# 中華民國第 57 屆中小學科學展覽會
# 作品說明書

---

高級中等學校組　數學科

050419

## 多邊形上某類均衡點位置性質研究

學校名稱：高雄市立高雄高級中學

| 作者： | 指導老師： |
| --- | --- |
| 高二 劉紀霆<br>高二 陳秉嘉 | 黃仁杰 |


關鍵詞：均衡點、多邊形

# 摘要

在一個廣場的邊界上有許多家流動攤販(動點)，假設顧客均勻分布在廣場內，而顧客只因與攤販位置距離的遠近決定消費行為，所有攤販皆想盡一切辦法獲得最多的客源，我們討論當攤販在廣場上移動時，在哪個位置能找到其獲利之局部最大值，若每家攤販獲利皆在局部最大值的位置時，向兩旁移動獲利皆不會增加，故不會選擇移動，稱之為”均衡”。

本篇報告討論各種不同的形狀的廣場下均衡點位置問題，成功地做出了多邊形、圓形、橢圓形等平面圖形的均衡點結論，以及最後給出至簡單封閉凸形的解決想法，並在多邊形的情況中，成功證明出均衡點的存在性以及唯一性。

# 壹、研究動機

在商場競爭時，常常要在未知對手動向下擬定公司政策，若能找出在對手不動的情況下較佳的位置，便能有助於決定。因此我們想找出在各種不同情況下最佳位置為何，我們稱此最佳位置為均衡點。其中，我們參考 2016 年國際科展數學科作品《百動不如一靜－固定策略玩家對奈許均衡的影響》，該篇作品討論一維情況下之沙灘賣冰問題，但客人們的分布通常是在一個廣場上，不可能只是一條線，故我們將其推廣至二維平面，尋找在平面上各種不同形狀下的均衡點。

# 貳、研究目的

若平面簡單封閉凸曲線Γ上有若干家流動攤販(即為動點)，且曲線Γ內每個點為顧客所在位置，顧客呈均勻分佈，且顧客會往離他最近的攤販來購買，攤販皆希望能夠獲得最大客群，我們考慮攤販們在決策時只知道往附近移動之後的獲利變化，而無法知道他在整體哪個位置會獲利最大，即考慮攤販在移動「當下」如何決策最好，也就是在哪個位置能夠達到局部最大獲利，當所有攤販達到局部最大獲利時，向任意方向移動一點獲利都不會增加，故所有攤販都不會想再移動，此時攤販所在位置稱為「均衡點」，本篇報告將研究在平面簡單封閉凸曲線Γ中的均衡點所在位置為何?

**研究目的一:** 兩個流動攤販在正$n$邊形鄰邊上移動時，均衡點的位置為何?進一步討論當攤販不在鄰邊上時，均衡點的位置為何?再進一步推廣至任意多邊形上兩家流動攤販均衡點之位置以及正三角形上三家攤販均衡點位置討論。

**研究目的二:** 將廣場推廣至圓錐曲線，討論圓上$n$個流動攤販時、橢圓上兩個流動攤販，此時均衡點位置為何?進一步討論若攤販可以進到廣場內部時的情形。

**研究目的三:** 一般平面簡單封閉凸曲線Γ上兩個流動攤販，均衡點位置所滿足的條件為何？

**研究目的四：** 若考慮遊客選擇攤販的機率函數，在一維的情況下均衡點與函數之關係?

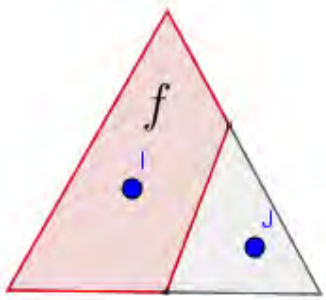
# 參、研究設備與器材

紙、筆、電腦、Geogebra 繪圖軟體、Microsoft Office Word、Mathtype.

# 肆、名詞定義與解釋

**一、獲利面積：** 在本篇討論之中，假設遊客平均分布在平面上，並且平面上的攤販不論品質或價格都相同。因此遊客只會依據距離遠近選擇攤販，攤販的客人來源，即為客源區域，我們稱客源區域的面積為獲利面積，獲利面積越大，則獲利越大，符號為 $f_k$ 。

如右示意圖(一)，若圖中紅色區域為攤販 $I$ 的客源區域，則紅色區域面積為攤販 $I$ 的獲利面積，記為 $f_I$.



圖(一)

**二、獲利角度:** 在本篇報告後段討論圓形上有 $n$ 個流動攤販的均衡點時，獲利面積大小取決於扇形的角度，我們稱此角度為獲利角度。

**三、均衡點：** 攤販會為了擁有最大獲利面積而不斷移動，直到向任一方向移動皆不會使獲利面積增加為止。在本篇中我們考慮攤販們在決策時只知道往附近移動之後的獲利面積變化，而無法知道他在整體哪個位置會獲利最大，即我們考慮攤販在移動當下如何決策最好，故我們稍微修改奈許均衡點的定義，定義所謂「均衡點」即為，在其他攤販位置皆不動的情況下，在某一位置之攤販無論向哪一方向移動，所得的利益皆會變小，則我們稱此位置為均衡點。

嚴謹的數學定義如下：

假設一個賽局總共有 $n$ 個參與者，每個參與者個策略空間分別為 $S_1, S_2, \ldots\ldots, S_n$，報酬函數為 $f_1, f_2, \ldots\ldots, f_n$，其中 $f_k : S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_n \to R$，若

當 $\exists (a_1^*, a_2^*, \ldots, a_n^*) \in S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_n$ 且 $\exists \delta > 0$ 滿足

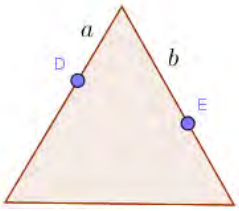
$$f_k(a_1^*, a_2^*, \ldots, a_n^*) \geq f(a_1^*, a_2^*, \ldots, a_{k-1}^*, a_k^* + \varepsilon, a_{k+1}^*, \ldots, a_n^*) \text{，} \forall \varepsilon \in (-\delta, \delta)$$

$$\forall a_k \in S_k, k = 1, 2 \ldots, n.$$

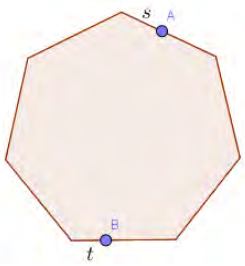
則稱此策略組合 $(a_1^*, a_2^*, \ldots, a_n^*)$ 為這個賽局的一組均衡點。

**四、最佳均衡點：**若相鄰左右的兩家攤販獲利與自己的獲利差距越小，則心裡會越感公平，故定義最佳均衡點如下：若 $(a_1^*, a_2^*, \ldots, a_i^{*_1}, \ldots, a_n^*)$、$(a_1^*, a_2^*, \ldots, a_i^{*_2}, \ldots, a_n^*)$、$(a_1^*, a_2^*, \ldots, a_i^{*_m}, \ldots, a_n^*)$ 皆是均衡點，配置 $(a_1^*, a_2^*, \ldots, a_i^{*_j}, \ldots, a_n^*)$ 滿足 $\min\limits_{1\le i\le n}(\max(|f_i - f_{i+1}|, |f_i - f_{i-1}|))$，則稱此配置為 $a_i^{*_j}$ 的最佳均衡點。

**五、位置座標:** 在本篇的討論之中，若均衡點的位置使用直角坐標系來表示會過於繁雜，故我們在討論正 $n$ 邊形相鄰兩邊上兩點情形時，以其與所夾之頂點的距離數對表示均衡點的位置，如下圖(二)，我們記 $D,E$ 位於座標 $(a,b)$，在討論正 $n$ 邊形不相鄰兩邊上兩點情形時，以其與最接近的頂點距離為座標，如下圖(三)，記 $A,B$ 座標為 $(s,t)$。

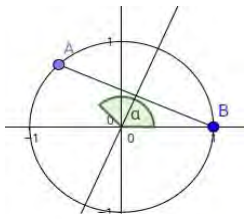


圖(二)



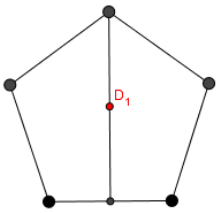
圖(三)

在討論圓形以及橢圓形時，我們用以 $x$ 軸為始邊，所夾的角度表示，如下圖(四)，我們記 $A,B$ 位於座標 $(\alpha,0)$。

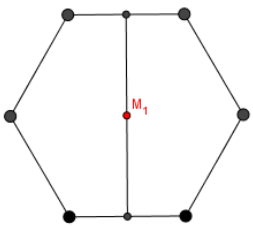


(圖四)

**六、中心點：** 對稱軸之中點，如下圖(五)、(六)中 $D_1, M_1$。



圖(五)



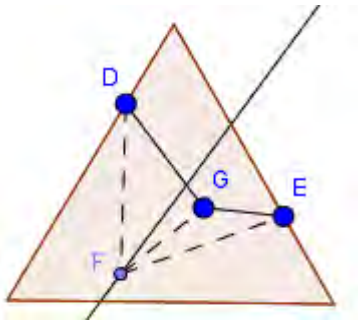
圖(六)

# 伍、研究過程

首先我們先確定，在兩個攤販互相比較時，他們的客源區域界線是此二點的垂直平分線，接著我們再利用此一性質討論整篇報告。

**引理一：兩個攤販互相比較時，他們的客源區域界線是此二點的垂直平分線。**

證明：如圖(七)，在任一簡單封閉凸曲線內部任選一點 $G$，並在 $\overline{DE}$ 之中垂線上任選一點 $F$，連接 $\overline{DG}$、$\overline{EG}$、$\overline{DF}$、$\overline{EF}$、$\overline{FG}$，利用餘弦定理得



圖(七)

$$\overline{DG}^2=\overline{DF}^2+\overline{FG}^2-2\cdot\overline{DF}\cdot\overline{FG}\cdot\cos\angle DFG$$

$$\overline{EG}^2=\overline{EF}^2+\overline{FG}^2-2\cdot\overline{EF}\cdot\overline{FG}\cdot\cos\angle EFG$$

又中垂線上任意點到兩頂點等距，因此 $\overline{DF}=\overline{EF}$，故 $\overline{DG}$、$\overline{EG}$ 的長度取決於 $\cos\angle DFG$、$\cos\angle EFG$，若點 $G$ 對中垂線做投影，垂足為 $G'$，此時 $\angle DFG'=\angle EFG'$，將 $G'$ 移動到 $G$ 時，得 $\angle DFG>\angle EFG$，又 $\cos\theta$ 為遞減函數，故證得 $\overline{DG}>\overline{EG}$.

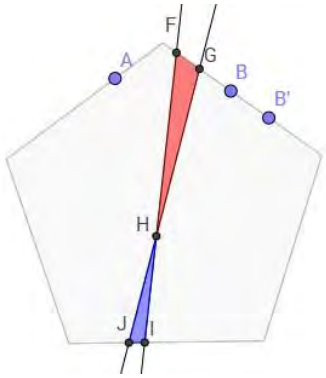
注意到上述的證明之中，與廣場的形狀無關，事實上，引理一對於任意凸形皆成立，但對於凹形則不成立，因為凹形廣場內的顧客，並不是每一個點都可以直線來測量與攤販的距離，從而無法使用餘弦定理，並不適用於以上證明。本篇報告中所有主題皆討論凸形廣場上的均衡點位置問題。

接著我們將均衡點問題轉化成幾何問題來解決，我們試著找出發生均衡時，攤販的位置幾何意義為何，因此有下面的引理二：

**引理二:當兩家攤販在廣場邊上發生均衡時，兩家攤販在另外一家固定下，移動一點點後之中垂線的交點落在中垂線與邊上交點之中點上。**

**證明：**

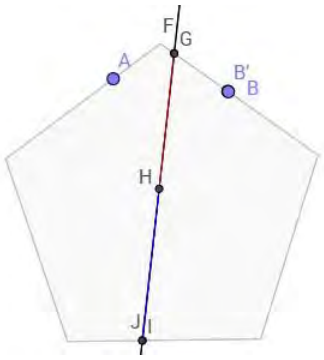
由於均衡點在只有兩家攤販時定義為另外一家攤販固定時，向任一方向移動之後獲利面積都會變少，因此我們比較原來兩家攤販的中垂線與移動之後的中垂線所夾的兩個三角形面積，如右圖（八），以正五邊形為例，$A$、$B$ 為邊上兩攤販，$B'$ 為 $B$ 攤販向右移動之後的位置，移動前後的中垂線所夾的三角形如右，其中紅色三角形是 $B$ 攤販移動之後，$B$ 攤販所增加的獲利面積，藍色則為減少。



圖(八)

紅色三角形面積 $\Delta FHG=\frac{1}{2}\overline{FG}\times\overline{GH}\sin\angle FHG.$

藍色三角形面積 $\Delta JHI=\frac{1}{2}\overline{HJ}\times\overline{JI}\sin\angle JHI=\frac{1}{2}\overline{HJ}\times\overline{JI}\sin\angle FHG.$




而當 $B'$ 趨近於 $B$，即 $B$ 攤販向右移動一點，$\overline{GH}\to\overline{FH},\overline{HJ}\to\overline{HI}$

$\Delta FHG=\frac{1}{2}\overline{FH}^2\sin\angle FHG,\Delta JHI=\frac{1}{2}\overline{HI}^2\sin\angle FHG$，**當 $\overline{FH}\le\overline{HI}$ 時，$\Delta FHG\le\Delta JHI$，$B$ 攤販向右移動瞬間獲利並不會增加，其不會選擇向右移動。**

當 $B$ 攤販向左移動時，上述紅色三角形變為減少的獲利面積，藍色三角形變為增加，與上證明同理可得：**當 $\overline{FH}\ge\overline{HI}$ 時，$\Delta FHG\ge\Delta JHI$，$B$ 攤販向左移動瞬間獲利並不會增加，故其不會選擇向左移動。**

**綜上討論可知：當 $\overline{FH}=\overline{HI}$ 時，攤販 $B$ 不會向任一方向移動，從而引理二得證。**

上述引理二的證明中，僅要求攤販只能往兩個方向移動，與廣場的形狀沒有關聯，又因為引理二是建構在引理一成立的基礎之下，故引理二和引理一相同，對於任意凸形皆成立，但對於凹形則不成立。

下面的主題(一)、(二)、(三)即利用引理二來進行 $n$ 邊形邊上兩家攤販均衡點位置之討論。

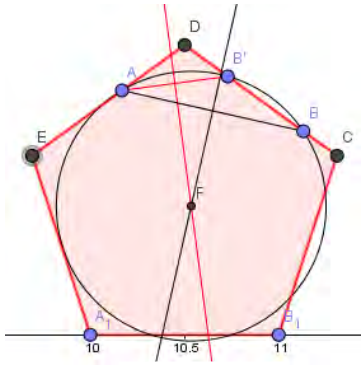
**(一)正 $n$ 邊形相鄰邊兩流動攤販均衡點位置討論:**

因為正偶數邊形之對稱軸會經過兩頂點，而正奇數邊形不會，故以下分為正奇數邊形與正偶數邊形來討論滿足此條件時的情況:

**(1)正奇數邊形**

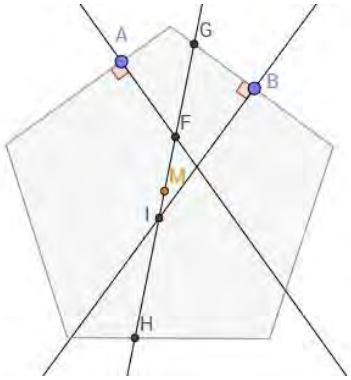
**以正五邊形為例：**

由引理二可知，均衡點的位置與中垂線交點有關，因此我們關心在其中一家攤販移動一點點之後中垂線交點為何。下面我們採用逼近的方法來找出交點之位置。




圖(十)

