中華民國第 57 屆中小學科學展覽會
作品說明書

高級中等學校組　物理與天文學科

第一名

最佳創意獎

051804

論平行電板間肥皂泡之變形現象

學校名稱：臺北市立建國高級中學

作者：	指導老師：
高二 姜理元	賴奕帆

關鍵詞：肥皂泡、平行電板、電場

得獎感言

這是我第二次，但也是學生階段最後一次參加全國中小學科學展覽會，我很珍惜這次機會。當一抵達雲林時，我決定拋開所有得失心，因為我知道唯有如此才能真正享受全國科展這難得的科學饗宴，而這也讓我得以更輕鬆地面對與投入這場比賽。

得到今年高中組物理與天文學科的第一名並非預期中的，當頒獎典禮時聽到自己的名字，內心的感受是既欣喜又忐忑－－一方面非常高興能夠得獎，另一方面明白自己的研究依然有它不足的地方。

欣賞來自全國各地高手們二十幾件令人驚艷的研究成果，以及與評審討論中激盪出各式各樣的新想法，是這次參賽當中最大的收穫，而這些可貴的經驗與體悟也將成為我未來物理研究路上的重要養分。

最後，感謝曾經幫助與鼓勵我的老師們、家人與同學。研究的過程中遭遇一次次的瓶頸，因為您們的支持，讓我在煎熬時仍然能夠堅持下去，成就了我精彩豐富的科學旅程。

摘要

觀察肥皂泡置於平行電板中時產生變形，本研究探討此現象並提出相關解釋。經由實驗發現肥皂泡在電場下的形狀是橢球的一部份；肥皂泡在施加電場前後的高度比與寬度比是兩電極板間電壓的二次曲線，且離心率與電壓成正比關係。透過觀察肥皂膜的光學性質、分析皂膜受力以推測其電學特性，確定系統之電荷與電位分布，進而提出理論模型計算系統能量，解釋平行電板間肥皂泡之變形現象。

壹、 研究動機

生活中常見的物理現象肥皂泡，其力學性質有眾多研究，然而它在電學方面的現象對我而言相對陌生。經文獻搜尋發現已有對這類現象的描述，然而對於平行電板間肥皂泡之幾何形狀變化及系統能量等問題的討論較少。身為一位科學人，對知識的渴求與熱情，使我著手進行電場中肥皂泡的研究。

貳、 研究目的

一、了解肥皂泡在平行電板電場中的幾何形狀與電極板間電壓的關係。

二、了解肥皂泡—平行電板系統的電荷、電位分布與肥皂泡形狀的關係。

三、了解肥皂泡—平行電板系統的能量與肥皂泡形狀之間的關係。

四、了解肥皂泡在電場中的變形現象的原因，並以適當的理論分析加以解釋。

參、 研究設備及器材

電木銅薄板(10cm*10cm)、pcb 板間隔柱(1cm)、導線、鱷魚夾、變壓器(HV100-152M, Plastic Capacitors, Inc.)、電阻($10^5\Omega$)、表面張力測定儀、界面活性劑、甘油、純水、針筒(1mL)、燒杯(50mL)、偏振片、燈泡、腳架、相機、電腦、影像分析軟體 Tracker、幾何繪圖軟體 Geogebra。

圖一：變壓器

圖二：電阻

圖三：表面張力測定儀

肆、 研究過程或方法

一、實驗器材之架設

(一)肥皂水配製

為了能夠以較長時間觀察肥皂泡在電場下的變形，加入甘油以延長肥皂泡的存活時間。

經嘗試後以水：介面活性劑：甘油＝50：2：3.5 (體積比)的比例配製肥皂水。

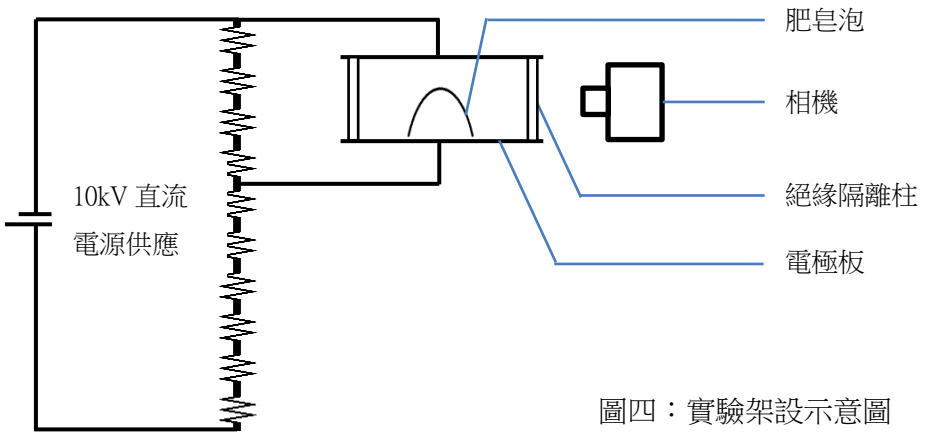
由掛環法(du Noüy ring method)測得肥皂水的表面張力為 $\gamma = 3.27 \times 10^{-2}\ N/m$。

(二)電源供應

要看到肥皂泡在平行電板中明顯變形需要較高的電壓。在實驗中採用 110V 交流電轉 10kV 直流電的變壓器，為了避免電流過大與調控電壓，將數個 $10^5\Omega$ 之電阻串聯分壓，並連接電極板。

(三)平行電板架設

電極板為單面導電之電木銅薄板，將導電面面對面擺放，並以絕緣之板間隔柱使平行電板相隔 1cm。



圖四：實驗架設示意圖

二、實驗二：肥皂泡幾何形狀與電壓的關係

(一)實驗目的與原理

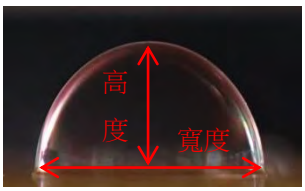
位於電極板上的肥皂泡產生變形，可以觀察到肥皂泡被「拉高」的現象(如圖五、圖六)，正負電極電位差上升時肥皂泡的高度與寬度也隨之變化。本實驗之目的在於了解肥皂泡的幾何形狀與電壓之間的關係。

(二)實驗步驟

1. 以針筒量取 0.2mL 空氣，前端沾取肥皂水，將肥皂泡注射至電極板正極。
2. 架設電極板並開啟電源。
3. 觀察並以相機紀錄肥皂泡在電源接通前後的形狀變化。
4. 以電腦軟體 Tracker 測量肥皂泡前後的高度與寬度，並以軟體 Geogebra 測量肥皂泡的離心率。

圖五：0V

圖六：5000V



圖七：高度與寬度

三、實驗二：肥皂膜偏振性的觀察

(一)實驗目的與原理

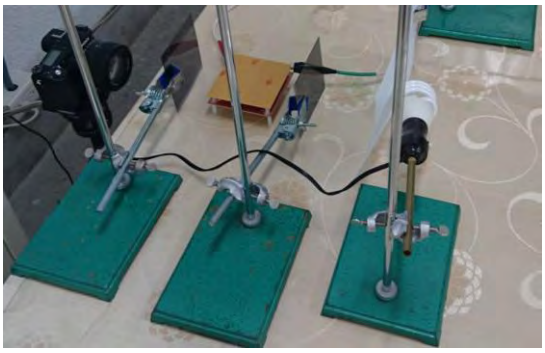
肥皂分子由非極性的碳鏈與極性的親水端組成，因此極性端指向膜的內部，如此的排列方式造成皂膜的偏振性。

實驗中檢驗偏振性的方法是分別放置兩塊偏振方向垂直的偏振片於肥皂泡與光源之間、肥皂泡與相機之間。肥皂分子排列方向與第一片偏振片的偏振方向平行時，偏振光無法通過；肥皂分子排列方向與第一片偏振片的偏振方向垂直時，光線雖然通過肥皂膜但無法通過第二片偏振片；若分子排列方向同時具有兩垂直方向的分量，那麼光線能夠被觀察到。

由於極性分子傾向沿著電場方向排列，因此推測可以藉由觀察肥皂泡表面的亮、暗位置，間接作為說明電場方向的佐證之一。

(二)實驗步驟

1. 將兩片偏振片分別置於肥皂泡與光源之間、肥皂泡與相機之間，且兩片偏振片的偏振方向垂直(如圖八)。
2. 接通電源，並在保持兩片偏振片偏振方向垂直下同時旋轉兩偏振片。
3. 觀察並記錄肥皂膜的亮、暗位置。



