中華民國第 57 屆中小學科學展覽會
作品說明書

高級中等學校組　物理與天文學科

佳作

051802

正多角柱內皂膜的形狀與對稱性破缺

學校名稱：臺北市私立泰北高級中學

作者：	指導老師：
高二 陳竑廷	藍邦偉
高一 陳品儒	劉繕榜

關鍵詞：皂膜形狀、浦拉托問題、正多角柱

摘要

本研究旨在探討正多角柱內所產生之肥皂泡膜形狀，以及改變正多角柱長高比時所發生的對稱破缺的現象。在我們的初步研究中已經發現，正五角柱內的肥皂泡膜確實存在對稱破缺的現象，因此我們希望進一步確認並理解此中奧秘。我們的研究將以實際的實驗觀測做基礎，然後在理論上以最小曲面的近似解來分析。為了將實驗以及理論結合，我們並透過免費的數學軟體 GeoGebra 來進行數值模擬計算以及圖形展示。

壹、 研究動機

本研究最早參考 2016 臺灣區國際科學展覽會物理組周昕諭的作品[5]，發現該作品可以更深入討論。所以我們進行皂膜在立體框架模型中皂膜形狀之探討。討論正多角柱模型上皂膜成形的各種現象。並透過物理上對於力平衡與最小能量的分析，及利用數學所繪出的最小面積模型，得到一個穩定的立體結構。本研究首先參考了幾篇論文[1][2]及以前的科展[5][6][7][8]做為文獻參考資料。當中我發現一個有趣的問題。綜合物理上對於力平衡與最小能量的探討，我們知道共點的三力平衡時，兩兩夾角為120°，且當達到平衡狀態，也就是產生最小曲面時，平均曲率(mean curvature)要為 0，本研究利用數學軟體所繪出的皂膜模型來對皂膜形狀進行分析，並且比較不同正多角柱間的皂膜結構[8]與最小面積。

由於皂膜有使面積縮到最小的特性，因此在三度空間中利用物理實驗形成的肥皂泡膜形狀是什麼樣的圖形？除此之外，皂膜形狀的形成現象與變換與皂膜溶液濃度、溫度及拉出皂膜溶液時的傾角之關聯性又是如何？因此本研究決定利用自製模型及數學軟體，找出正多角柱中形成的皂膜形狀，並利用理論分析來解釋實驗現象。

貳、 研究目的

一、從一次近似到二次近似的方法，求出固定高度正四角柱皂膜模型、可調整高度正四角柱模型皂膜形狀，並利用動態幾何軟體模擬，討論能量轉換的臨界點，並計算最小曲面面積，最後進行理論分析。

二、從一次近似到二次近似的方法，求出固定高度正三角柱皂膜模型、可調整高度正三角柱模型皂膜形狀，並利用動態幾何軟體模擬，討論能量轉換的臨界點，並計算最小曲面面積，最後進行理論分析。

三、從一次近似到二次近似的方法，求出固定高度正五角柱皂膜模型、可調整高度正五角柱模型皂膜形狀，並利用動態幾何軟體模擬，討論能量轉換的臨界點，並計算最小曲面面積，最後進行理論分析。

參、 研究設備及器材

一、固定高度模型：

以銅線焊錫或烙鐵製作而成固定高度的正三角柱、正四角柱、正五角柱、正六角柱、正七角柱與正八角柱模型。

二、可調整高度的模型：

以銅線焊錫或烙鐵製作而成可調整高度的正三角柱、正四角柱與正五角柱；以光軸與水晶黏土製作而成可調整高度的正三角柱、正四角柱與正五角柱模型。

三、筆記工具：

紙、筆、黑板、粉筆、量角器、棉線、筆記型電腦、動態幾何軟體 GeoGebra。

四、**實驗設備：**

洗手乳、水、燒杯、量筒、透明水箱。

圖 1(a)：自製可調高度正多角柱體及器材

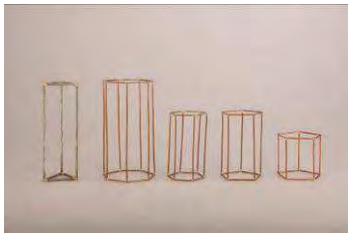


圖 1(b)：自製正多角柱體及器材

肆、 研究過程或方法

一、定義與名詞解釋

(一) 皂膜實驗：本研究參考國立台中科學博物館的皂膜實驗，以銅線或鐵線焊接而成的模型，放入比例為**洗手乳：水**依 **1: 6** 的皂膜溶液中，再鉛直抽出，觀察皂膜的形狀。

(二) 浦拉托問題：是數學中與最小曲面有關的一類問題，旨在研究在邊界固定時極小表面的存在性。

(三) 一次近似：將二項式$(1+x)^n$展開得到：$1+C_1^n x+C_2^n x^2+\cdots+C_{n-1}^n x^{n-1}+x^n$，當我們取二項式級數的前兩項：$1+C_1^n x\approx 1+nx$，就稱為**一次近似**(linear approximation)，其幾何意義為將兩點間以線段連接。

(四) 二次近似：將二項式$(1+x)^n$展開得到：$1+C_1^n x+C_2^n x^2+\cdots+C_{n-1}^n x^{n-1}+x^n$，當我們取二項式級數的前三項：$1+C_1^n x+C_2^n x^2\approx 1+nx+\frac{n(n-1)}{2}x^2$，就稱為**二次近似**(quardratic approximation)，其幾何意義為將兩點間以拋物線連接。

二、研究流程

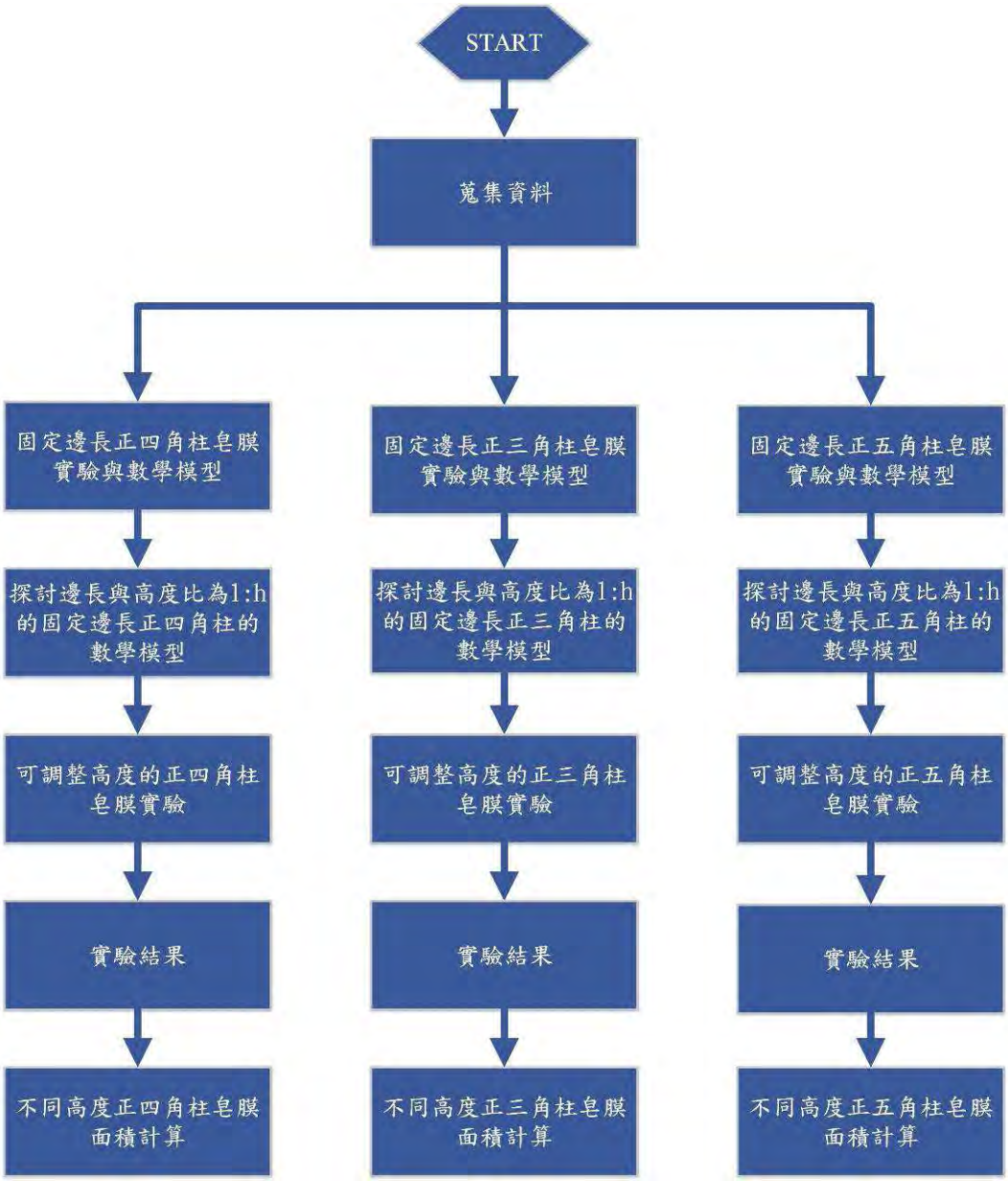


圖 2：研究流程圖

根據文獻[3][5]，知道以下條件：溶液溫度、室溫、皂膜濃度、模型大小、材質、直徑和抽離液面角度，都不會影響皂膜所形成的曲面面積。所以我們只需考慮常溫下固定濃度的溶液，鉛直抽出液面的皂膜形狀，並計算它的最小面積，同時在此研究中，因為有效位數需到小數點下五位才能看出相對極小值，故在內文中，我們的有效數字取到小數點後第五位。圖 2 為我們的研究流程。

三、邊長與高度比為 1:2 的固定邊長正四角柱的皂膜形狀與面積

為了探討高度可以調整的正四角柱皂膜形狀，我們先從高度固定的正四角柱開始討論皂膜的結構並計算其面積，如圖 3。我們先將底邊長為 5 公分且高為 10 公分的正四角柱體模型，鉛直抽離皂膜重複實驗，用攝影機拍攝並觀察其皂膜形狀，並利用數學軟體 GeoGebra 進行皂膜形狀最小曲面的一次近似估計。

圖 3(a)：不同角度正四角柱皂膜實際情形

圖 3(b)：不同角度正四角柱皂膜實際情形

我們將正四角柱模型放入肥皂水中重複觀察，發現中間水平面上有 4 個點形成一個類長方形，而且連接了 8 個頂點，如圖 4(a)。鉛直抽離皂膜重複實驗所得結果相同。根據文獻[3]，我們所看到的皂膜形狀應該為最小曲面。

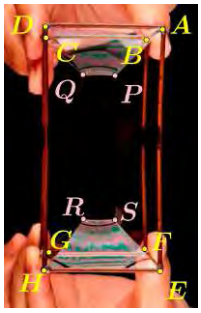


圖 4(a)：正四角柱皂膜實驗

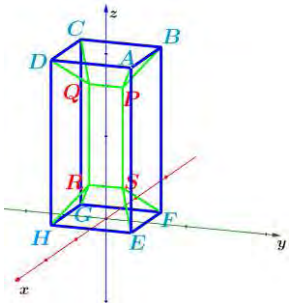


圖 4(b)：正四角柱皂膜實驗示意圖

再依比例調整成底面為 1 單位，高為 2 單位的正方形，如圖 4(b)。即設 $A(\frac{1}{2},\frac{1}{2},2)$、$B(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},2)$、$C(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},2)$、$D(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},2)$、$E(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)$、$F(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)$、$G(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0)$、$H(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0)$ 為正四角柱的八個頂點，並設中央矩形之長為 s，寬為 t，即 $P(0,\frac{t}{2},1+\frac{s}{2})$、$Q(0,-\frac{t}{2},1+\frac{s}{2})$、

$R(0,-\frac{t}{2},1-\frac{s}{2})$ 、 $S(0,\frac{t}{2},1-\frac{s}{2})$ 為中央矩形的四個頂點，其中 $0\le t\le 1$ ， $0\le s\le 2$ 。接著計算出面積函數公式： $f(s,t)=st+(t+1)\sqrt{(2-s)^2+1}+(2+s)\sqrt{(1-t)^2+1}+\sqrt{(2-s)^2+(1-t)^2}$ ，我們嘗試找出 $f(s,t)$ 的最小值，使用梯度遞減法(Gradient Descent)找出 $f(s,t)$ 的最小值，並將 $z=f(s,t)$ 中的 z 坐標做適當的調整後，得到當 $s=0.59793, t=0.15084$ 時，我們可以得到 $f(s,t)$ 的最小值為 9.00461 ，如圖 5。

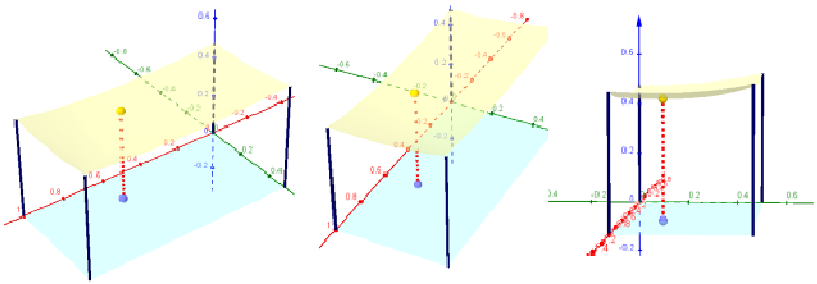


圖 5： Gradient Descent 找最小值

四、邊長與高度比為 1:3 的固定邊長正三角柱的皂膜形狀與面積

為了探討高度可以調整的正三角柱皂膜形狀，我們先從高度固定的正三角柱開始討論皂膜的結構並計算其面積。我們先將底邊長為 5 公分且高為 15 公分的正三角柱模型，鉛直抽離皂膜溶液重複實驗，用攝影機拍攝並觀察其皂膜形狀，如圖 6，並利用數學軟體 *GeoGebra* 進行皂膜形狀最小曲面的一次近似估計。

圖 6(a)：不同角度正三角柱皂膜實際情形圖

圖 6(b)：不同角度正三角柱皂膜實際情形圖

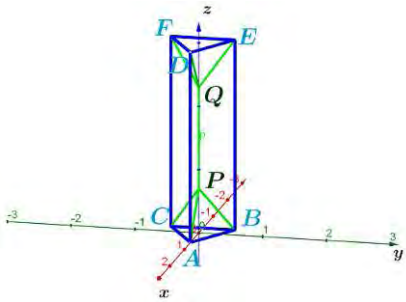


圖 6(c)：正三角柱皂膜示意圖

設底面邊長為 1 單位且高為 3 單位的正三角柱的六個頂點座標分別為： $A(\frac{\sqrt{3}}{3},0,0)$ 、 $B(-\frac{\sqrt{3}}{6},\frac{1}{2},0)$ 、 $C(-\frac{\sqrt{3}}{6},-\frac{1}{2},0)$ 、 $D(\frac{\sqrt{3}}{3},0,3)$ 、 $E(-\frac{\sqrt{3}}{6},-\frac{1}{2},3)$ 與 $F(-\frac{\sqrt{3}}{6},-\frac{1}{2},3)$ ，並設 t 為正三角柱的中心到兩節點的距離，故中央兩節點之座標為 $P(0,0,\frac{3}{2}-t)$ 、 $Q(0,0,\frac{3}{2}+t)$ ，其中 $0\le t\le\frac{3}{2}$ 。此時：