如右圖(十)，假設 $\angle BAB'=\alpha$，$F$ 為 $BA,B'A$ 兩中垂線之交點，利用中垂線性質可知 $\overline{AF}=\overline{B'F}=\overline{BF}$，故 $A$、$B$、$B'$ 三點皆在以 $F$ 為圓心 $\overline{AF}$ 為半徑之圓上，因為 $\angle BAB'=\alpha$，故圓心角 $\angle BFB'=2\alpha$，又 $\overline{BF}=\overline{B'F}$，可知 $\angle B'BF=90°-\alpha$，當 $B'$ 趨近於 $B$ 時，$\alpha$ 趨近於 $0$，$\angle B'BF\to 90°$，故重合時此圓將會變為切圓，切點為 $B$，**因此我們可以利用過 $B$ 點並與 $\overline{CD}$ 垂直之垂線與中垂線的交點來找到 $F$。**

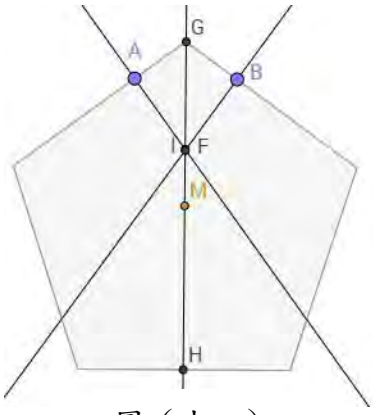



也就是說，過攤販做其所在之邊的垂線與中垂線的交點，就是攤販像旁邊移動一點點之後兩中垂線交點。

以下我們仍以正五邊形為例，如右圖(十一)，邊上有兩攤販 $A$ 、 $B$ ，其中垂線為 $\overline{GH}$ ，如上述討論，過 $A,B$ 做垂直邊之垂線交 $\overline{GH}$ 於 $F,I$ ，由引理二， $F$ 、 $I$ 重合於 $M$ 就達成均衡。

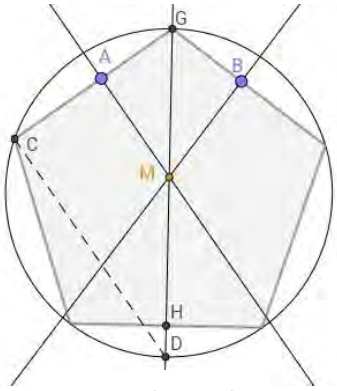
圖（十一）

首先觀察 $F$ 、 $I$ 重合時的性質，如圖(十二)，易知 $F$ 、 $I$ 重合時點 $G$ 位在頂點上，又已知 $\angle FAG=\angle FBG=90°$ ，且利用中垂線性質知 $\overline{AF}=\overline{BF}$ ， $\overline{GF}=\overline{GF}$ ，我們可得 $\Delta AGF\cong\Delta BGF\Rightarrow\overline{AG}=\overline{BG}$ ，**故當 $F$ 、 $F'$ 重合時 $\overline{AG}=\overline{BG}$**.



圖（十二）

利用此一性質，我們接著計算當他們重合於 $M$ 時， $\overline{AG}$ 長度為何？



圖（十三）

如圖（十三），將點 $A,B$ 移動，使 $I,F$ 與 $M$ 重合，做正五邊形的外接圓交 $\overrightarrow{GH}$ 於點 $D$ ，並取頂點 $C$ ，連接 $C,D$ 。

$\because\angle GAM=\angle GCD=90^\circ$ ， $\angle AGM=\angle CGD$ ，故 $\Delta AGM\sim\Delta CGD$

設外接圓直徑為1，則 $\overline{CG}=\cos 54^\circ$ ， $\overline{GH}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sin 54^\circ$ ，

$\overline{GM}=\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sin 54^\circ)$ ，因此由 $\frac{AG}{CG}=\frac{GM}{DG}$ 可計算出 $\overline{AG}=\left\lfloor\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sin 54^\circ)\right\rfloor\cos 54^\circ.$

若規定正五邊形邊長為1，則將上式 $AG$ 除掉邊長 $\cos 54^\circ$ 即可，即

$$\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sin 54^\circ)=\frac{1+\sin 54^\circ}{4}=\frac{1}{2}\cos^2 18^\circ.$$

又上面所有證明步驟，對於任意正奇數邊形皆可以類似得到，因此下面計算更一般化的結果：

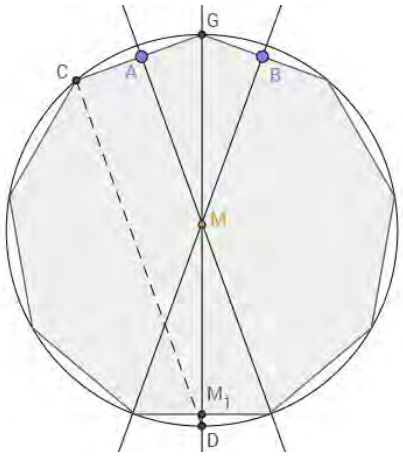
如右圖（十四），$\Delta AGM\sim\Delta CGD$ ，若外接圓直徑為1，則

$CG=\cos(90-\frac{2\pi}{2n})=\sin\frac{\pi}{n}$ ， $GM=\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sin(90-\frac{2\pi}{2n}))$ ，

由 $\frac{AG}{CG}=\frac{GM}{DG}$ 可得 $AG=\sin\frac{\pi}{n}\cdot\left\lfloor\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sin(90-\frac{2\pi}{2n}))\right\rfloor$

$=\sin\frac{\pi}{n}\cdot\left\lfloor\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{n})\right\rfloor=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2n}\cdot\cos^2\frac{\pi}{2n}$

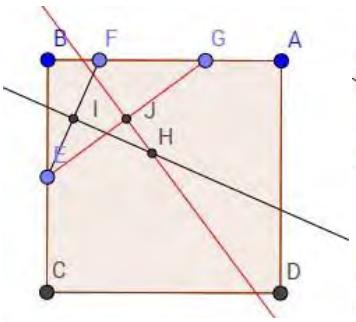
若規定邊長為1，則除掉邊長 $\sin\frac{\pi}{n}$ ， $AG=\frac{1}{2}\cos^2\frac{\pi}{2n}$ .



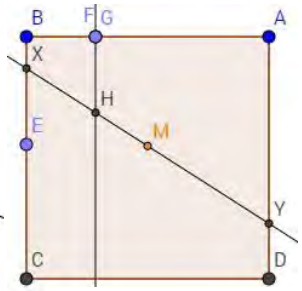
圖（十四）

(2)正偶數邊形

以正方形為例，如右圖(十五)，在 $\overline{BC}$ 上有一家攤販 $E$，$\overline{AB}$ 上有另一家攤販 $F$，我們關心 $E$ 固定，攤販 $F$ 向左向右一點點之後，新中垂線與原中垂線交點之位置，故我們在 $\overline{AB}$ 上再做一點 $G$，再將 $G$ 趨近於 $F$，連接線段 $\overline{EF},\overline{EG}$ 並做它們的中垂線交於 $H$，觀察 $H$ 點的位置。



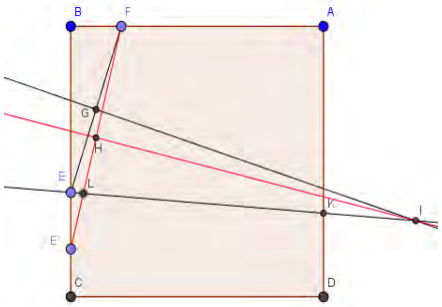
圖(十五)



圖（十六）

類似(1)中的證明可以得到：**當 $G$ 點趨近於 $F$ 時，$H$ 位在從 $G$ 向 $\overline{AB}$ 作垂直線的線上。**

由引理二，發生均衡時，$H$ 落在 $E,F$ 中垂線與邊的交點的中點 $M$ 上。不失一般性，令 $\overline{BE}\geq\overline{BF}$，則當 $F$ 位置變動時，右圖的 $X,Y$ 只會在邊 $BC,AD$ 上，從而 $M$ 只會在 $A,B$ 之中垂線上變動，由於 $H$ 位於 $F$ 對 $\overline{AB}$ 的垂線上，**若 $E$ 固定且發生均衡，則 $F$ 必位於 $\overline{AB}$ 中點**。

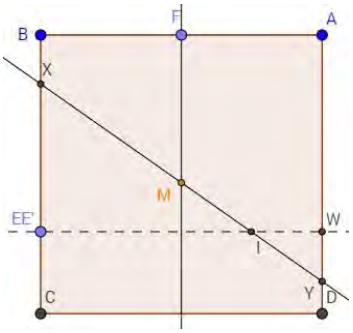


圖(十七)

接著我們想找出 $\overline{BE}\geq\overline{BF}$ 且 $F$ 固定發生均衡時，$E$ 的位置為何？再與上面討論的結果結合即可知正偶數邊形發生均衡時兩家攤販的位置。

如圖（十七），類似(1)中的證明可以得到：**當 $E'$ 點趨近於 $E$ 時，$I$ 位在從 $E$ 向 $\overline{BC}$ 作的垂線與 $E,F$ 中垂線的交點上。**

而上面的結果告訴我們：發生均衡時 $F$ 位於 $A,B$ 中點，因此將 $F$ 先固定在 $A,B$ 中點（圖十八），觀察 $E$ 變動時 $I$ 的情形。

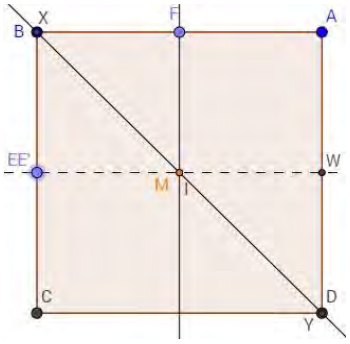


圖(十八)

如圖（十八），因 $\overline{BE}\geq\overline{BF}$，故當 $E$ 位置變動時，交點 $X,Y$ 只會在邊 $BC,AD$ 上，從而 $M$ 只會在 $A,B$ 之中垂線上變動。

易知，$\Delta EXI$ 與 $\Delta WYI$ 相似，故當 $I,M$ 重合時，如圖（十九），因 $\Delta EXI$ 與 $\Delta WYI$ 全等，從而 $\overline{BE}=\overline{WD}$，故 $E$ 位於 $\overline{BC}$ 中點。

又上面的討論，對於任意正偶數邊形，都可以類似得到。



圖（十九）

故我們可以得到以下結論:

**在邊長為一的正$n$邊形相鄰兩邊上各有一家攤販時，均衡點如下**

**若$n$為奇數，有唯一一組均衡點$(\frac{1}{2}\cos^2\frac{\pi}{2n},\frac{1}{2}\cos^2\frac{\pi}{2n})$.**

**若$n$為偶數，有唯一一組均衡點$(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.**

上述報告中我們討論完兩攤販在正多邊形相鄰兩邊上的情形，接著我們將其推廣到兩流動攤販在不相鄰邊上時其均衡位置為何?

**(二)正$n$邊形不相鄰邊與在相同邊上之兩流動攤販均衡點位置情況:**

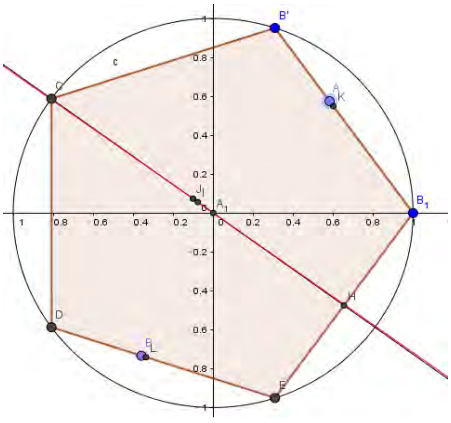
首先我們先定義均衡點位置的表示法，$(a,b)$表示兩流動攤販$A$、$B$在均衡時距最近之頂點之距離。

分為正奇數邊形與正偶數邊形來討論。

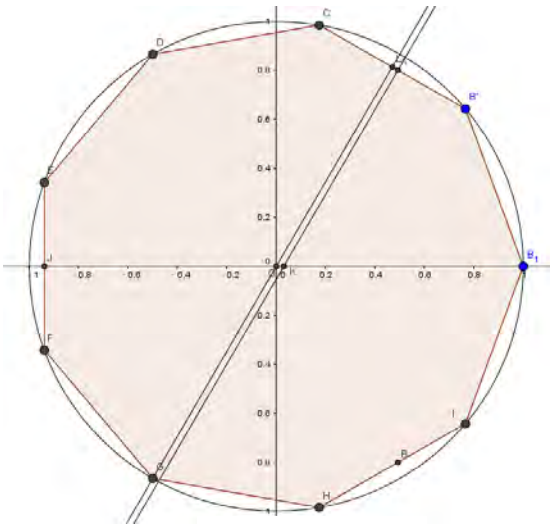
**(1) 正奇數邊形**

由引理二及上述證明，我們發現當均衡時即對稱軸中心點對邊上做投影之投影點，因此我們猜想當兩攤販在不相鄰兩邊時是否也有此性質，以下我們以正五邊形來做討論。

如右圖(二十)，$A$、$B$為不相鄰邊上之兩攤販，其中$J$為$\overline{AB}$中垂線與對稱軸$\overline{CH}$的交點，$I$為對稱軸之中心點，$K$、$L$為我們所猜測之均衡點，也就是$I$對$\overline{B_1B'}$、$\overline{DE}$做投影之垂足，我們發現當$A$、$B$趨近於$K$、$L$時，$J$會趨近於$I$，當兩點重合時，$J$與$I$重合，也就是當任一攤販移動時其獲利面積皆會變小，即我們所求之均衡點。



圖(二十)



圖(二十一)

在上述討論成立的情況下，我們試著計算其均衡點位置，其中我們發現只需討論$x$軸之對稱情形，其他情形則可透過旋轉滿足邊上之兩攤販可對$x$軸對稱，因此我們需要討論論兩攤販在不相鄰邊上之$\frac{n-3}{2}$種情形。

計算:以下我們以正九邊形來表示正奇數邊形，假設$k$為由頂點$B_1$逆時針數來的第$k$邊，如圖(二十一)為$k=2$的情形，我們由此開始討論，根據我們上述的討論由中心點$K$對邊$\overline{B'C}$做投影，此時$A$為均衡點，故$\overline{AB'}$即為所求，先由原點$O$向$\overline{B'C}$做投影垂足為$L$，以下我們以局部放大圖來做討論，

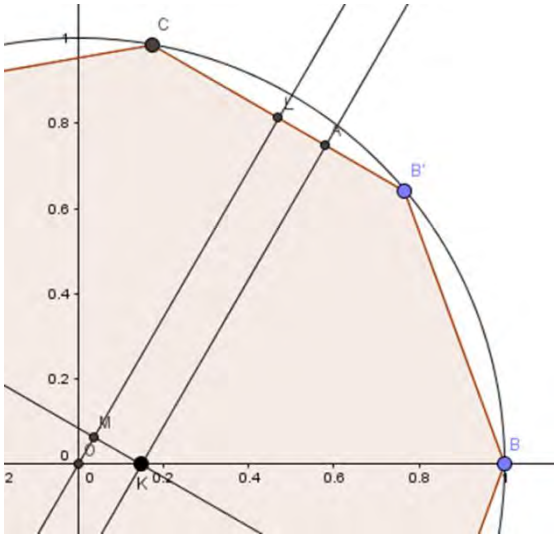
如圖(二十二)，過$K$向$\overline{OL}$做垂線，垂足為$M$，其中$ALMK$為矩形，故$\overline{AL}=\overline{MK}$，我們已知

原點到中心點 $\overline{OK}=\dfrac{1-\cos\frac{\pi}{n}}{2}$，又知 $\angle COB'=\dfrac{4\pi}{n}$、$\angle OCL=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{n}\Rightarrow\angle COL=\dfrac{\pi}{n}$.

