx = \frac{x^2 \{b \cosh[2(a + b \ln x)] - \sinh[2(a + b \ln x)]\}}{4(b^2 - 1)} + c$$

十二、一元三次方程式之判別式

一個一元三次方程式 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ 其判別式如下： $\Delta = \left(\frac{bc}{6a^2} - \frac{b^3}{27a^3} - \frac{d}{2a}\right)^2 + \left(\frac{c}{3a} - \frac{b^2}{9a^2}\right)^3$

當判別式小於零時有相異三實根分別為

$$x_1 = -\frac{b}{3a} + 2\sqrt{-B} \cos\left\{\frac{\cos^{-1}\left[\frac{A}{(-B)^{\frac{3}{2}}}\right]}{3}\right\}; x_2 = -\frac{b}{3a} + 2\sqrt{-B} \cos\left\{\frac{\cos^{-1}\left[\frac{A}{(-B)^{\frac{3}{2}}}\right] + 2\pi}{3}\right\}; x_3 = -\frac{b}{3a} + 2\sqrt{-B} \cos\left\{\frac{\cos^{-1}\left[\frac{A}{(-B)^{\frac{3}{2}}}\right] - 2\pi}{3}\right\}$$

其中， $A = \frac{bc}{6a^2} - \frac{b^3}{27a^3} - \frac{d}{2a}$ ， $B = \frac{c}{3a} - \frac{b^2}{9a^2}$

十三、物體最終切線方向與縱軸方向平行 ($\theta = 0^\circ$) 之證明

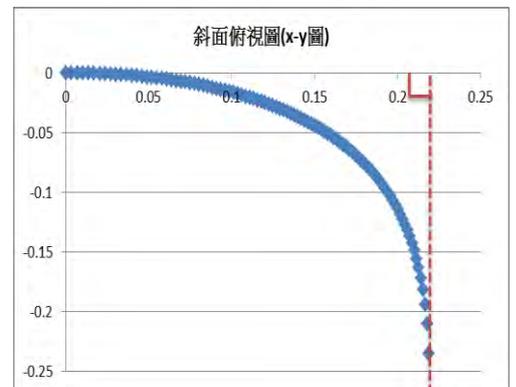
θ 為速度方向(切線)與 y 軸的夾角，由 p. 7 公式(1.1)： $-\alpha \sin \theta = \ddot{x}$ -----(1.1)

$$\Rightarrow \lim_{\dot{x} \rightarrow 0} \sin \theta = -\lim_{\dot{x} \rightarrow 0} \frac{\ddot{x}}{\alpha} \text{，將 p. A-2 公式(1.11): } \ddot{x} = -\frac{\alpha}{\cosh\left(\frac{\beta}{\alpha} \ln \frac{\dot{x}}{\dot{x}_0}\right)} \text{ 代入上式，}$$

$$\Rightarrow \lim_{\dot{x} \rightarrow 0} \sin \theta = \lim_{\dot{x} \rightarrow 0} \frac{1}{\cosh\left(\frac{\beta}{\alpha} \ln \frac{\dot{x}}{\dot{x}_0}\right)} = \lim_{\dot{x} \rightarrow 0} \frac{2}{e^{\frac{\beta}{\alpha} \ln \frac{\dot{x}}{\dot{x}_0}} + e^{-\frac{\beta}{\alpha} \ln \frac{\dot{x}}{\dot{x}_0}}} = 2 \lim_{\dot{x} \rightarrow 0} \frac{1}{\left(\frac{\dot{x}}{\dot{x}_0}\right)^{\frac{\beta}{\alpha}} + \left(\frac{\dot{x}}{\dot{x}_0}\right)^{-\frac{\beta}{\alpha}}}$$

$$= 2 \lim_{\dot{x} \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{\dot{x}}{\dot{x}_0}\right)^{\frac{\beta}{\alpha}}}{\left(\frac{\dot{x}}{\dot{x}_0}\right)^{\frac{2\beta}{\alpha}} + 1} = 0$$

因此當物體運動最終時($t \rightarrow t_f$)，其 x 向速度逐漸降為零 ($\dot{x} \rightarrow 0$)，此時 $\sin \theta = 0$ ，即 $\theta = 0^\circ$ ，代表物體最後軌跡的切線方向必與 y 軸平行，其結果示意圖如右所示。



【評語】 051814

本件作品延伸摩擦力實驗為二維實驗，構思及學理論述清楚明確。並且能夠提出新的量測摩擦係數的方法，實驗結果與理論推演切合。可以考慮進行精密量測，討論看看可以量多準確？結果的適用範圍？平面的摩擦是否均勻？