1 個三角形的面積為 $\frac{1}{2}\times 1\times\sqrt{(\frac{3}{2}-t)^2+(\frac{\sqrt{3}}{6})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{t^2-3t+\frac{7}{3}}$ ，

1 個梯形的面積為 $\frac{(3+2t)}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{3}(2t+3)}{6}$ ，

接著計算六個三角形與三個梯形的面積和公式為： $f(t)=3\sqrt{t^2-3t+\frac{7}{3}}+\frac{\sqrt{3}(2t+3)}{2}$ ，我們將 $f(t)$ 微分後得到 $f'(t)=\frac{3(2t-3)}{2\sqrt{t^2-3t+\frac{7}{3}}}+\sqrt{3}$ ，當 $t=1.29588$ 時， $f(t)$ 有最小值 5.90326 。

五、邊長與高度比為 1:1.5 的固定邊長正五角柱的皂膜形狀與面積

為了探討高度可以調整的正五角柱皂膜形狀，我們先從高度固定的正五角柱開始討論皂膜的結構並計算其面積。我們製作底邊長為 4 公分且高為 6 公分的正五角柱體模型，鉛直抽離皂膜重複實驗，用攝影機拍攝並觀察其皂膜形狀，如圖 7，並利用數學軟體 *GeoGebra* 進行皂膜形狀最小曲面的一次近似估計。

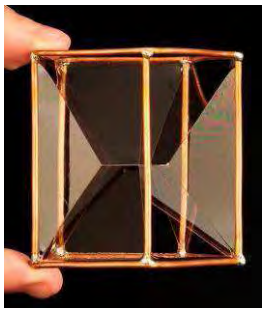


圖 7(a)：固定高度正五角柱皂膜形狀

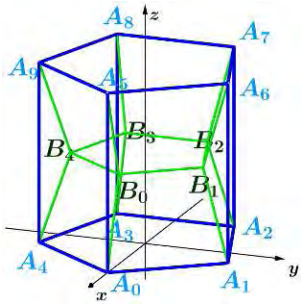


圖 7(b)：固定高度正五角柱皂膜形狀

我們取底面邊長為 1 單位且高為 1.5 單位的正五角柱的十個頂點座標分別為：

$A_0(r\cos 0^\circ, r\sin 0^\circ, 0)$ 、 $A_1(r\cos 72^\circ, r\sin 72^\circ, 0)$ 、 $A_2(r\cos 144^\circ, r\sin 144^\circ, 0)$ 、

$A_3(r\cos 216^\circ, r\sin 216^\circ, 0)$ 、 $A_4(r\cos 288^\circ, r\sin 288^\circ, 0)$ 、 $A_5(r\cos 0^\circ, r\sin 0^\circ, \frac{3}{2})$ 、

$A_6(r\cos 72^\circ, r\sin 72^\circ, \frac{3}{2})$ 、 $A_7(r\cos 144^\circ, r\sin 144^\circ, \frac{3}{2})$ 、 $A_8(r\cos 216^\circ, r\sin 216^\circ, \frac{3}{2})$ 、

$A_9(r\cos 288^\circ, r\sin 288^\circ, \frac{3}{2})$ ，其中 $r=\frac{1}{2}\csc 36^\circ=\frac{2}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$ 。

而中央邊長為 t 的正五邊形的頂點座標分別為：

$B_0(rt\cos 0^\circ, rt\sin 0^\circ, \frac{3}{4})$ 、 $B_1(rt\cos 72^\circ, rt\sin 72^\circ, \frac{3}{4})$ 、 $B_2(r\cos 144^\circ, r\sin 144^\circ, \frac{3}{4})$ 、

$B_3(rt\cos 216^\circ, rt\sin 216^\circ, \frac{3}{4})$ 、 $B_4(rt\cos 288^\circ, rt\sin 288^\circ, \frac{3}{4})$ 。

中央正五邊形之面積為$\frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4}t$，

梯形的面積為$\frac{t+1}{2}\cdot\sqrt{(\frac{1-t}{2})^2\times\frac{5+2\sqrt{5}}{5}+\frac{9}{16}}$，

等腰三角形的面積為$\frac{3(1-t)(5+\sqrt{5})}{40}$。當$0\le t\le 1$時，此時皂膜面積為

$$f(t)=\frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4}\ t+5(1+t)\sqrt{(\frac{1-t}{2})^2\cdot\frac{5+2\sqrt{5}}{5}+\frac{9}{16}}+\frac{3(1-t)(5+\sqrt{5})}{8}$$

微分後得

$$f'(t)=5\sqrt{(1+\frac{2}{\sqrt{5}})(\frac{1-t}{2})^2+\frac{9}{16}}-\frac{(5+2\sqrt{5})(1-t)^2}{4\sqrt{(1+\frac{2}{\sqrt{5}})(\frac{1-t}{2})^2+\frac{9}{16}}}+\frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4}-\frac{3(5+\sqrt{5})}{8}$$

且$f'(t)$恆正。

也就是說函數$f(t)$嚴格遞增。故當$t=0$時$f(t)$產生最小值 7.80299。也就是說理論值是出現中央一點的情形，而實驗值是中央有一個正五邊形。但是這個理論值與我們實驗值的皂膜形狀是不同的。理論值變成中央五邊形退化成一點，而我們觀察到的皂膜形狀為圖 7(a)。

伍、 研究結果

一、邊長與高度比為 1:h 的正四角柱的皂膜形狀與面積

我們製作可調整高度，邊長為 6 公分，高為 32 公分的正四角柱模型，如圖 8。

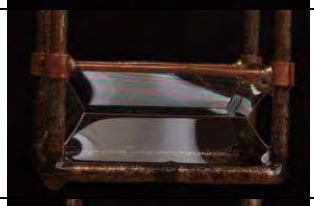
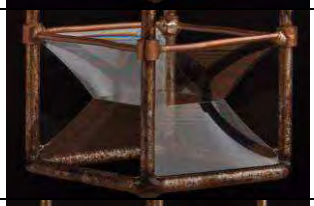
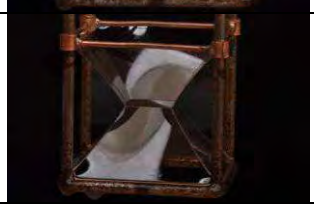
圖 8：可調整高度的正四角柱模型

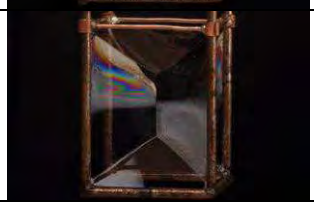
接著，調整至不同高度的比例，放入肥皂溶液中，並鉛直拉起和觀察它的形狀，實驗照片記錄如表 1。我們盡量將模型底邊對齊在照片底部，以便看出調整模型高度時皂膜變化情形。

表 1：改變不同高度正四角柱皂膜情形

設正四角柱的邊長為 1，高為 h；以 Type I 表示高小於等於 1 的皂膜形狀；Type II 表示高大於等於 1 的皂膜形狀，而高度在 0.9 到 1.1 時，兩種情形都會出現，如表 2 所示。我們以一次近似計算正四角柱皂膜面積，當 $h \leq 1$時，設中央正方形邊長為 x，皂膜形狀在水平的平面上如圖 9。同時我們還發現當邊長與高度比例在1: 0.9 的時候，若搖晃模型，則皂膜形狀將會從水平轉變為鉛直。

表 2：不同角度的不同高度正四角柱皂膜情形

比例	角度 a	角度 b
1:0.3 (type I)		
1:0.4 (type I)		
1:0.5 (type I)		
1:0.6 (type I)		
1:0.7 (type I)		
1:0.8 (type I)		

1:0.9 (type I)						
1:0.9 (type II)						
1:1 (type II)						
1:1.1 (type II)						

Type I

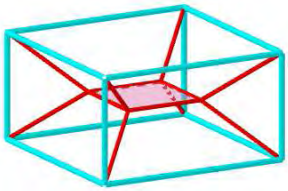


圖 9(a)：正四角柱 Type I 面積分解示意圖

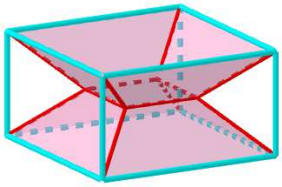


圖 9(b)：正四角柱 Type I 面積分解示意圖

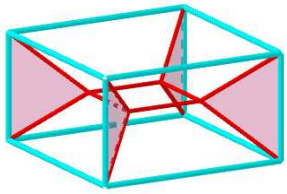


圖 9(c)：正四角柱 Type I 面積分解示意圖

中央正方形的面積是 x^2，如圖 9(a)；

梯形的面積是 $\frac{(x+1)}{2}\sqrt{(\frac{2-x}{2})^2+\frac{h^2}{2}}$，如圖 9(b)；

三角形的面積是 $\frac{\sqrt{2}}{4}h(1-x)$，如圖 9(c)。

此時面積和為：$f_1(x,h)=x^2+2(1+x)\sqrt{(1-x)^2+h^2}+\sqrt{2}h(1-x)$

我們發現模型要將高度大於等於 0.3 時，皂膜才會形成穩定的狀態。起初我們發現不同高度時，邊長與面積的函數關係都是單調遞增，但是當我們調整單位後，並將有效位數調整至小數點後五位發現在不同的高度時，都有相對極小值發生，如圖 10。

當 $h=1.0$ 時，$x=0.07291$，$f_1(x,1.0)$ 有相對極小值 4.24253；

當 $h=0.9$ 時，$x=0.28785$，$f_1(x,0.9)$ 有相對極小值 3.94534；

當 $h=0.8$ 時，$x=0.40801$，$f_1(x,0.8)$ 有相對極小值 3.63878；

當 $h=0.7$ 時，$x=0.50652$，$f_1(x,0.7)$ 有相對極小值 3.32563；

當 $h=0.6$ 時，$x=0.59341$，$f_1(x,0.6)$ 有相對極小值 3.00690；

當 $h=0.5$ 時，$x=0.67235$，$f_1(x,0.5)$ 有相對極小值 2.68317；

當 $h=0.4$ 時，$x=0.74560$，$f_1(x,0.4)$ 有相對極小值 2.35482；

當 $h=0.3$ 時，$x=0.81431$，$f_1(x,0.3)$ 有相對極小值 2.02213。

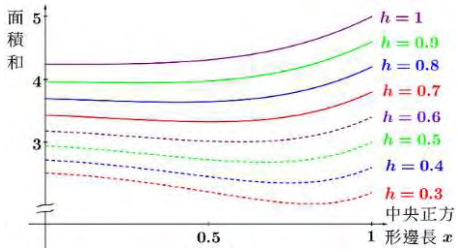


圖 10：正四角柱 Type I 正方形邊長與皂膜面積關係圖

Type II

當 $h\geq 0.9$ 時，設 $A(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{h}{2})$、$B(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{h}{2})$、$C(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{h}{2})$、$D(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{h}{2})$、$E(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{h}{2})$、$F(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{h}{2})$、$G(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{h}{2})$、$H(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{h}{2})$ 為正四角柱的八個頂點，並設中央矩形之長為 s，寬為 t，且 $P(0,\frac{t}{2},\frac{s}{2})$、$Q(0,-\frac{t}{2},\frac{s}{2})$、$R(0,-\frac{t}{2},-\frac{s}{2})$、$S(0,\frac{t}{2},-\frac{s}{2})$ 為中央矩形的四個頂點，其中 $0\leq t\leq 1$，$0\leq s\leq h$，如圖 11。

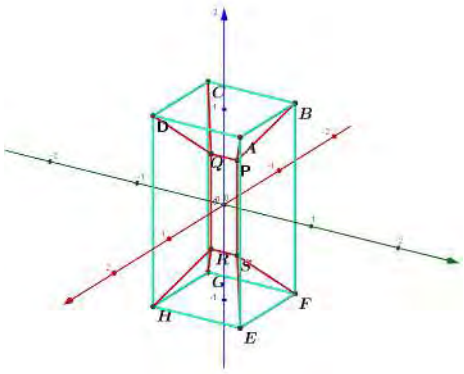


圖 11：正四角柱數學軟體模擬

我們也以一次近似計算 Type II 的面積。所以最小曲面就是長方形 $PQRS$、四個大梯形 $APSE$、四個小梯形 $APQD$ 與四個三角形 ΔABP 的面積和；高的部分我們可以用三垂線定理算出。

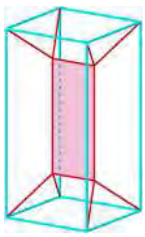


圖 12(a)：正四角柱 Type II 面積分解圖

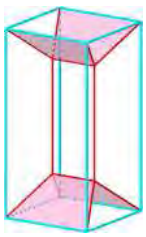


圖 12(b)：正四角柱 Type II 面積分解圖

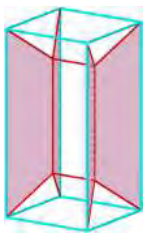


圖 12(c)：正四角柱 Type II 面積分解圖

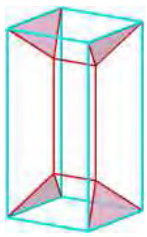


圖 12(d)：正四角柱 Type II 面積分解圖

長方形 $PQRS$ 的面積是 st ，如圖 12(a)；

小梯形 $APSE$ 的面積是 $\frac{(t+1)}{2}\sqrt{\left(\frac{h-s}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{t+1}{4}\sqrt{(h-s)^2+1}$ ，如圖 12(b)；

大梯形 $APQD$ 的面積是 $\frac{(h+s)}{2}\sqrt{\left(\frac{1-t}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{(h+s)}{4}\sqrt{(1-t)^2+1}$ ，如圖 12(c)；

三角形 ΔABP 的面積是 $\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{h-s}{2}\right)^2+\left(\frac{1-t}{2}\right)^2}=\frac{1}{4}\sqrt{(h-s)^2+(1-t)^2}$ ，如圖 12(d)；

故面積函數為

$$f_2(s,t,h)=st+(t+1)\sqrt{(h-s)^2+1}+(h+s)\sqrt{(1-t)^2+1}+\sqrt{(h-s)^2+(1-t)^2}$$

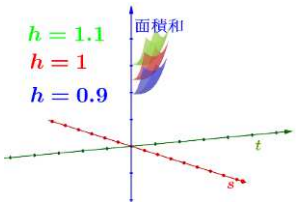


圖 13：正四角柱 Type II 長方形形邊長與面積關係圖

圖 13 為模型高度 h 為 0.9、1.0 與 1.1 的長方形的長、寬與面積和 $f_2(s,t,h)$ 的函數圖形，我們將函數向 z 軸負向平移 3 個單位作圖，並利用梯度遞減法(Gradient Descent)，求出下列相對極值。