圖八

伍、 研究結果

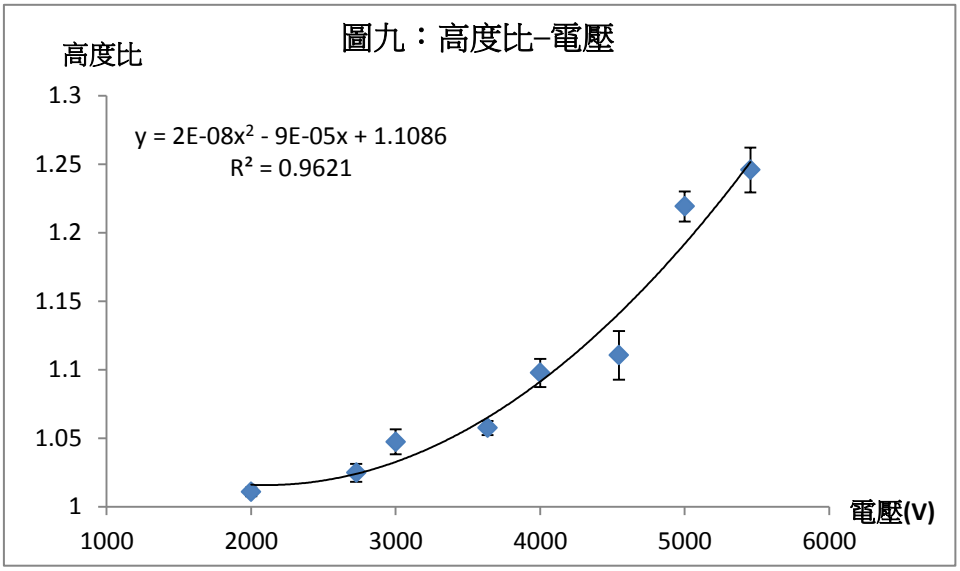
一、實驗一：肥皂泡幾何形狀與電壓的關係

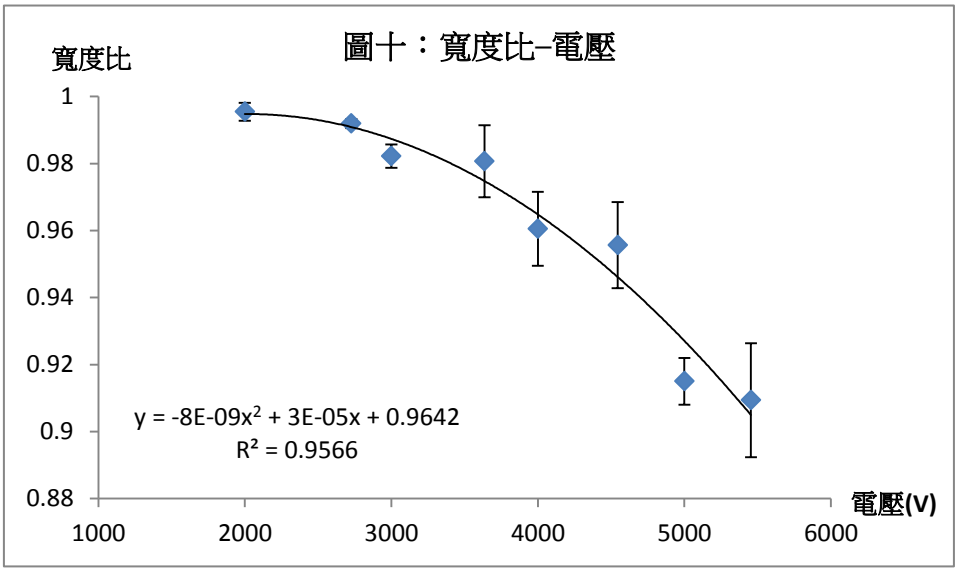
不同電壓時的肥皂泡高度、寬度記錄於表一。

表一：不同電壓時的肥皂泡高度、寬度				
電壓(V)	高度(前) (pixel)	高度(後) (pixel)	寬度(前) (pixel)	寬度(後) (pixel)
2000	308.5	313.0	607.0	602.0
	296.5	299.0	607.0	606.0
	313.0	315.5	613.0	611.0
	310.0	314.5	626.5	625.0
	310.0	312.5	623.5	619.0
2727	305.5	310.0	614.5	609.0
	297.0	307.0	630.5	624.0
	307.5	315.0	612.0	608.0
	306.5	313.0	617.5	613.0
	304.0	313.0	613.5	609.0
3000	298.0	314.0	625.5	617.0
	285.5	298.5	629.0	616.5
	300.0	313.5	632.5	618.6
	284.0	301.0	626.5	614.0
	306.0	316.0	620.0	611.5
3636	295.5	312.5	627.0	609.0
	302.5	317.5	602.0	595.0
	302.0	321.5	606.5	599.5
	302.5	321.0	601.5	596.0
	293.0	309.0	632.5	610.0
4000	341.5	377.0	739.0	710.0
	362.0	390.0	722.0	708.0
	350.5	387.0	745.5	710.0
	360.5	397.0	730.5	701.5
	344.5	379.5	749.0	710.5
4545	303.5	344.0	626.5	593.5
	293.5	327.5	626.5	592.5
	308.0	333.0	607.0	590.5
	303.0	334.0	612.0	593.5
	291.0	326.0	628.0	592.0
5000	347.5	420.0	744.0	680.5
	359.0	440.0	716.5	661.0

	349.5	427.0	740.0	671.5
	353.5	436.5	744.0	675.0
	358.0	431.5	729.0	673.0
5455	294.5	375.5	628.0	560.5
	300.0	370.5	609.5	564.5
	300.5	375.5	633.5	563.0
	298.5	371.0	619.5	563.0
	315.0	386.5	605.5	563.5

高度比與寬度比定義為施加電場後之高度與寬度除以原高度與寬度。取多次實驗之平均值，發現高度比與寬度比大致為電壓之二次曲線(如圖九、圖十所示)。





觀察不同電壓下的肥皂泡形狀時也發現肥皂泡幾何形狀隨電壓變化的規律。尚未施加電場時肥皂泡呈球形，而施加電場後肥皂泡的形狀接近橢球，且隨著電壓上升離心率增加，如圖十一、十二、十三所示。

圖十一：3000V

圖十二：4000V

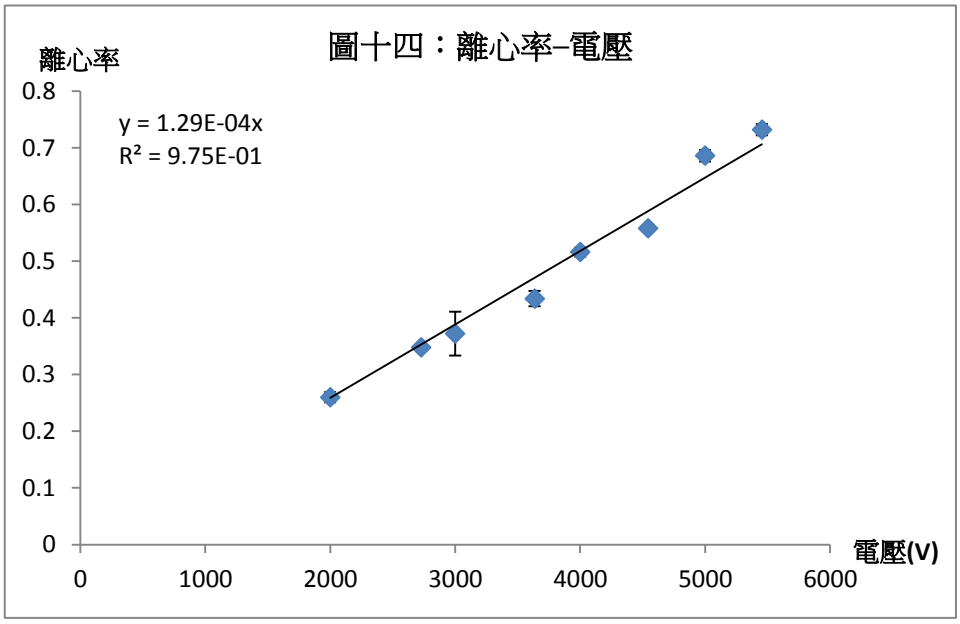
圖十三：5000V

不同電壓測得之肥皂泡離心率如下表所示。

表二：不同電壓時的肥皂泡離心率

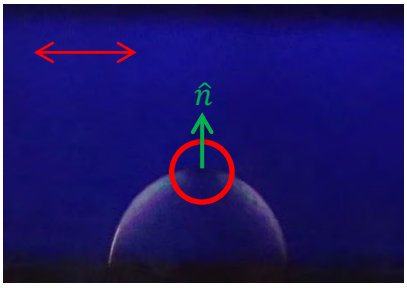
電壓(V)	離心率	電壓(V)	離心率
2000	0.25	4000	0.52
	0.27		0.51
	0.26		0.51
	0.27		0.51
	0.25		0.53
2727	0.35	4545	0.55
	0.35		0.56
	0.35		0.56
	0.34		0.56
	0.35		0.56
3000	0.42	5000	0.67
	0.34		0.70
	0.41		0.68
	0.37		0.69
	0.32		0.69
3636	0.43	5455	0.73
	0.43		0.73
	0.46		0.75
	0.42		0.73
	0.43		0.72

