中華民國第 57 屆中小學科學展覽會
作品說明書

高級中等學校組　數學科

佳作

050418

再探勾股鐵路網

學校名稱：臺中市立臺中第一高級中等學校

作者：	指導老師：
高一 賴昱維	陳光鴻

關鍵詞：勾股數、最簡真分數、遞迴關係式

摘要

本研究從股差為 1 的素勾股數家族$\{(a_n,b_n,c_n)\}$得到關係式 $\frac{v_n}{u_n}=\frac{1}{2+\frac{v_{n-1}}{u_{n-1}}}$，其中$n,u_n,v_n\in N$, $u_n>v_n,(u_n,v_n)=1,u_n,v_n$為一奇一偶；以不同的 $\frac{v_1}{u_1}$ 代入關係式，迭代產生不同的$\langle\frac{v_n}{u_n}\rangle$，再由$(a_n,b_n,c_n)=({u_n}^2-{v_n}^2,2u_nv_n,{u_n}^2+{v_n}^2)$產生股差為$|{u_1}^2-{v_1}^2-2u_1v_1|$的素勾股數家族；將$(u_n,v_n)$當成平面座標$(x,y)$，則股差為定值的$\{(u_n,v_n)\}$構成平面座標中的「勾股鐵路網」；將$(a_n,b_n,c_n)$當成空間座標$(x,y,z)$，則股差為定值的$\{(a_n,b_n,c_n)\}$構成空間座標中的「勾股鐵路網」；由不同最簡股差的乘積找到另外兩個關係式，由此得到股差為定值的素勾股數家族之不同的$\langle\frac{v_n}{u_n}\rangle$，並由此確認最簡股差為定值的$\langle\frac{v_n}{u_n}\rangle$之條數，進而確認最簡股差為定值的勾股鐵路之條數。

壹、 研究動機

準備全國科展時，我接觸第47屆全國科展高中組數學科第三名的「勾股鐵路網」。作者探討高中課程有關的數列，由整數數列產生股差為定值的素勾股數家族（王重臻〔2〕）。因此，我在科展中以最簡真分數數列產生股差為定值的素勾股數家族。雖然「勾股鐵路網」的作者發現「最簡股差皆可寫成$|8k\pm1|$的形式， $k\in Z$」〔2〕，但是沒有對此提出證明，更無法從正整數直接挑出最簡股差。所以，我在中研院數學傳播季刊的文章中證明「勾股鐵路網」的發現，並提出最簡勾股差判別方法為「最簡股差的所有因數皆可寫成$|8k\pm1|$的形式，$k\in Z$」。基於下列理由，我想要在此次科展中繼續探討「勾股鐵路網」：

一、 我在數學傳播文章中尚未證明最簡股差的判別方法，後來我在張文忠「基礎數論-原理及題解」書中找到證明最簡股差判別方法的一些線索（張文忠〔3〕）。

二、 「勾股鐵路網」作品是藉由其中一條整數數列的衍生數對與構造式，作者找到共軛式與共軛數對，再由共軛數對可產生另一條整數數列，接著藉由不同最簡股差的構造式或共軛式之乘積產生合成最簡股差之構造式，並由此產生合成最簡股差的所有整數數列〔2〕。我想採取比較簡便的方法，利用最簡股差的乘積產生關係式，再將不同最簡股差的最簡真分數分別代入關係式，由此求得各種最簡股差的所有最簡真分數數列。

三、　我發現「勾股鐵路網」作品有座標表示的問題，作者將各種最簡股差的整數數列擺在一起成了「勾股鐵路網」〔2〕，可是在直線座標中這些整數數列並無法呈現數列網的形式(圖1)。因此，我想到平面與空間的方法：將(u_n, v_n)當成平面座標(x, y)，由此建構成平面座標中的「勾股鐵路網」，以及將素勾股數(a_n, b_n, c_n)當成空間座標(x, y, z)，由此構成空間座標中的「勾股鐵路網」。