當 $h=1.1$ 時， $s=0.14818$ ， $t=0.08855$ 時， $f_2(s,t,1.1)$ 有相對極小值 4.52120 ；

當 $h=1.0$ 時， $s=0.07291$ ， $t=0.07291$ 時， $f_2(s,t,1.0)$ 有相對極小值 4.24253 ；

當 $h=0.9$ 時， $s=0.12502$ ， $t=0.13522$ 時， $f_2(s,t,0.9)$ 有相對極小值 3.98340 ；

二、邊長與高度比為 1:h 的正三角柱的皂膜形狀與面積

我們製作邊長為 6 公分，高為 32 公分的正三角柱模型，並設計出可調整高度的裝置，如圖 14。

圖 14：可調整高度的正三角柱模型

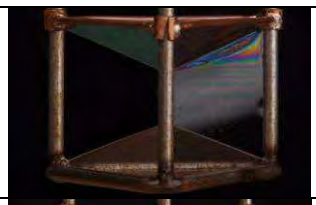
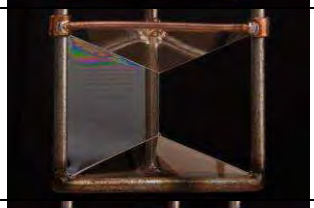
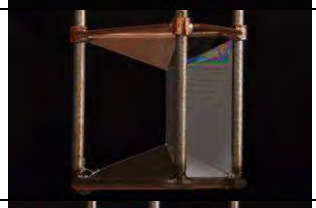
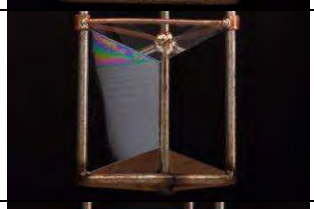
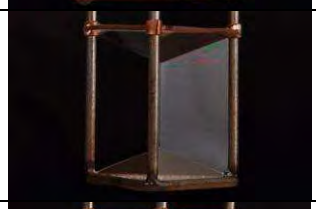
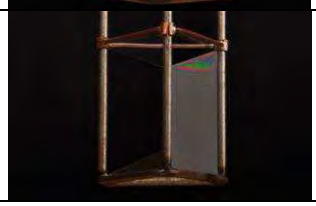
接著，調整至不同高度的比例，放入肥皂溶液中，並鉛直拉起和觀察它的形狀，實驗照片記錄如表 3 與表 4。我們盡量將模型底邊對齊在照片底部，以便看出調整模型高度時皂膜變化情形。

表 3：改變不同高度正三角柱皂膜情形

設正三角柱底邊的邊長為 1，高為 h ；以 Type I 表示高小於等於 0.5 的皂膜形狀，如圖 15；Type II 表示高大於等於 0.4 的皂膜形狀，如圖 17。而高度在 0.4 與 0.5 之間時，兩種情形都會出現，我們以一次近似計算正三角柱皂膜面積。同時我們還發現當高度比例介於 1:0.4 到 1:0.5 之間的時候，若搖晃模型，則皂膜形狀將會從 Type I 轉變為 Type II。

表 4：不同角度的不同高度正三角柱皂膜情形

比例	角度 a	角度 b
1:0.3 (type I)		
1:0.4 (type I)		
1:0.5 (type I)		
1:0.5 (type II)		

1:0.6 (type II)						
1:0.7 (type II)						
1:0.8 (type II)						
1:0.9 (type II)						
1:1 (type II)						
1:1.1 (type II)						

Type I

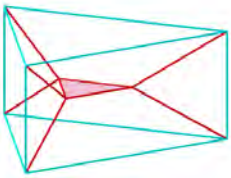


圖 15(a)：正三角柱 Type I 面積分解示意圖

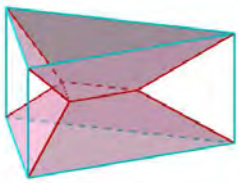


圖 15(b)：正三角柱 Type I 面積分解示意圖

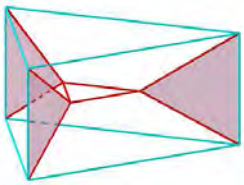


圖 15(c)：正三角柱 Type I 面積分解示意圖

當 $h \le 0.5$ 時，設中央正三角形邊長為 x 。

中央正三角形面積為 $\frac{\sqrt{3}}{4}x^2$ ，如圖 15(a)；

梯形面積為 $\frac{(x+1)}{2}\sqrt{(\frac{h}{2})^2+(\frac{1-x}{2\sqrt{3}})^2}$ ，如圖 15(b)；

等腰三角形面積為 $\frac{h(1-x)}{2\sqrt{3}}$ ，如圖 15(c)；

此時皂膜面積為 $f_1(x,h)=\frac{\sqrt{3}x^2}{4}+\frac{3}{4}(1+x)\sqrt{h^2+\frac{1}{3}(1-x)^2}+\frac{\sqrt{3}h}{2}(1-x)$ ，$0\le x\le 1$ 。

我們發現要將模型高度大於等於 0.3 時，皂膜才會穩定。起初我們發現不同高度時，邊長與面積的函數關係都是單調遞增，但是當我們調整單位後，並將有效位數調整至小數點後五位發現在不同的高度時，都有相對極小值發生，如圖 16 所示。

當 $h=0.50$ 時， $x=0.69993$ ， $f_1(x,0.50)$ 有相對極小值 1.77893；

當 $h=0.45$ 時， $x=0.74195$ ， $f_1(x,0.45)$ 有相對極小值 1.65176；

當 $h=0.40$ 時， $x=0.78019$ ， $f_1(x,0.40)$ 有相對極小值 1.52262；

當 $h=0.35$ 時， $x=0.81530$ ， $f_1(x,0.35)$ 有相對極小值 1.39166；

當 $h=0.30$ 時， $x=0.84773$ ， $f_1(x,0.30)$ 有相對極小值 1.25901；

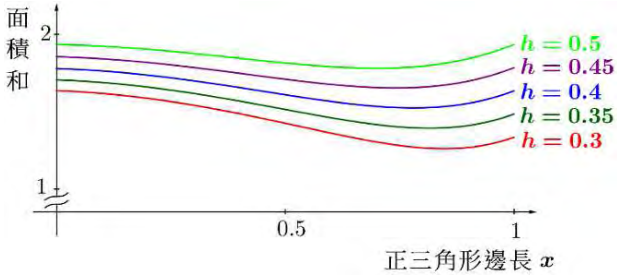


圖 16：正三角柱 Type I 正三角形邊長與面積關係圖

Type II

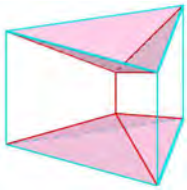


圖 17(a)： Type II 面積分解示意圖

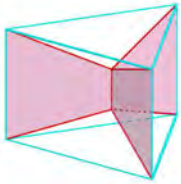


圖 17(b)： Type II 面積分解示意圖

當 $h\ge 0.4$ 時，皂膜情形如圖 17，以一次近似計算正三角柱皂膜面積。我們觀察皂膜形狀，發現節點所在位置即以底面正三角形為一面的正四面體的重心，如圖 19，與我們所查的文獻相同[3]。此時等腰三角形面積為 $\frac{\sqrt{2}}{8}$，如圖 17(a)；梯形面積為 $\frac{\sqrt{3}h}{3}-\frac{\sqrt{2}}{12}$，如圖 24(b)；此時皂膜面積為 $f_2(h)=\sqrt{3}h+\frac{\sqrt{2}}{2}$ 。也就是說當 $h\ge 0.4$ 時，皂膜面積和只與模型高度 h 有關，如圖 18。

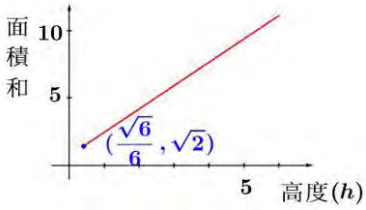


圖 18：正三角柱 Type II 高度與面積關係圖

我們將此公式代入 14 頁邊長與高度比為 1:3 的正三角柱中，發現 $f_2(3)=3\sqrt{3}+\frac{\sqrt{2}}{2}=5.90326$。與以微分算出的最小值相同！也與我們查到的參考資料一致 [5]。而且經過測量計算我們發現皂膜的兩節點與對應正三角形的頂點所連接的 4 個線段夾角均為 $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{3}\right)$，約為 109.4°。即上下兩個正三角錐皆為正四面體重心與四頂點連線的部份圖形，如圖 19。

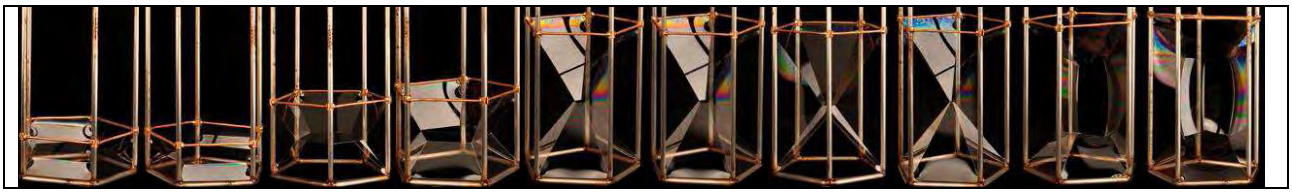
圖 19：正三角柱 Type II 頂點與正四面體重心比較圖

三、邊長與高度比為 1:h 的正五角柱的皂膜形狀與面積

圖 20：可調整高度的正五角柱模型

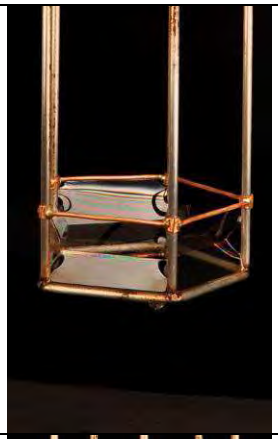
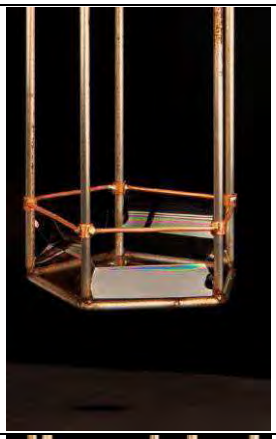
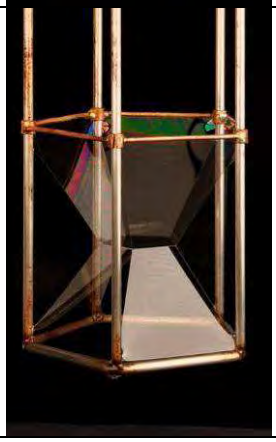
我們製作邊長為 6 公分，高為 32 公分的正五角柱模型，並設計出可調整高度的裝置，如圖 20。接著，調整模型至不同的高度，放入肥皂溶液中，並鉛直拉起觀察它的形狀，實驗照片記錄如表 5 與表 6。我們盡量將模型底邊對齊在照片底部，以便看出調整模型高度時皂膜變化情形。

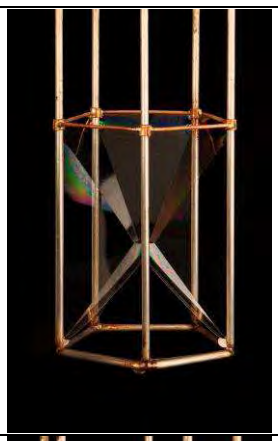
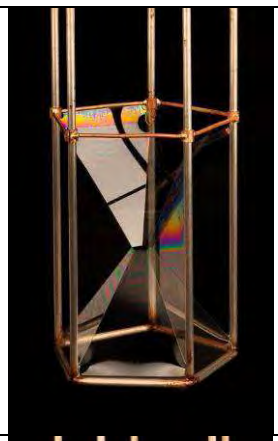
表 5：改變不同高度正三角柱皂膜情形



設正五角柱底邊的邊長為 1，高為 h ；以 Type I 表示高小於 2.08 的皂膜形狀；Type II 表示高大於等於 2.08 的皂膜形狀，我們以一次近似計算正五角柱皂膜面積。而在臨界情形，我們選擇不同角度的照片，以便觀察。

表 6：不同角度的不同高度正五角柱皂膜情形

比例	角度 a	角度 b
1:0.5 (Type I)		
1:1.0 (Type I)		
1:1.5 (Type I)		

1:2.0 (Type I)		
1:2.1 (Type I 變到 Type II)	 (Type I 逐漸縮小)	 (Type II 成形，角度 1)
	 (Type II 成形，角度 2)	 (Type II 成形，角度 3)

Type I

圖 21(a)：正五角柱 Type I 面積分解示意圖

圖 21(b)：正五角柱 Type I 面積分解示意圖

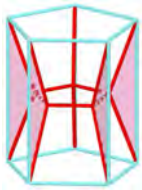


圖 21(c)：正五角柱 Type I 面積分解示意圖

當 $h < 2.08$ 時，設中央正五邊形邊長為 x，皂膜情形如圖 21。

中央正五邊形之面積為 $\dfrac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4}\ x$，如圖 21(a)；

面積為 $\frac{x+1}{2}\cdot\sqrt{(\frac{1-x}{2})^2\times\frac{5+2\sqrt{5}}{5}+\frac{h^2}{4}}$ ，如圖 21(b)；

等腰三角形面積為 $\frac{h(1-x)(\sqrt{5}+1)}{4\sqrt{5}}$ ，如圖 21(c)；此時皂膜面積為

$$f_1(x,h)=\frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4}\quad x+5(1+x)\sqrt{(\frac{1-x}{2})^2\cdot\frac{5+2\sqrt{5}}{5}+\frac{h^2}{4}}+\frac{h(1-x)(5+\sqrt{5})}{4}\text{，}0\le x\le 1\text{。}$$

我們發現模型要將高度大於等於 0.3 時，皂膜才會穩定。我們發現不同高度時，中央正五邊形的邊長與面積的函數如圖 22(a)。

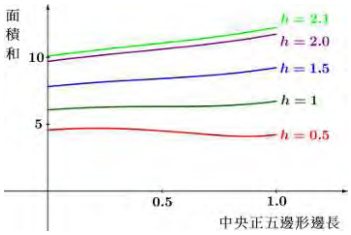


圖 22(a)：Type I 正五角柱五邊形邊長(x)與面積(y)關係圖

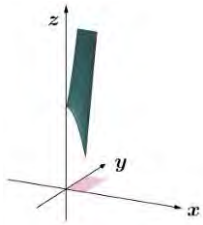


圖 22(b)：Type I 正五角柱正五邊形邊長(x)高度(y)與面積(z)關係圖

中央正五邊形的邊長、高度與面積的函數如圖 22(b)。除了 $h=0.5$ ，其他四個函數都是單調遞增，也就是當 $x=0$ 時產生相對極小值發生。我們猜想可能是高度在 1 與 2 之間時，能量差距很小，所以看起來理論值的中央正五邊形縮成一點，與實驗值不同！待 Type II 的面積和公式求出後我們再對此問題討論。