圖十四則為離心率對電壓之曲線，發現肥皂泡的離心率大致與電壓成正比。

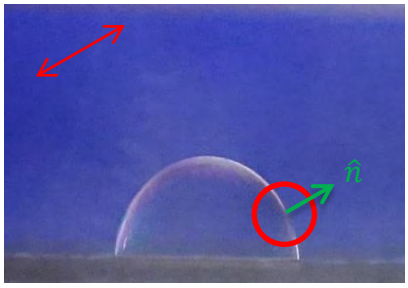


二、實驗二：肥皂膜偏振性的觀察

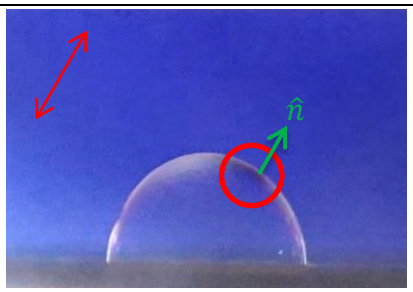
偏振片旋轉 0, 30, 60, 90 度時相機所記錄下的肥皂膜如下圖所示，其中雙箭頭表示肥皂泡與光源之間的偏振片的偏振方向。



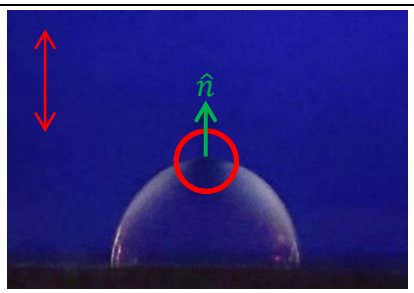
圖十五：0 度



圖十六：30 度



圖十七：60 度



圖十八：90 度

從圖中可以看到當偏振片旋轉時，肥皂泡最暗處的位置也隨之旋轉，且皂膜最暗處表面的法向量與任一偏振片偏振方向平行或垂直。

陸、 討論

一、 肥皂泡是等位體

(一)考慮局部皂膜的受力，包含重力、表面張力、氣壓造成的力與電場力，其中表面張力與氣壓之作用力均垂直皂膜表面，因此在邦德數(Bond number)足夠小，即重力影響可以忽略時，電場必須垂直皂膜表面以達靜力平衡。故推測皂膜的電位差 $\Delta V = -\int \vec{E} \cdot d\vec{r}$ 恆為零，即肥皂膜為等電位。

(二)另外，透過實驗二的偏振性質觀察與其原理討論，亦能推測出肥皂分子的排列方向在施加電場後依然垂直皂膜表面，這也再次說明了肥皂泡表面只有法向電場，肥皂膜為等位面。

二、 理論分析

(一)基本假設

1. 邦德數足夠小，討論時可忽略重力與其所造成的效應。
2. 平行電板長寬足夠大，肥皂泡不受電板邊緣效應影響，形狀為軸對稱。
3. 肥皂膜厚度極薄且肥皂泡體積固定。
4. 肥皂泡為等位體，電位與其所接觸之電極板相同。

(二)肥皂膜形狀與面電荷密度的關係

透過考慮皂膜的靜力平衡，可以得到肥皂膜的曲率與該處電荷密度之關係。

根據高斯定律，在面電荷密度σ處的表面電場強度為

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

則該處所受到的靜電壓力為

$$P_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}$$

皂膜受到向外的靜電壓力與氣壓差及向內的表面張力，若肥皂泡未施加電場時的曲率為κ_0，則由力平衡概念與楊—拉普拉斯定律可知

$$P_E + 4\gamma\kappa_0 = 4\gamma\kappa$$

於是可以得到面電荷密度與皂膜曲率的關係式

$$\sigma = \sqrt{8\varepsilon_0\gamma(\kappa - \kappa_0)}$$

此式說明了肥皂泡變形時的電荷分布情形，只要確定肥皂泡的形狀，其電荷分布與表面電場便可以確定。

當無外加電場，肥皂膜各處為電中性故曲率處處相同，使得肥皂泡呈現球形；然而在平行電板之間存在電位差時，肥皂泡被充電而受到電場力，使得各處曲率不相等。肥皂泡在電場中變形的原因是表面張力與電場力的抗衡。

(三)肥皂泡—平行電板系統的能量

從上面的討論能夠得知電荷分布與肥皂泡幾何形狀之間的關係，但要考慮電荷之間的庫倫作用力較不容易，因此考慮從系統能量的角度切入進行探討。

肥皂泡—平行電板系統的能量以兩種形式儲存，包含靜電位能與表面張力能。

1. 靜電位能

如圖十九所示，圓柱座標系中電位函數$\phi(r,z)$在無電荷分布的平行電板間滿足拉普拉斯方程

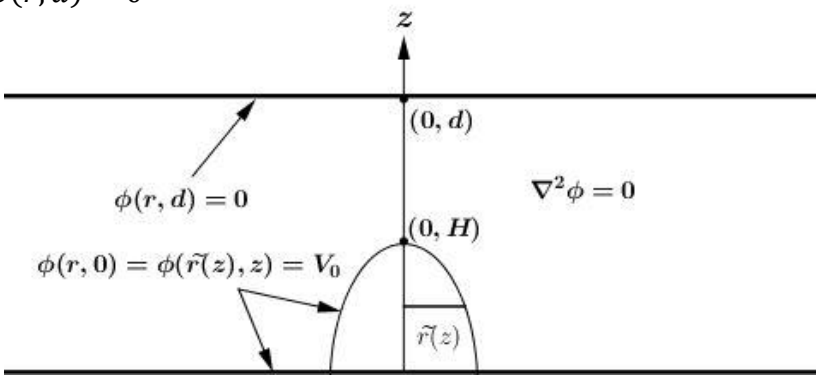
$$\nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 0$$

若軸對稱肥皂泡的形狀為$\tilde{r} = \tilde{r}(z)$，那麼由肥皂泡的等電位性質可以確定電位函數之邊界條件

(1) $\phi(r,0) = \phi(\tilde{r}(z),z) = V_0$

(2) 當 r ≫ 肥皂泡寬度，$\frac{\partial}{\partial r}\phi(r,z) \to 0$

(3) $\phi(r,d) = 0$



圖十九

於是系統的靜電位能可由靜電場能密度之體積積分得到：

$$U_E = \iiint \frac{1}{2}\varepsilon_0|\nabla\phi|^2 d\tau = \varepsilon_0\pi \iint |\nabla\phi|^2 r dr dz$$

2. 表面張力能

表面張力能正比於肥皂膜表面積，考慮肥皂泡的肥皂膜有內外兩面，

$$U_S = 2\gamma S$$

，其中γ為表面張力係數、S為肥皂泡表面積。

當系統達到平衡狀態時，總能量

$$U = -\iiint \frac{1}{2}\varepsilon_0 |\nabla\phi|^2 d\tau + 2\gamma S$$

應為極值，即 $\delta U = 0$，再配合體積守恆之約束

$$\int_0^H \pi r^2 dz = CONST.$$

可以構成一個完整的變分問題以解出肥皂泡的形狀。

(四)數值模擬

設電極板直徑為 $1.00 \times 10^{-1} m$ ，間距則為 $1.00 \times 10^{-2} m$ 。在這裡我們假設位於電極板中央的肥皂泡是一軸對稱的半橢球，體積固定為 0.2mL，初始為一半徑 $\mathrm{R} = 4.57 \times 10^{-3} m$ 的半球，並在體積守恆的條件下變化其離心率，探討系統能量如何受到肥皂泡離心率的影響。