因此我們可得 $\angle LOB_1=\dfrac{3\pi}{n}$，因此我們可以推得 $\overline{MK}=\overline{AL}=\dfrac{1-\cos\frac{\pi}{n}}{2}\times\sin\dfrac{3\pi}{n}$，又 $\overline{LB_1}=\sin\dfrac{\pi}{n}$，

故我們所求知均衡點位置 $\overline{AB'}=\sin\dfrac{\pi}{n}-(\dfrac{1-\cos\frac{\pi}{n}}{2}\times\sin\dfrac{3\pi}{n})$，我們轉換為邊長為 1 時的情形 $\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}-(\frac{1-\cos\frac{\pi}{n}}{2}\times\sin\frac{3\pi}{n})}{2\sin\frac{\pi}{n}}$，得當 $k=2$ 時均衡點為

$$(a,b)=(\frac{1}{2}-\frac{(1-\cos\frac{\pi}{n})\times\sin\frac{3\pi}{n}}{4\sin\frac{\pi}{n}},\frac{1}{2}-\frac{(1-\cos\frac{\pi}{n})\times\sin\frac{3\pi}{n}}{4\sin\frac{\pi}{n}}).$$



圖(二十二)

接著討論當 $k=3$ 的情形

如同 $k=2$ 時之討論，我們只需求得 $\angle MOK$ 即可，已知 $\angle DOK=\dfrac{6\pi}{n}$、$\angle LOD=\dfrac{\pi}{n}$，故可求得

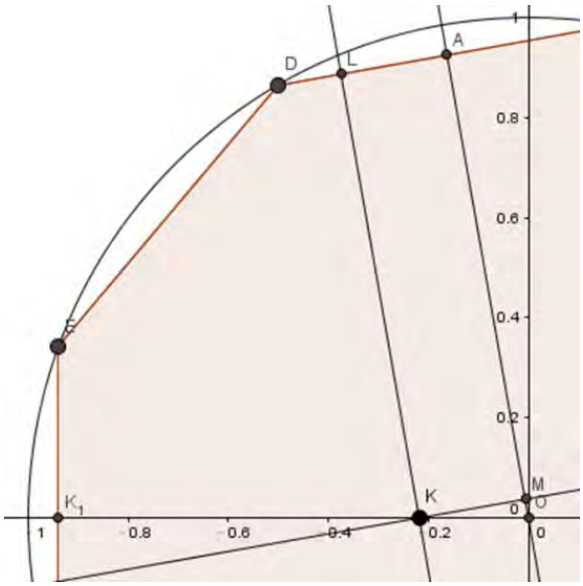
$\angle MOK=\dfrac{5\pi}{n}$

，但此時須討論 $\angle MOK$ 是否大於 $\dfrac{\pi}{2}$，

如圖(二十三)假設其大於，故我們所求

$\overline{OM}=\overline{AL}=\dfrac{1-\cos\frac{\pi}{n}}{2}\times\cos(\dfrac{5\pi}{n}-\dfrac{\pi}{2})$，將其轉換為邊為 1 的情況，得到當 $k=3$ 時之均衡點為

$$(a,b)=(\frac{1}{2}-\frac{(1-\cos\frac{\pi}{n})\times\sin\frac{5\pi}{n}}{4\sin\frac{\pi}{n}},\frac{1}{2}-\frac{(1-\cos\frac{\pi}{n})\times\sin\frac{5\pi}{n}}{4\sin\frac{\pi}{n}})$$



圖(二十三)

接著我們討論當 $k\in N$ 時的情形，由上面兩組討論可知我們只需求得 $\angle LOK$ 即可，我們可以藉由原點到頂點連線求得 $\angle LOK=\frac{2k\pi}{n}-\frac{\pi}{n}=\frac{(2k-1)\pi}{n}$，以下可分為 $\angle LOK>\frac{\pi}{n},\angle LOK<\frac{\pi}{n}$ 兩種情況討論，當 $\angle LOK<\frac{\pi}{n}$，可求得 $\overline{AL}=\frac{1-\cos\frac{\pi}{n}}{2}\times\sin\frac{(2k-1)\pi}{n}$，轉換為邊長為 1 的情況，故我們所求之均衡點為 $(a,b)=(\frac{1}{2}-\frac{(1-\cos\frac{\pi}{n})\times\sin\frac{(2k-1)\pi}{n}}{4\sin\frac{\pi}{n}},\frac{1}{2}-\frac{(1-\cos\frac{\pi}{n})\times\sin\frac{(2k-1)\pi}{n}}{4\sin\frac{\pi}{n}})$.

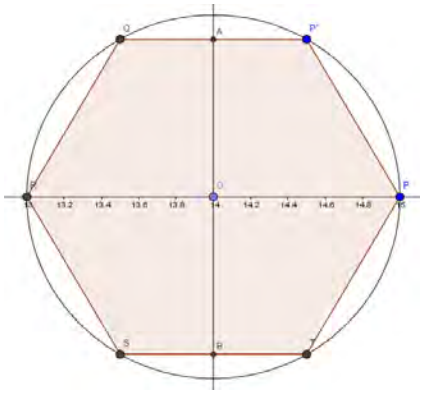
當 $\angle LOK>\frac{\pi}{n}$，可求得 $\overline{AL}=\frac{1-\cos\frac{\pi}{n}}{2}\times\cos(\frac{(2k-1)\pi}{n}-\frac{\pi}{2})=\frac{1-\cos\frac{\pi}{n}}{2}\times\sin(\frac{(2k-1)\pi}{n})$ 與上述情況相同，均衡點為 $(a,b)=(\frac{1}{2}-\frac{(1-\cos\frac{\pi}{n})\times\sin\frac{(2k-1)\pi}{n}}{4\sin\frac{\pi}{n}},\frac{1}{2}-\frac{(1-\cos\frac{\pi}{n})\times\sin\frac{(2k-1)\pi}{n}}{4\sin\frac{\pi}{n}})$，

且當 $k=\frac{n-1}{2}$ 時，$\frac{(2k-1)\pi}{n}=\frac{(n-2)\pi}{n}=\pi-\frac{2\pi}{n}<\pi$，特別地，當 $k=1$ 時為相鄰兩邊之情形，故我們可以得到以下結論:

**在正奇數邊形的廣場上，當兩攤販位於任意兩邊上時，$k$ 為由頂點逆時針數來第 $k$ 邊，可得邊上兩攤販之均衡點為** $(a,b)=(\frac{1}{2}-\frac{(1-\cos\frac{\pi}{n})\times\sin\frac{(2k-1)\pi}{n}}{4\sin\frac{\pi}{n}},\frac{1}{2}-\frac{(1-\cos\frac{\pi}{n})\times\sin\frac{(2k-1)\pi}{n}}{4\sin\frac{\pi}{n}})$.

**(2)正偶數邊形**

在上述討論的基礎之下，同理可證，正偶數邊形之均衡點也為其中心點向邊上做投影，但與正奇數邊形不同的是，正偶數邊形之中心點與原點重合，我們以正六邊形為例，由原點 $O$ 向對 $x$ 軸之兩邊做投影，此時兩攤販 $A$、$B$ 為均衡，易知同一邊上兩頂點與頂點連線可得一等腰三角形，又當等腰三角形之頂點對底邊做垂線可將底邊二等分，因此我們有以下結論:

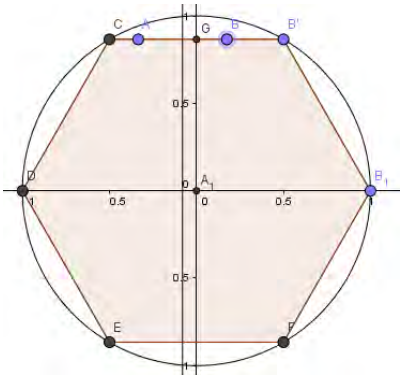


圖(二十四)

**在正偶數邊形的廣場上，當兩攤販位於任意兩邊上時，其均衡點為所在之邊的中點，即** $(a,b)=(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.

**(3)在相同邊上**

在討論完相鄰邊上與不相鄰邊上之情形後，只剩下兩攤販在相同邊上時的情況，但此情形相對於前面兩種較為簡易，我們以正六邊形來做討論，如圖(二十五)，$A$、$B$ 為在同一邊上之兩攤販，以中垂線來劃分獲利面積，在此圖之情況下，$A$ 會往 $B$ 移動，同理 $B$ 也會往 $A$ 移動，若不重合於中點則必有一方移動可增加獲利面積，故最後他們會重合於中點 $G$，此時任一攤販只要移動獲利面積就會減少，因此均衡點即重合於中點，同理可知在正 $n$ 邊形中任一邊上皆為如此，故我們可得結論:



圖(二十五)

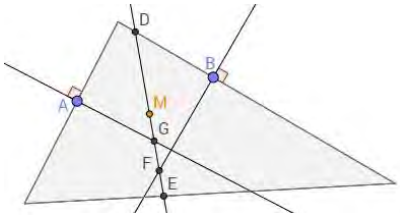
**在正 $n$ 邊形廣場上之兩攤販位於同一邊上，則均衡點為重合於邊上中點，即 $(a,b)=(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.**

在（一）、(二）的討論之中，我們找出了正多邊形邊上兩家攤販的均衡點之位置，接著我們希望能利用引理一及二，將其推廣至任意多邊形邊界上兩家攤販的均衡點位置。

**（三）任意多邊形邊界上兩家攤販之均衡點位置：**

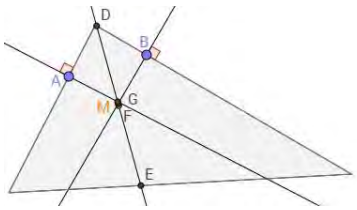
**（3.1）任意三角形邊上兩攤販之均衡點**

如圖(二十六)，$A$、$B$ 為任意三角形廣場邊上的兩攤販，由(一）中的討論我們可以知道，另外一家攤販固定而移動一點點之中垂線交點位在中垂線與過攤販的垂線上，因此，分別過攤販 $A,B$ 對其邊做垂線交其中垂線 $\overline{DE}$ 於 $G$、$F$ 如右圖，$M$ 為 $A,B$ 中垂線 $DE$ 之中點，由引理二，當均衡發生時，$M$、$G$、$F$ 重合，下面我們討論其性質。



圖(二十六)

如圖(二十七)，三點重合於 $M$ 時，易知 $D$ 落在三角形的頂點上，又由中垂線的性質知 $\overline{MA}=\overline{MB}$，又 $\overline{MA},\overline{MB}$ 是三角形邊上的垂線，故 $\Delta DAM\cong\Delta DBM$，從而線段 $DE$ 是三角形的角平分線，因此我們可以得到 $M$ 位於角平分線的中點，由上述的討論我們得到：當均衡發生時攤販 $A,B$ 之中垂線為所夾角的角平分線，由此我們可以得到發生均衡時攤販的位置如下：



圖(二十七)

**在任意三角形邊上之兩攤販均衡點為其所在兩邊所夾之角的角平分線中點向兩邊之投影點上。**

利用 Geogebra 驗證，結論成立。

**（3.2）任意 $n$ 邊形相鄰邊上兩攤販之均衡點**

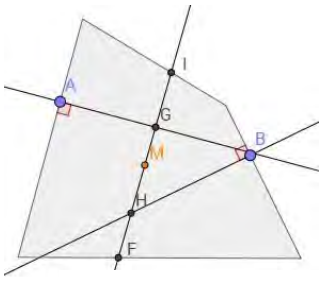
在（3.1）的討論我們完全可以類推到任意 $n$ 邊形廣場上，但是僅限定於相鄰兩邊上的攤販，所以我們得到以下結論：

**在任意 $n$ 邊形相鄰邊上之兩攤販均衡點為其所在兩邊所夾之角的角平分線中點向兩邊之投影點上。**

利用 Geogebra 驗證，結論成立。

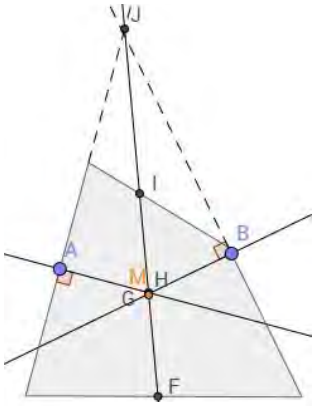
**（3.3）任意 $n$ 邊形不相鄰邊上兩攤販之均衡點**

接著我們討論不相鄰邊上的情形，以四邊形為例，如圖(二十八)邊上有 $A$、$B$ 兩攤販，$A,B$ 中垂線交四邊形於 $I,F$，$I,F$ 中點為 $M$，過 $A,B$ 之垂線交 $IF$ 於 $G,H$，由引理二，發生均衡時，$G,H,M$ 三點重合，因此我們接著討論 $G,H,M$ 三點重合時的性質。



圖(二十八)

如圖(二十九)延長 $A,B$ 所在之邊交於 $J$，易知 $G,H,M$ 三點重合時 $\overrightarrow{FI}$ 過 $J$，又由 $MA=MB, \angle MAJ=\angle MBJ, JH=JH$ 得 $\Delta MAJ \cong \Delta MBJ$，從而 $\overrightarrow{FI}$ 是 $\angle AJB$ 的角平分線。



圖(二十九)

在(3.3)的討論，對於任意 $n$ 邊形皆能類似得到，因此我們能都能得到結論。

與（3.1）、(3.2）不同的是：此時 $M$ 是角平分線與圖形交點 $F$、$I$ 之中點，特別地，若攤販所在的邊互相平行，則此時 $F$、$I$ 分別為該邊中點，因此我們可以得到下述結論

**在任意 $n$ 邊形不相鄰邊上之兩攤販均衡點為其所在兩邊延長線交角之角平分線交圖形於兩點之中點對其邊上之投影點。**

利用 Geogebra 驗證，結論成立。

由上面（3.1）、(3.2）、(3.3）的結論發現，均衡發生時兩攤販的中垂線與所夾之角的角平分線重合，而由角平分線的中點做投影可得均衡點，因此中點是唯一確定的，從而能夠證明均衡點在任意多邊形廣場下具有**唯一性**，且發生均衡時不一定平分面積。

**結論：**

**1. 任意 $n$ 邊形相鄰邊上之兩攤販均衡點為其所在兩邊所夾之角的角平分線中點向兩邊之投影點上。**

**2. 任意 $n$ 邊形不相鄰邊上之兩攤販均衡點為其所在兩邊延長線交角之角平分線交圖形於兩點之中點對其邊上之投影點。**

**3. 任意 $n$ 邊形不相鄰邊上之兩攤販均衡點存在且唯一。**

**4. 發生均衡時，攤販不一定平分面積。**

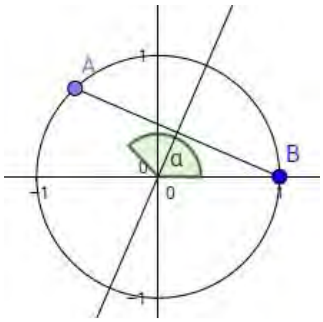
在主題（一）、(二）之中，我們利用位置座標表示出了正多邊形上均衡點絕對的位置，而在主題（三）的討論之中，我們成功的給出任意多邊形邊上找出兩家攤販均衡點位置的方法，且在（三）的結論之中，對於任意的多邊形廣場，我們總是能找到唯一的均衡點，是為較主題（一）、(二）更一般化的結果。