當 $h=0.50$ 時， $x=0.87195$ ， $f_1(x,0.50)$ 有相對極小值 4.09704；

當 $h=1.00$ 時， $x=0$ ， $f_1(x,1.00)$ 有相對極小值 6.06227；

當 $h=1.50$ 時， $x=0$ ， $f_1(x,1.50)$ 有相對極小值 7.80299；

當 $h=2.00$ 時， $x=0$ ， $f_1(x,2.00)$ 有相對極小值 9.68764；

當 $h=2.10$ 時， $x=0$ ， $f_1(x,2.10)$ 有相對極小值 10.07609；

Type II

圖 23(a)：正五角柱 Type II 測視圖

圖 23(b)：正五角柱 Type II 測視圖

圖 23(c)：正五角柱 Type II 上視圖

當 $h\ge 2.08$ 時，正五角柱皂膜如圖 23 所示。側視圖中有兩個矩形，五個梯形，其中兩

組為兩兩對稱的。從正上方與正下方觀察投影至水平面其圖形如圖 23(c)所示，上下投影圖相同，皆有一左右對稱的五邊形，有兩個全等的三角形與兩個全等的四邊形。

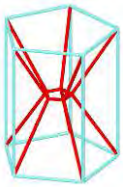


圖 24(a)：正五角柱皂膜轉換過程 1

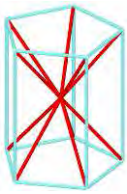


圖 24(b)：正五角柱皂膜轉換過程 2

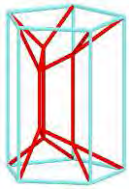


圖 24(c)：正五角柱皂膜轉換過程 3

而且在高度與邊長比為 2.1:1時，拉出的皂膜會從過程 1 即圖 24(a)變到過程 2 圖 24(b)平均約耗時 2 秒，而由過程 2 圖 24(b)變到過程 3 如圖 24(c)平均約耗時 1 秒。

正五角柱是以其重心點對稱的結構，**而其 Type II 皂膜形狀竟然是不對稱的！**所以我們考慮用以下方法求出其面積。

我們使用翻拍架由正五角柱模型的正上方拍攝 80 張照片，最後取圖 25 這張。如圖 25(b)、25(c)、25(d)，我們將照片放在數學軟體中，再找一個正五邊形 $ABCDE$ 去逼近它，最後找出中間三個節點 P,Q,R 的位置。

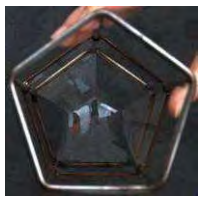


圖 25(a)：上視圖

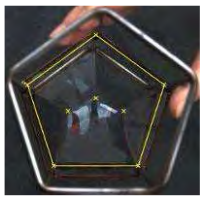


圖 25(b)：找出節點

圖 25(c)：模擬皂膜形狀

我們取平面上正五邊形的頂點分別為 $A(0.5,0)$ 、 $B(0.80902,0.95108)$ 、 $C(0,1.53884)$ 、 $D(-0.80902,0.95108)$ 、 $E(-0.5,0)$ 。設 P 、 Q 、 R 三個點在 xy 平面的投影點座標分別為 $P_1(0.32383,0.65514)$ 、 $Q_1(0,0.81795)$ 、 $R_1(-0.32383,0.65514)$ 。而為了方便計算，我們設 $B(\alpha_1,\beta_1)$ 、 $C(0,\beta_2)$ 、 $D(-\alpha_1,\beta_1)$ 、 $P_1(\alpha,\beta)$ 、 $Q_1(0,\gamma)$ 、 $R_1(-\alpha,\beta)$ ，如圖 26。

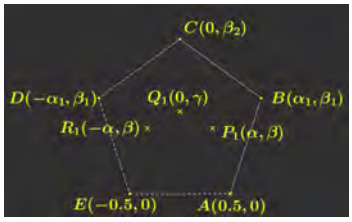


圖 26(a)：給定座標

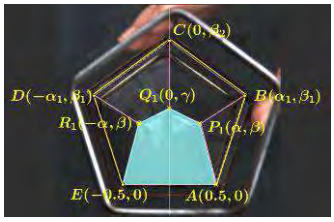


圖 26(b)：給定座標

因為這個圖形是面對稱的，所以在空間中，我們分別設正五角柱 5 個頂點座標為 $A(0.5,0,0)$ 、 $B(\alpha_1,\beta_1,0)$ 、 $C(0,\beta_2,0)$ 、 $D(-\alpha_1,\beta_1,0)$ 、 $E(-0.5,0,0)$ 、 $A'(0.5,0,h)$ 、 $B'(\alpha_1,\beta_1,h)$ 、 $C'(0,\beta_2,h)$ 、 $D'(-\alpha_1,\beta_1,h)$ 與 $E'(-0.5,0,h)$ 。而相關的 6 個節點座標設為 $P(\alpha,\beta,\lambda)$ 、 $Q(0,\gamma,\eta)$ 、

$R(-\alpha,\beta,\lambda)$ 、 $P'(\alpha,\beta,h-\lambda)$ 、 $Q'(0,\gamma,h-\eta)$ 、 $R'(-\alpha,\beta,h-\lambda)$ 。

圖 27：不同高度正五角柱 Type II 皂膜形狀

且λ與η皆為h的函數。我們分別取 Type II 中，邊長與高度比為2.2 、 2.6 、 3 、 3.4 、 3.8的五組數據討論，並拍攝照片 ，如圖 28。

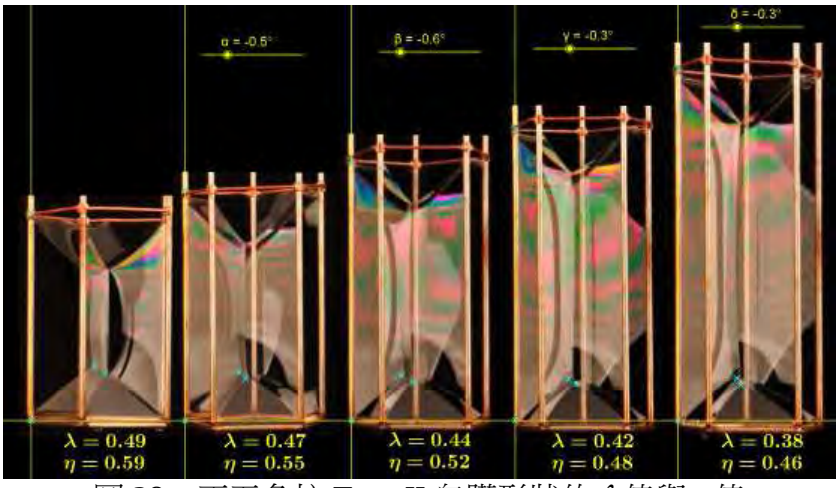


圖 28：正五角柱 Type II 皂膜形狀的λ值與η值

再將照片放到數學軟體中校正，找出對應比例，並計算高度為h時，λ和η的值，如圖 28 與表 7。

表 7：正五角柱 Type II 皂膜形狀的λ值與η值

h	2.2	2.6	3	3.4	3.8
λ	0.49	0.47	0.44	0.42	0.38
η	0.59	0.55	0.52	0.48	0.46

最後我們找出λ與η關於h的迴歸直線方程式(如圖 29)：

$$\lambda=-0.07h+0.64 \quad 及 \quad \eta=-0.08h+0.77$$

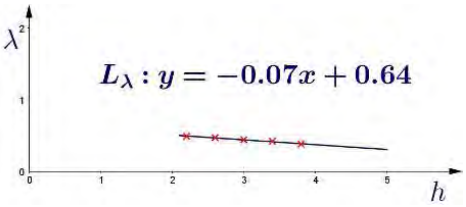


圖 29(a)：λ關於h的迴歸直線

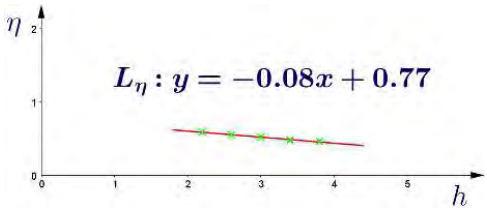


圖 29(b)： η關於h的迴歸直線

接著開始討論這 5 個點對應的曲面面積。

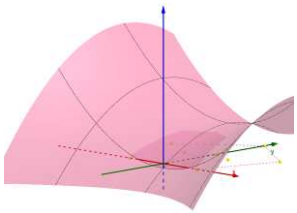


圖 30(a)：皂膜所在曲面

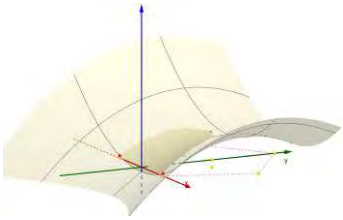


圖 30(b)：模擬皂膜所在曲面

圖 30(a)是真實皂膜曲面，我們取一個平均曲率為 0 的雙曲拋物面來逼近它，如圖 30(b)。而曲面的取法是我們利用最小平方法的概念，我們要找到一個曲面方程式使得這 5 條綠色線段鉛直距離平方和為最小，如圖 31(a)與圖 31(b)。

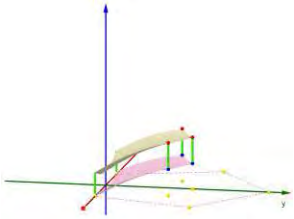


圖 31(a)：

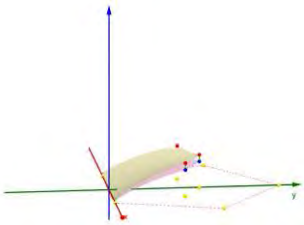


圖 31(b)：給定座標

所以我們要考慮以下兩點：

1. 角度問題：圖 32(a)是我們 $z = A_1(x^2 - y^2)$，我們將其旋轉 θ 角，得 $f(x,y) = (x^2 - y^2)\cos 2\theta + 2xy\sin 2\theta$，如圖 32(b)。很明顯改變曲面方程式的角度會影響我們估計的面積。

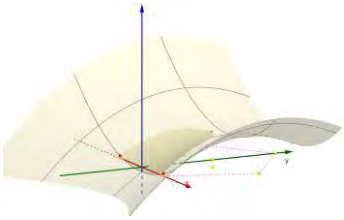


圖 32(a)：

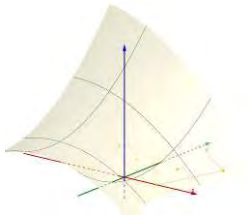


圖 32(b)：給定座標

2. 高度問題：圖 33(a)是我們 $f(x,y) = A_1(x^2 - y^2)$，我們調整係數 A_1，得到圖 33(b)，很明顯改變 A_1 時我們估計的面積也會改變。

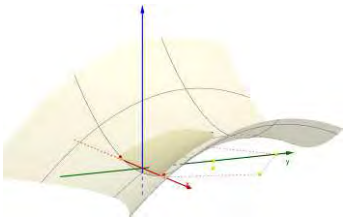


圖 33(a)：

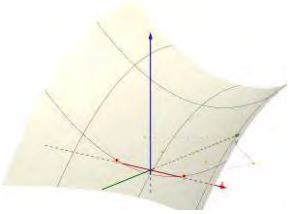


圖 33(b)：給定座標

要如何同時找到最好的 θ 與 A_1 呢？我們假設雙曲拋物面的方程式是

$$F(x,y)=A_1\left[(x^2-y^2)\cos 2\theta+2xy\sin 2\theta\right]$$

考慮通過 A,E,Q 的平面方程式為 $z=\dfrac{\eta}{\gamma}y$ ，

假設 $\overrightarrow{\zeta_0}=(x,y,\dfrac{\eta}{\gamma}y)$ ， $\overrightarrow{\zeta}=(x,y,\dfrac{\eta}{\gamma}y)+(0,0,A_1(x'^2-y'^2))$

設 $f_1(A_1,\theta)=\sum_{j=1}^{5}\left\{\dfrac{\eta}{\gamma}y_j+A_1\left[(x_j^2-y_j^2)\cos 2\theta+2x_jy_j\sin 2\theta\right]-z_j\right\}^2$ 我們對 θ 與 A_1 偏微得

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f_1}{\partial\theta}=0\Rightarrow A_1\cos 2\theta=0.00978h-0.03844\ \ or\ \ \sin 2\theta=0\\ \dfrac{\partial f_1}{\partial A_1}=-0.91419A_1\cos^2 2\theta+0.81522\cos 2\theta-0.08697h\cos 2\theta+1.6972A_1=0\end{cases}$$

此時得到三組解：

$$\begin{cases}\theta=\dfrac{n\pi}{2}\\ A_1=0.00978h-0.03844\end{cases}，n\in Z$$

或 $\begin{cases}\theta=\dfrac{1}{4}\cos^{-1}\left(\dfrac{-0.77377+0.07635h}{0.85025-0.09591h}\right)\\ A_1=\dfrac{0.00978h-0.03844}{\cos 2\theta}\end{cases}$ 與它的補角 $\begin{cases}\theta=\pi-\dfrac{1}{4}\cos^{-1}\left(\dfrac{-0.77377+0.07635h}{0.85025-0.09591h}\right)\\ A_1=\dfrac{0.00978h-0.03844}{\cos 2\theta}\end{cases}$

接著討論這三組數據的重要物理意義。

經過相當繁複的計算，(但受限於篇幅，細節在此處省略，惟完整詳細計算過程均留存在實驗記錄簿內，可供參考) 我們可以推出這三組解而重點是：

> 經過計算後，發現 θ 有三個解，他們其實是有相當重要的物理意義；第一個 $\theta=\dfrac{n\pi}{2}$ ，這和我們的直覺吻合，因為 $f(x,y)=x^2-y^2$ 是有對稱的！可是有趣的是，我們在數學上有另外兩個解，它顯然是不對稱的！ $\theta=\dfrac{1}{4}\cos^{-1}\left(\dfrac{-0.77377+0.07635h}{0.85025-0.09591h}\right)$ 和它的補角，這兩個解本身是有鏡像的對稱，這在物理特別有趣，因為這告訴我們說：其實改變參數 h 的時候，也許這個系統會在某些數值下偏好特殊角的解，而在別的數值下卻會喜歡非對稱的解。 因此我們將某參數調整時，它就可能自動由一種對稱的皂膜形狀自發地跳躍成為不對稱的形狀。關於這點，顯然是和分岔理論的精神一致。

接著我們考慮如何利用積分來計算彎曲的皂膜面積：

與我們積分的邊界有關的直線方程式如下：

$\overleftrightarrow{AP_1}: y=\dfrac{\beta}{2\alpha-1}(2x-1)$ ， $\overleftrightarrow{P_1Q_1}: y=\dfrac{\beta-\gamma}{\alpha}x+\gamma$ ， $\overleftrightarrow{BP_1}: y=\dfrac{\beta-\beta_1}{\alpha-\alpha_1}(x-\alpha)+\beta$