作品海報

摘要

本研究探討動摩擦力對物體二維平面運動的影響，由實驗設計精確觀測紀錄物體運動之位置、速度與加速度，推論出摩擦力方向，並解出運動微分方程式，得到六個函數關係式，經由函數關係式轉換，模擬出物體的運動的軌跡以及其位置、速度、加速度隨時間的變化，進行實驗量測印證。本研究也探討初速度、斜面傾角、摩擦係數等變因，對斜面二維運動的影響，推導出運動歷時、停止位置與其初速度的關係式，進一步發現測量動摩擦係數的新方法，並由實驗量測結果得到證實。

壹、研究動機

物體在二維平面曲線滑動時，其摩擦力只存在於切線方向嗎？還是也有法線方向分量？如何證實？動摩擦力又如何影響平面運動的物體？本研究藉由實驗量測的數據分析，結合理論模型之推導，試圖釐清這些議題。

貳、研究目的

- 一、探討斜面上二維運動之摩擦力方向。
- 二、建構斜面上二維運動之理論模型與運動方程式。
- 三、探討影響斜面上二維運動之變因。

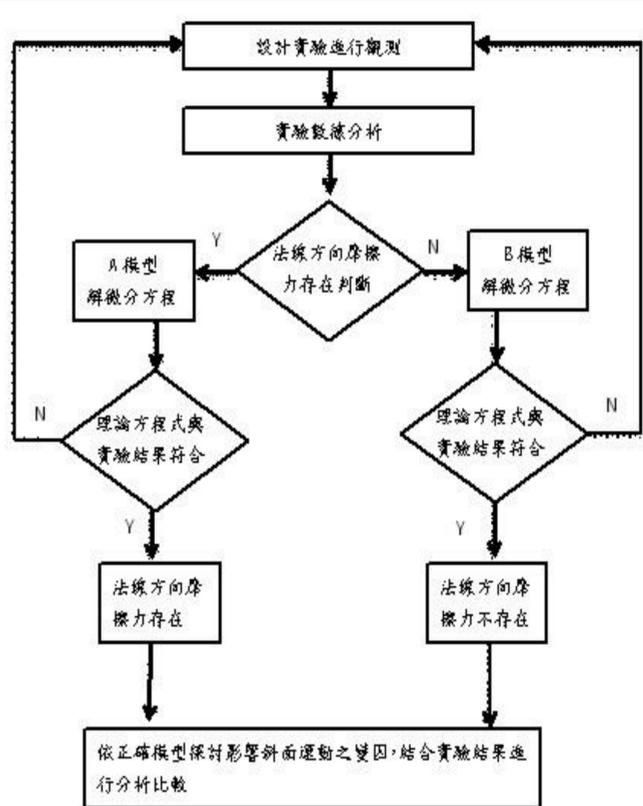
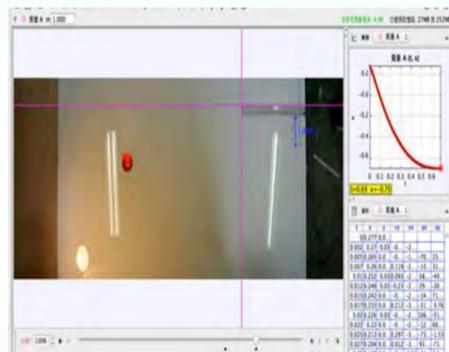
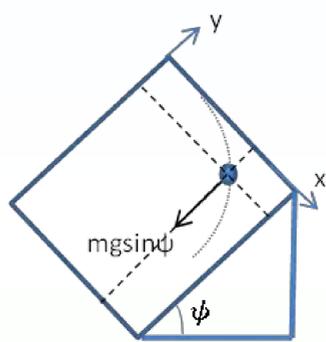
參、研究設備及器材

- 一、數位相機、腳架、照明燈、壓克力板、木板、發射器、木條、直尺、砝碼、棉線、個人電腦。
- 二、軟體：Tracker、MS Excel、Wolfram alpha。

肆、研究過程與方法

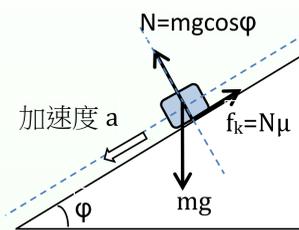
- 一、非光滑斜面上二維運動物體之觀測

(一) 觀測裝置



(二) 斜面動摩擦係數 μ 之測量

$$mgsin\phi - mgcos\phi \cdot \mu = ma \rightarrow \mu = (gsin\phi - a)/gcos\phi \text{ ---(a)}$$