在前面三個主題的討論之後，我們將其推廣至由曲線包圍出的廣場，下面主題（四）、(五）、(六）、(八）將討論圓形、橢圓形以及更一般的凸集簡單封閉曲線上均衡點的位置分布。

**(四)圓周上$n$點之均衡點分布：**

首先我們發現性質(4.1)：在一圓形廣場上若只有兩家攤販，則無論如何配置，它們總是均衡。

如右圖(三十)，$A,B$兩家攤販任意分布在圓周的兩位置上，由於弦的垂直平分線必經過圓心，並平分弦所對的弧，故若其中一方固定，另一點無論怎麼移動獲利範圍都是一個半圓，則他們總是均衡。



圖(三十)

接著我們討論圓形廣場之圓周上有$n$家攤販的情形

由於各點分布在圓周上，故他們的外心即是圓心，任兩點垂直平分線交於圓心，故我們只需考慮獲利角度變化量值，即可判斷獲利面積。

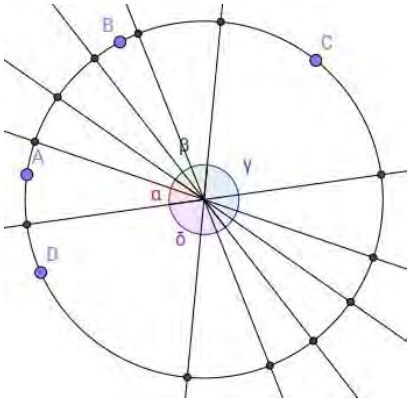
如右圖(三十一)，以圓上有四點為示意圖討論$n$個點，由引理一可知，攤販$A,B,C,D$邊所對應的獲利角度分別為$\alpha,\beta,\gamma,\delta$。

由圖可知性質（4.2)：若圓周上分佈的攤販分別為

$A_1,A_2,A_3,.....,A_n$，攤販$A_i$所對應的獲利角度，是由與最接近的

兩家攤販$A_{i-1},A_{i+1}$連線$\overline{A_iA_{i-1}},\overline{A_iA_{i+1}}$之中垂線所夾。

故若其他$n-1$個點固定，$A_i$在弧$A_{i-1}A_{i+1}$間移動，所新增的獲利角度恰會與損失的獲利角度相等，即**無論$A_i$位於弧$A_{i-1}A_{i+1}$上何處，獲利角度皆相同，故**



圖(三十一)

**圓周上$n$點任意配置都會是均衡點。**

由於此情況有不只一組均衡點，故我們可以探討其最佳均衡點的位置，又由性質 4.2，雖然$A_i$的移動不能使自己的獲利角度變大，但卻能影響$A_{i-1},A_{i+1}$的獲利角度，我們能有以下的性質(4.3)

性質(4.3)：$A_i$總會使$f_{i-1}=f_{i+1}$。

由最佳均衡點的定義，$\min(\max(|f_i-f_{i+1}|,|f_i-f_{i-1}|))$勢必為$f_{i-1}=f_{i+1}$時，又由性質 4.2 能知，，$A_i$總可以使$f_{i-1}=f_{i+1}$，同理，$A_{i+1}$能使$f_i=f_{i+2}$。

因此發生最佳均衡時，$f_1=f_2=...=f_n$，即$n$家攤販透過有限次移動使其在圓上的分佈形成正$n$邊形後，對於每一間攤販，它們都處在最佳均衡點的狀態，故他們不再移動，即：

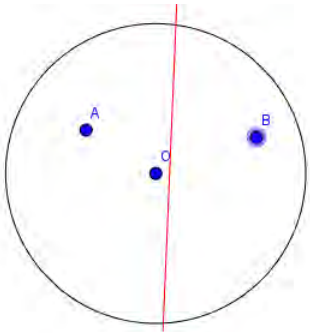
**圓周上$n$家攤販分佈形成正$n$邊形時，為最佳均衡。**

在討論完圓周上有$n$家攤販的均衡以及最佳均衡的情況之後，我們想到：若不限定攤販只能在圓周上移動，而能進入圓形廣場內部的話，均衡點該會如何分布？

**(五)圓形內部2點之均衡點情況：**

我們討論圓形內部有兩家攤販的情況如下：

如右圖(三十二)，若兩攤販分別分布在圖中$A,B$兩個位置，圓心為$O$，紅線為$A,B$的中垂線，考慮以下兩種情形：



圖(三十二)

(1)兩攤販皆不在圓心上或只有一家攤販在圓心上:

由圖形易知，若攤販$B$越靠近$A$，則獲利面積越大，但當$B$若與$A$重合，則獲利面積又變回半圓，因此攤販$B$會無限趨近於$A$，對於$A$亦同理，故在此情況下沒有均衡點。

(2)兩家攤販皆位於圓心上:

當兩家攤販皆位於圓心上時，若有一點離開原點，它們的中垂線便必不過圓心，又離開原點的那點所在的弧必為劣弧，可知若兩點同時在圓心上時，一移動獲利面積都會變小，即原點都是它們的局部最大值，從而為均衡點。

**圓形內部有兩家攤販均衡點：**(0,0)

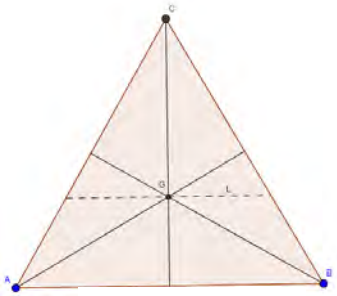
在討論完圓形內部兩家攤販的問題之後，我們關心正多邊形內部兩家攤販是不是能有類似的結論。如果兩家攤販在內部不重合，則其中一家攤販往另外一家攤販靠近，便可使獲利面積變大，且兩家攤販之中，必有一家攤販之獲利面積大於或等於一半的廣場面積，因此，這家攤販會無限趨近另外一家攤販，但不會重合（因為若重合則獲利面積變回一半的廣場面積），從而兩家攤販若不重合則不可能達成均衡。

由上面的討論，我們已經知道兩家攤販達成均衡時重合在廣場內部，接著我們想知道他們須重合在甚麼位置是均衡。由均衡點的定義可以知道，兩家攤販重合的點需要在其中一家攤販往任一方向移動之後，獲利都變小，因此，**通過兩家攤販均衡時重合位置的所有直線，皆須平分廣場面積**，從而這個命題等價於在正多邊形內找出一個點，使得通過這個點的所有直線都能平分面積。

**引理三：正奇數邊形內並不存在一個點，使得通過這個點的所有直線都平分面積。**

證明：我們以正三角形為例子，如右圖（三十三）

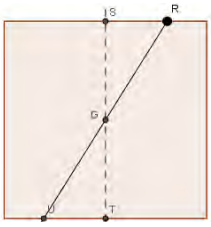
過三頂點平分面積的線交於重心，則只有可能是重心滿足條件，但若過重心做一條與底邊平行的線(圖中線$L$)，即不平分面積，因此，正三角形內並不存在點滿足條件，又對於所有的正奇數邊形，以上的證明完全可以類似，故引理得證。



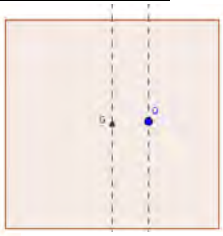
（圖三十三）

**引理四：正偶數邊形內存在唯一的點，使得通過這個點的所有直線都平分面積，而這個點是此正偶數邊形的正中心。**

證明：以正方形為例，先證存在性，正中心必滿足條件，由右圖(三十四)，$\Delta GRS \cong \Delta GUT$，從而所有通過正中心$G$的



（圖三十四）



（圖三十五）

線都可平分面積。

接著證唯一性，如右圖(三十五)，假設有另一點$Q$也滿足題設條件，則分別過$G$、$Q$做兩條平行線，則中間會夾一塊區塊，從而$Q$不平分面積，矛盾。

又以上的證明對於所有正偶數邊形完全可以類似，故引理得證。

**由上述的討論可知正多邊形內部兩家攤販的均衡點位置結論如下：**
**正奇數邊形內部兩家攤販，均衡點不存在**
**正偶數邊形內部兩家攤販，均衡點為重合在中心**

**(六)橢圓上均衡點情況:**

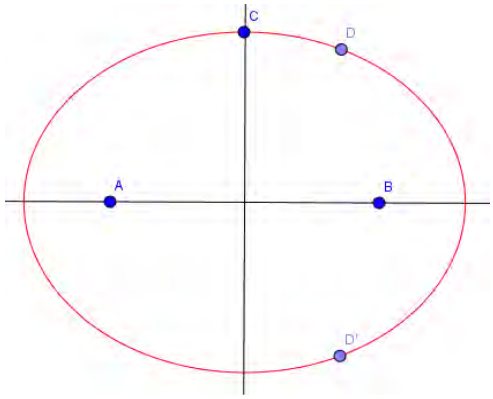
前述主題(一)到(五)中，都是利用引理(二)以及討論中垂線被圖形所截的線段長短關係來找尋均衡點，但是對於平滑的圓錐曲線如橢圓，或者更一般化的凸集簡單封閉曲線時，因為攤販移動的軌跡(邊界)並非是一直線，因此獲利面積的變化關係很難利用前述方法討論，因此勢必得找出另外一種好的方法，來討論封閉曲線上兩家攤販的均衡點位置分布問題。

在下面主題(六)、(七)之中，我們利用代數的方法來解決均衡點的問題，並觀察攤販移動之後的獲利面積變化情形。

如右圖(三十六)，$D$、$D'$為橢圓上的兩攤販，且對稱於$x$軸，如上述想法，我們欲找到一值$\theta$使其轉動$\varepsilon$後交於$x$軸的正向與負向，利用橢圓參數式得

$D(a\cos\theta, b\sin\theta)$、$D'(a\cos\theta, -b\sin\theta)$現將$D$點轉動$\varepsilon$後得$D(a\cos(\theta+\varepsilon), b\sin(\theta+\varepsilon))$，並求出$D$、$D'$的中點座標為

$(x_0, y_0) = (\dfrac{a\cos\theta + a\cos(\theta+\varepsilon)}{2}, \dfrac{b\sin\theta - b\sin(\theta+\varepsilon)}{2})$以及斜率$m = \dfrac{b\sin(\theta+\varepsilon) + b\sin\theta}{a\cos(\theta+\varepsilon) - a\cos\theta}$，我們可以寫出中垂線方程式為$y - y_0 = -\dfrac{1}{m}(x - x_0)$，又我們欲求其$x$截距，故將$y=0$帶入，化簡得$x = x_0 + my_0$，並將數值帶入



圖(三十六)

$$x = \frac{a\cos\theta + a\cos(\theta+\varepsilon)}{2} + \frac{b\sin(\theta+\varepsilon) + b\sin\theta}{a\cos(\theta+\varepsilon) - a\cos\theta} \times \frac{b\sin\theta - b\sin(\theta+\varepsilon)}{2}$$

$$= \frac{a^2\cos^2\theta - a^2\cos^2(\theta+\varepsilon) + b^2\sin^2\theta - b^2\sin^2(\theta+\varepsilon)}{2a(\cos(\theta+\varepsilon) - \cos\theta)}$$

將$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$帶入化簡得

$\dfrac{\cos^2\theta(a^2-b^2) - \cos^2(\theta+\varepsilon)(a^2-b^2)}{2a(\cos(\theta+\varepsilon) - \cos\theta)}$，又$a^2 = b^2 + c^2$得$\dfrac{c^2\cos^2\theta - c^2\cos^2(\theta+\varepsilon)}{2a(\cos(\theta+\varepsilon) - \cos\theta)}$，利用平方差可化簡得$\dfrac{c^2(\cos\theta + \cos(\theta+\varepsilon))}{2a}$，故解得$x = \dfrac{c^2(\cos\theta + \cos(\theta+\varepsilon))}{2a}$，我們觀察$\varepsilon$的變化對$x$的影響，

欲使當 $\varepsilon>0$ 時 $x<0$，當 $\varepsilon<0$ 時 $x>0$，故我們取當 $\theta=\frac{\pi}{2}\vee\frac{3\pi}{2}$，此時帶入上式可得

$x=-\frac{c^2\sin\varepsilon}{2a}$，故當 $\varepsilon>0$ 時 $x<0$，當 $\varepsilon<0$ 時 $x>0$，即滿足我們的要求，此時均衡點為

$\theta=\frac{\pi}{2}\vee\frac{3\pi}{2}$，即恰在短軸的端點上。

同理若對稱於 $y$ 軸，可得均衡點為 $\theta=\pi\vee 2\pi$ 即在長軸端點上，因此橢圓形的均衡點有兩解為兩攤販在短軸或長軸端點上。

**結論：**

**橢圓上兩攤販之均衡點為兩攤販在短軸端點或長軸端點時。**

討論完主題(一)～（六）之後，我們得到了多邊形、橢圓形廣場邊界上兩家攤販的均衡點位置以及圓形上多家攤販均衡點的位置結論。接著我們想將其攤販數量推廣，討論正三角形三邊上三家流動攤販之均衡點位置為何？

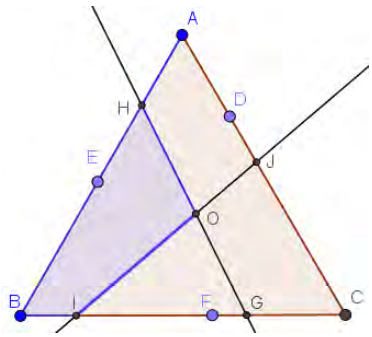
**(七)正三角形三邊上各一家流動攤販之均衡點位置討論**

利用引理二的想法，可以先將三家攤販發生均衡時的條件寫出。

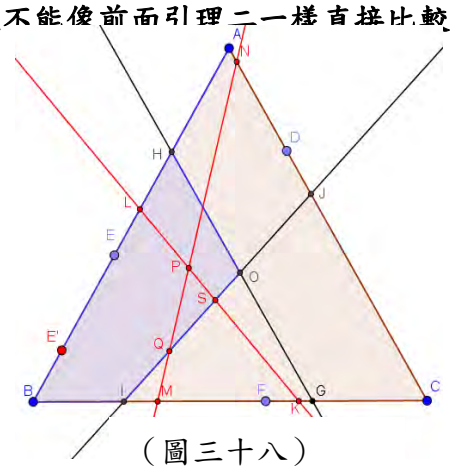
我們先討論：當攤販 $D,F$ 固定時，$E$ 攤販移動之後獲利面積變化，如右圖（三十七）所示，$E$ 攤販原本獲利面積為四邊形 $HOIB$，向下移動至 $E'$ 之後獲利面積如圖（三十八）中四邊形 $LPMB$，獲利面積變化

$\Delta f_D=(\Delta QMI-\Delta QPS)+(\Delta RSO-\Delta LHR)$

$=\frac{1}{2}(\overline{QM}\times\overline{QI}-\overline{QP}\times\overline{QS})\sin\angle IQM+\frac{1}{2}(\overline{RL}\times\overline{RH}-\overline{RS}\times\overline{RO})\sin\angle LRH$，當 $E'$ 趨近於 $E$ 時，左式變成 $\frac{1}{2}(\overline{QI}^2-\overline{QO}^2)\sin\angle IQM+\frac{1}{2}(\overline{RH}^2-\overline{RO}^2)\sin\angle LRH$，**但要特別注意的是：$\angle IQM$ 以及 $\angle SRO$ 角度變化不同，因此判斷 $\Delta f_D$ 的正負大小時，並不能像前面引理二一樣直接比較，需再把兩個角度換成長度才行。**