$\overleftrightarrow{AB}: y=\dfrac{\beta_1}{2\alpha_1-1}(2x-1)$ ， $\overleftrightarrow{BC}: y=\dfrac{\beta_1}{\alpha_1-\alpha_2}(x-\alpha_1)+\beta_1$

$f(x,y)=A_1(x'^2-y'^2)$ ，其中 $x'^2-y'^2=(x^2-y^2)\cos 2\theta+2xy\sin 2\theta$

令 $\vec{\zeta}=(x,y,\dfrac{\eta}{\gamma}y)$ 、 $A_1\vec{\zeta}=(x,y,x'^2-y'^2)$ ，

$$\vec{A}=\frac{\partial\vec{\zeta}}{\partial x}\times\frac{\partial\vec{\zeta}}{\partial y}=(0,2y\cos 2\theta-2x\sin 2\theta,1)$$

$$\left|\vec{A}\right|^2=4y^2\cos^2 2\theta-8xy\sin 2\theta\cos 2\theta+4x^2\sin^2 2\theta+1$$

$$\vec{B}=\frac{\partial\vec{\zeta}}{\partial x}\times\frac{\partial A_1\vec{\zeta}}{\partial y}+\frac{\partial A_1\vec{\zeta}}{\partial x}\times\frac{\partial\vec{\zeta}}{\partial y}=(-2x\cos 2\theta-2y\sin\theta,2y\cos 2\theta-2x\sin\theta-\frac{\eta}{\gamma},2)$$

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=(2y\cos\theta-2x\sin 2\theta)^2-\frac{\eta}{\gamma}(2y\cos 2\theta-2x\sin 2\theta)+2$$

$$\left|\vec{A}\right|+\frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{\left|\vec{A}\right|}=\frac{1}{\left|\vec{A}\right|}(\left|\vec{A}\right|^2+\vec{A}\cdot\vec{B})=\frac{2(2y\cos 2\theta-2x\sin 2\theta)^2-\frac{\eta}{\gamma}(2y\cos 2\theta-2x\sin 2\theta)+3}{\sqrt{(2y\cos 2\theta-2x\sin 2\theta)^2+1}}$$

考慮五邊形 $APQRE$ 對應的曲面面積 $W=2(W_1+W_2)$ ，我們分兩段積分如圖 34：

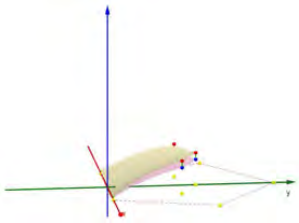


圖 34(a)：五邊形對應曲面

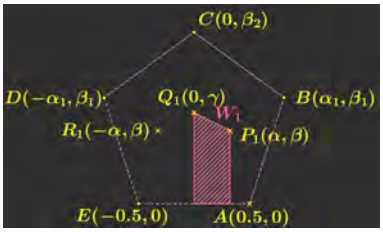


圖 34(b)：五邊形分段積分

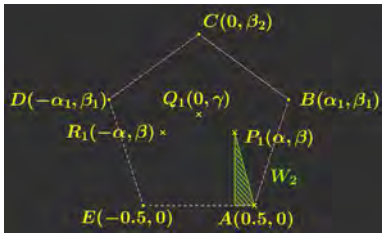


圖 34(c)：五邊形分段積分

$$W_1=\int_0^{\alpha}\int_0^{\frac{\beta-\gamma}{\alpha}x+\gamma}\frac{2(2y\cos 2\theta-2x\sin 2\theta)^2-\frac{\eta}{\gamma}(2y\cos 2\theta-2x\sin 2\theta)+3}{\sqrt{(2y\cos 2\theta-2x\sin 2\theta)^2+1}}dydx$$

$$W_1=\frac{1}{2\cos 2\theta}\left\{\frac{1}{3c_1}[(F(\alpha))^2+1]^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3c_1}[(F(0))^2+1]^{\frac{3}{2}}-\frac{\eta}{2\gamma}F(\alpha)\sqrt{(F(\alpha))^2+1}+\frac{\eta}{2\gamma}\sqrt{(F(0))^2+1}\right.$$

$$-\frac{\eta}{2\gamma}\ln\left|\frac{F(\alpha)+\sqrt{(F(\alpha))^2+1}}{F(0)+\sqrt{(F(0))^2+1}}\right|-\frac{1}{3c_2}[(G(\alpha))^2+1]^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{3c_2}[(G(0))^2+1]^{\frac{3}{2}}$$

$$+\frac{\eta}{2\gamma}G(\alpha)\sqrt{(G(\alpha))^2+1}-\frac{\eta}{2\gamma}\sqrt{(G(0))^2+1}+\frac{\eta}{2\gamma}\ln\left|\frac{G(\alpha)+\sqrt{(G(\alpha))^2+1}}{G(0)+\sqrt{(G(0))^2+1}}\right|$$

$$+\frac{2}{c_1}F(\alpha)\ln\left|F(\alpha)+\sqrt{(F(\alpha))^2+1}\right|-\frac{2}{c_1}F(0)\ln\left|F(0)+\sqrt{(F(0))^2+1}\right|$$

$$-\frac{2}{c_1}\sqrt{(F(\alpha))^2+1}+\frac{2}{c_1}\sqrt{(F(0))^2+1}-\frac{2}{c_2}G(\alpha)\ln\left|G(\alpha)+\sqrt{(G(\alpha))^2+1}\right|$$

$$\left.+\frac{2}{c_2}G(0)\ln\left|G(0)+\sqrt{(G(0))^2+1}\right|+\frac{2}{c_2}\sqrt{(G(\alpha))^2+1}-\frac{2}{c_2}\sqrt{(G(0))^2+1}\right\}$$

其中 $F(x)=2\cos 2\theta(\frac{\beta-\gamma}{\alpha}x+1)-2x\sin 2\theta$ ， $G(x)=-2x\sin 2\theta$ ， $c_1=F'(x)$ ， $c_2=G'(x)$

$$W_2=\int_{\alpha}^{0.5}\int_0^{\frac{\beta}{2\alpha-1}(2x-1)}\frac{2(2y\cos 2\theta-2x\sin 2\theta)^2-\frac{\eta}{\gamma}(2y\cos 2\theta-2x\sin 2\theta)+3}{\sqrt{(2y\cos 2\theta-2x\sin 2\theta)^2+1}}dydx$$

$$W_2=\frac{1}{2\cos 2\theta}\{\frac{1}{3c_3}[(H(0.5))^2+1]^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3c_3}[(H(\alpha))^2+1]^{\frac{3}{2}}-\frac{\eta}{2\gamma}H(0.5)\sqrt{(H(0.5))^2+1}$$

$$+\frac{\eta}{2\gamma}H(\alpha)\sqrt{(H(\alpha))^2+1}-\frac{\eta}{2\gamma}\ln\left|\frac{H(0.5)+\sqrt{(H(0.5))^2+1}}{H(\alpha)+\sqrt{(H(\alpha))^2+1}}\right|-\frac{1}{3c_2}[(G(0.5))^2+1]^{\frac{3}{2}}$$

$$+\frac{1}{3c_2}[(G(\alpha))^2+1]^{\frac{3}{2}}+\frac{\eta}{2\gamma}G(0.5)\sqrt{(G(0.5))^2+1}-\frac{\eta}{2\gamma}G(\alpha)\sqrt{(G(\alpha))^2+1}$$

$$+\frac{\eta}{2\gamma}\ln\left|\frac{G(0.5)+\sqrt{(G(0.5))^2+1}}{G(\alpha)+\sqrt{(G(\alpha))^2+1}}\right|+\frac{2}{c_3}H(0.5)\ln\left|H(0.5)+\sqrt{(H(0.5))^2+1}\right|$$

$$-\frac{2}{c_3}H(\alpha)\ln\left|H(\alpha)+\sqrt{(H(\alpha))^2+1}\right|-\frac{2}{c_3}\sqrt{(H(0.5))^2+1}+\frac{2}{c_3}\sqrt{(H(\alpha))^2+1}$$

$$-\frac{2}{c_2}G(0.5)\ln\left|G(0.5)+\sqrt{(G(0.5))^2+1}\right|+\frac{2}{c_2}G(\alpha)\ln\left|G(\alpha)+\sqrt{(G(\alpha))^2+1}\right|$$

$$+\frac{2}{c_2}\sqrt{(G(0.5))^2+1}-\frac{2}{c_2}\sqrt{(G(\alpha))^2+1}\}$$

其中 $G(x)=-2x\sin 2\theta$ ， $H(x)=2\cos 2\theta(\frac{2\beta}{2\alpha-1}x-\frac{\beta}{2\alpha-1})-2x\sin 2\theta$ ， $c_3=H'(x)$

當 $\theta=\frac{n\pi}{2}$ 時， $n\in Z$ ， $\theta=0$ 與 $\theta=\pi$ 時一樣， $\theta=\frac{\pi}{2}$ 與 $\theta=\frac{3\pi}{2}$ 也一樣，所以我們可以一併討論。而當代值時發現， $\theta=\frac{n\pi}{2}$ 時，會造成 $A_1<0$ ，所以不合。將我們正五角柱實驗的數值 h 帶入上述 2 組 θ ，可得表 8。

表 8：$\theta=\frac{1}{4}\cos^{-1}\left(\frac{-0.77377+0.07635h}{0.85025-0.09591h}\right)$

h	2.2	2.6	3	3.4	3.8
θ	0.70417	0.71213	0.72234	0.73654	0.76186
A_1	0.10928	0.14784	0.20273	0.30150	0.70807
W_1	0.82862	0.91815	1.07834	1.45237	3.54879
W_2	0.73839	0.71174	0.68560	0.66045	0.63832
$W=2(W_1+W_2)$	3.13402	3.25978	3.52788	4.22564	8.37422
$\pi-\theta$	2.43742	2.42947	2.41925	2.40505	2.37973
A_1	0.10928	0.14784	0.20273	0.30150	0.70807
W_1	1.82441	1.87115	1.94532	2.10160	2.90440
W_2	0.80066	0.76540	0.72962	0.69289	0.65315
$W=2(W_1+W_2)$	5.25014	5.27310	5.34988	5.58898	7.11510

當 $h=2.2$ 、 2.6 、 3 、 3.4時，最小面積發生在 $\theta=\frac{1}{4}\cos^{-1}\left(\frac{-0.77377+0.07635h}{0.85025-0.09591h}\right)$ ，而有趣的事情發生在 $h=3.4$ 到 $h=3.8$ 之間，此時皂膜為了維持最低能量也就是保持最小面積，它轉到 $\theta=\pi-\frac{1}{4}\cos^{-1}\left(\frac{-0.77377+0.07635h}{0.85025-0.09591h}\right)$ ，如圖 35。等整個系統重新計算後，我們猜測可能也有類似結果。

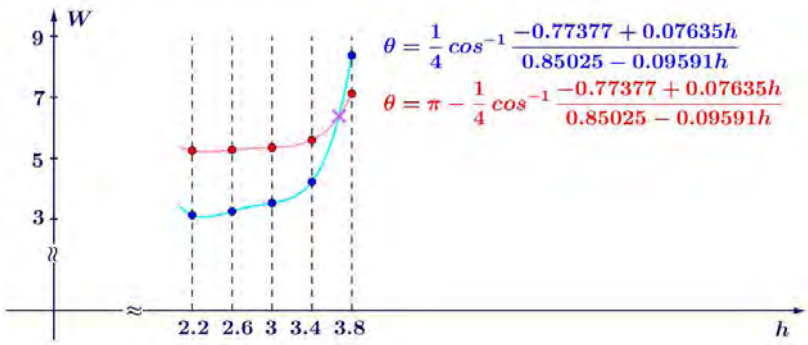


圖 35：正五角柱中 W 與 h 關係圖

接下來我們希望以上述的方法計算圖 36(b)、...、36(g)各部分面積。圖 36(b)的面積為 $2\times(h-\lambda-\eta)\sqrt{\alpha^2+(\beta-\gamma)^2}$ 。圖 36(c)的面積為 $(h-\eta)(\beta_2-\gamma)$ 。圖 36(d)的面積為 $2\times(h-\lambda)\sqrt{(\alpha-\alpha_1)^2+(\beta-\beta_1)^2}$ 。圖 36(e)的面積為 $(3h-2\lambda)\sqrt{(\alpha-0.5)^2+\beta^2}$ 。圖 36(f)的面積為 $2S$ 。圖 36(g)的面積為 $2T$ 。

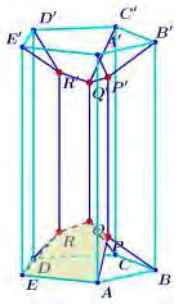


圖 36(a)：
正五角柱 Type II
面積分解示意圖

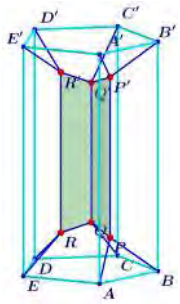


圖 36(b)：
正五角柱 Type II
面積分解示意圖

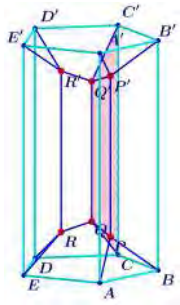


圖 36(c)：
正五角柱 Type II
面積分解示意圖

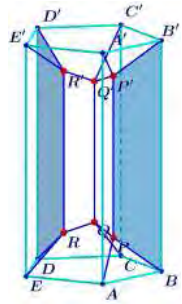


圖 36(d)：
正五角柱 Type II
面積分解示意圖

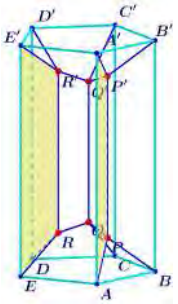


圖 36(e)：
正五角柱 Type II
面積分解示意圖

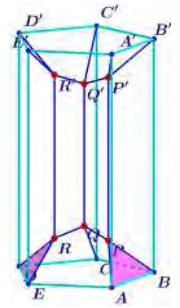


圖 36(f)：
正五角柱 Type II
面積分解示意圖

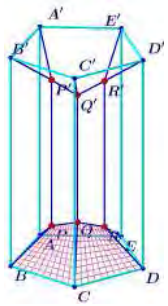


圖 36(g)：
正五角柱 Type II
面積分解示意圖

故正五角柱 Type II 的面積為 $f(h)$。

陸、 討論

一、可調高度的正四角柱的最小面積

(一) 當 $h=1$ 時，水平與鉛直的皂膜形狀都會隨機出現。而代入 Type I 與 Type II 公式計算，也得到相同的結果。

(二) 假設只論皂膜的拓樸結構，也就是假設不管模型的高度，都有 Type I 與 Type II 兩種皂膜會出現，如圖 37，我們比較兩種情形的面積和，我們發現 Type I 的面積小於 Type II 的面積。