(三) 斜面二維運動之觀測

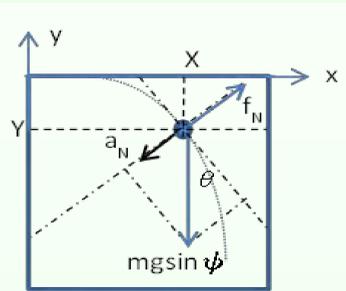
1. 以鉛錘線測量斜面傾角 ϕ ，校準調整相機拍攝角度正俯視斜板。
2. 以發射器將圓盤沿斜面橫軸方向射出，以數位相機錄影模式紀錄其運動過程。
3. 以軟體Tracker擷取影像，測出物體不同時刻位置、速度、加速度。
4. 分別改變初速、斜面傾角、粗糙度重複上述步驟。

二、斜面上二維運動摩擦力方向之探討

(一) 法線加速度 a_N 與切線縱軸間夾角 θ 的函數圖形分析

$$mg \sin \phi \sin \theta - f_N = ma_N \rightarrow a_N = g \sin \phi \sin \theta - f_N / m \text{ ---(b)}$$

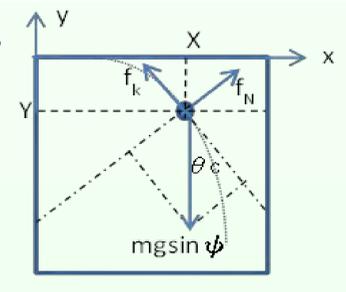
實驗數據分析，若 $f_N=0$ ， a_N 與 $\sin\theta$ 函數圖形應為過原點之直線。



(二) $\cos\theta_c$ 與斜面傾角 ϕ 之函數圖形分析

$$mgsin\phi - f_k \cos\theta_c - f_N \sin\theta_c = 0 \rightarrow \cos\theta_c = \frac{\tan\phi}{\mu} - \frac{f_N \sin\theta_c}{mg\mu \cos\phi} \text{ ---(c)}$$

數據分析，若 $f_N=0$ ， $\cos\theta_c$ 與 $\tan\phi$ 函數圖形為過原點之直線。



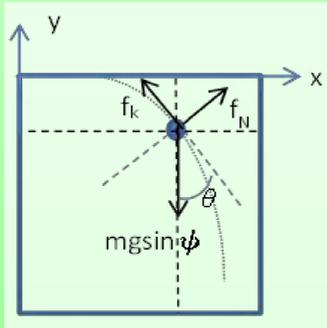
三、非光滑斜面二維運動模型之建構分析

(一) 模型A：法線方向的摩擦力 $f_N \neq 0$

x,y向之運動方程式分別為：

$$-f_k \sin \theta + f_N \cos \theta = m\ddot{x}$$

$$f_k \cos \theta + f_N \sin \theta - mg \sin \phi = m\ddot{y}$$

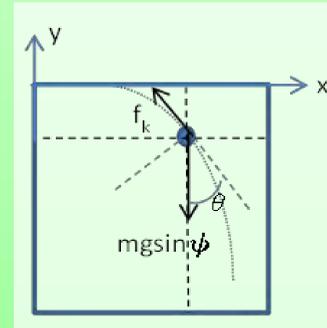


(二) 模型B：法線方向的摩擦力 $f_N = 0$

x,y向運動方程式分別為：

$$-f_k \sin \theta = m\ddot{x}$$

$$f_k \cos \theta - mg \sin \phi = m\ddot{y}$$

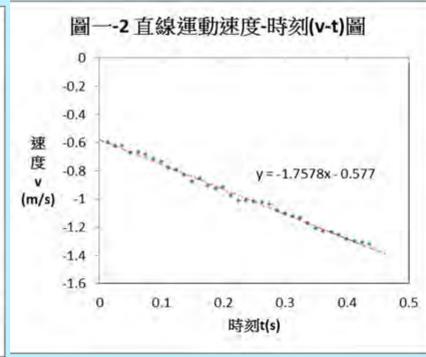
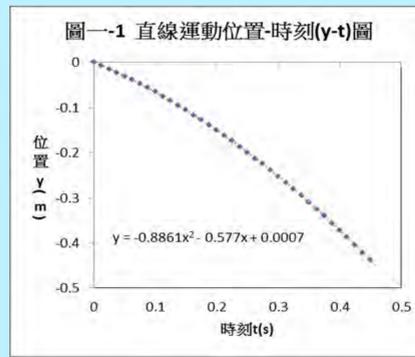