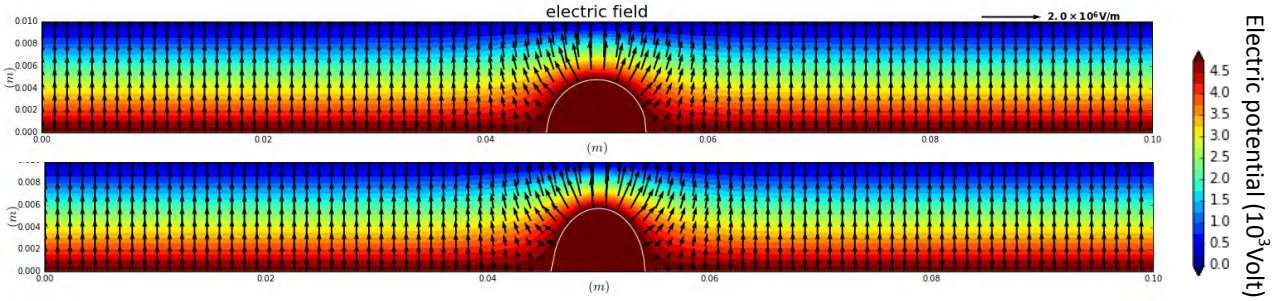
1. 靜電位能

以程式語言 python，利用 relaxation method 求解拉普拉斯方程以計算系統的靜電位能，進而得到系統電容與肥皂泡離心率之間的關係。

從模擬的結果可以看出肥皂泡的形變對空間中電位函數分布造成影響(以圖二十、二十一為例)，系統電容 $C = \frac{\iiint \varepsilon_0 |\nabla\phi|^2 d\tau}{V^2}$ 對離心率(e)平方之曲線則如圖二十二所示，可以看出當肥皂泡離心率上升電容值亦上升，且電容值大致為離心率的二次函數：

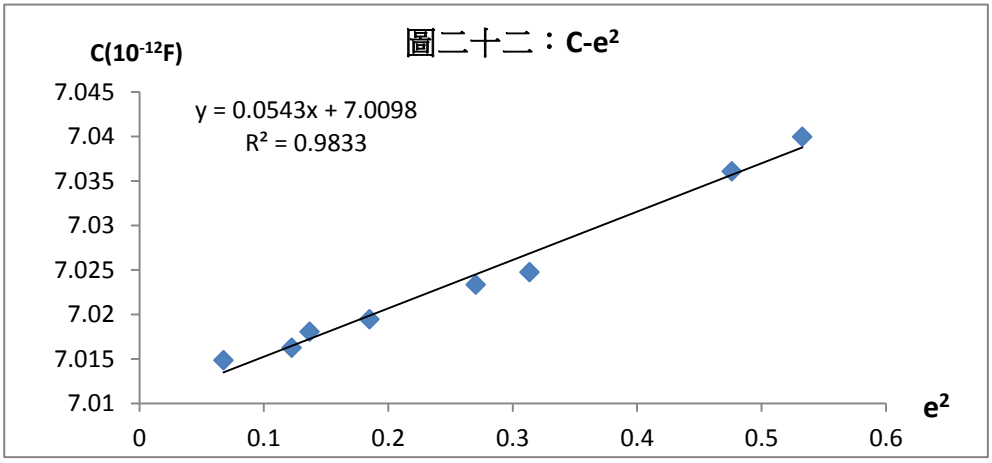
$$C(e) \approx \eta e^2 + C(0)$$

其中η是以法拉(F)為單位的常數，$\eta = 5.43 \times 10^{-14}\ F$。



圖二十(上)、二十一(下)：肥皂泡對系統電位分布的影響。

肥皂泡與電極板依真實比例繪製，肥皂泡離心率分別為 0.37(上)與 0.73(下)。



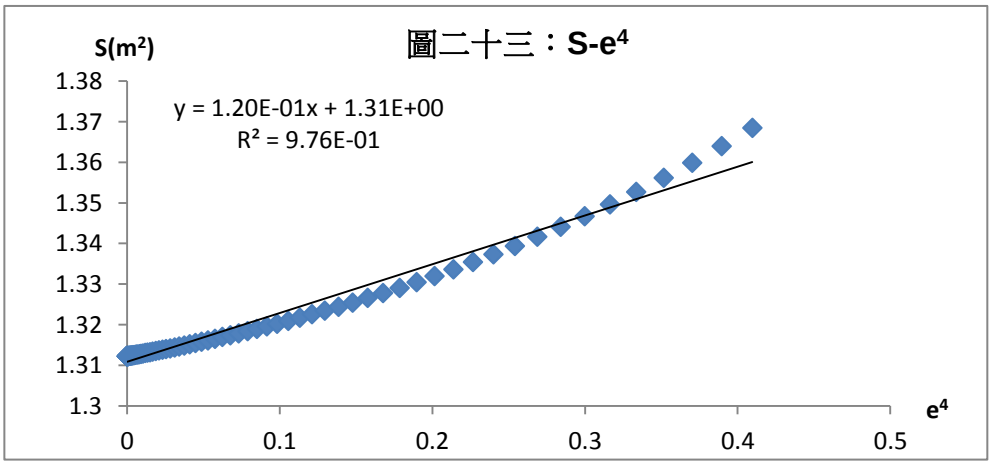
2. 表面張力能

令肥皂泡的長軸為 a、短軸為 b，則其表面積可以寫為

$$S = \pi(b^2 + a^2 \frac{\cos^{-1}(b/a)}{\tan(\cos^{-1}(b/a))})$$

在體積守恆的條件下有 $a = \sqrt[3]{\frac{1}{1-e^2}}\mathrm{R}$，$\mathrm{b} = \sqrt[6]{1-e^2}R$ 。

圖二十三說明了在實驗結果範圍內($e < 0.8$)表面積 S 大致為 e 的四次函數，也就是



$$S(e) \approx \alpha e^4 + S(0)$$

其中α是以平方公尺(m^2)為單位的常數，$\alpha = 1.20 \times 10^{-5}\ m^2$。

由以上討論我們得以將系統能量以離心率表示，此時考慮

$$\delta U = \delta\left(2\gamma S - \frac{1}{2}CV^2\right) = \delta\left(2\gamma(\alpha e^4 + S(0)) - \frac{1}{2}(\eta e^2 + C(0))V^2\right) = 0$$

，於是得到離心率與電壓之關係式

$$e = \sqrt{\frac{\eta}{8\gamma\alpha}}V$$

(五)與實驗結果之比較

此時將數值模擬所得之常數代入理論式中得到

$$\sqrt{\frac{\eta}{8\gamma\alpha}} = 1.32 \times 10^{-4}\ (\text{單位：}V^{-1})$$

回顧實驗所得的$e - V$圖斜率 $(1.29 \pm 0.05) \times 10^{-4}\ (V^{-1})$ ，理論所得的斜率在其誤差範圍內，相對誤差約為 2%。

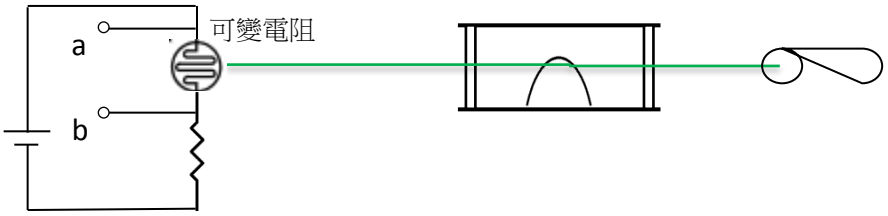
三、 為了降低各個肥皂泡之間的差異，實驗中利用針筒量取固定體積的空氣，希望藉此使每個肥皂泡的初始大小相同，且以每組電壓進行多次測量的平均作為結果，希望能透過實驗次數消弭誤差使結果更可信。

四、 本研究建立理論模型說明了肥皂泡離心率與板間電壓之間的正比關係，並給出了正比常數，最後得到與實驗結果接近的數值。綜觀分析過程，表面張力係數測定的誤差以及曲線擬合與數值模擬中鬆弛法的不準確皆為可能之誤差來源。

五、 未來將朝向肥皂泡在電場中的震盪行為進行探討。希望透過觀察肥皂泡在不同強度直流電場下的微幅震盪頻率或時變電場中的強迫震盪現象以推算系統的等效彈力係數與阻尼常數等物理量，或許能以此作為非接觸方式間接測量肥皂膜性質的方法，是值得探討的方向。目前正在嘗試進行肥皂泡震盪頻率的測量，打算以圖二十四中的方法進行實驗架設。利用雷射照射肥皂泡頂端，光線因通過肥皂膜而在遠處屏幕上產生干涉條紋，當肥皂泡變形時，干涉條紋亦產生變化。此時在屏幕上放置一光敏電阻串聯固定電阻並連接示波器測量 a,b 兩點之間的電壓，如此一來可將震盪情形轉為電壓訊號，

以測量肥皂泡的震盪週期。

六、 雖然本研究的實驗是在巨觀尺度下進行，但表面張力與靜電力在較小尺度下是常見且主要的作用力，探討肥皂泡在電場中的行為必定有助於我們對於相關現象有進一步的了解，可能對運用到表面張力性質的工業領域有所助益。