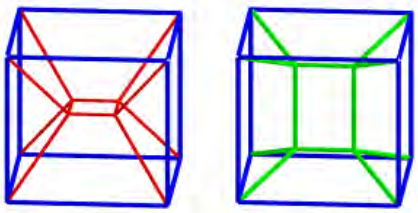


圖 37：相同高度時的 Type I 和 Type II 正四角柱皂膜形狀

(三) 在正四角柱高度為 0.3 到 1 之間時(Type I)，我們討論將不同高度(h)的正四角柱，中

央正方形邊長與面積的最小值關係，並將 x 座標放大 10 倍，發現正四角柱的高度越高，總面積和產生最小值時的中央正方形邊長越小，我們發現資料好像分部在一條直線上，我們取迴歸直線 $L: y=-3.06x+4.72$，如圖 38。下一步是將實驗模擬的高度間距由 0.1 調整到 0.05。

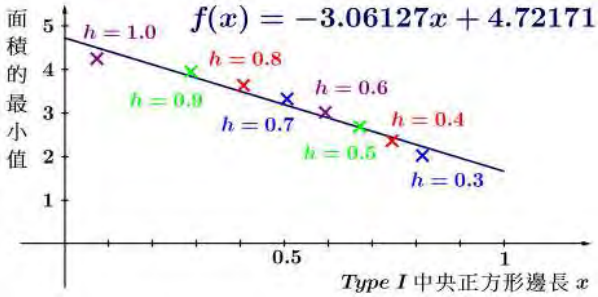


圖 38：不同高度模型對應正方形邊長與最小面積關係圖

(四) 基於本研究得知，當正方形邊長與高之比為1:5時，皂膜實驗仍可成功，但是較不易成功拉出皂膜。

二、可調高度的正三角柱的最小面積

(一) 因為在 Type II 皂膜的面積只與高度有關，所以我們討論 Type I，目前我們調整高度的間距是 0.05 單位，所以我們目前只有五組數據，如果將實驗模擬的高度調整到更小，也許可以得到更精準的資料，但是手做的可調高度模型精準度可能無法這麼高，將來我們要設計更準確的模型以完成實驗。

(二) 假設只論皂膜的拓樸結構，而為了比較兩種皂膜形狀的面積，我們控制相同高度的模型將兩種形狀模擬在圖 39，並以軟體模擬皂膜面積和。因為在 $0.4 \le h \le 0.5$ 時皂膜形狀 Type I 與 Type II 兩種情形都可能出現。起初以為兩者會有共同面積，但模擬後發現，在這段區間，皂膜形狀改變那一瞬間，面積函數是不連續的！關於這點我們用分岔理論(Bifurcation Theory)解釋。

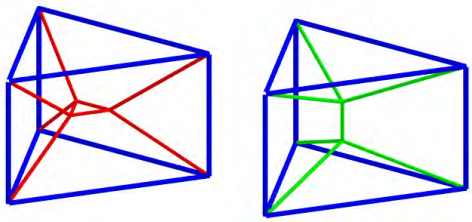


圖 39：相同高度時的 Type I 和 Type II 正三角柱皂膜形狀

(三) 如果只論皂膜的拓樸結構，也就是假設不管模型的高度，則都有 Type I 與 Type II 兩

種皂膜會出現，同時 Type II 要出現時模型高度必需大於等於 $\frac{\sqrt{6}}{6} \approx 0.40825$ 單位，我們從 $h = 0.40285$ 到 $h = 0.5$ 時，Type I 的最小面積皆大於 Type II 的面積，但實驗結果兩種情形都可能出現。

(四) 在正三角柱高度為 0.3 到 0.5 之間時(Type I)，實驗模擬的高度間距為 0.05 單位，我們討論將不同高度 h 的正三角柱，中央正三角形邊長與面積的最小值關係，並將座標軸調整，如圖 40，發現正三角柱的高度越高，總面積和產生最小值時的中央三角形邊長越小，我們發現資料分部很靠近一條直線，故我們做線性迴歸得到直線方程式

$$L: y = 3.51x + 4.50 \text{ 。}$$

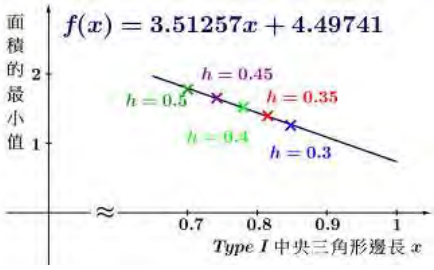


圖 40：不同高度 Type I 模型對應正三角形邊長與最小面積關係圖

(五) 基於本研究得知，當正三角形邊長與高之比為 $1:5$ 時，皂膜實驗仍可成功，但是較不易成功拉出皂膜。

三、可調高度的正五角柱的最小面積

(一) **對我們來說，這可能是至目前為止最難、最有挑戰性的系統。但我們的詳細理論計算與實驗卻在在顯示出來，它會非常有趣，而且似乎沒有文獻討論過此中的對稱破缺現象。**假設只論皂膜的拓樸結構，也就是假設不管模型的高度，都有 Type I 與 Type II 兩種皂膜會出現，當然 Type II 是由 Type I 的結構中，中央正五邊形先變成一點，再變到 Type II，如圖 41，我們也想比較兩種情形的面積和。

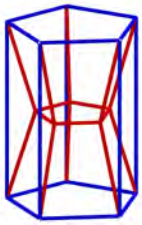


圖 41(a)：相同高度時的 Type I 正五角柱皂膜形狀

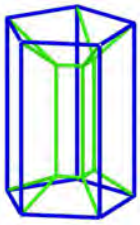


圖 41(b)：相同高度時的 Type II 正五角柱皂膜形狀

(二) 目前我們求出可調整高度的正五角柱 Type II 面積，但目前尚未討論其最小值。所以我們先就 Type I 討論。如圖 42，在我們實驗的 5 個高度，很明顯實驗值與理論的最

小值都不同。這是我們接著要探討的問題。

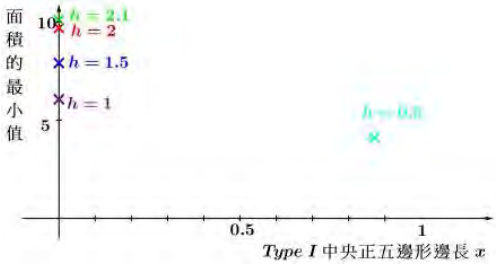


圖 42：不同高度 Type I 模型對應正五角形邊長與最小面積關係圖

柒、 結論與未來展望

一、 找到可調整高度的正三角柱、正四角柱不同高度模型皂膜最小面積之間的關係，並計算其一次近似面積。

二、 在可調整高度的正五角柱中，找到測量曲面面積的方法。也就是說：使用平均曲率為 0 的雙曲拋物面，透過旋轉與伸縮，再用最小平方法，找到最接近正五角柱中實際曲面，最後積分求得其面積。

三、 我們也做了邊長 3 公分高度 10.3 公分的正六角柱，如圖 43(a)。邊長 3.5 公分與高度 15.3 公分的正七角柱的模型，如圖 44(a)。在實驗中，我們還發現一個現象，以正六角柱為例，一開始，我們將皂膜從水中鉛直拉出並且靜置後，皂膜中平行於底邊的小正六邊形會在模型的$\frac{1}{3}$高處；但是若在拉出後旋轉180°，則皂膜中的平行於底邊的小正六邊形會位在會在模型的$\frac{1}{2}$高處，如圖 43(b)，。同時正七角柱也有相同情形，如圖 44(b)。但是在正三角柱、正四角柱以及正五角柱時，並沒有觀察到這個現象。


圖 43(a)


圖 43(b)

旋轉前固定高度正六角柱皂膜形狀


圖 44(a)


圖 44(b)

旋轉後固定高度正七角柱皂膜形狀

四、 正三角柱與正四角柱皂膜形狀是對稱的，而正五角柱、正六角柱與正七角柱當模型高度

超過某個臨界值時，皂膜形狀是不對稱的。

五、 本研究創新之處在於以數學動態軟體模擬並解析物理實驗，以更精準地計算進行皂膜形成的力變化圖形分析。並解釋先前數學理論研究[3]與物理實驗及現象之間的差異。同時也更微觀地驗證皂泡形成能量平衡原理。

六、 目前我們嘗試使用光軸(optical axis)與水晶黏土，製作更精準的模型，而且當調動高度時會更順暢。

七、 從皂膜溶液中將模型拉出來後，每一次皂膜的總重量是不一樣的，所以算出來以後，是否會因為多了一個變相(重量)，因此沒有辦法對應到力學跟總能量的關係？要如何設計更好的實驗解決這個誤差，是我們下一步要思考的。

捌、 參考資料及其他

[1] David Lavett(1996).*Demonstration Science with Soap Films*

[2] 周昕諭(2016)。正多面體之皂膜最小表面能之探討。臺灣國際科學展覽會物理與天文學科三等獎。

[3] 黃筠涵、康婷雅(2010)。Wonderful Bubbles-不同立體框架與形成之肥皂膜的關係。臺灣國際科學展覽會物理與天文學科三等獎。

[4] 李琯儀、許庭瑄、龔治銓(2011)。台北市 100 年度中等學校學生科學研究獎助計畫物理科一等獎。

[5] 方姿文、林定軒(2014)。當柏拉圖遇上史坦納。第 47 屆臺北市中小學科學展覽會數學科佳作。

【評語】051802

本實驗能以數學模擬與實驗進行交互討論，對肥皂泡形成的數學描述詳盡、完整，依前例經驗擴充研究到較多面體，但實驗項目繁多應該可以聚焦出中心物理，選擇出較少見或未預期到的物現現象，就形成該現象的物理行為或圖像做討論，以利物理行為的理解。

作品海報

壹、簡介

一、研究動機

此研究主題是由肥皂泡膜的多樣性變化，引發探討皂膜在立體模型上成形時的各種現象。透過物理上對於力平衡與最小能量的分析，及利用數學方法所繪出的最小面積模型，得到一個穩定的立體結構。並且嘗試製作可調整高度的柱體模型，再對所繪出的皂膜模型來對皂膜形狀進行數學分析與程式模擬。[1]

二、研究目的

1. 藉由製作固定高度正三角柱、正四角柱與正五角柱模型，探討皂膜形狀，並利用動態幾何軟體模擬，並計算最小曲面面積，最後進行理論分析。
2. 藉由製作可調整高度正三角柱、正四角柱與正五角柱模型，探討皂膜形狀，並利用動態幾何軟體模擬，討論能量轉換的臨界點，並計算最小曲面面積，最後進行理論分析。
3. 提出從一次近似到二次近似的方法，求出固定高度正多角柱模型皂膜曲面所張出的面積。

三、名詞解釋與定義

1. 皂膜實驗：以銅線或鐵線焊接而成的模型，放入固定比例的肥皂水中，再鉛直抽出，觀察皂膜的形狀。
2. 浦拉托問題：是數學中與最小曲面有關的一類問題，旨在研究在邊界固定時極小表面的存在性。

四、研究設備

1. 模型：以銅線、焊錫、烙鐵製作而成的正三角柱、正四角柱、正五角柱、正六角柱、正七角柱。
2. 紙、筆、黑板、粉筆、筆記型電腦、幾何軟體 GeoGebra。洗手乳、水、燒杯、量筒、透明水箱、橄欖油；其中皂膜溶液由洗手乳和水依 1 比 6 的比例調配。

五、研究流程

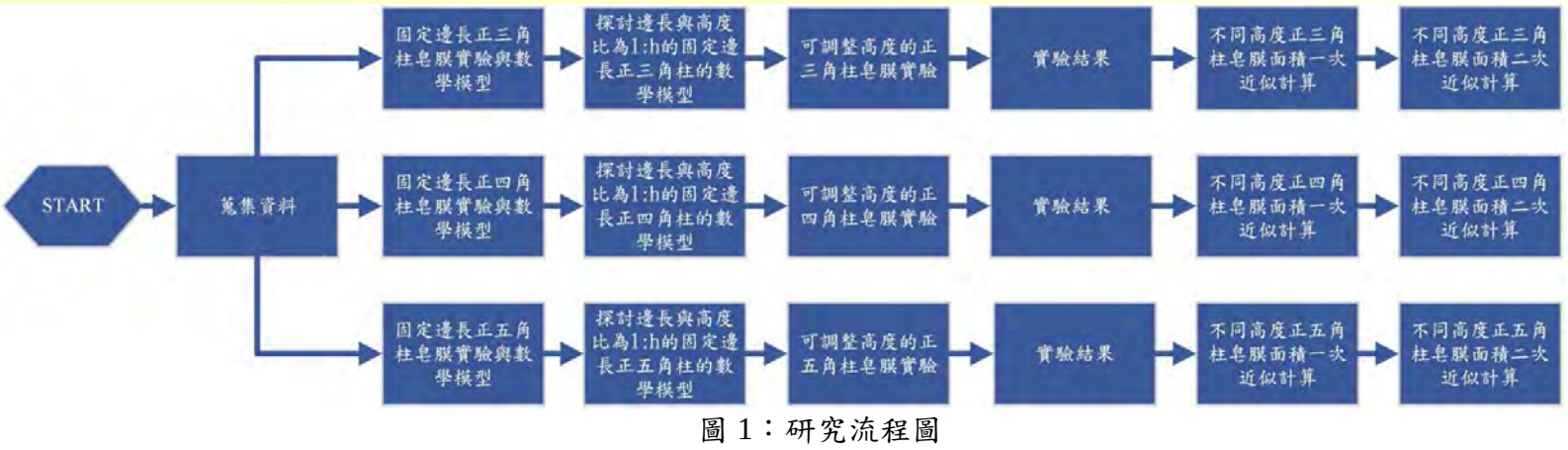


圖 1：研究流程圖

貳、研究設計

一、文獻探討

根據文獻[2]指出，溶液溫度、室溫、皂膜濃度、模型大小、材質、直徑、抽離液面角度，都不會影響皂膜所形成的曲面面積。所以我們只需考慮常溫下固定濃度的溶液，鉛直抽出液面的皂膜形狀，並計算它的最小面積。同時在此研究中，因為有效位數需到**小數點下五位**才能看出相對極小值，故在內文中，我們的有效數字取到小數點後第五位。