伍、研究結果

一、斜面上二維運動之摩擦力方向探討

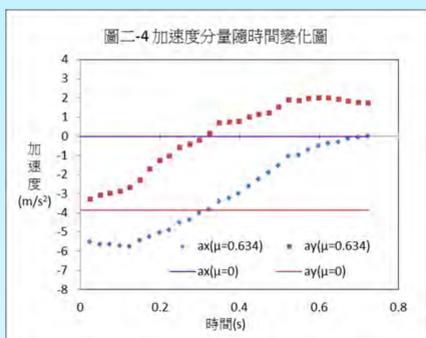
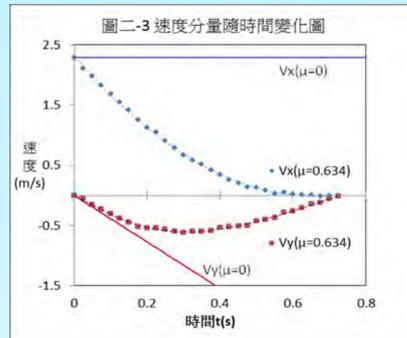
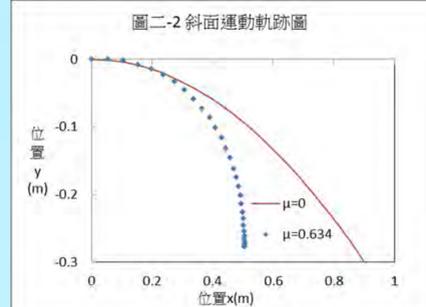
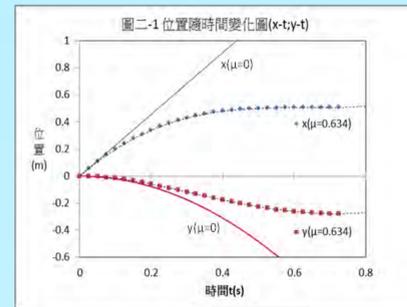
(一) 動摩係數之測量

[圖一-1 ~ 2] 為物體在傾角 $\phi = 41.09^\circ$ 的斜面上作直線運動之位置 $y-t$ 圖及速度 $v-t$ 圖，顯示物體作等加速度運動。由 $v-t$ 圖斜率計算出加速度值 $a = 1.758 \text{ (m/s}^2\text{)}$ ，將此值代入公式(a)，推算出斜面的動摩係數 $\mu = 0.634$ 。



(二) 斜面上二維運動物體之觀測

[圖二-1 ~ 4] 為物體在傾角 $\phi = 23.20^\circ$ 的斜面上作二維運動之位置 $(x,y)-t$ 、軌跡 $(x-y)$ 、速度 $(v_x, v_y)-t$ 、加速度 $(a_x, a_y)-t$ 的關係圖。其中實點為物體在 $\mu = 0.634$ 粗糙斜面的實際觀測值，實線則是光滑斜面的理論計算值。

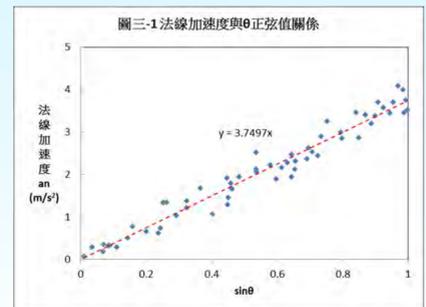


1. 位置 (x,y) -時間 t : 粗糙斜面上的摩擦力確實阻礙物體在各分量上的前進。
2. 軌跡圖 $(x-y)$: 物體在粗糙斜面上的運動軌跡向下的彎曲程度較大，隨時間增加兩者間的差異愈明顯。
3. 速度 (v_x, v_y) -時間 t : 粗糙斜面上運動之 v_x 隨逐漸減少，最後至停止，其過程非等加速度; 而 v_y 在初階段逐漸增加至極大值後，會再逐漸減漸少至停止。
4. 加速度 (a_x, a_y) -時間 t : 粗糙斜面之 a_x 隨時間逐漸減少至零，兩者間非為一次線性函數關係; 其 a_y 隨時間變化，由負方向逐漸減少至零後，再轉為正方向逐漸增加，兩者間亦非一次線性函數關係。