圖1　第47屆全國科展「勾股鐵路網」的整數數列

貳、　研究目的

一、　證明最簡股差的判別方法。

二、　合成各種股差的最簡真分數數列。

三、　建立平面座標與空間座標中的「勾股鐵路網」。

參、　研究設備及器材

筆、紙、電腦、電子計算機、excel 試算表、GeoGebra

肆、 研究方法與過程

一、 我的研究架構如圖 2 所示。

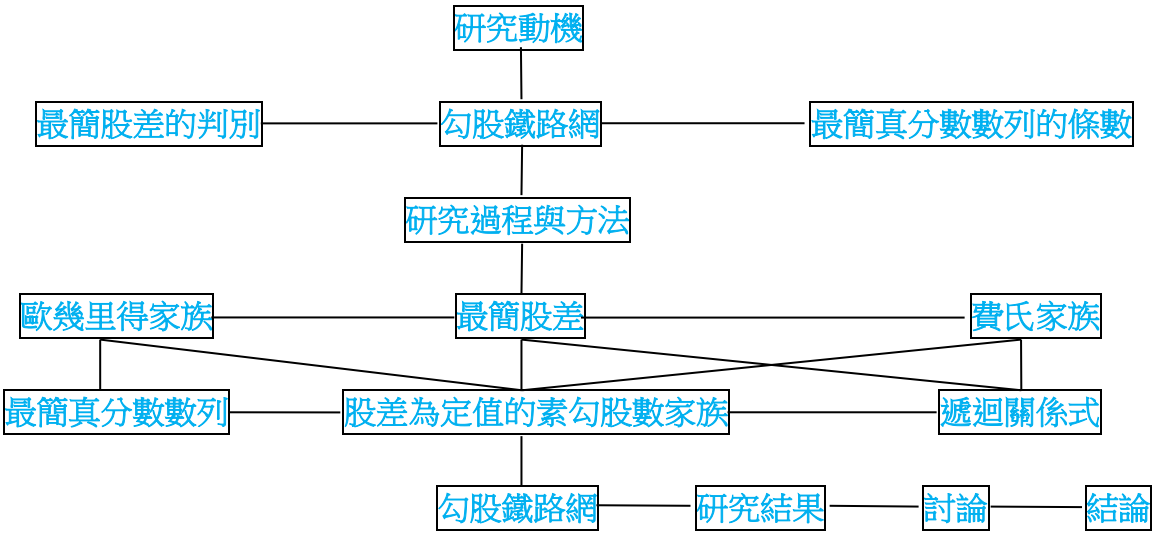

圖 2 我的研究架構圖

二、 名詞定義

(一) 勾股數又名畢氏數，是符合畢氏定理（$a^2+b^2=c^2$）的正整數解(a,b,c)。

(二) 素勾股數又名互質畢氏數，即 (a,b,c)的最大公因數等於 1。

(三) 最簡股差為素勾股數的股差，即$|a-b|$。

(四) 素勾股數家族是由同一生成公式產生的所有素勾股數，表示為$\{(a_n,b_n,c_n)\}$。

三、 文獻探討

(一) 素勾股數家族

1. 最重要的素勾股數家族是**歐幾里得家族**，包括所有素勾股數（蔡聰明〔4〕），如 $(3,4,5),(5,12,13),(7,24,25),(9,40,41),(11,60,61),(13,84,85),\cdots$等，生成公式為：

$$\begin{cases} a_n = {u_n}^2 - {v_n}^2 \\ b_n = 2u_nv_n \\ c_n = {u_n}^2 + {v_n}^2 \end{cases}$$

，其中 $n,u_n,v_n \in N, u_n > v_n, (u_n,v_n)=1, u_n,v_n$為一奇一偶。

證明：(1)將(a_n,b_n,c_n)代入$a^2+b^2=c^2$得 ${a_n}^2+{b_n}^2={c_n}^2$ $\cdots(1)$，式(1)兩邊同除以 ${c_n}^2$ 可得$\left(\frac{a_n}{c_n}\right)^2+\left(\frac{b_n}{c_n}\right)^2=1$ $\cdots(2)$。令$x=\frac{b_n}{c_n}, y=\frac{a_n}{c_n}$代入式(2)，則可得Γ：$x^2$