圖二十四

柒、 結論

一、 肥皂泡在平行電板間的高度與寬度為板間電壓的二次函數，其高度隨電壓增加而上升，寬度則下降。

二、 肥皂泡在平行電板電場中的形狀為橢球的一部分，其離心率與電壓成正比。

三、 肥皂泡的變形現象是表面張力與電場力的抗衡，分析肥皂膜的力平衡可以得到肥皂膜曲率與面電荷密度之間的關係。

四、 本研究建立理論模型提出計算肥皂泡形狀的方法，並實際以數值模擬進行探討，最後說明肥皂泡離心率與電壓之間的正比關係，得到與實驗數據相當接近的結果。

捌、 參考資料及其他

一、 Derek E. Moulton, John A. Pelesko (2008). Theory and experiment for soap-film bridge in an electric field. Journal of Colloid and Interface Science 322 (2008) 252 – 262. doi:10.1016/j.jcis.2008.02.045

二、 W. A. Macky (1930). The Deformation of Soap Bubbles in Electric Fields. Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 26, pp 421-428 doi:10.1017/S0305004100016145

三、 Surface Tension (n.d.). Retrieved March 6, 2017, from http://www.cns.gatech.edu/~predrag/courses/PHYS-4421-13/Lautrup/surface.pdf

四、 Griffiths, D. J. (1999).Introduction to electrodynamics. Upper Saddle River, N.J: Prentice Hall.

五、 表面張力測定•中興大學普通物理實驗室•取自 http://experiment.phys.nchu.edu.tw/ex_h.htm

【評語】051804

本作品探討肥皂泡在電場中的變化，實驗構想及實驗設計值得嘉許，討論包含形狀（高度、寬度、離心律）和電壓、能量的關係，利用偏振原理實驗討論電場方向，能夠利用實驗數據及理論推導完整說明肥皂泡離心率和電壓成正比的關係，建議可再加強觀察結果與理論的連結。

作品海報

摘要

觀察肥皂泡於平行電板間產生變形，本研究探討此現象並提出相關解釋。經由實驗發現肥皂泡在電場下的形狀是橢球的一部份；肥皂泡在施加電場前後的高度比與寬度比是兩電極板間電壓的二次曲線，且離心率與電壓成正比關係。透過觀察肥皂膜的光學性質、分析皂膜受力以推測其電學特性，確定系統之電荷與電位分布，進而提出理論模型計算系統能量，解釋平行電板間肥皂泡之變形現象。

研究動機

肥皂泡是生活中常見的物理現象，且有眾多其力學性質的探討，但它在電學方面的現象對我而言相對陌生。經文獻搜尋發現已有對這類現象的描述，然而對平行電板間肥皂泡之幾何形狀變化及系統能量等問題的討論較少。身為一位科學人，對知識的渴求與熱情，使我著手進行電場中肥皂泡的研究。

研究目的

一、了解肥皂泡在平行電板電場中的幾何形狀與電極板間電壓的關係。
二、了解肥皂泡—平行電板系統的電荷、電位分布與肥皂泡形狀的關係。
三、了解肥皂泡—平行電板系統的能量與肥皂泡形狀之間的關係。
四、了解肥皂泡在電場中的變形現象的原因，並以適當的理論分析加以解釋。

研究設備及器材

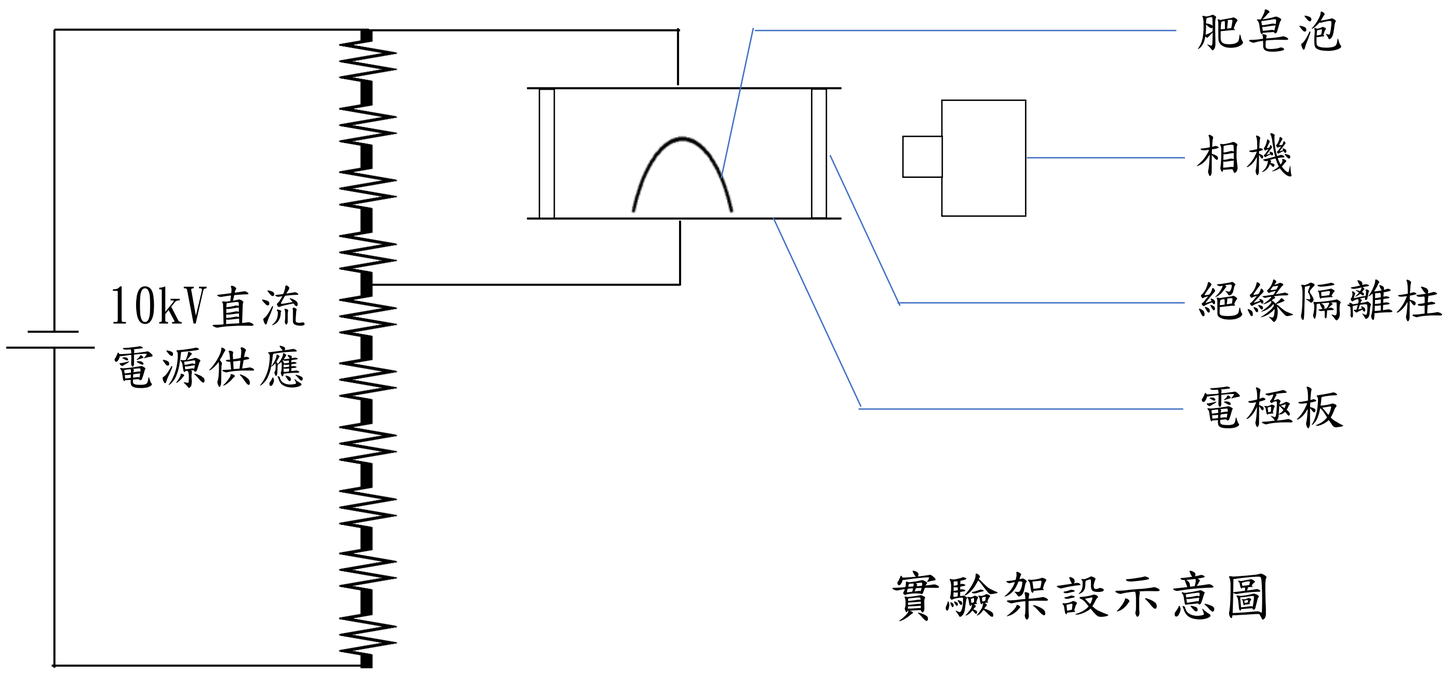
電木銅薄板(10cm*10cm)、pcb板間隔柱(1cm)、變壓器(HV100-152M, Plastic Capacitors, Inc.)、導線、鱷魚夾、電阻($10^5\Omega$)、表面張力測定儀、界面活性劑、甘油、純水、針筒(1mL)、燒杯(50mL)、偏振片、燈泡、腳架、相機、電腦、影像分析軟體Tracker、幾何繪圖軟體Geogebra。

研究過程或方法

進行實驗
- 觀察不同電壓下的肥皂泡形狀
- 觀察肥皂膜的偏振性

分析數據
- 肥皂泡高、寬與電壓的關係
- 肥皂泡在電場中的幾何形狀
- 肥皂泡離心率與電壓的關係

理論探討
- 肥皂泡幾何形狀與電荷分布
- 理論模型與系統能量之計算
- 數值模擬結果與實驗之比較



實驗架設示意圖

肥皂水
以水：介面活性劑：甘油＝50：2：3.5的體積比例配製肥皂水。
由掛環法測得肥皂水的表面張力為 $\gamma = 3.27 \times 10^{-2}\ N/m$ 。

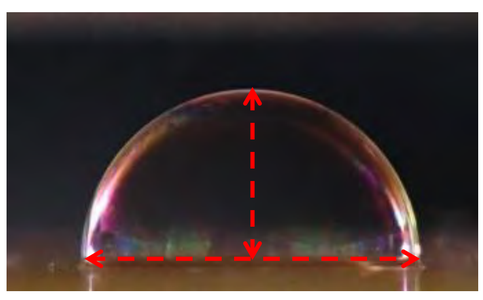
電源供應
實驗採用110V交流電轉10kV直流電之變壓器。為了避免電流過大與調控電壓，將數個$10^5\Omega$之電阻串聯分壓並連接電極板。