(三) 法線方向摩擦力是否存在的判斷

1. 法線加速度 a_N 與 $\sin\theta$ 函數圖形分析

(1) 物體在 $\phi = 23.20^\circ$ 的斜面上運動，觀測計算所得 a_N 與 $\sin\theta$ 函數圖如[圖三-1]，兩者為通過原點斜直線。依關係式(b)可推論：斜面二維運動物體之法線方向分量摩擦力 f_N 並不存在。

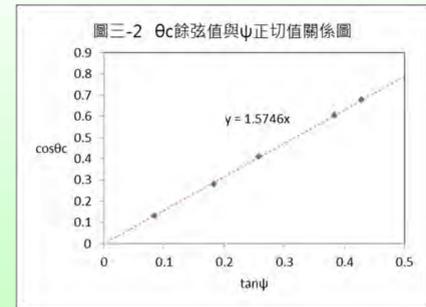


(2) 關係式(b)式應修正為(b'')式: $a_N = g \sin \phi \sin \theta$ --- (b'')

式中 a_N 與 $\sin\theta$ 函數關係斜率為 $g \sin \phi$ ，將實驗裝置之 g 、 ϕ 值代入，此斜率值 = 3.856，而由實驗所得[圖三-1] 的斜率值 = 3.7497，兩者間的差異只有 2.76%，強化了前項推論的正確性。

2. $\cos\theta_c$ 值與 $\tan\phi$ 值之函數圖形分析

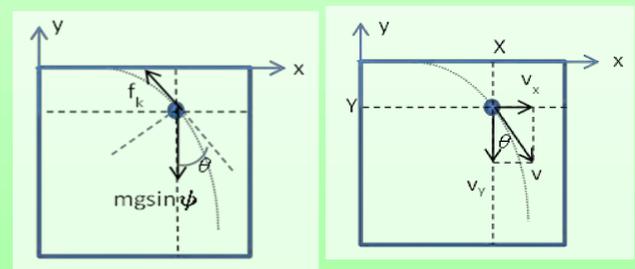
(1) 不同斜角 ϕ ，觀測推算所得 $\cos\theta_c$ 與 $\tan\phi$ 的關係如[圖三-2]，兩者為通過原點的斜直線，依關係式(c)可推論：斜面二維運動物體之法線方向分量摩擦力 f_N 並不存在。



(2) 關係式(c)式應修正為(c'')式:

$$\cos \theta_c = \frac{\tan \phi}{\mu} \text{ --- (c'')}$$

式中 $\cos\theta_c$ 與 $\tan\phi$ 的函數關係斜率值為 $1/\mu$ ，其倒數為 μ 。[圖三-2] 的斜率值 = 1.5746，其倒數值 = 0.635，與實驗測得斜面 $\mu = 0.634$ ，兩者間的差異只有 0.17%，再強化前項推論的正確性。



二、非光滑斜面二維運動方程式推導

1. 以 $f_N = 0$ 為基礎模型的三個方程式，可推導出關係式(一 ~ 六)：

X方向: $-f_k \sin \theta = m\ddot{x}$ Y方向: $f_k \cos \theta - mg \sin \phi = m\ddot{y}$ 幾何關係: $\tan \theta = \frac{\dot{x}}{-\dot{y}}$

$$a_x = -\frac{g\mu \cos \phi}{\cosh\left(\frac{\tan \phi}{\mu} \ln \frac{v_x}{v_{x0}}\right)} \text{ --- (式一)}$$

$$t = \frac{v_x \left[\frac{\tan \phi}{\mu} \sinh\left(\frac{\tan \phi}{\mu} \ln \frac{v_x}{v_{x0}}\right) - \cosh\left(\frac{\tan \phi}{\mu} \ln \frac{v_x}{v_{x0}}\right) \right] + v_{x0}}{\frac{g(\mu^2 \cos^2 \phi - \sin^2 \phi)}{\mu \cos \phi}} \text{ --- (式二)}$$

$$x = -\frac{v_x^2 \left[\frac{\tan \phi}{\mu} \sinh\left(\frac{\tan \phi}{\mu} \ln \frac{v_x}{v_{x0}}\right) - 2 \cosh\left(\frac{\tan \phi}{\mu} \ln \frac{v_x}{v_{x0}}\right) \right] + 2v_{x0}^2}{g\mu \cos \phi \left[\left(\frac{\tan \phi}{\mu}\right)^2 - 4 \right]} \text{ --- (式三)}$$