$+y^2=1$。求Γ在第一象限的有理數點(x,y)，$x,y\in Q$。

⑵令L為通過P(0,1)的直線，可得L：$y+1=kx$（圖 3）。則由Γ與L聯立可得：

$x^2+(kx-1)^2=1$，移項可得$(k^2+1)x^2-2kx=0$，求解可得$x=\frac{2k}{k^2+1}$ 或

$x=0$ （$x=0$ 不合，此即P點）。因此，$(x,y)=\left(\frac{2k}{k^2+1},\frac{k^2-1}{k^2+1}\right)$。

⑶取k為有理數且大於 1 時，求Γ在第一象限的有理數點。

令$k=\frac{u_n}{v_n}$，$n,u_n,v_n\in N$，$u_n>v_n$，$(u_n,v_n)=1$，則$(x,y)=$

$\left(\frac{2u_nv_n}{{u_n}^2+{v_n}^2},\frac{{u_n}^2-{v_n}^2}{{u_n}^2+{v_n}^2}\right)$。

所以$(a_n,b_n,c_n)=({u_n}^2-{v_n}^2,2u_nv_n,{u_n}^2+{v_n}^2)$。但是$u_n,v_n$同時為奇數時，$({u_n}^2-{v_n}^2,2u_nv_n,{u_n}^2+{v_n}^2)$全為偶數，$(a_n,b_n,c_n)$的最大公因數不等於 1，故不合。所以$u_n,v_n$為一奇一偶。因此所有互質畢氏數集合為

$$\begin{cases} a_n={u_n}^2-{v_n}^2 \\ b_n=2u_nv_n \\ c_n={u_n}^2+{v_n}^2 \end{cases}$$，其中$n,u_n,v_n\in N,u_n>v_n,(u_n,v_n)=1,u_n,v_n$為一奇一偶。□

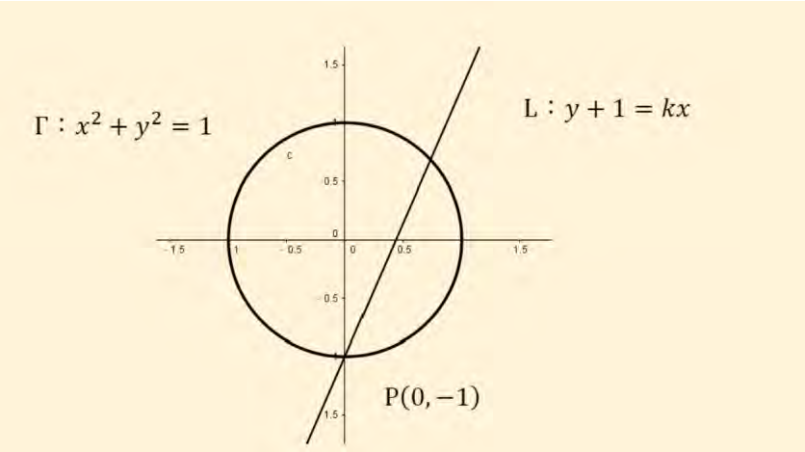

圖 3　Γ：$x^2+y^2=1$與L：$y+1=kx$

2. 最重要的股差為定值之素勾股數家族是**費馬家族**（Price〔5〕），包括(3,4,5),(21,20,29),(119,120,169),(697,696,985),…等，其最簡股差為 1，生成公式為：

$$\begin{cases} a_n={P_{n+1}}^2-{P_n}^2 \\ b_n=2P_{n+1}P_n \\ c_n={P_{n+1}}^2+{P_n}^2 \end{cases}$$，$n\in N,P_{n+1}=2P_n+P_{n-1},P_0=0,P_1=1$。