電極板
電極板為單面導電之電木銅薄板，將導電面面對面擺放，並以絕緣之板間隔離柱使平行電板相隔1cm。

肥皂泡
以針筒量取定量空氣，前端沾取肥皂水將肥皂泡注射至電極板上。

實驗一：觀察不同電壓下的肥皂泡形狀

利用影像分析軟體測量不同電壓下的肥皂泡高度、寬度與離心率。



0kV

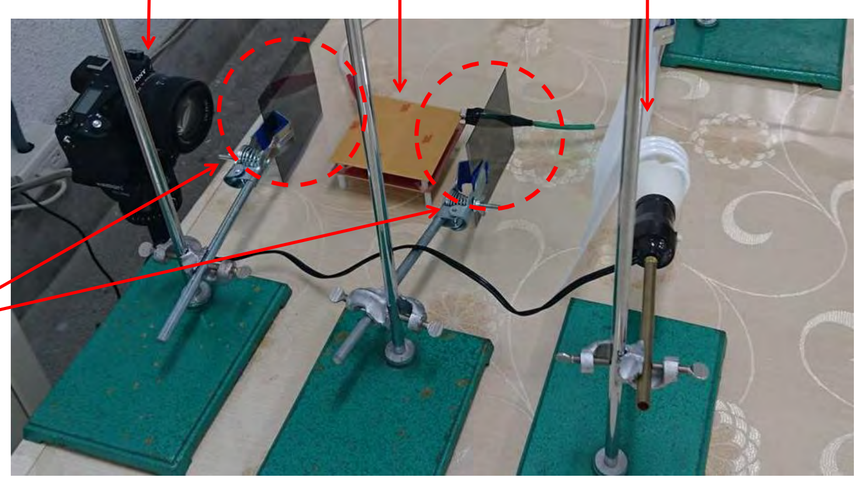
5kV

前後高度比
前後寬度比
離心率

實驗二：觀察肥皂膜的偏振性

肥皂分子具有極性，應傾向沿著電場方向排列，因此推測可藉由觀察肥皂膜的偏振性(觀測肥皂泡表面的亮暗位置)間接作為說明電場方向的佐證之一。

肥皂泡位於兩片偏振方向保持垂直的偏振片之間，若極性分子的指向平行任一偏振方向則光線無法穿越。

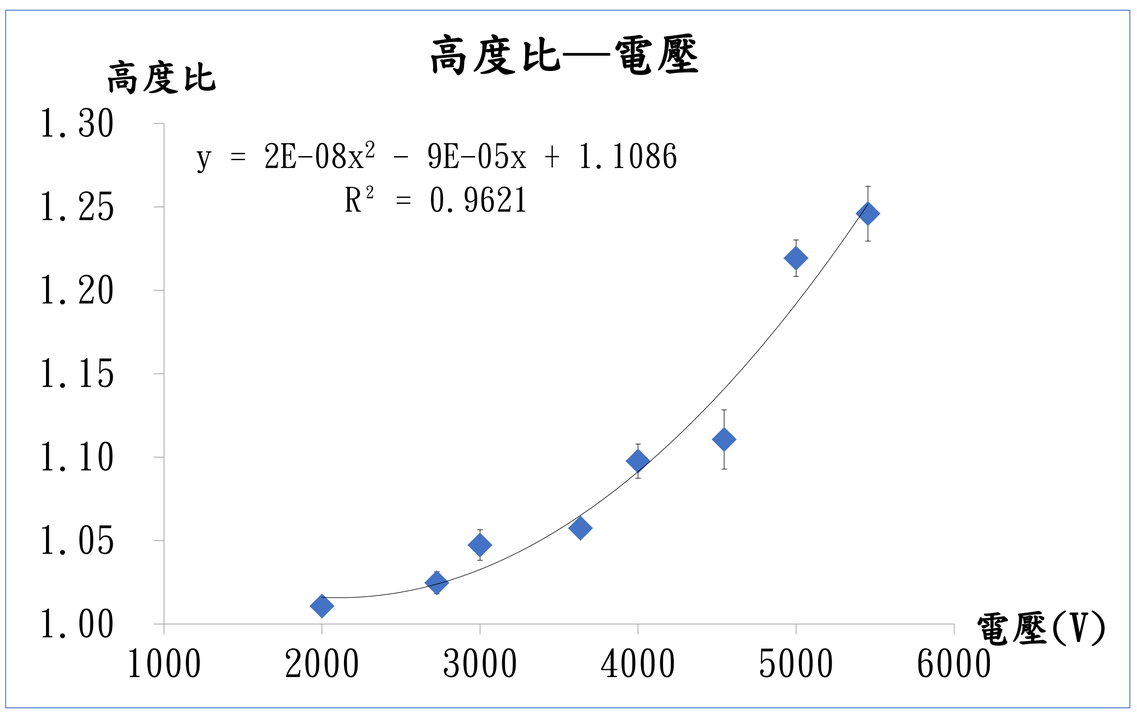


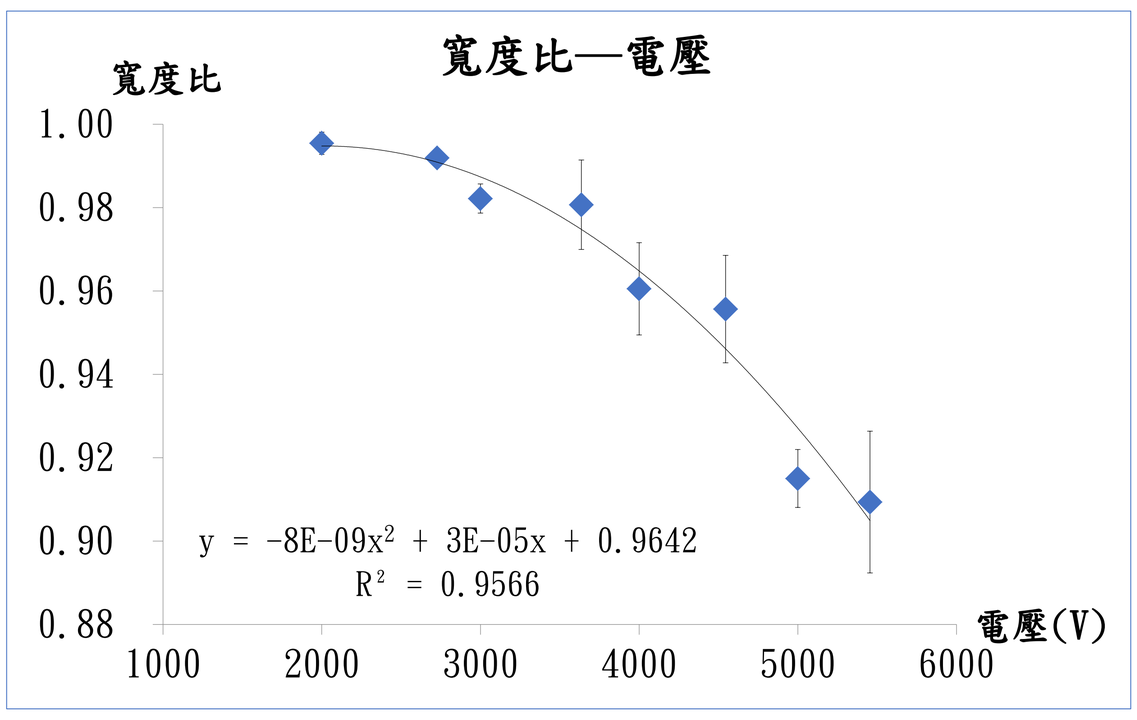
論平行電板間肥皂泡之變形現象

研究結果

肥皂泡的高度、寬度與電壓的關係

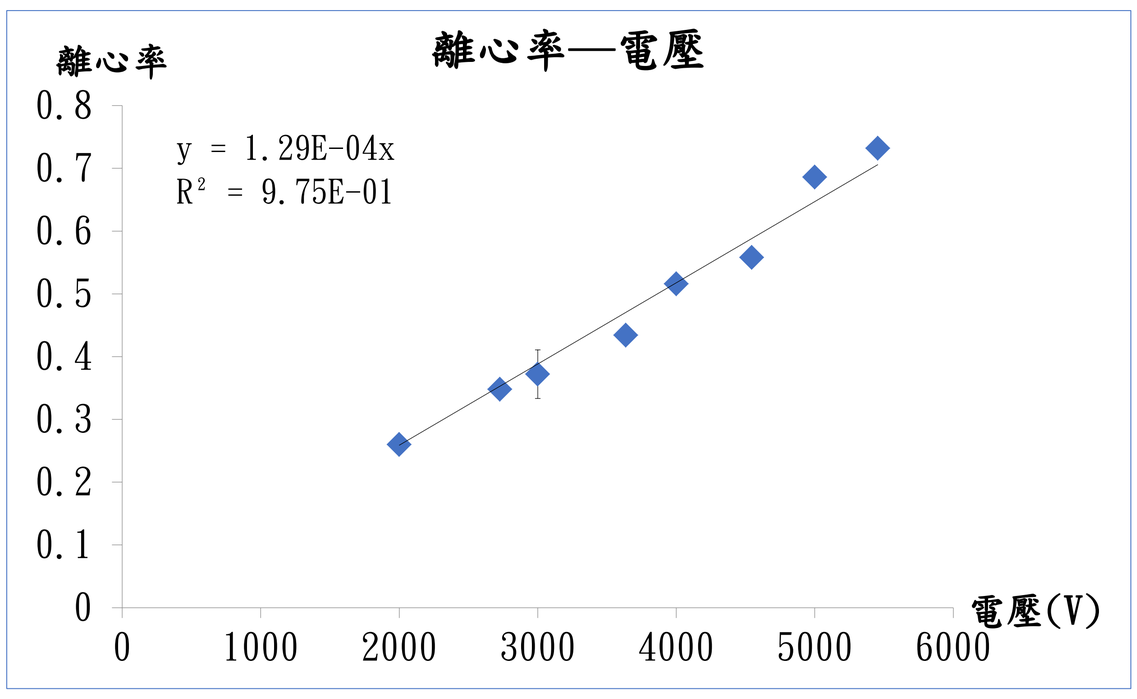
圖為不同電壓多次實驗之肥皂泡前後高度比、寬度比平均值對電壓之數據，高度比與寬度比為電壓之二次曲線。