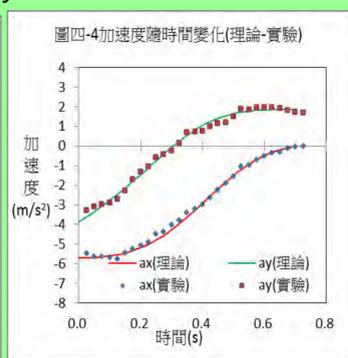
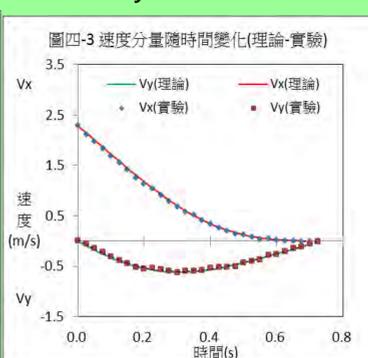
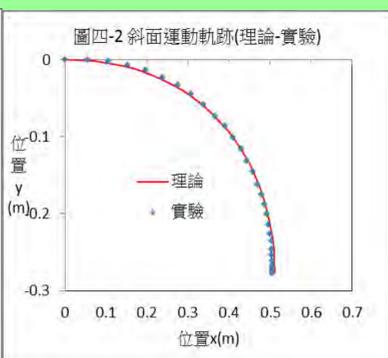
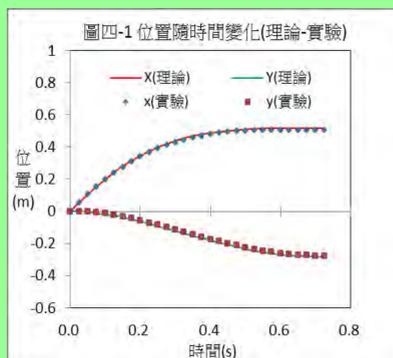
$$a_y = -g\mu \cos \phi \tanh\left(\frac{\tan \phi}{\mu} \ln \frac{v_x}{v_{x0}}\right) - g \sin \phi \text{ --- (式四)}$$

$$y = -\frac{v_x^2 \left\{ \frac{\tan \phi}{\mu} \cosh\left(2 \frac{\tan \phi}{\mu} \ln \frac{v_x}{v_{x0}}\right) - \sinh\left(2 \frac{\tan \phi}{\mu} \ln \frac{v_x}{v_{x0}}\right) \right\} - v_{x0}^2 \left(\frac{\tan \phi}{\mu}\right)}{4g\mu \cos \phi \left[\left(\frac{\tan \phi}{\mu}\right)^2 - 1 \right]} \text{ --- (式六)}$$

$$v_y = v_x \sinh\left(\frac{\tan \phi}{\mu} \ln \frac{v_x}{v_{x0}}\right) \text{ --- (式五)}$$