證明：因為$P_{n+1}=2P_n+P_{n-1}$， $a_n={P_{n+1}}^2-{P_n}^2$，$b_n=2P_{n+1}P_n$，所以

$$|a_n-b_n|=\left|{P_{n+1}}^2-{P_n}^2-2P_{n+1}P_n\right|$$

$$=|(2P_n+P_{n-1})^2-(2P_{n-1}+P_{n-2})^2-2(2P_n+P_{n-1})(2P_{n-1}+P_{n-2})|$$

$$= \left|4{P_n}^2 - 7{P_{n-1}}^2 - {P_{n-2}}^2 - 4P_nP_{n-1} - 6P_{n-1}P_{n-2} - 4P_nP_{n-2}\right|$$

$$= \left|4{P_n}^2 - 7{P_{n-1}}^2 - (P_n - 2P_{n-1})^2 - 4P_nP_{n-1} - 6P_{n-1}(P_n - 2P_{n-1}) - 4P_n(P_n - 2P_{n-1})\right|$$

$$= \left|{P_n}^2 - {P_{n-1}}^2 - 2P_nP_{n-1}\right| = \cdots = \left|{P_3}^2 - {P_2}^2 - 2P_3P_2\right|$$

$$= \left|{P_2}^2 - {P_1}^2 - 2P_2P_1\right| = |2^2 - 1^2 - 2\times2\times1| = 1 \qquad \square$$

(二) 第 47 屆全國科展「勾股鐵路網」科展作品中已得到很好的結果〔2〕，說明如下：

1. 任何股差的素勾股數皆可由衍生數對(m,n)產生數列$\langle S_n\rangle$滿足$S_n + 2S_{n+1} = S_{n+2}$，若取數列中的任兩相鄰項為新衍生數對，則可找到同股差的素勾股數。
2. 觀察最簡股差的規律性並發現凡是最簡股差皆可寫成$|8k \pm 1|$的形式，$k \in Z$。
3. 發現並且證明了最簡股差的乘積必是最簡股差，即定理1。

定理1（王重臻〔2〕）：若$|d_s|$與$|d_t|$最簡股差（且$|d_s|$為質數），則$|d_sd_t|$亦為最簡股差。

說明：(1)先令最簡股差為$|d_s|$與$|d_t|$，且$|d_s|$為質數時，則

$$|d_s| = |a_s - b_s| = |({n_s}^2 - {m_s}^2) - 2n_sm_s| = |(n_s - m_s)^2 - 2{m_s}^2|$$

$$|d_t| = |a_t - b_t| = |({n_t}^2 - {m_t}^2) - 2n_tm_t| = |(n_t - m_t)^2 - 2{m_t}^2|$$

(2)再令$\Delta m_s = n_s - m_s$，$\Delta m_t = n_t - m_t$，則

$$|d_s| = \left|\Delta{m_s}^2 - 2{m_s}^2\right| = \left(\Delta m_s + m_s\sqrt{2}\right)\left|\Delta m_s - m_s\sqrt{2}\right|$$

$$|d_t| = \left|\Delta{m_t}^2 - 2{m_t}^2\right| = \left(\Delta m_t + m_t\sqrt{2}\right)\left|\Delta m_t - m_t\sqrt{2}\right|$$

(3)$$|d_sd_t| = \left|\Delta{m_s}^2 - 2{m_s}^2\right|\left|\Delta{m_t}^2 - 2{m_t}^2\right|$$

$$= \left[\left(\Delta m_s + m_s\sqrt{2}\right)\left|\Delta m_s - m_s\sqrt{2}\right|\right]\left[\left(\Delta m_t + m_t\sqrt{2}\right)\left|\Delta m_t - m_t\sqrt{2}\right|\right]$$

$$= \left(\Delta m_s + m_s\sqrt{2}\right)\left(\Delta m_t + m_t\sqrt{2}\right)\left|\Delta m_s - m_s\sqrt{2}\right|\left|\Delta m_t - m_t\sqrt{2}\right|$$

$$= \left[(\Delta m_s\Delta m_t + 2m_sm_t) + (m_s\Delta m_t + m_t\Delta m_s)\sqrt{2}\right]\left|(\Delta m_s\Delta m_t + 2m_sm_t) - (m_s\Delta m_t + m_t\Delta m_s)\sqrt{2}\right|$$

$$= \left|(\Delta m_s\Delta m_t + 2m_sm_t)^2 - 2(m_s\Delta m_t + m_t\Delta m_s)^2\right|$$