（圖三十七）




（圖三十八）

觀察上式 $\frac{1}{2}(\overline{QI}^2-\overline{QO}^2)\sin\angle IQM+\frac{1}{2}(\overline{RH}^2-\overline{RO}^2)\sin\angle LRH$，由於 $Q,R$ 是隨著 $E'$ 變動，我們需要先知道 $E'$ 趨近於 $E$ 時，$Q,R$ 位置為何？和前面的結果相同，我們將證明 $E'$ 趨近於 $E$ 時，$Q,R$ 位在過 $E$ 向邊 $\overline{AB}$ 做垂線與兩中垂線的交點。

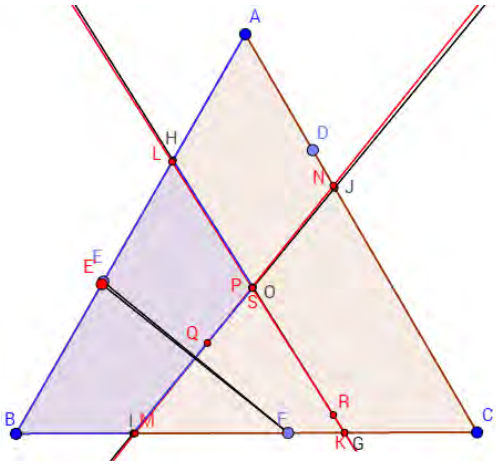
因為$Q$是$\overline{EF},\overline{E'F}$之交點，由中垂線的性質可知$\overline{QE}=\overline{QE'}=\overline{QF}$，即$E,E',F$在以$Q$為圓心的圓上，$E'$趨近於$E$時，圓$EE'F$變成圓$EEF$，即以$E$為切點過$F$之圓，由切點性質以及$Q$在$\overline{EF}$中垂線上得證。

類似地，因為$R$是$\overline{ED},\overline{E'D}$之交點，由中垂線的性質可知$\overline{RE}=\overline{RE'}=\overline{RD}$，即$E,E',D$在以$R$為圓心的圓上，$E'$趨近於$E$時，圓$EE'D$變成圓$EED$，即以$E$為切點過$D$之圓，由切點性質以及$R$在$\overline{ED}$中垂線上得證。

接著我們將$\sin\angle IQM,\sin\angle LRH$換成長度如下：

如圖(三十九)，當$E'$趨近於$E$時，因為$IQ$為$EF$的中垂線，故$IQ\perp EF\rightarrow IQ\perp E'F$，$\angle IQM$旋轉$90^\circ$後再縮放變為$\angle EFE'$，接著我們利用正弦定理

$$\frac{\overline{EE'}}{\sin\angle EFE'}=\frac{\overline{E'F}}{\sin\angle BEF}\rightarrow\frac{\overline{EF}}{\sin\angle BEF}\text{又}\frac{\overline{BF}}{\sin\angle BEF}=\frac{\overline{EF}}{\sin\frac{\pi}{3}},$$



圖(三十九)

故$\sin\angle IQM=\sin\angle EFE'=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\overline{EE'}\times\overline{BF}}{\overline{EF}^2}$，同理

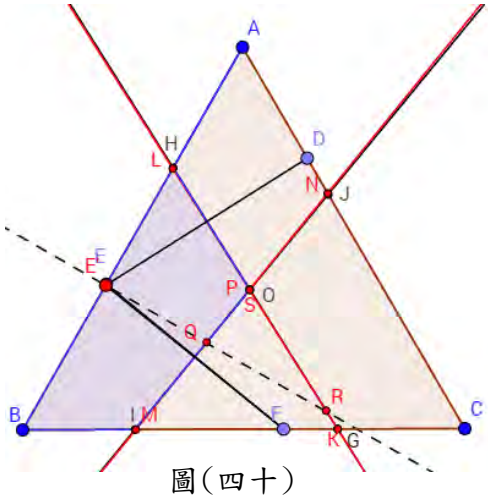
$\angle LRH=\angle EDE'$，又$\frac{\overline{EE'}}{\sin\angle EDE'}=\frac{\overline{ED}}{\sin\angle AED}$，

$\frac{\overline{AD}}{\sin\angle AED}=\frac{\overline{ED}}{\sin\frac{\pi}{3}}$，故$\sin\angle LRH=\sin\angle EDE'=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\overline{EE'}\times\overline{AD}}{\overline{ED}^2}$，帶入原式可得到

$$(\overline{QI}^2-\overline{QO}^2)\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\overline{EE'}\times\overline{BF}}{\overline{EF}^2}=(\overline{RH}^2-\overline{RO}^2)\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\overline{EE'}\times\overline{AD}}{\overline{ED}^2},$$

化簡為$(\overline{QI}^2-\overline{QO}^2)\times\frac{\overline{BF}}{\overline{EF}^2}=(\overline{RH}^2-\overline{RO}^2)\times\frac{\overline{AD}}{\overline{ED}^2}$，又由前面的證明可以得到$\overline{ER}\perp\overline{AB}$及$\overline{IO}\perp\overline{EF}$，

$\angle EQI=90^\circ-\angle FER=\angle BEF$，故$\frac{\overline{BF}}{\sin\angle BEF}=\frac{\overline{EF}}{\sin\frac{\pi}{3}}$，又

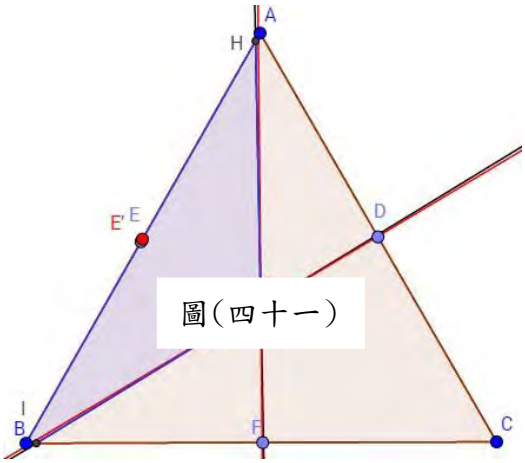


圖(四十)

$\sin\angle BEF=\sin\angle EQI=\frac{\frac{1}{2}\overline{EF}}{\overline{EQ}}$，故$\frac{\overline{BF}}{\overline{EF}^2}=\frac{4}{\sqrt{3}\overline{EQ}}$，同理$\angle AED=90^\circ-\angle DER=\angle ERH$，故

$\dfrac{\overline{AD}}{\sin\angle AED}=\dfrac{\overline{ED}}{\sin\frac{\pi}{3}}$，又 $\sin\angle AED=\sin\angle ERH=\dfrac{\frac{1}{2}\overline{ED}}{\overline{ER}}$，故得到 $\dfrac{\overline{AD}}{\overline{ED}^2}=\dfrac{4}{\sqrt{3}\overline{ER}}$，將上述結論帶入

整理可得 $\dfrac{(\overline{QI}^2-\overline{QO}^2)}{\overline{EQ}}=\dfrac{(\overline{RH}^2-\overline{RO}^2)}{\overline{ER}}$，故均衡時必須滿足此式，同理可對另兩家攤販寫出類似的式子，之後三式聯立就可解得均衡點的位置，但我們缺乏能解決此問題的方法，因此以下我們討論特例



圖(四十一)

特別地，當三家攤販都在三邊中點時，由各個點的定義可知，$Q,R,O$ 重合於中心點、$I,B$、$A,H$ 重合，從而上式 $\dfrac{\overline{QI}^2-\overline{QO}^2}{\overline{EQ}}=\dfrac{\overline{RH}^2-\overline{RO}^2}{\overline{ER}}$ 化簡得 $\dfrac{\overline{QI}^2}{\overline{EQ}}=\dfrac{\overline{RH}^2}{\overline{ER}}$，由 $\overline{QI}=\overline{RH},\overline{EQ}=\overline{ER}$，上式成立。同理，對於其他兩家攤販的條件也會成立，故三家攤販分別在三邊中點是正三角形三邊上各一家流動攤販之一組均衡點。

結論：

1. 若正三角形 $ABC$ 三邊上各有一家流動攤販 $D,E,F$，$\Delta DEF$ 外心為 $O$，則對於每一家攤販發生均衡之充要條件如下：(以攤販 $E$ 為例)
過 $E$ 對其所在之邊做垂線與 $D,E$、$D,F$ 之中垂線交於 $R,Q$，且 $D,E$ 中垂線交 $AB$ 於 $H$，$D,F$ 中垂線交 $BC$ 於 $I$，則 $\dfrac{\overline{QI}^2-\overline{QO}^2}{\overline{EQ}}=\dfrac{\overline{RH}^2-\overline{RO}^2}{\overline{ER}}$ 成立若且唯若 $E$ 攤販位在其局部最大值，若三家攤販皆滿足以上條件，則是為均衡點。

2. $(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ 是正三角形三邊上各一家攤販的一組均衡點。

**(八)凸集簡單封閉曲線上均衡點方法討論:**

在上面主題(六)的討論之中，我們利用 $\varepsilon$ 的正負來觀察攤販獲利面積的變化情形，事實上，我們能利用代數的偏微分想法，將兩家攤販發生均衡時的性質表示出來：

假設平面凸形廣場 $S$ 邊界上有兩家攤販 $A,B$，廣場面積為 $s$，攤販 $A,B$ 位於 $x,y$ 處，兩家攤販的獲利面積分別為 $f_A(x,y),f_B(x,y)$，$f_A+f_B=s$，則發生均衡時有以下性質（8.1）：

性質（8.1）：

若 $(x_0,y_0)$ 是廣場 $S$ 上的一組均衡點，則 $(x_0,y_0)$ 滿足

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f_A(x_0,y_0)}{\partial x}=0\\ \dfrac{\partial f_B(x_0,y_0)}{\partial y}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{\partial f_A(x_0,y_0)}{\partial x}=0\\ \dfrac{\partial s}{\partial y}-\dfrac{\partial f_A(x_0,y_0)}{\partial y}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{\partial f_A(x_0,y_0)}{\partial x}=0\\ \dfrac{\partial f_A(x_0,y_0)}{\partial y}=0\end{cases}$$

因為均衡發生時，我們考慮某一家攤販移動，而其他攤販固定的情形，也就是固定住其他攤販的位置，再判斷某一家攤販的獲利面積在其分量變動一點點之後的增減情形，因為面積函數連續且有界，故存在局部最大值，由費馬原理我們知道，發生極值時微分結果是0，故可以得到上述性質。要特別注意的是，發生極值時微分結果是0，但微分為0時並不一定是極值，因此上述性質只是均衡的充分條件，但我們仍能利用上述性質（8.1）給出找到均衡點的方法如下：

引理（五）：找到均衡的方法

1. 計算出同時滿足 $\dfrac{\partial f_A(x,y)}{\partial x}=0,\dfrac{\partial f_A(x,y)}{\partial y}=0$ 的解。

2. 利用 geogebra 判斷 1. 所得出得結果是否為局部最大值。

滿足上述條件的值即為均衡。

討論：利用引理五進行計算時，只要能給出各種不同情況下的獲利面積函數，在計算均衡點時，並不會像引理二以及主題（一）到（三）一樣受限於攤販移動軌跡需是一直線，因此利用引理（五）的概念可以計算更一般化的圖形上均衡點的位置分布情形，在主題(八)獲利面積的定義改變時，引理(五)也試用，但是引理五並沒有辦法證明均衡點是否存在以及唯一，且對於過於複雜的獲利面積函數，計算上更是困難。

下面利用引理（五）計算正方形相鄰兩邊上兩家攤販均衡點位置情形：

**正方形相鄰邊上兩個流動攤販之均衡點位置討論:**

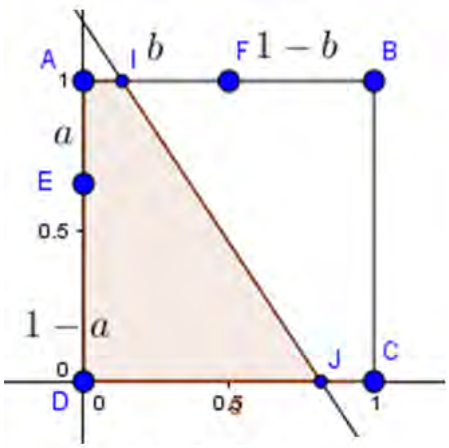
根據引理(五)的想法，首先計算出兩家攤販的獲利面積，而我們希望這個面積是有關攤販位置的雙變數函數。

如右圖(四十二)，攤販 $E,F$ 分別在 $\overline{AD},\overline{AB}$ 上，其中

$\overline{AE}=a,\overline{AF}=b$

不失一般性討論 $0\le a\le b\le 1$：

考慮 $0\le a\le b\le 1$，$f_E(a,b)$ 即圖中紅色區域部分，再觀察對手不動下的大小變化情形 $f_E(a,b)$。



圖(四十二)

在直角座標系下

$A(0,1)$，$B(1,1)$，$C(1,0)$，$D(0,0)$，$E(0,1-a)$，$F(b,1)$

則線段 $\overline{EF}$ 斜率為 $\dfrac{1-(1-a)}{b-0}=\dfrac{a}{b}$、中點為 $(\dfrac{b}{2},\dfrac{2-a}{2})$

$\overline{EF}$ 的中垂線方程式 $\overleftrightarrow{IJ}: -\frac{a}{b}(y-\frac{2-a}{2})=x-\frac{b}{2}$.

$y=0$ 代入上式，得 $J(\frac{b^2-a^2+2a}{2b},0)$，$y=1$ 代入得 $I(\frac{b^2-a^2}{2b},1)$.

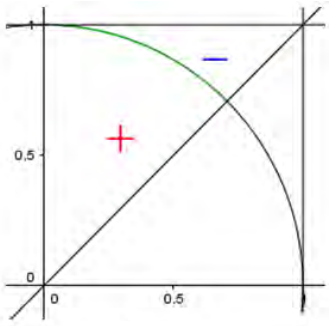
故 $f_E(a,b)=(\frac{b^2-a^2+2a}{2b}+\frac{b^2-a^2}{2b})\cdot 1\cdot\frac{1}{2}=\frac{b^2-a^2+a}{2b}$.

先固定住 $F$ 點，觀察 $E$ 點位置變動下，$f_E(a,b)$ 的大小變化情形，即 $f_E(a,b)$ 對 $a$ 偏微：

$\frac{\partial f_E(a,b)}{\partial a}=-\frac{a}{b}+\frac{1}{2b}=\frac{1-2a}{2b}$ 此式在 $a>\frac{1}{2}$ 時為負，$a<\frac{1}{2}$ 時為正，故 $a=\frac{1}{2}$ 時為 $f_E(a,b)$ 局部最大值…. 條件(1)。

接著我們固定住 $E$ 點，觀察 $F$ 點位置變動下 $f_F(a,b)$ 的大小變化情形，又 $f_F(a,b)=1-f_E(a,b)$，則

$\frac{\partial}{\partial b}f_F(a,b)=\frac{\partial}{\partial b}[1-f_E(a,b)]=-\frac{\partial}{\partial b}f_E(a,b)=-\left(\frac{1}{2}+\frac{a^2}{2}\cdot b^{-2}-\frac{1}{2}\cdot b^{-2}\right)=\frac{-(a^2+b^2-1)}{2b^2}$. 討論上式在 $0\le a\le b\le 1$ 條件下的正負情形，可得出右圖（四十三）（橫軸為 $a$ 、縱軸為 $b$ ）



（圖四十三）

在 $a$ 值固定時，$f_F(a,b)$ 會隨著 $b$ 值變大而先變大在變小，故在這裡局部最大值為圖中綠色線段，即…. . 條件(2)

滿足條件(1)及條件(2)的點只有 $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.

故在情況 $0\le a\le b\le 1$ 時有唯一的均衡點 $(a,b)=(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.