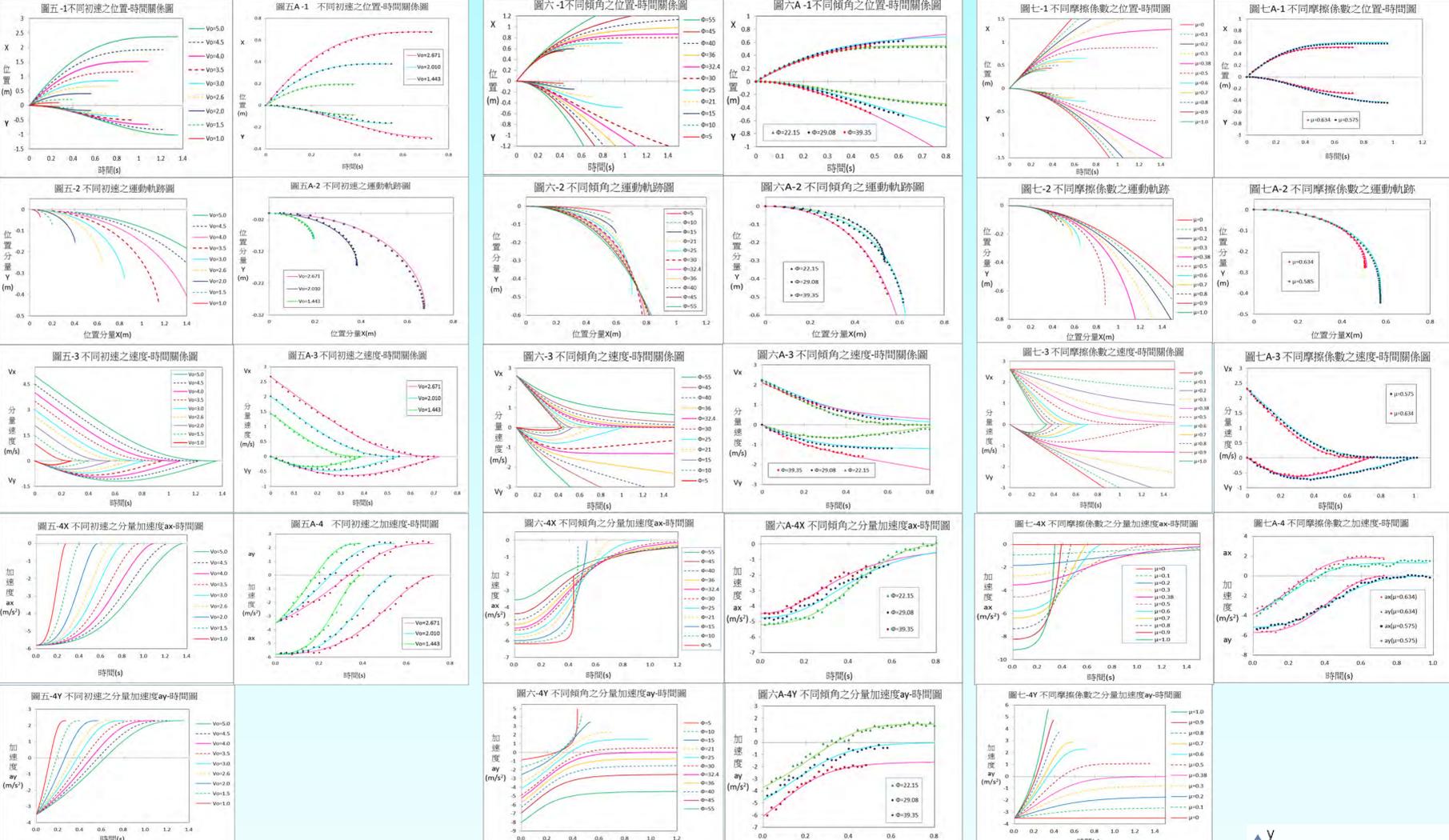
由(式一 ~ 六)中取適當兩式，可以分別模擬出 $x-t$ 、 $y-t$ 、 $x-y$ 、 v_x-t 、 v_y-t 、 a_x-t 、 a_y-t 等關係圖形。

2. [圖四-1 ~ 4] 為理論模擬曲線與實驗量測資料比較，兩者非常吻合，表示不存在法線向摩擦力的模型B較符合物體的運動實況。



三、影響斜面上二維運動變因之探討

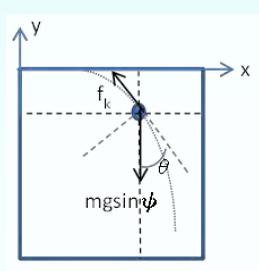
(一)操縱變因：初速度 v_{x0} (二)操縱變因：斜面傾角 ϕ (三)操縱變因：動摩擦係數 μ



陸、問題與討論

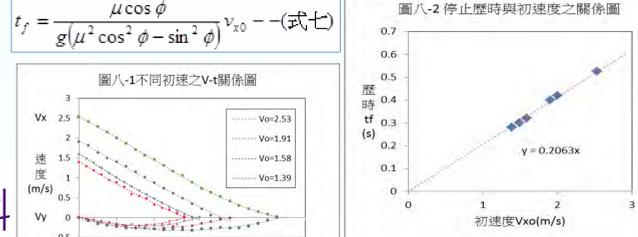
一、物體可停止在斜板上的條件為何？

若物體要在停止，其y向淨力應為+y方向，如右圖示： $f_k \cos \theta > mg \sin \phi$
 $\Rightarrow (\mu mg \cos \phi) \cos \theta > mg \sin \phi \Rightarrow \cos \theta > \sin \phi / \mu \cos \phi = \tan \phi / \mu \Rightarrow \tan \phi / \mu < 1 \Rightarrow \tan \phi < \mu$