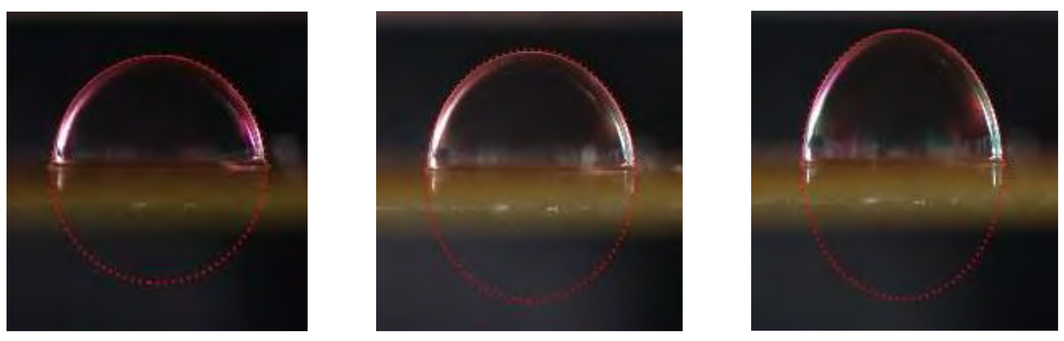




肥皂泡的幾何形狀與電壓之關係

尚未施加電場時肥皂泡的形狀呈現球形，在施加電場後則呈現橢球形，且離心率與電壓成正比關係。





3000V　4000V　5000V

觀察肥皂膜的偏振性

當偏振片旋轉時，肥皂泡最暗處的位置也隨之旋轉，且皂膜最暗處表面的法向量與偏振片偏振方向平行或垂直(紅色雙箭頭表示前偏振片之偏振方向)。

偏振片旋轉0度　偏振片旋轉30度　偏振片旋轉60度　偏振片旋轉90度

討論

肥皂泡是等電位體

考慮肥皂膜的受力

局部皂膜的受力包含重力、表面張力、氣壓造成的力與電場力，其中表面張力與氣壓之作用力均垂直皂膜表面，因此在邦德數(Bond number)足夠小，即重力影響可以忽略時，電場必須垂直皂膜表面以達靜力平衡。故推測皂膜的電位差 $\Delta V = -\int \vec{E} \cdot d\vec{r}$ 恆為零，即肥皂膜為等位面。

考慮肥皂分子指向

由實驗二之偏振性質觀察亦能推測出肥皂分子的排列方向在施加電場後依然垂直皂膜表面，這也再次說明肥皂泡表面只有法向電場，肥皂膜各處之電位相同。

理論分析的基本假設

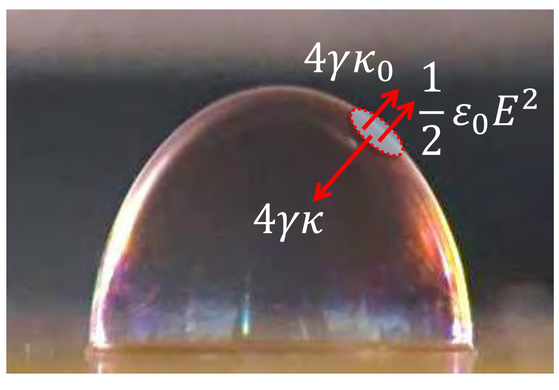
1. 邦德數足夠小，因此對不含時間變化的肥皂膜形狀，討論時可忽略重力與其所造成的效應。
2. 平行電板的長寬足夠大，肥皂泡不受電板邊緣效應影響，故形狀為軸對稱。
3. 肥皂膜厚度極薄且肥皂泡體積固定。
4. 肥皂泡為等位體，電位與其所接觸之電極板相同。

電荷分布與形狀的關係

根據高斯定律可知面電荷密度σ處所受靜電場壓力為 $P_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}$ 。

若未施加電場時肥皂膜曲率為κ_0，則由楊—拉普拉斯定律與靜力平衡知 $P_E + 4\gamma\kappa_0 = 4\gamma\kappa$，其中γ為表面張力係數。於是得到面電荷密度與皂膜曲率的關係式