二、固定邊長正四角柱、正三角柱與正五角柱的皂膜形狀

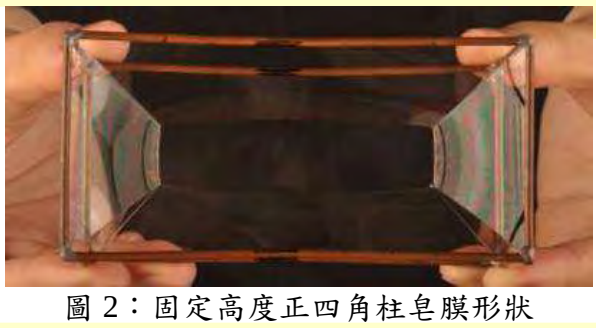


圖 2：固定高度正四角柱皂膜形狀

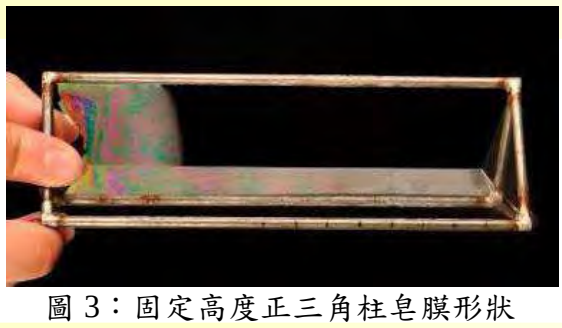


圖 3：固定高度正三角柱皂膜形狀

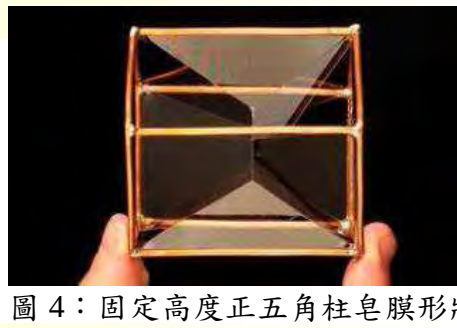


圖 4：固定高度正五角柱皂膜形狀

三、固定邊長正四角柱、正三角柱與正五角柱的皂膜面積

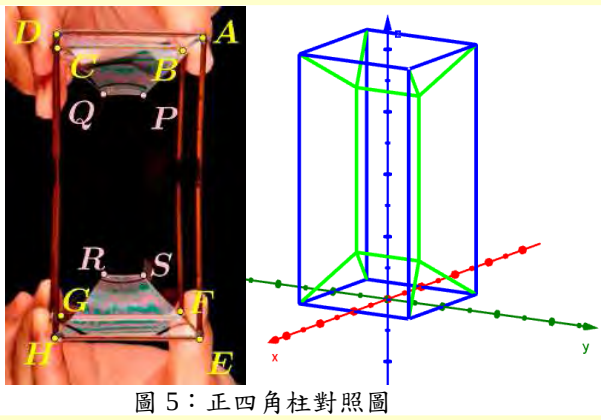


圖 5：正四角柱對照圖

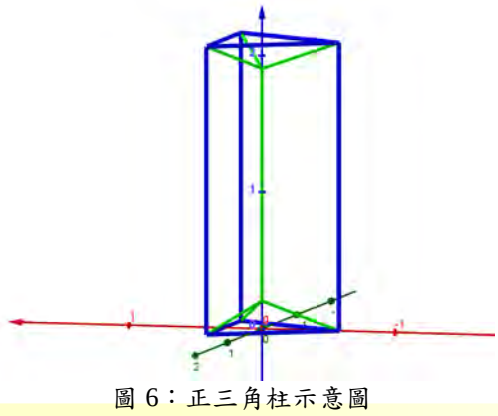


圖 6：正三角柱示意圖

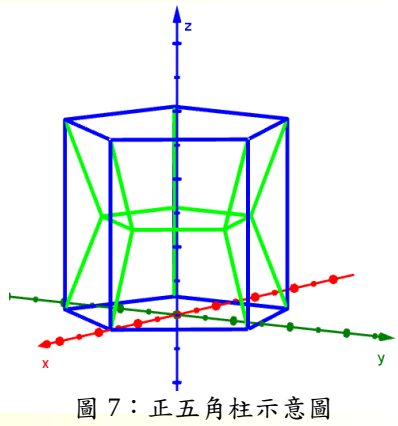


圖 7：正五角柱示意圖

四、以梯度遞減法求固定邊長正四角柱面積皂膜最小值

設中央長方形的長為 s，寬為 t，其中 $0 \le s \le 1$， $0 \le t \le 0.5$。面積和公式為：

$f(s,t) = st + (t+1)\sqrt{(2-s)^2+1} + (2+s)\sqrt{(1-t)^2+1} + \sqrt{(2-s)^2+(1-t)^2}$ 。將 $z = f(s,t)$ 中的 z 坐標做適當的調整後，如圖 8 ，得到當 $s = 0.59793$，$t = 0.15084$ 時，可得 $f(s,t)$ 的最小值為 9.00461。

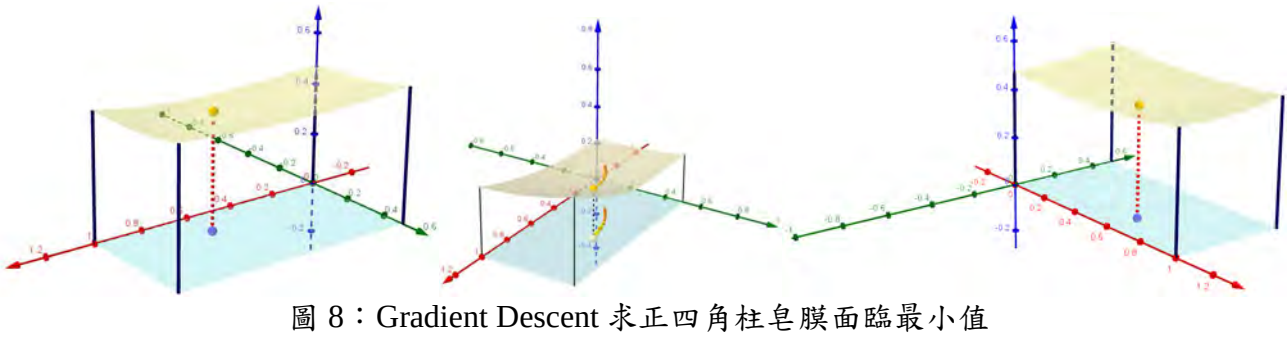


圖 8：Gradient Descent 求正四角柱皂膜面臨最小值

參、討論

一、邊長與高度比為 1:h 的正四角柱的皂膜形狀與面積

圖 8：高度比為 1:0.3 到 1:1.1 的正四角柱模型皂膜形狀

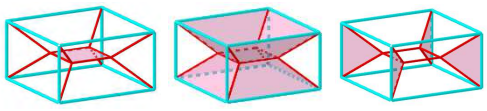


圖 9：Type I 面積分解示意圖

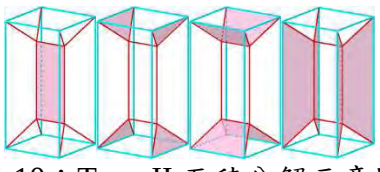


圖 10：Type II 面積分解示意圖

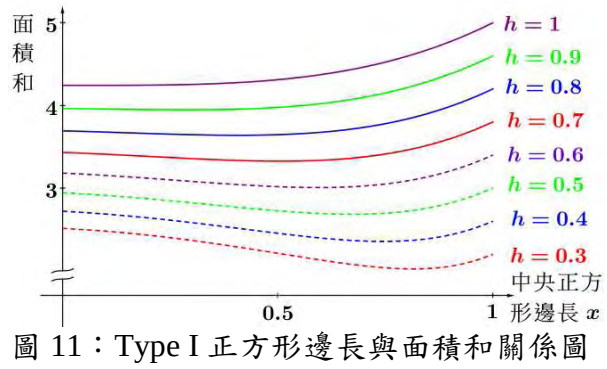


圖 11：Type I 正方形邊長與面積和關係圖

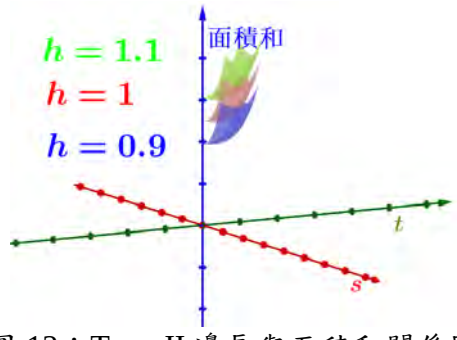


圖 12：Type II 邊長與面積和關係圖

二、邊長與高度比為 1:h 的正三角柱的皂膜形狀與面積

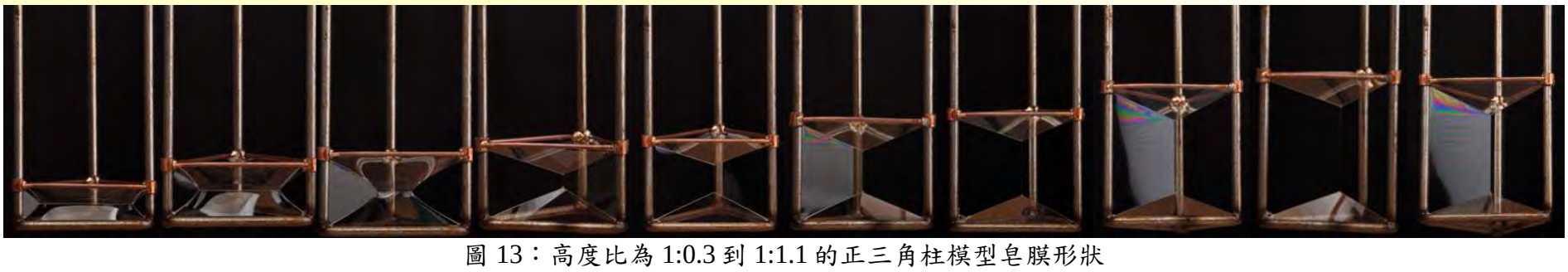


圖 13：高度比為 1:0.3 到 1:1.1 的正三角柱模型皂膜形狀

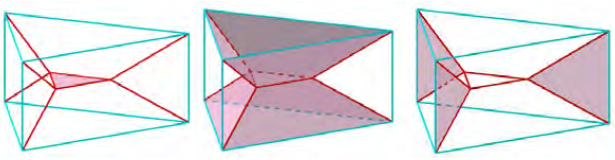


圖 14：Type I 面積分解示意圖

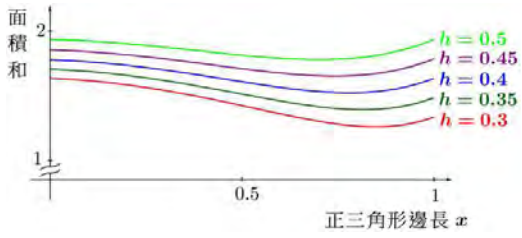


圖 15：Type I 關係圖

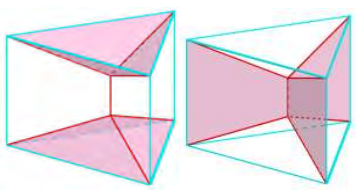


圖 16：Type II 分解示意圖

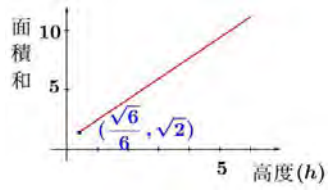


圖 17： Type II 關係圖

三、邊長與高度比為 1:h 的正五角柱的皂膜形狀與面積

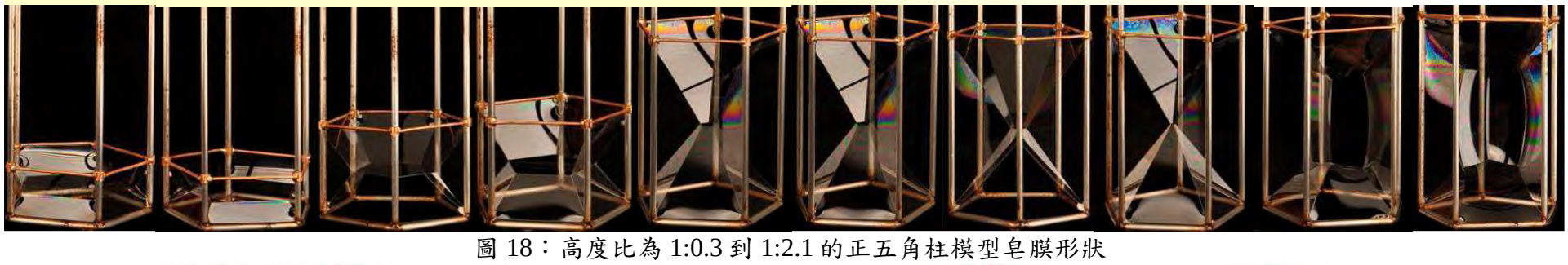


圖 18：高度比為 1:0.3 到 1:2.1 的正五角柱模型皂膜形狀

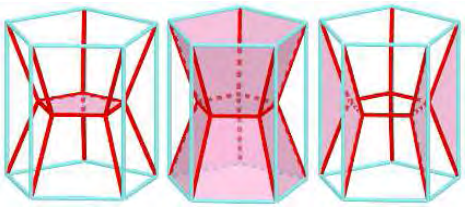


圖 19：Type I 面積分解示意圖

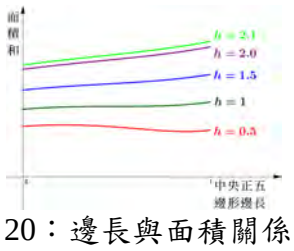


圖 20：邊長與面積關係圖

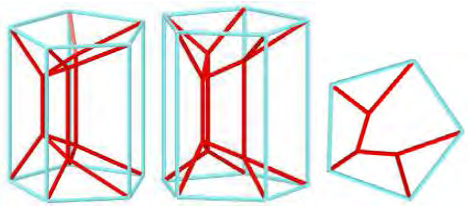


圖 21：Type II 面積分解示意圖

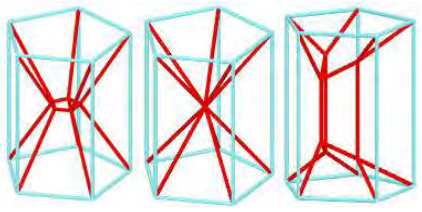


圖 22： Type II 皂膜轉換

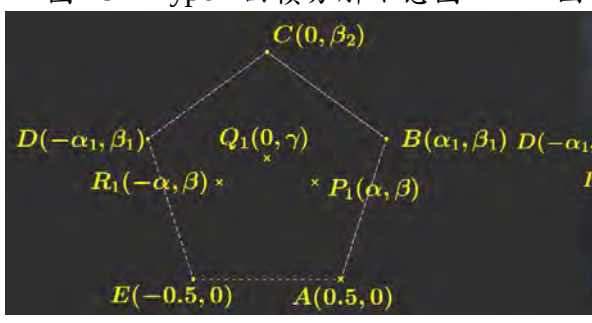


圖 23：定座標

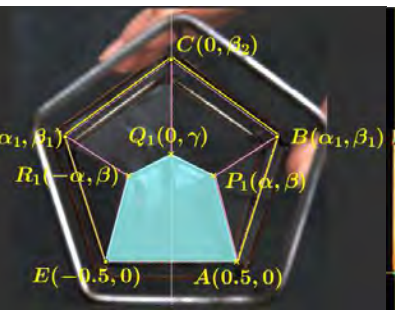


圖 24：定座標

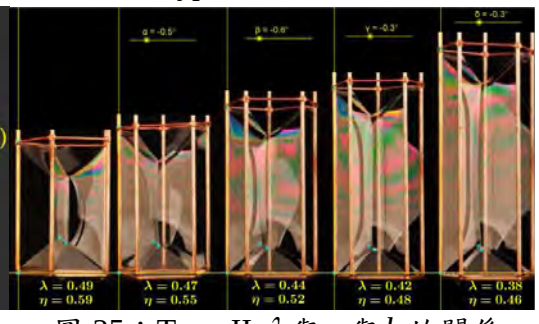


圖 25：Type II λ 與 η 與 h 的關係

表 1：λ、η 與 h 的關係

h	2.2	2.6	3	3.4	3.8
λ	0.49	0.47	0.44	0.42	0.38
η	0.59	0.55	0.52	0.48	0.46
L	$\lambda=-0.07h+0.64$		$\eta=-0.08h+0.77$		