**正方形相鄰兩邊結論：有唯一的均衡點** $(a,b)=(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

與前面主題(一)的結論相同。

在前面八個小題的討論中，我們假定顧客只受距離遠近來選擇攤販且顧客呈均勻分布，這是兩個很強的假設，即顧客選擇較近攤販的機率為100%，在現實中，顧客的選擇通常不會是單純只因距離長短做決定，且顧客的分布通常並非均勻，因此接下來將引入隨機變數來計算各個攤販的獲利期望值，進而觀察引入機率函數之後一維直線上攤販的均衡點分布位置。

在一維的情況下，數線上有兩家攤販分布在 $A(x),B(y)$，廣場內部有一動點 $W(t)$，設 $W$ 位置上的顧客到 $A,B$ 攤販消費的機率分別為 $P_A(x,y),P_B(x,y)$，其中 $P_A+P_B=1$，則 $A,B$ 攤販的獲利期望值可表示如下：

$E_A=\int P_A(x,y)dt$ 、$E_B=1-E_A=1-\int P_A(x,y)dt=\int P_B(x,y)dt$

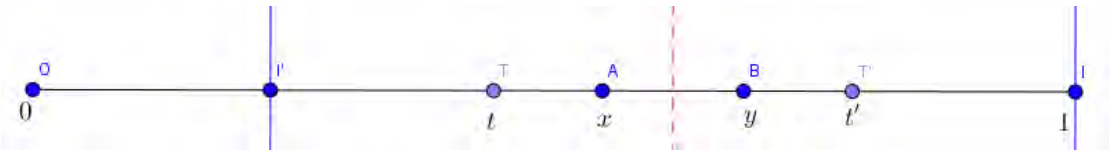
類似的，在二維的情況下，一個正方形廣場相鄰兩邊上有兩家攤販 $A(a,0),B(0,b)$，廣場內部有一動點 $W(x,y)$，設 $W$ 位置上的顧客到 $A,B$ 攤販消費的機率分別為 $P_A(x,y),\ P_B(x,y)$，其中 $P_A+P_B=1$，則 $A$ 攤販的獲利期望值可表示如下：$E_A=\int\int P_A(x,y)dxdy$ 、$E_B=\int\int P_B(x,y)dxdy=1-E_A$.

注意到期望值的概念其實和前述面積函數是相同的，接下來我們要討論不同機率函數下的均衡點分布情形。

**(九)加入機率函數之後一維直線上兩家攤販的均衡點分布情形**

首先不難確定:引理(一)在一維的情況也適用，獲利面積退化成線段長、中垂線退化成中點。

如下圖(四十四)，在數線 $OI$ 上有 $A,B$ 兩家攤販，分別位在 $x,y$ 處，顧客 $T$ 位於 $t$ 處。




(圖四十四)

由於顧客的選擇是會偏重於距離的遠近，因此我們自然的先考慮由距離定義出的函數:

$$P_A(x,y,t)=\frac{|t-y|}{|t-x|+|t-y|}.$$

將顧客 $T$ 對 $A,B$ 中點作對稱至 $T'$，$T$ 到 $A$ 和 $B$ 攤販消費的機率分別是 $P_A(x,y)=\frac{|t-y|}{|t-x|+|t-y|},P_B(x,y)=\frac{|t-x|}{|t-x|+|t-y|}$，$T'$ 到 $A$ 和 $B$ 攤販消費的機率分別是 $P_A(x,y)=\frac{|t'-y|}{|t'-x|+|t'-y|},P_B(x,y)=\frac{|t'-x|}{|t'-x|+|t'-y|}$，注意到 $|t'-y|=|t-x|$、$|t'-x|=|t-y|$，故 $A,B$ 兩攤販對於 $T$ 、$T'$ 的獲利是相同的，故在 $O,I$ 區間裡面，$A,B$ 兩家攤販的獲利是相同的，只需考慮 $O,I'$ 區間即可，而 $O,I'$ 區間內，距離攤販 $A$ 較近，因此攤販 $A$ 在 $O,I'$ 區段獲利較大，故攤販 $B$ 固定時，攤販 $A$ 會一為使 $O,I'$ 區段越大而一直趨近於 $B$，但不會重合，因此，若兩攤販不重合，必有一攤販會一直趨近於另外一個攤販，故在兩攤販不重合時必沒有均衡點。

又若兩攤販不重合在$\frac{1}{2}$，則必有一攤販在另外一攤販固定下向外移動一點點的獲利會增加，從而兩家攤販在此機率函數之下均衡點位於$(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$。

且此機率密度函數的各個量值加上冪次之後，並不影響整個證明過程，因此加上冪次之後的均衡點完全是相同的，意即在機率密度函數$P_A(x,y,t)=\frac{|t-y|^n}{|t-x|^n+|t-y|^n}$均衡點也是$(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$。

觀察上述的討論，我們希望能找出機率密度函數的條件使均衡點必是$(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.

在前面的證明之中我們發現，若攤販在兩對稱點獲利相同，均衡點就會是$(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$也就是機率密度函數滿足

$P_A(x,y,t)+P_A(x,y,t')=P_B(x,y,t)+P_B(x,y,t')$，化簡後得

$P_A(x,y,t)+P_A(x,y,t')=P_B(x,y,t)+P_B(x,y,t')=2-P_A(x,y,t)+P_A(x,y,t')$

$\Rightarrow P_A(x,y,t)+P_A(x,y,t')=1$，又$t'=x+y-t$。

**因此，機率密度函數$P_A(x,y,t)+P_A(x,y,x+y-t)=1$是均衡點位於$(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$的充分條件，其中$x,y$是攤販的位置，$t$是顧客的位置。**

接著我們想解決如果顧客不是均勻分布時的均衡點情形。若機率函數與攤販位置無關，而只與顧客如何分布有關的話，機率密度函數是有關顧客位置的單變數函數$P(t)$。

這個問題其實是前述引理三與引理四的退化情形，因為若兩家攤販不重合時，他們會無限趨近於彼此，從而不會均衡，若兩家攤販重合，我們則須找出一個位置平分總獲利面積。在引理三與引理四中是解決正多邊形內部是否存在一點使過它的每一條線都平分面積，而在這個命題則是希望找出數線上的一個點平分總獲利期望值。寫成數學式表示如下：

$\boxed{\exists k\ s.t.\ \int_a^k P(t)dt=\int_k^b P(t)dt\ -\infty\le a\le k\le b\le\infty\text{，則 }(k,k)\text{ 是均衡點。}}$

由微積分基本定理可知這個$k$存在且唯一。

特別的，考慮顧客在數線上成常態分布，而其依照距離遠近選擇攤販消費時，有下面的結果:

不妨考慮顧客在常態分布$(-\infty,+\infty)$數線上，而兩家攤販分別位於$A(x),B(y)$，又常態分布的機率密度函數是只以顧客位置為變數的單變數函數，則攤販$A$的獲利期望值可表示成

$$E_A=\int_{-\infty}^k P_A(t)dt=\int_{-\infty}^k \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}dt.$$

上面的機率密度函數 $P(t)$ 滿足 $\int_{-\infty}^{\mu} P(t)dt = \int_{\mu}^{\infty} P(t)dt$ 由上面的結論可知其均衡點在 $(\mu,\mu)$。

**結論：**

**1. 機率密度函數 $P_A(x,y,t)+P_A(x,y,x+y-t)=1$ 是均衡點位於 $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ 的充分條件，其中 $x,y$ 是攤販的位置，$t$ 是顧客的位置。**

**2. $\exists k$ s.t. $\int_a^k P(t)dt = \int_k^b P(t)dt \quad -\infty \le a \le k \le b \le \infty$ ，則 $(k,k)$ 是均衡點。**

**3. 若遊客呈常態分布於一維直線上，兩家攤販均衡點位於 $(\mu,\mu)$.**

## 陸、研究結論

本篇研究在各不同情況下均衡點所在位置如下：

(一). 正偶數邊形相鄰兩邊上之兩攤販有唯一均衡點在 $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.

(二). 在正奇數邊形相鄰兩邊上之兩攤販有唯一均衡點在 $(\frac{1}{2}\cos^2\frac{\pi}{2n},\frac{1}{2}\cos^2\frac{\pi}{2n})$.

(三). 在正偶數邊形不相鄰邊上兩攤販有唯一均衡點為其所在邊上之中點。

(四). 在正奇數邊形不相鄰邊上兩攤販有唯一均衡點為

$$(a,b)=(\frac{1}{2}-\frac{(1-\cos\frac{\pi}{n})\times\sin\frac{(2k-1)\pi}{n}}{4\sin\frac{\pi}{n}},\frac{1}{2}-\frac{(1-\cos\frac{\pi}{n})\times\sin\frac{(2k-1)\pi}{n}}{4\sin\frac{\pi}{n}})$$（其中 $k$ 為由頂點逆時針數來第 $k$ 邊）

(五). 任意 $n$ 邊形相鄰邊上之兩攤販均衡點為其所在兩邊所夾之角的角平分線中點向兩邊之投影點上。

(六). 任意 $n$ 邊形不相鄰邊上之兩攤販均衡點為其所在兩邊延長線交角之角平分線交圖形於兩點之中點對其邊上之投影點。

(七). 任意 $n$ 邊形不相鄰邊上之兩攤販均衡點存在且唯一。

(八). 圓周上 $n$ 個攤販無論如何分布，都是均衡。

(九). 圓周上 $n$ 個攤販分布成正 $n$ 邊形時，是唯一的最佳均衡。

(十). 圓形內部 2 家攤販時，有唯一的均衡點 $(0,0)$

(十一). 正奇數邊形內部 2 家攤販時，均衡點不存在。

(十二). 正偶數邊形內部 2 家攤販時，均衡點為二攤販重合在正中心。

(十三). 橢圓上兩攤販之均衡點為兩攤販在短軸端點或長軸端點時。

(十四). 若正三角形 $ABC$ 三邊上各有一家流動攤販 $D,E,F$ ，$\Delta DEF$ 外心為 $O$ ，則對於每一家攤販發生均衡之充要條件如下：（以攤販 $E$ 為例）

過 $E$ 對其所在之邊做垂線與 $D,E$ 、$D,F$ 之中垂線交於 $R,Q$，且 $D,E$ 中垂線交 $AB$ 於 $H$ ，$D,F$

中垂線交 $BC$ 於 $I$ ，則 $\dfrac{\overline{QI}^2-\overline{QO}^2}{\overline{EQ}}=\dfrac{\overline{RH}^2-\overline{RO}^2}{\overline{ER}}$ 成立若且唯若 $E$ 攤販位在其局部最大值，若三家攤販皆滿足以上條件，則是為均衡點。

(十五). $(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ 是正三角形三邊上各一家攤販的一組均衡點。

(十六). 利用引理五偏微分方法可以找出任意凸集上兩家攤販均衡點分布位置。

(十七). 在一維且只有兩家攤販的情況下，若機率密度函數 $P_A$ 滿足

$P_A(x,y,t)+P_A(x,y,x+y-t)=1$，則均衡點 $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.

(十八). $\exists k\ s.t.\ \int_a^k P(t)dt=\int_k^b P(t)dt\ -\infty\le a\le k\le b\le\infty$ ，則 $(k,k)$ 是均衡點。

(十九). 若遊客呈常態分布於一維直線上，兩家攤販均衡點位於 $(\mu,\mu)$

本篇報告解決了任意多邊形上兩家流動攤販的均衡點位置，也成功證明出其存在性以及唯一性，而在處理圓錐曲線上兩家流動攤販均衡點問題時，得出了圓形、橢圓形的結論，也推廣到允許攤販可以進入廣場內部時的情況，對於更一般化的圖形，給出了利用代數的想法。最後再引入機率的概念，使其更加貼近現實。

## 柒、未來展望

1. 在第七個主題討論三家攤販均衡點位置時，我們雖然給出了發生均衡時的條件並猜出一組解，但我們無法確定那組解是否唯一，若採用直角坐標或重心座標解析的方法將各分量都計算出來，計算量太過龐大，我們希望未來能夠找到好的方法來證明滿足條件(7.1)的配置是否唯一。又三家以上攤販的中垂線不一定交於一點，未來，我們想要探討在 $n$ 邊形上 $m$ 個攤販競爭之均衡情形，攤販的數量增加，其複雜程度相對的提高，希望能解決這個問題。

2. 我們所討論的攤販，除了第五個主題有討論到正多邊形、圓形內部的情形，其餘都限定在曲線上，若能使若干個攤販分布於平面內，將更貼近現實情況。拿掉選擇位置的限制，攤販會如何分布，是我們未來感興趣的課題，。且如果將正方形廣場放大並將其內部分成一格一格小正方格，便可視為市區及其街道，將攤販限定在街道上，也就是有限制的讓攤販往廣場內部移動，將可更貼近現實情形。

## 捌、參考文獻


1. 2016 年國際科展數學科作品《百動不如一靜－固定策略玩家對奈許均衡的影響》
2. 史蒂文·泰迪里斯，博弈論導論 p.79-95， 中國人民大學出版社 2015-2-1
3. 林福來等，高中選修數學上冊甲版教科書，南一書局企業股份有限公司

## 【評語】050419

本篇報告主要將參考資料 1 的一維推廣至二維的情形。詳細來說，在一個廣場的邊界上有許多家流動攤販，假設顧客均勻分布在廣場內，而顧客只因與攤販位置距離的遠近決定消費行為，所有攤販皆想盡一切辦法獲得最多的客源，本論文討論當攤販在廣場上移動時，在哪個位置能找到其獲利之局部最大值，若每家攤販獲利皆在局部最大值的位置時，向兩旁移動獲利皆不會增加，故不會選擇移動，稱之為「均衡」。本篇報告討論各種不同的形狀的廣場下均衡點位置問題，做出了多邊形、圓形、橢圓形等平面圖形的均衡點結論，以及最後給出至簡單封閉凸形的解決想法，並在多邊形的情況中，證明出均衡點的存在性以及唯一性。

整體來說，得到的前述結論有一定的興趣。可再斟酌改進之處包含：第 2 頁有關均衡點定義的公式不清楚；最佳均衡點定義不清楚；引理一的證明可以取點 F 是中垂線和線段 DG 交點，證明只需用三角不等式；第 8 頁之結論可思考是否夠一般化；文中給出了十多種情況的均衡點解，和定義似乎對不起來，例如，固定多邊形及 k = 2 之後，應該有一個均衡點解，但是文中又分兩個攤販在不同邊的解，似乎和攤販可再多邊形內任意移動有違背；文獻探討可再加強。

## 作品海報

## 壹、摘要

在一個廣場的邊界上有許多家流動攤販(動點)，假設顧客均勻分布在廣場內，而顧客只因與攤販位置距離的遠近決定消費行為，所有攤販皆想盡一切辦法獲得最多的客源，我們討論當攤販在廣場上移動時，在哪個位置能找到其獲利之局部最大值，若每家攤販獲利皆在局部最大值的位置時，向兩旁移動獲利皆不會增加，故不會選擇移動，稱之為”均衡”。

本篇報告討論各種不同的形狀的廣場下均衡點位置問題，成功地做出了多邊形、圓形、橢圓形等平面圖形的均衡點結論，以及最後給出至簡單封閉凸形的解決想法，並在多邊形的情況中，成功證明出均衡點的存在性以及唯一性。

## 貳、名詞定義與解釋

**均衡點：**

攤販會為了擁有最大獲利面積而不斷移動，直到向任一方向移動皆不會使獲利面積增加為止。在本篇中我們考慮攤販們在決策時只知道往附近移動之後的獲利面積變化，而無法知道他在整體哪個位置會獲利最大，即我們考慮攤販在移動當下如何決策最好，故我們稍微修改奈許均衡點的定義，定義所謂「均衡點」即為，在其他攤販位置皆不動的情況下，在某一位置之攤販無論向哪一方向移動，所得的利益皆會變小，則我們稱此位置為均衡點。

嚴謹的數學定義如下：

假設一個賽局總共有 $n$ 個參與者，每個參與者個策略空間分別為 $S_1, S_2, \ldots\ldots, S_n$，報酬函數為 $f_1, f_2, \ldots\ldots, f_n$，其中 $f_k : S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_n \to R$，若當 $\exists (a_1^*, a_2^*, \ldots, a_n^*) \in S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_n$ 且 $\exists \delta > 0$ 滿足 $f_k(a_1^*, a_2^*, \ldots, a_n^*) \geq f(a_1^*, a_2^*, \ldots, a_{k-1}^*, a_k^* + \varepsilon, a_{k+1}^*, \ldots, a_n^*)$，$\forall \varepsilon \in (-\delta, \delta)$ $\forall a_k \in S_k, k = 1, 2 \ldots, n$.