$$\sigma = \sqrt{8\varepsilon_0\gamma(\kappa - \kappa_0)}$$



這使我們得知肥皂泡形狀與其電荷分布情形、表面電場強度間的關係。

無外加電場：肥皂膜為電中性，各處曲率相等故為球形。

外加電場：被充電的肥皂膜受到電場力，使得各處曲率不相等。

系統能量—理論模型

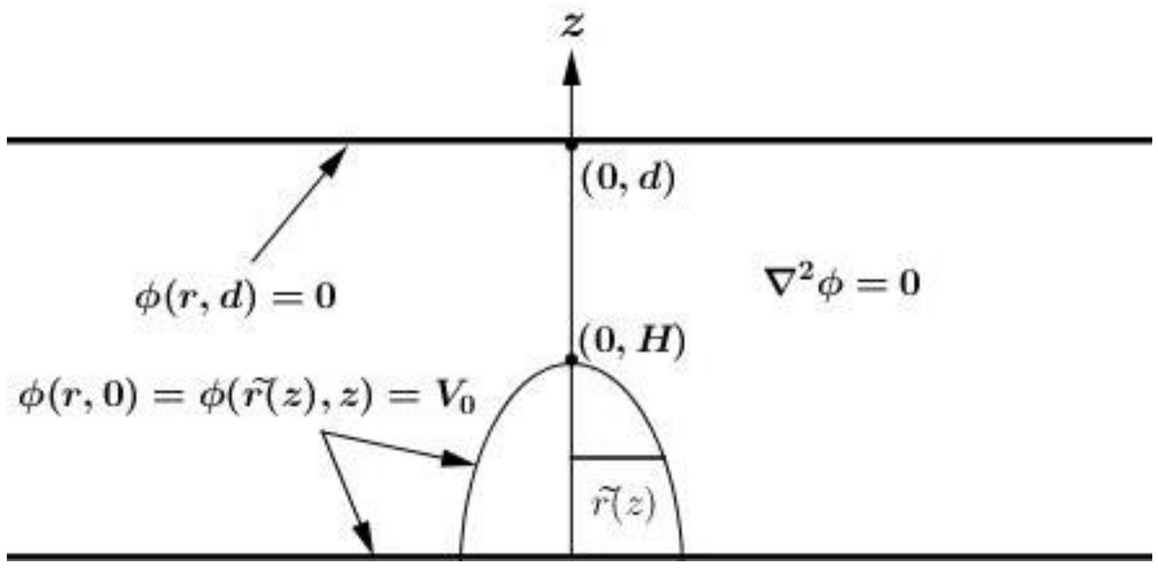
電位在無電荷分布的平行電板間滿足拉普拉斯方程

$$\nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 0$$

系統總能量包含**靜電位能**與**表面張力能**

$$U = -\iiint \frac{1}{2}\varepsilon_0|\nabla\phi|^2 d\tau + 2\gamma S$$

，在達到平衡時應為最低，即$\delta U = 0$。



再配合體積固定之約束$\int_0^H \pi\tilde{r}^2 dz = CONST$構成一變分問題以解出肥皂泡的形狀。

系統能量—數值模擬

以程式語言Python數值模擬固定電壓下不同肥皂泡形狀對應的系統靜電位能，進而得到肥皂泡離心率與系統電容之間滿足

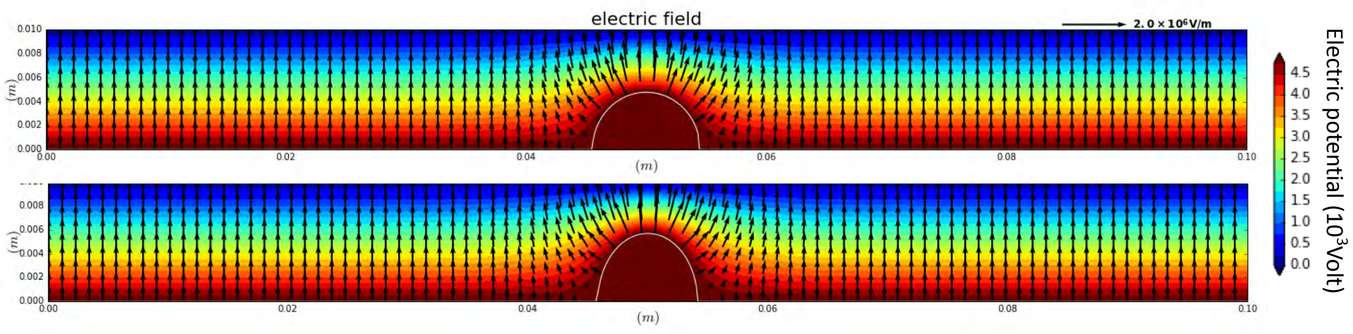
$$C(e) \approx \eta e^2 + C(0)$$

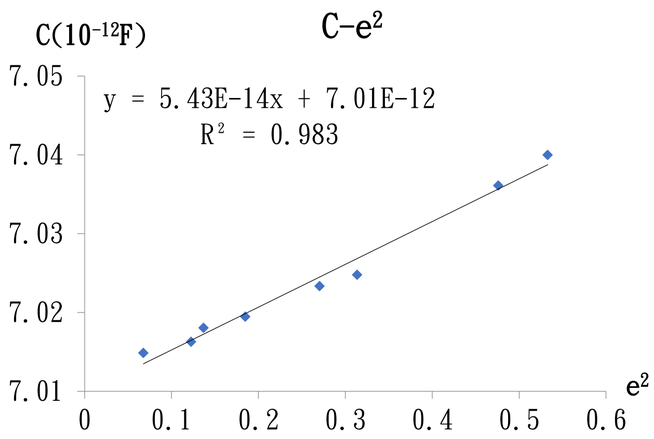
，其中$\eta = 5.43 \times 10^{-14}\ F$。

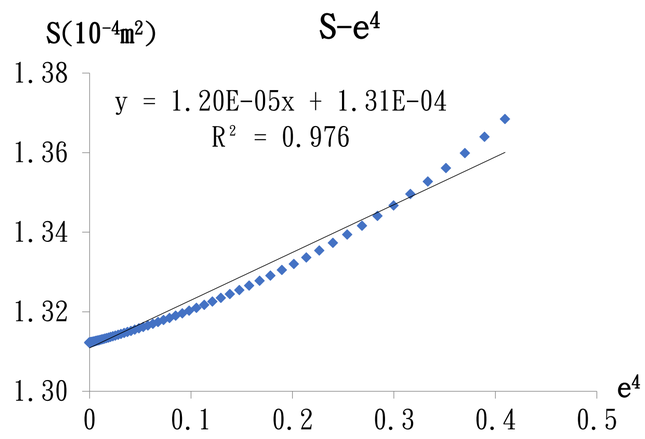
在體積守恆的約束下，肥皂泡表面積與肥皂泡離心率之間滿足

$$S(e) \approx \alpha e^4 + S(0)$$

，其中$\alpha = 1.20 \times 10^{-5}\ m^2$。







理論模型與實驗結果之比較

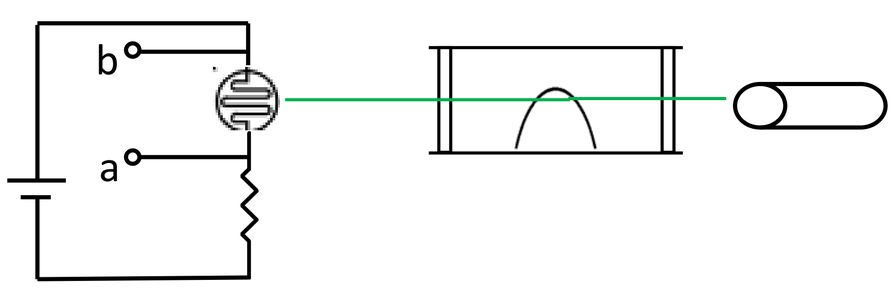
此時考慮 $\delta U = \delta\left(2\gamma(\alpha e^4 + S(0)) - \frac{1}{2}(\eta e^2 + C(0))V^2\right) = 0$，得到離心率與電壓間滿足正比關係

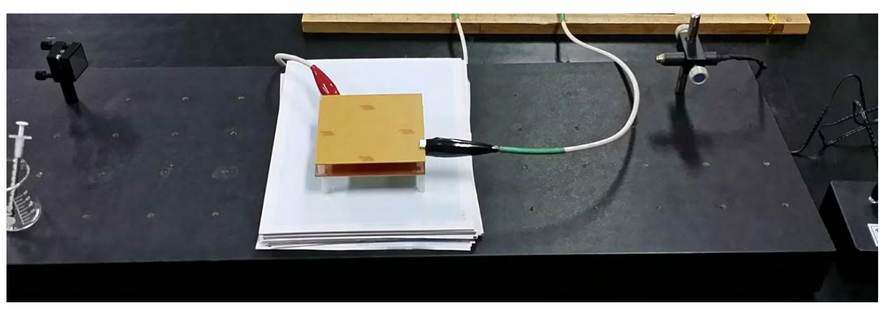
$$e = \sqrt{\frac{\eta}{8\gamma\alpha}}V$$

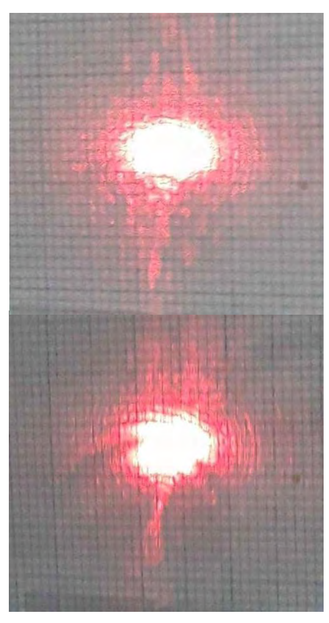
$\sqrt{\frac{\eta}{8\gamma\alpha}} = 1.32 \times 10^{-4}(\mathrm{Volt}^{-1})$，與實驗所得e-V圖斜率$(1.29 \pm 0.05) \times 10^{-4}(\mathrm{Volt}^{-1})$之間約有2%之相對誤差。

未來展望：肥皂泡震盪頻率的測量

觀察肥皂泡在不同強度直流電場下的微幅震盪或時變電場下的強迫震盪，推算系統的等效彈力係數與阻尼常數等物理量，希望能以此作為非接觸方式間接測量肥皂膜性質的方法，是未來值得探討的方向。







結論

一、肥皂泡在平行電板間的高與寬為板間電壓之二次函數，高度隨電壓增加而上升，寬度則下降。

二、肥皂泡在平行電板間的形狀為橢球的一部分，且其離心率與電壓成正比。

三、肥皂泡的變形現象是表面張力與電場力的抗衡。分析肥皂膜的力平衡，研究得到肥皂膜曲率與面電荷密度之間的關係。

四、本研究建立理論模型提出計算肥皂泡形狀的方法，並實際以數值模擬進行探討，最後說明肥皂泡離心率與電壓之間的正比關係，得到與實驗數據相當接近的結果。

參考資料

[1] Derek E. Moulton, John A. Pelesko (2008). Theory and experiment for soap-film bridge in an electric field. Journal of Colloid and Interface Science 322 (2008) 252–262. doi:10.1016/j.jcis.2008.02.045

[2] W. A. Macky (1930). The Deformation of Soap Bubbles in Electric Fields. Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 26, pp 421-428 doi:10.1017/S0305004100016145

[3] Surface Tension (n.d.). Retrieved March 6, 2017, from http://www.cns.gatech.edu/~predrag/courses/PHYS-4421-13/Lautrup/surface.pdf

[4] Griffiths, D. J. (1999). Introduction to electrodynamics. Upper Saddle River, N.J: Prentice Hall.

[5] 表面張力測定・中興大學普通物理實驗室・取自 http://experiment.phys.nchu.edu.tw/ex_h.htm