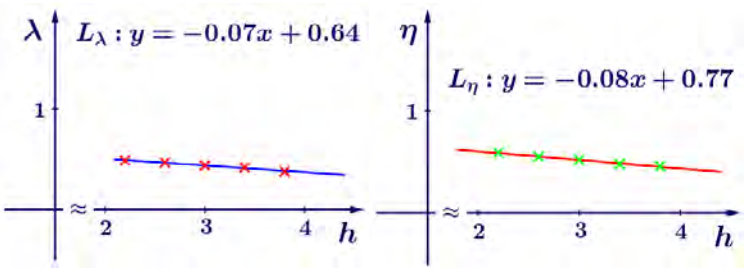


圖 26：λ、η 與 h 的迴歸直線

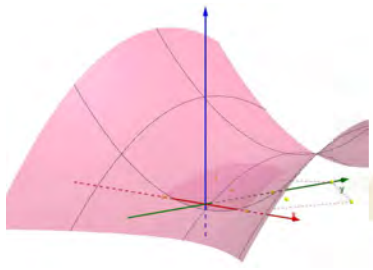


圖 27：皂膜所在曲面

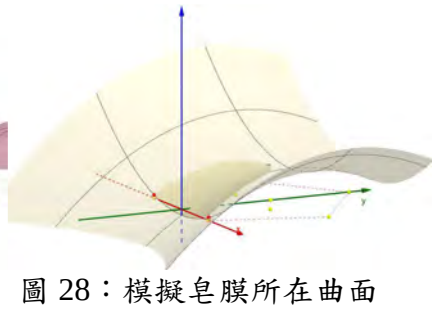


圖 28：模擬皂膜所在曲面

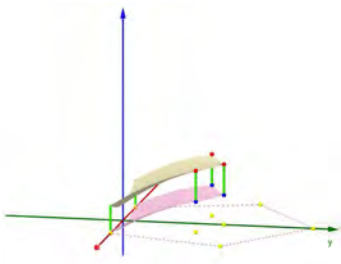


圖 29：最小平方法

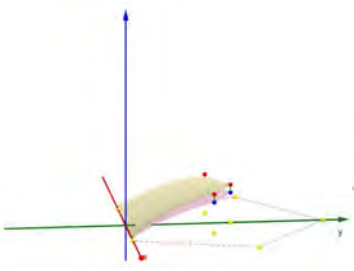


圖 30：最小平方法

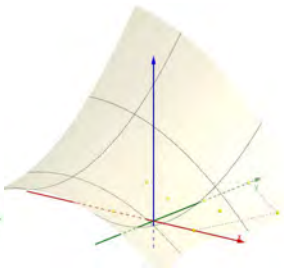


圖 31：調整 θ

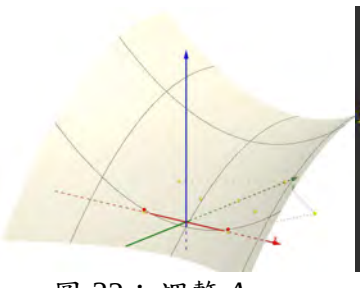


圖 32：調整 A_1

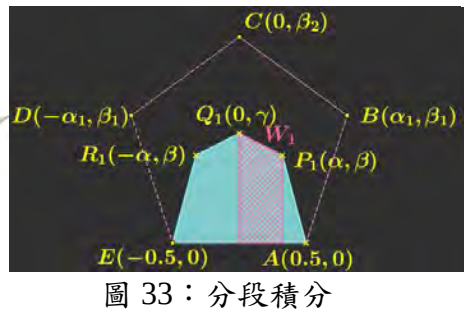


圖 33：分段積分

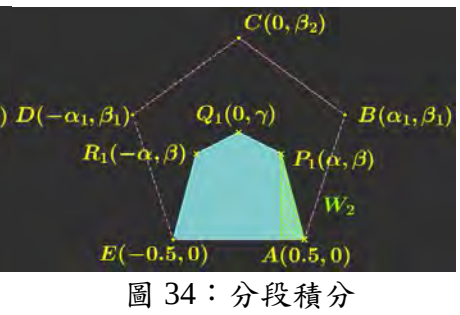


圖 34：分段積分

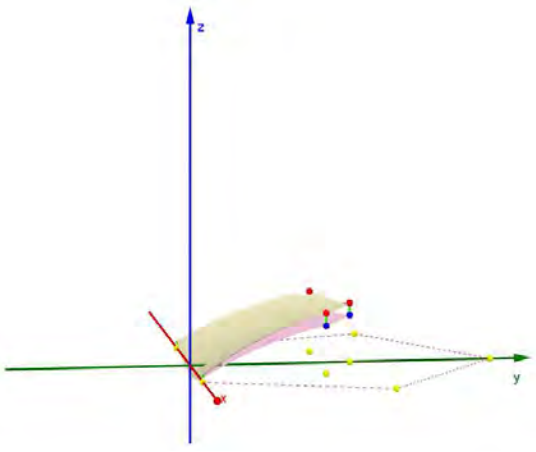


圖 35：實際曲面與模擬曲面

整理：曲面面積

1. 將雙曲拋物面 $z=x^2-y^2$ 旋轉 θ 與伸縮 A_1 後得：

$$F(x,y)=A_1\left[(x^2-y^2)\cos 2\theta+2xy\sin 2\theta\right]$$

2. 使用最小平方法，找鉛直距離平方和最小值。

$$f_1(A_1,\theta)=\sum_{j=1}^{5}\left\{\frac{\eta}{\gamma}y_j+A_1\left[(x_j^2-y_j^2)\cos 2\theta+2x_jy_j\sin 2\theta\right]-z_j\right\}^2$$

3. 偏微分 $\frac{\partial f_1}{\partial A_1}=0$ 與 $\frac{\partial f_1}{\partial \theta}=0$，聯立後解得 θ 與 A_1 值。
4. 使用向量積分，分段積出 W_1 與 W_2 值。
5. 計算結果於表 2。

肆、結論

一、可調高度的正四角柱的最小面積

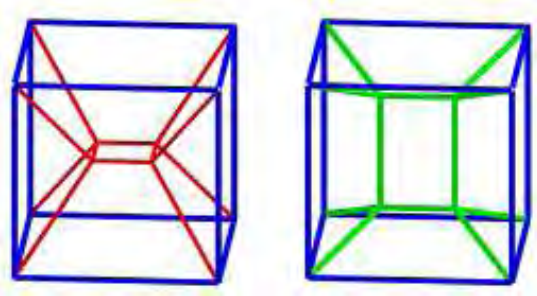


圖 36 ：Type I 與 Type II 結構圖

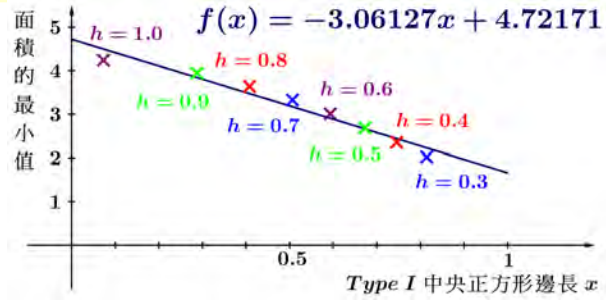


圖 37： 不同高度模型對應正方形邊長

二、可調高度的正三角柱的最小面積

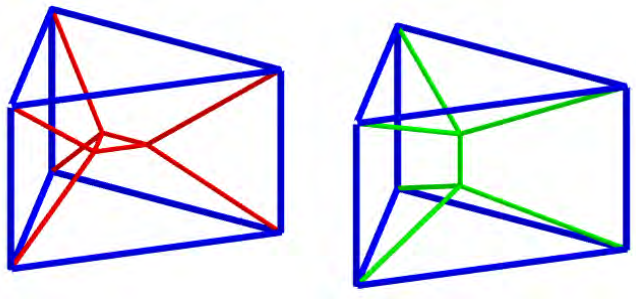


圖 38：Type I 與 Type II 結構圖

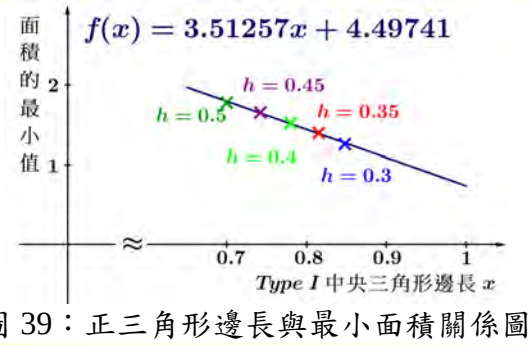


圖 39：正三角形邊長與最小面積關係圖

三、可調高度的正五角柱的最小面積

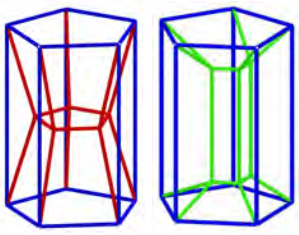


圖 40：相同高度 Type I 與 TypeII 正五角柱皂膜形狀

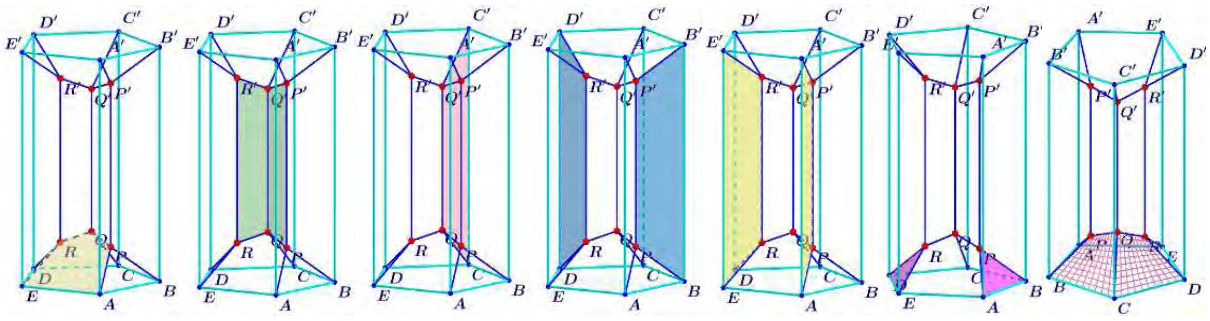


圖 41：Type II 面積分解示意圖

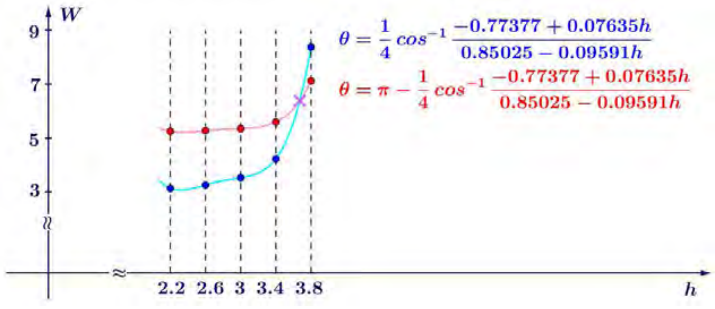


圖 42： h,θ,A_1 與 W 關係圖

表 2： h,θ,A_1 與 W 關係表

h	2.2	2.6	3	3.4	3.8
θ	0.70417	0.71213	0.72234	0.73654	0.76186
A_1	0.10928	0.14784	0.20273	0.30150	0.70807
W_1	0.82862	0.91815	1.07834	1.45237	3.54879
W_2	0.73839	0.71174	0.68560	0.66045	0.63832
$W=2(W_1+W_2)$	3.13402	3.25978	3.52788	4.22564	8.37422
$\pi-\theta$	2.43742	2.42947	2.41925	2.40505	2.37973
A_1	0.10928	0.14784	0.20273	0.30150	0.70807
W_1	1.82441	1.87115	1.94532	2.10160	2.90440
W_2	0.80066	0.76540	0.72962	0.69289	0.65315
$W=2(W_1+W_2)$	5.25014	5.27310	5.34988	5.58898	7.11510

伍、未來展望

1. 找到可調整高度的正三角柱、正四角柱不同高度模型皂膜最小面積之間的關係，並計算其一次近似面積。
2. 在可調整高度的正五角柱中，找到測量曲面面積的方法。
3. 觀察到正六角柱與正七角柱的模型中皂膜中平行於底面的小正六邊形會在模型的 $\frac{1}{3}$ 高處；但是若在拉出後旋轉180°，則皂膜中的平行於底面的小正六邊形會位在模型的 $\frac{1}{2}$ 高處，如圖 43。同時正七角柱也有相同情形，如圖 44。
4. 正三角柱與正四角柱皂膜形狀是對稱的，而正五角柱、正六角柱與正七角柱當模型高度超過某個臨界值時，皂膜形狀是不對稱的。
5. 本研究創新之處在於以數學動態軟體模擬並解析物理實驗，以更精準地計算進行皂膜形成的力變化圖形分析。並解釋先前數學理論研究[1]與物理實驗及現象之間的差異。同時也更微觀地驗證皂泡形成能量平衡原理。

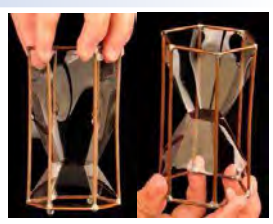


圖 43：固定高度正六角柱皂膜形狀

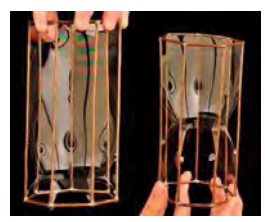


圖 44：固定高度正七角柱皂膜形狀

參考資料

[1] David Lavett(1996) : *Demonstration Science with Soap Films*

[2] 周昕諭(2016)正多面體之皂膜最小表面能之探討。臺灣國際科學展覽會物理與天文學科三等獎。

[3] Dutta P., Khastgir S. K. & Roy, A.(2010). Steiner trees and spanning trees in six-pin soap films. American Association of Physics Teachers. **78**(2), 215-221. DOI:10.1119/1.3247982