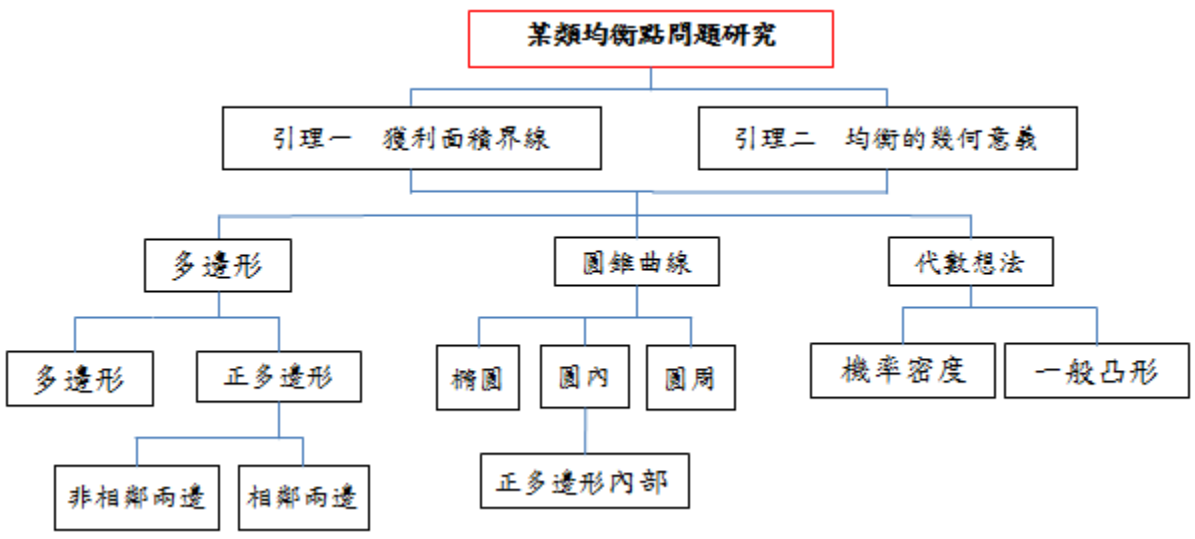
則稱此策略組合 $(a_1^*, a_2^*, \ldots, a_n^*)$ 為這個賽局的一組均衡點。

**最佳均衡點：**

若相鄰左右的兩家攤販獲利與自己的獲利差距越小，則心裡會越感公平，故定義最佳均衡點如下：若 $(a_1^*, a_2^*, \ldots, a_i^{*_1}, \ldots, a_n^*)$、$(a_1^*, a_2^*, \ldots, a_i^{*_2}, \ldots, a_n^*)$、$(a_1^*, a_2^*, \ldots, a_i^{*_m}, \ldots, a_n^*)$ 皆是均衡點，配置 $(a_1^*, a_2^*, \ldots, a_i^{*_j}, \ldots, a_n^*)$ 滿足 $\min_{1 \le i \le n}(\max(|f_i - f_{i+1}|, |f_i - f_{i-1}|))$，則稱此配置為 $a_i^{*_j}$ 的最佳均衡點。

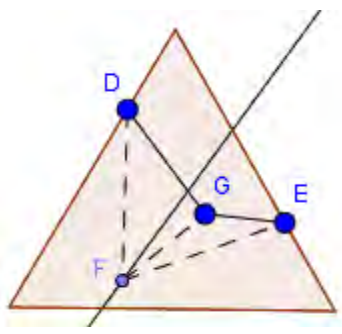
## 參、研究目的

1. **多邊形廣場：**兩家流動攤販在正 $n$ 邊形鄰邊上、不在鄰邊上、在任意多邊形上時，均衡點的位置為何？
2. **圓錐曲線廣場：** $n$ 家攤販在圓形、2 家攤販在橢圓形廣場上時，均衡點的位置為何？
3. **進入廣場內部：**討論允許攤販往廣場內部移動時，均衡點的位置為何？
4. **平面簡單封閉凸曲線：**一般平面簡單封閉凸曲線 $\Gamma$ 上兩個流動攤販，均衡點位置所滿足的條件為何？
5. **選擇機率與顧客分布：**考慮遊客選擇攤販的機率函數，在一維的情況下均衡點與函數之關係?

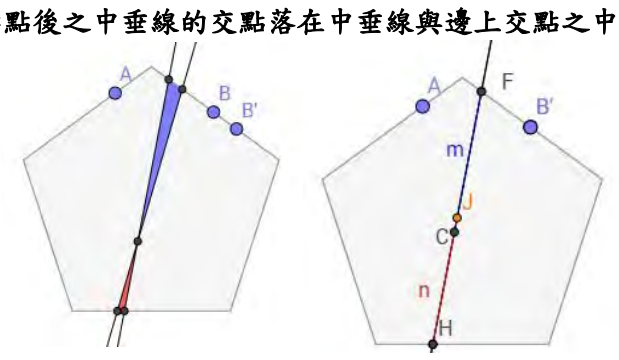



## 肆、研究過程

**引理一：兩個攤販互相比較時，他們的客源區域界線是此二點的垂直平分線**




**引理二:當兩家攤販在廣場邊上發生均衡時，在另外一家固定下，移動一點點後之中垂線的交點落在中垂線與邊上交點之中點上。**

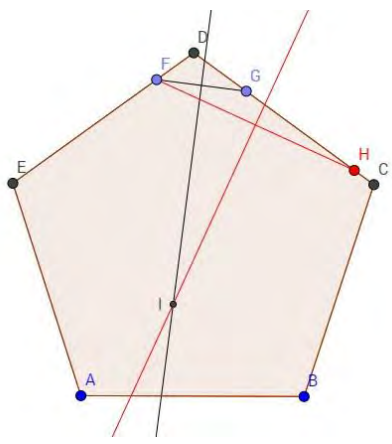


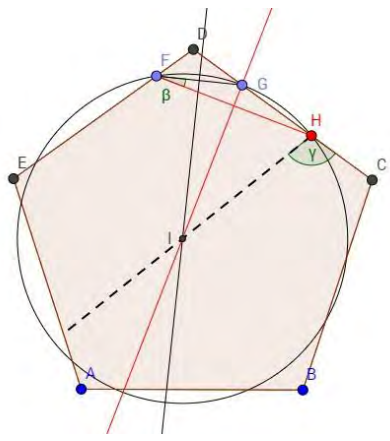

**(一)正 $n$ 邊形相鄰邊兩流動攤販均衡點位置討論:**

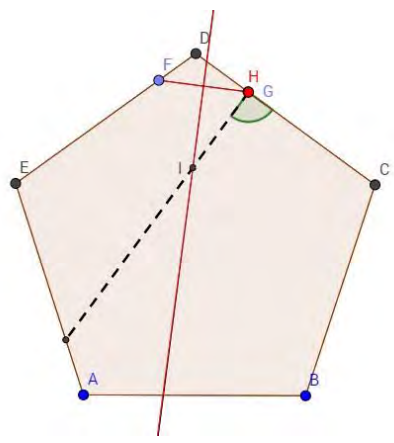
**(1)正奇數邊形**

**性質:**

$\angle GFH + 90^\circ = \angle IHC.$

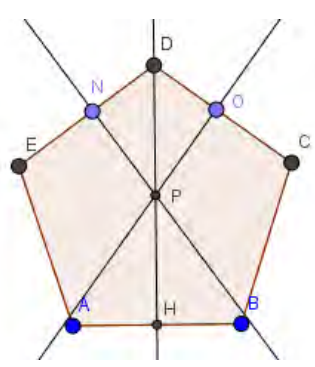


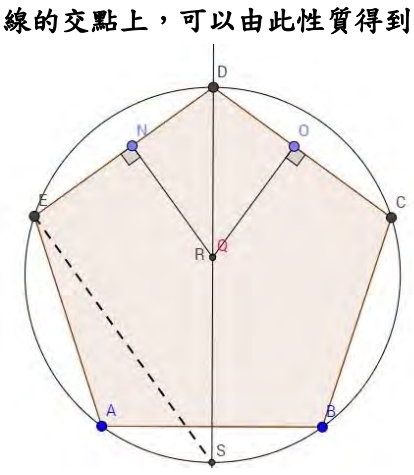




**證明:**假設 $\angle BAB' = \alpha$，$F$ 為 $BA, B'A$ 兩中垂線之交點，利用中垂線性質可知 $\overline{AF} = \overline{B'F} = \overline{BF}$，故 $A$、$B$、$B'$ 三點皆在以 $F$ 為圓心 $\overline{AF}$ 為半徑之圓上，因為 $\angle BAB' = \alpha$，故圓心角 $\angle BFB' = 2\alpha$，又 $\overline{BF} = \overline{B'F}$，可知 $\angle B'BF = 90^\circ - \alpha$，當 $B'$ 趨近於 $B$ 時，$\alpha$ 趨近於 $0$，$\angle B'BF \to 90^\circ$，故重合時此圓將會變為切圓，切點為 $B$，**因此我們可以利用過 $B$ 點並與 $\overline{CD}$ 垂直之垂線與中垂線的交點來找到 $F$。**

**故交點位於過攤販位置的垂線與中垂線的交點上，可以由此性質得到正奇數邊形發生均衡時，兩攤販與最接近的頂點距離相同。**




**計算:**

做輔助線 $\overline{ES}$，利用 $\Delta DNQ \sim \Delta DES$，可以計算均衡點的位置如下

$$\frac{\overline{DR}}{\overline{DS}} = \frac{\overline{DN}}{\overline{DE}} \Rightarrow \frac{\overline{DN}}{\overline{DE}} = \frac{\frac{1}{2}\cos^2\frac{\pi}{2n}}{1}.$$

**正奇數邊形相鄰兩邊結論：均衡點在位置座標**

$$\left(\frac{1}{2}\cos^2\frac{\pi}{2n}, \frac{1}{2}\cos^2\frac{\pi}{2n}\right)$$

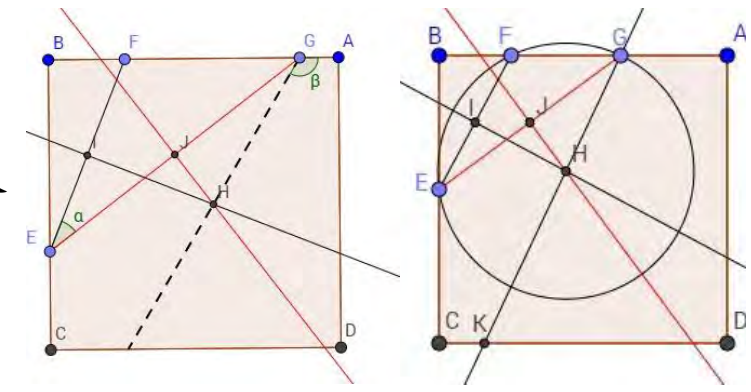
(2)正偶數邊形

**性質：**

$\angle FEG+90^{\circ}=\angle HGA$

因 $H$ 是中垂線 $\overline{EF},\overline{EG}$ 的交點，由 $\overline{HE}=\overline{HF}=\overline{HG}$ ，可知 $E,F,G$ 位於以 $H$ 圓心，$\overline{HF}$ 為半徑的圓周上，令 $\angle GKD=\theta$，則 $\angle GKD=\angle BGK=\angle BGE+\angle EGH=\frac{1}{2}\angle FHE+\angle EGH=\angle IHE+\angle GEH$ 又 $\Delta EIH$ 為直角三角形，得 $\angle IHE+\angle GEH+\angle IEG=\theta+\angle IEG=\frac{\pi}{2}$ ，$\angle IEG=\frac{\pi}{2}-\theta.$

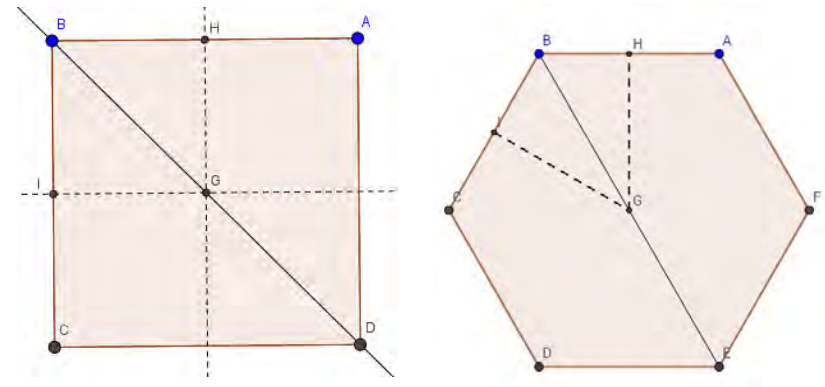
當 $G$ 點趨近於 $F$ 時，$\angle IEG=\frac{\pi}{2}-\theta\to 0$ ，$\theta\to\frac{\pi}{2}$ ，



**即當 $G$ 點趨近於 $F$ 時，$H$ 位在從 $G$ 向 $\overline{AB}$ 作垂直線的線上**

**說明:**

對攤販所在之邊做垂線，並使這兩條垂線與其中垂線的交點重合，如圖中 $G$ 點，利用 $\Delta BIG\cong\Delta BHI$ 得 $\overline{BH}=\overline{BI}$ ，並可知道此時 $H$ 、$I$ 為中點，故可知均衡點為 $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ 且正偶數邊形都可類似得到。



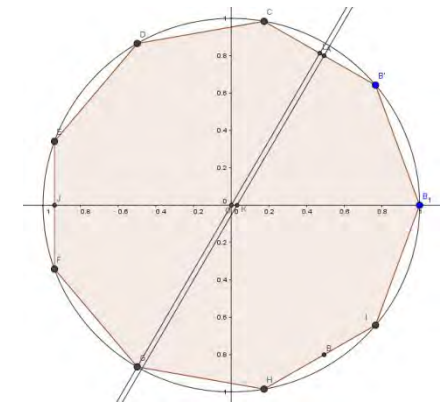
**結論:正偶數邊形相鄰兩邊的均衡為 $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$**

**(二) 正 $n$ 邊形不相鄰邊與在相同邊上之兩流動攤販均衡點位置情況:**

(1)正奇數邊形

**性質:**

如同相鄰邊的討論，不相鄰邊也有類似性質，即欲找到均衡點只須對攤販所在之邊做垂線，並使這兩條垂線與其中垂線的交點重合。



**說明:**

以左圖為例，將兩攤販所在之邊的對稱軸與 $x$ 軸重合，圖中 $K$ 點即為重合，做平行 $\overline{AK}$ 且過 $O$ 之線，故 $L$ 為中點，所求均衡點為 $\overline{AB'}=\frac{1}{2}-\overline{AL}$ ，又 $\overline{AL}=\overline{OK}$ ，故有以下計算:

假設 $k$ 為由 $B_1$ 逆時針數來第 $k$ 邊，如圖為 $k=2$ 的情形。

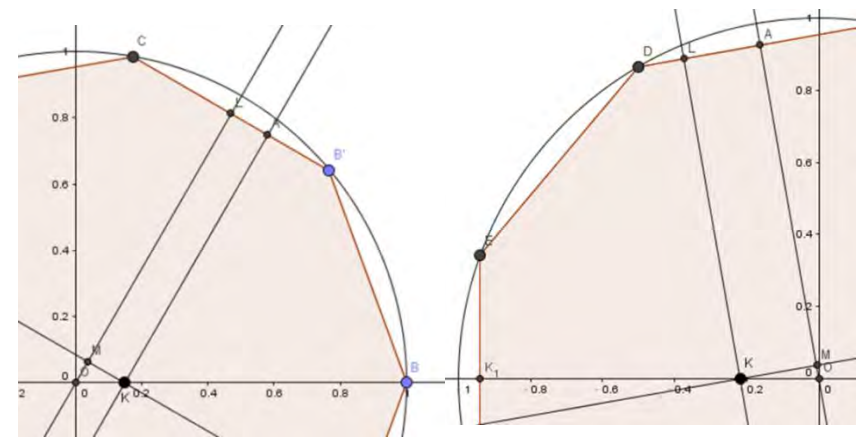
**計算:**

可分如圖中兩種情形，即 $K$ 在 $x$ 軸正向及負向

① $K$ 在正向

藉由原點到頂點連線求得 $\angle LOK=\frac{2k\pi}{n}-\frac{\pi}{n}=\frac{(2k-1)\pi}{n}$ 可求得 $\overline{AL}=\frac{1-\cos\frac{\pi}{n}}{2}\times\sin\frac{(2k-1)\pi}{n}$

均衡點為 $(a,b)=(\frac{1}{2}-\frac{(1-\cos\frac{\pi}{n})\times\sin\frac{(2k-1)\pi}{n}}{4\sin\frac{\pi}{n}},\frac{1}{2}-\frac{(1-\cos\frac{\pi}{n})\times\sin\frac{(2k-1)\pi}{n}}{4\sin\frac{\pi}{n}})$.