4. 對於兩組已知股差的素勾股數的衍生數對(m_1,n_1)與(m_2,n_2)，可轉換成構造式$\Delta m_1 + m_1\sqrt{2}$與$\Delta m_2 + m_2\sqrt{2}$（其中$\Delta m_1 = n_1 - m_1$與$\Delta m_2 = n_2 - m_2$）。藉由合成法則$\left(\Delta m_1 + m_1\sqrt{2}\right)\left(\Delta m_2 + m_2\sqrt{2}\right)$，展開後得到新股差為原兩股差之乘積的構造式。

5. 對於一個股差非1的素勾股數，若將衍生數對(m,n)轉換成共軛式$\Delta m+m\sqrt{2}$ 的形式，則我們可以藉由此構造式之共軛式（$-\Delta m+m\sqrt{2}$與$\Delta m-m\sqrt{2}$之值為正數者）轉回的衍生數對再產生一條數列，進而產生更多的素勾股數，且這兩條數列是不同的數列。
6. 當股差為質數時，會有2條衍生數列，若最簡勾股三角形的股差為N個股差為質數之冪次方乘積時，則至少有2^{N}條衍生數列。

(三) 第 47 屆全國科展「勾股鐵路網」科展作品中仍有尚未解決的問題〔2〕，說明如下：

1. 尚未證明凡是最簡股差皆可寫成$|8k\pm1|$的形式，$k\in Z$。
2. 已證得：若已知的兩組素勾股數中其中有一的股差為質數，能找到股差為原兩組股差之積的素勾股數。然而，希望能夠證得若沒有質數的限制亦成立。
3. 對於任一質數的股差，由部份實測發現，皆存在兩條數列(互為共軛)，希望能夠解決此一問題。另外，對於質數股差的個數，是否為無窮多個？
4. 無法由正整數直接挑出最簡股差（圖4）。

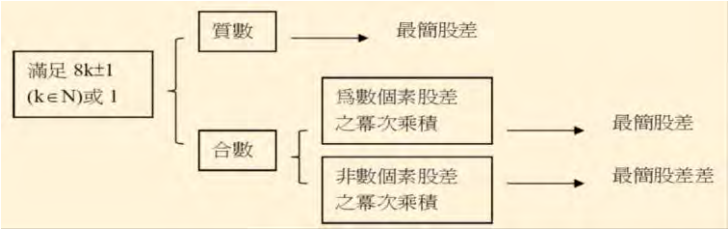

圖4　第47屆全國科展「勾股鐵路網」的最簡股差

5. 希望能將其推廣至夾角非90 度之三角形，探討其夾角兩邊的差與整數邊長之關係。例如：當夾角為$\cos^{-1}\frac{1}{3}$ 時，將找到的對邊畫成圖形，則會成為一類似指數函數的圖形，夾邊差似乎可寫成$12k\pm1$ 的形式，且11 為夾邊差，13 為夾邊差，143 及121 亦為其夾邊差。

四、 最簡股差的判別

(一)第 47 屆全國科展「勾股鐵路網」雖然提出「最簡股差皆可寫成$|8k \pm 1|$的形式」，卻未提出證明〔2〕，因此我由$|a_n - b_n| = |{u_n}^2 - {v_n}^2 - 2u_n v_n|$證明定理 2。

定理 2：最簡股差皆可寫成$|8k \pm 1|$的形式，其中 $k \in Z$。

證明：由於$|{u_n}^2 - {v_n}^2 - 2u_n v_n| = |(u_n - v_n)^2 - 2{v_n}^2|$，且$u_n$與$v_n$為一奇一偶，