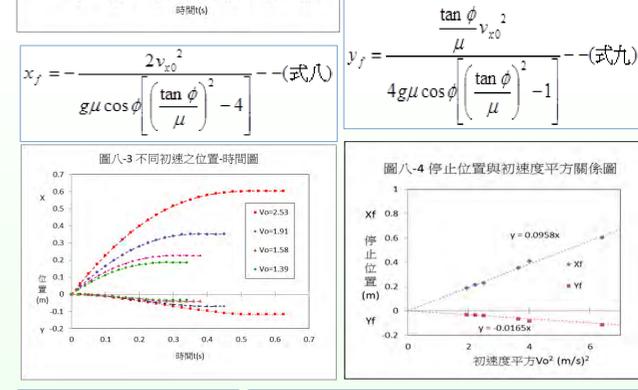
二、物體停在斜板上運動歷時 t_f 與初速 v_{x0} 的關係為何？

不同 v_{x0} 物體速度-時間如[圖八-1]，當 v_{x0} 愈大，運動歷時愈長。以(式二)導出(式七)，顯示 t_f 正比於 v_{x0} 。測量不同 v_{x0} 的 t_f ，發現兩者關係為過原點斜直線如[圖八-2]，其斜率與理論值差異為7.99%。



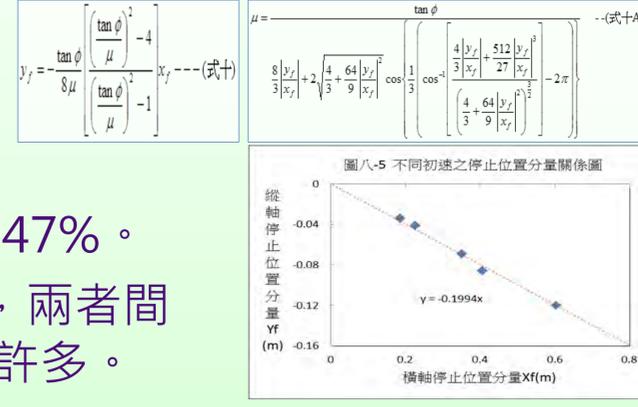
三、物體停在斜板上位置(x_f , y_f)與初速的關係為何？

不同 v_{x0} 物體位置-時間如[圖八-3]，當 v_{x0} 愈大，停止位置愈遠，以(式三)(式六)導出(式八)(式九)，顯示(x_f , y_f)正比於 v_{x0}^2 。測量不同 v_{x0} 的(x_f , y_f)，發現 x_f 、 y_f 與 v_{x0}^2 的關係皆為過原點斜直線如[圖八-4]，其斜率與理論值差異分別為1.02%、6.81%。



四、能否由測量停止位置推算斜板的摩擦係數？

- (式八)(式九)聯立，得(式十)(式十A)，推論出 y_f 正比於 x_f 。測量斜板上不同初速物體的(x_f , y_f)， y_f 與 x_f 關係為過原點直線如[圖八-5]，其斜率與理論值相差6.47%。
- 以(式十A)與(式a)傳統方法分別推算的 μ 值如[表一]，兩者間差異為0.32%~7.26%，但(式十A)的方法簡單方便許多。



柒、結論

- 以程式軟體擷取物體斜面二維運動數位影像，可精確測量其運動軌跡、位置、速度、加速度隨時間的變化。
- 兩種不同方法進行實驗數據分析，皆顯示斜面二維運動物體，受到動摩擦力只在切線方向，不存在法線向分量。
- 以只存在切線方向摩擦力的模型為基礎，解出物體斜面上二維運動的微分方程式，得到由初速度、傾角、摩擦係數等變數所組成的六個函數關係式。
- 藉由關係式轉換變數，模擬出斜面二維運動物體的軌跡、位置、速度、加速度隨時間變化的關係曲線，與實驗量測結果符合，證明了法線分量摩擦力不存在。
- 推導出物體最終停在斜面上運動歷時、位置的函數關係式，預測歷時與初速度成正比、分量位置與初速平方成正比，並經由實驗證實此項預測。
- 發現測量動摩擦數的新方法，只需要測量物體在斜面上最終停止位置與傾角，就可推算出斜板的動摩擦係數，大幅提升動摩擦係數測量的便利性。

傾角 ϕ (°)	4.82	10.37	14.48	20.96	23.20
位置 x_f (m)	0.478	0.214	0.594	0.659	0.506
位置 y_f (m)	0.034	0.036	0.142	0.273	0.277
直接計算 μ	0.601	0.588	0.624	0.648	0.636
觀測推算 μ	0.634	0.634	0.634	0.634	0.634
差異(%)	-5.21%	-7.26%	-1.58%	2.21%	0.32%

捌、參考資料及其他

- 高中基礎物理[二B],龍騰文化。
- 維基百科<https://zh.wikipedia.org/wiki>。
- 程式軟體Wolfram Alpha