② $K$ 在負向

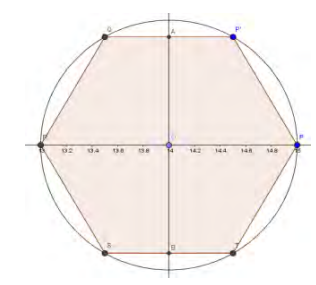
經計算後與上述結論相同。

**結論: 均衡點為 $(a,b)=(\frac{1}{2}-\frac{(1-\cos\frac{\pi}{n})\times\sin\frac{(2k-1)\pi}{n}}{4\sin\frac{\pi}{n}},\frac{1}{2}-\frac{(1-\cos\frac{\pi}{n})\times\sin\frac{(2k-1)\pi}{n}}{4\sin\frac{\pi}{n}})$.**

(2)正偶數邊形

**說明:**

正偶數邊形之中心點與原點重合，我們以正六邊形為例，由原點 $O$ 向對 $x$ 軸之兩邊做投影，此時兩攤販 $A$ 、$B$ 為均衡，易知同一邊上兩頂點與頂點連線可得一等腰三角形，又當等腰三角形之頂點對底邊做垂線可將底邊二等分，故**均衡點為 $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.**



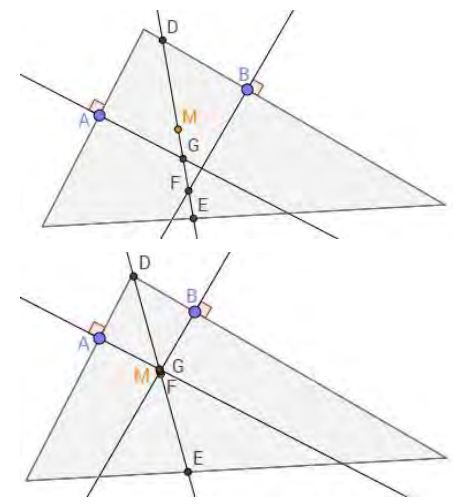
**(三) 任意多邊形邊界上兩家攤販之均衡點位置：**

(1) 任意 $n$ 邊形相鄰邊上兩攤販之均衡點

**說明:**

$A$ 、$B$ 為任意三角形廣場邊上的兩攤販，由（一）中的討論我們可以知道，另外一家攤販固定而移動一點點之中垂線交點位在中垂線與過攤販的垂線上，因此，分別過攤販 $A,B$ 對其邊做垂線交其中垂線 $\overline{DE}$ 於 $G$ 、$F$ 如右圖，$M$ 為 $A,B$ 中垂線 $DE$ 之中點，由引理二，當均衡發生時，$M$ 、$G$ 、$F$ 重合，下面我們討論其性質。

三點重合於 $M$ 時，易知 $D$ 落在三角形的頂點上，又由中垂線的性質知 $\overline{MA}=\overline{MB}$ ，又 $\overline{MA},\overline{MB}$ 是三角形邊上的垂線，故 $\Delta DAM\cong\Delta DBM$ ，從而線段 $DE$ 是三角形的角平分線，因此我們可以得到 $M$ 位於角平分線的中點，由上述的討論我們得到：當均衡發生時攤販 $A,B$ 之中垂線為所夾角的角平分線，又這個證明對於任意 $n$ 邊形都可以類似得到，故發生均衡時攤販的位置如下：



**任意 $n$ 邊形相鄰邊上之兩攤販均衡點為其所在兩邊所夾之角的角平分線中點向兩邊之投影點上。**

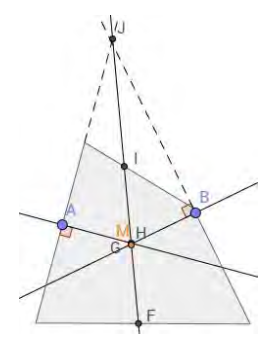
(2) 任意 $n$ 邊形不相鄰邊上兩攤販之均衡點

**說明:**

**延長 $A,B$ 所在之邊交於 $J$ ，易知 $G,H,M$ 三點重合時 $\overrightarrow{FI}$ 過 $J$ ，又由**

**$MA=MB,\angle MAJ=\angle MBJ,JH=JH$ 得 $\Delta MAJ\cong\Delta MBJ$ ，從而 $\overrightarrow{FI}$ 是 $\angle AJB$ 的角平分線。**

**均衡發生時兩攤販的中垂線與所夾之角的角平分線重合，而由角平分線的中點做投影可得均衡點，因此中點是唯一確定的，從而能夠證明均衡點在任意多邊形廣場下具有唯一性。**

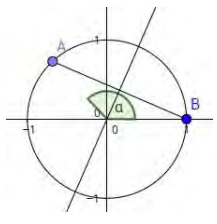


**結論: 在任意 $n$ 邊形不相鄰邊上之兩攤販均衡點為其所在兩邊延長線交角之角平分線交圖形於兩點之中點對其邊上之投影點。**

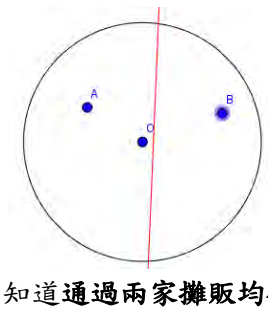
**(四)圓周上$n$點之均衡點分布：**

**說明:**

$A,B$兩家攤販任意分布在圓周的兩位置上，由於弦的垂直平分線必經過圓心，並平分弦所對的弧，故若其中一方固定，另一點無論怎麼移動獲利範圍都是一個半圓，則**他們總是均衡**。




**(五)圓形內部2點之均衡點情況：**




**說明:**

分為兩種情形

①兩攤販皆不在圓心上或只有一家攤販在圓心上⇒會有一方一直趨近另外一邊⇒不會均衡。

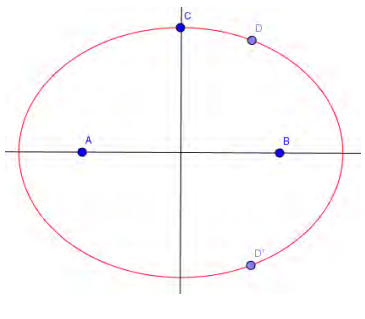
②兩家攤販皆位於圓心上⇒均衡於圓心$(0,0)$

我們知道**通過兩家攤販均衡時重合位置的所有直線，皆須平分廣場面積**

**①正奇數邊形內並不存在一個點，使得通過這個點的所有直線都平分面積⇒不會均衡**

**②正偶數邊形內存在唯一的點，使得通過這個點的所有直線都平分面積，而這個點是此正偶數邊形的正中心⇒重合於中心**

**(六)橢圓上均衡點情況:**




**說明:** 我們欲找到一值$\theta$使其轉動$\varepsilon$後交於$x$軸的正向與負向

**計算:** 利用橢圓參數式$D(a\cos\theta,b\sin\theta)$、$D'(a\cos\theta,-b\sin\theta)$，觀察其獲利面積變化，解得

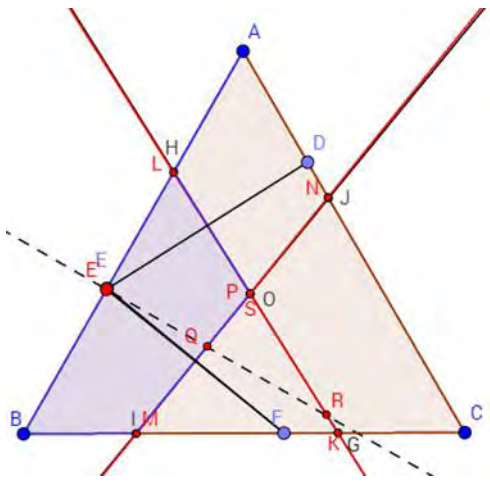
$$x=\frac{c^2(\cos\theta+\cos(\theta+\varepsilon))}{2a}.$$

欲使當$\varepsilon>0$時$x<0$，當$\varepsilon<0$時$x>0$，故我們取當$\theta=\frac{\pi}{2}\vee\frac{3\pi}{2}$，

同理若對稱於$y$軸，可得均衡點為$\theta=\pi\vee 2\pi$

**結論: 橢圓上兩攤販之均衡點為兩攤販在短軸端點或長軸端點時。**

**(七) 正三角形三邊上各一家流動攤販之均衡點位置討論**




利用引理二的想法，可以先將三家攤販發生均衡時的條件寫出。

獲利面積變化$\Delta f_D=(\Delta QMI-\Delta QPS)+(\Delta RSO-\Delta LHR)$

$=\frac{1}{2}(\overline{QM}\times\overline{QI}-\overline{QP}\times\overline{QS})\sin\angle IQM+\frac{1}{2}(\overline{RL}\times\overline{RH}-\overline{RS}\times\overline{RO})\sin\angle LRH$，當$E'$趨近於$E$時，

左式變成$\frac{1}{2}(\overline{QI}^2-\overline{QO}^2)\sin\angle IQM+\frac{1}{2}(\overline{RH}^2-\overline{RO}^2)\sin\angle LRH$

接著利用中垂線性質、相似、正弦定理可將其化簡為$\frac{(\overline{QI}^2-\overline{QO}^2)}{\overline{EQ}}=\frac{(\overline{RH}^2-\overline{RO}^2)}{\overline{ER}}$，

特別地，當三攤販在三邊中點時為均衡。

**(八)凸集簡單封閉曲線上均衡點方法討論:**

若$(x_0,y_0)$是廣場$S$上的一組均衡點，則$(x_0,y_0)$滿足

$$\begin{cases}\frac{\partial f_A(x_0,y_0)}{\partial x}=0\\ \frac{\partial f_B(x_0,y_0)}{\partial y}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{\partial f_A(x_0,y_0)}{\partial x}=0\\ \frac{\partial s}{\partial y}-\frac{\partial f_A(x_0,y_0)}{\partial y}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{\partial f_A(x_0,y_0)}{\partial x}=0\\ \frac{\partial f_A(x_0,y_0)}{\partial y}=0\end{cases}$$

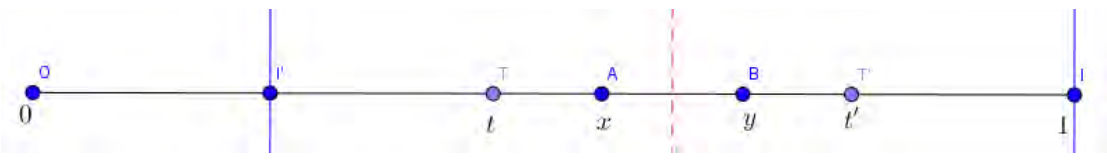
**結論:**找到均衡的方法

1. 計算出同時滿足$\frac{\partial f_A(x,y)}{\partial x}=0,\frac{\partial f_A(x,y)}{\partial y}=0$的解。

2. 利用 geogebra 判斷 1. 所得出得結果是否為局部最大值。

滿足上述條件的值即為均衡。

**(九)加入機率函數之後一維直線上兩家攤販的均衡點分布情形**




**說明:**

若攤販在兩對稱點獲利相同，均衡點就會是$(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$，也就是機率密度函數滿足$P_A(x,y,t)+P_A(x,y,t')=P_B(x,y,t)+P_B(x,y,t')$，

化簡後得$P_A(x,y,t)+P_A(x,y,t')=P_B(x,y,t)+P_B(x,y,t')=2-P_A(x,y,t)+P_A(x,y,t')\Rightarrow P_A(x,y,t)+P_A(x,y,t')=1$，又$t'=x+y-t$

**結論:**因此，機率密度函數$P_A(x,y,t)+P_A(x,y,x+y-t)=1$是均衡點位於$(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$的充分條件($x,y$是攤販的位置，$t$是顧客的位置。)

接著我們想解決如果顧客不是均勻分布時的均衡點情形。若機率函數與攤販位置無關，而只與顧客如何分布有關的話，機率密度函數是有關顧客位置的單變數函數$P(t)$。

寫成數學式表示如下：$\boxed{\exists k\ s.t.\ \int_a^k P(t)dt=\int_k^b P(t)dt\ -\infty\le a\le k\le b\le\infty\text{，則}(k,k)\text{是均衡點。}}$

又常態分布的機率密度函數是只以顧客位置為變數的單變數函數，則攤販$A$的獲利期望值可表示成

$E_A=\int_{-\infty}^k P_A(t)dt=\int_{-\infty}^k\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}dt$.機率密度函數$P(t)$滿足$\int_{-\infty}^{\mu}P(t)dt=\int_{\mu}^{\infty}P(t)dt$ 由上面的結論可知其均衡點在$(\mu,\mu)$。

## 伍、未來展望

1. 在第七個主題討論三家攤販均衡點位置時，我們雖然給出了發生均衡時的條件並猜出一組解，但我們無法確定那組解是否唯一，若採用直角坐標或重心座標解析的方法將各分量都計算出來，計算量太過龐大，我們希望未來能夠找到好的方法來證明滿足均衡條件的配置是否唯一。又三家以上攤販的中垂線不一定交於一點，未來，我們想要探討在$n$邊形上$m$個攤販競爭之均衡情形，攤販的數量增加，其複雜程度相對的提高，希望能解決這個問題。

## 陸、參考資料


1. 2016 年國際科展數學科作品《百動不如一靜－固定策略玩家對奈許均衡的影響》。
2. 史蒂文·泰迪里斯，博弈論導論 p.79-95， 中國人民大學出版社 2015-2-1。
3. 林福來等，高中選修數學上冊甲版教科書，南一書局企業股份有限公司。