即$(u_n - v_n)$為奇數，分別探討v_n的奇偶性：

(1)當 v_n 為奇數時，令$v_n = 2s - 1$，$u_n - v_n = 2t - 1$，$s, t \in N$，則

$$|a_n - b_n| = |(u_n - v_n)^2 - 2{v_n}^2| = |(2t-1)^2 - 2(2s-1)^2|$$

$$= |4t^2 - 4t + 1 - 8s^2 + 8s - 2| = |4t(t-1) - 8s(s-1) - 1|$$

由於$(t-1)$與t為連續整數，所以$(t-1)$與t為一奇一偶，

因此令$4t(t-1) - 8s(s-1) = 8k$，$k \in Z$，

則 $|a_n - b_n| = |4t(t-1) - 8s(s-1) - 1| = |8k - 1|$

(2)當v_n為偶數時，令$v_n = 2s$，$(u_n - v_n) = 2t - 1$，$s, t \in N$，則

$$|a_n - b_n| = |(u_n - v_n)^2 - 2{v_n}^2| = |(2t-1)^2 - 2(2s)^2|$$

$$= |4t^2 - 4t + 1 - 8s^2| = |4t(t-1) - 8s^2 + 1|$$

由於$(t-1)$與t為連續整數，所以$(t-1)$與t為一奇一偶，

因此令$4t(t-1) - 8s^2 = 8k$，$k \in Z$，

則 $|a_n - b_n| = |4t(t-1) - 8s^2 + 1| = |8k + 1|$ □

(二)我在定理 3 證明$|8k \pm 1|$的所有質因數有$|8l \pm 1|$或$|8l \pm 3|$的形式。

定理 3：$|8k \pm 1|$的所有質因數只可寫成$|8l \pm 1|$或$|8l \pm 3|$的形式，其中 $k, l \in Z$。

證明：(1)由於所有正整數可分成$|8l \pm 3|, |8l \pm 2|, |8l \pm 1|, |8l|, |8l + 4|$，$\forall\ l \in Z$。

(2)由於$|8l \pm 2|, |8l|$與$|8l + 4|$為偶數，可是$|8k \pm 1|$為奇數，$k \in Z$，所以$|8k \pm 1|$的質因數不可寫成$|8l \pm 2|, |8l|, |8l + 4|$的形式。

(3)取$|8l \pm 3|$ 中任兩數相乘所得的數皆可寫成$|8k \pm 1|$的形式，$p, q \in Z$：

①$|8p - 3||8q - 3| = |64pq - 24p - 24q + 9| = |8(8pq - 3p - 3q + 1) + 1|$

②$|8p - 3||8q + 3| = |64pq + 24p - 24q - 9| = |8(8pq + 3p - 3q - 1) - 1|$

③$|8p + 3||8q + 3| = |64pq + 24p + 24q + 9| = |8(8pq + 3p + 3q + 1) + 1|$

因此，$|8k \pm 1|$的質因數可能存在$|8l \pm 3|$的形式。

⑷取$|8l \pm 1|$ 中任兩數相乘所得的數皆可寫成$|8k \pm 1|$的形式，$p, q \in Z$：

①$|8p-1||8q-1| = |64pq - 8p - 8q + 1| = |8(8pq - p - q) + 1|$

②$|8p-1||8q+1| = |64pq + 8p - 8q - 1| = |8(8pq + p - q) - 1|$

③$|8p+1||8q+1| = |64pq + 8p + 8q + 1| = |8(8pq + p + q) + 1|$

因此，$|8k \pm 1|$的質因數可能存在$|8l \pm 1|$的形式。 □

(三)由表 1，我發現當$|8k \pm 1|$是最簡股差時，則此時的$|8k \pm 1|$的所有因數皆可寫成$|8l \pm 1|$的形式：①最簡股差為 1 時，1 可寫成$|8\times 0 \pm 1|$的形式。②最簡股差為質數時，此質數可寫成$|8l \pm 1|$的形式，如 7,17,23,41,47,⋯等。③最簡股差為合數時，此合數的所有因數皆可寫成$|8l \pm 1|$的形式，如 49,119,161,217,287,⋯等。但是，當$|8k \pm 1|$不是最簡股差時，則此數有$|8l \pm 3|$的因數，如 9,15,25,33,39,⋯等。

表 1

$\|8k \pm 1\|$		因數形式	最簡股差
1		$\|8l \pm 1\|$	是
7,17,23,31,41,47,71,73,⋯	質數	$\|8l \pm 1\|$	是
49,119,161,217,287,289,⋯	合數	$\|8l \pm 1\|$	是
9,15,25,33,39,55,57,63,⋯	合數	$\|8l \pm 1\|$ 與$\|8l \pm 3\|$	否

(四)在張文忠「基礎數論-原理及題解」二次剩餘章節中找到最簡股差判別方法的證明線索：勒讓德符號（Legendre symbol）的定義 1、定理 5 與定理 6。其中，定理 6 即二次互反律第二補充（The second supplement to the law of quadratic reciprocity）〔3〕。

定義 1（張文忠〔3〕，定義 2）：$\left(\frac{a}{p}\right)$ 是一個對於給定的奇質數p，定義在一切與p互質的整數a上的函數，其值為$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 1 & \text{若是}a\text{模}p\text{的二次剩餘} \\ -1 & \text{若是}a\text{模}p\text{的二次非剩餘} \end{cases}$

定理 4（張文忠〔3〕，定理 5）：對於奇質數p而言，$\left(\frac{a}{p}\right)$是一個完全積性函數，即$a = a_1 a_2 \cdots a_n$時，有 $\left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{a_1}{p}\right)\left(\frac{a_2}{p}\right)\cdots\left(\frac{a_n}{p}\right)$。

定理 5（張文忠〔3〕，定理 6）：對整數k而言，對於奇質數p有

$$\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}} = \begin{cases} 1 & p = 8k \pm 1 \\ -1 & p = 8k \pm 3 \end{cases}$$

(五) 由二次剩餘的概念，我由定理 6 證明最簡股差的所有質因數不可寫成$|8l \pm 3|$的形式，其中 $l \in Z$；由定理 7 證明最簡股差的所有質因數皆可寫成$|8l \pm 1|$的形式，其中 $l \in Z$；由定理 8 證明最簡股差的判別方法：當一正整數的所有因數皆可寫成$|8l \pm 1|$的形式（其中 $l \in Z$），則此正整數為最簡股差。

定理 6：最簡股差的所有質因數不可寫成$|8l \pm 3|$的形式，其中 $l \in N$。

證明：(1)由定理 2 可得$|a_n - b_n| = |(u_n - v_n)^2 - 2{v_n}^2| = |8k \pm 1|$。

(2)假設$|8k \pm 1|$的質因數可寫成$|8l \pm 3|$的形式，則由定理 4 可得$\left(\frac{2}{|8l \pm 3|}\right) = 1$。

(3)因為$|8l \pm 3|$為質數，所以由定理 5 可得$\left(\frac{2}{|8l \pm 3|}\right) = -1$。因此與(2)矛盾。所以證得當最簡股差的質因數不可寫成$|8l \pm 3|$的形式，其中 $l \in Z$。 □

定理 7：最簡股差的所有質因數皆可寫成$|8l \pm 1|$的形式，其中 $l \in Z$。

證明：(1)由定理 2 得知最簡股差皆可寫成$|8k \pm 1|$的形式。

(2)由定理 3 得知$|8k \pm 1|$的所有質因數只可寫成$|8l \pm 1|$或$|8l \pm 3|$的形式。

(3)由定理 6 得知最簡股差的所有質因數不可寫成$|8l \pm 3|$的形式。

因此，由(1)至(3)可得最簡股差的所有質因數皆可寫成$|8l \pm 1|$的形式，其中 $l \in Z$。

定理 8：當一正整數的所有質因數皆可寫成$|8l \pm 1|$的形式（其中 $l \in Z$）時，則此正整數為最簡股差。

證明：(1)當 $l = 0$使得$|8l \pm 1| = 1$時，則由費氏家族可知 1 為最簡股差。

(2)當$|8l \pm 1|$為質數時，則$|8l \pm 1|$為最簡股差。理由如下：

①由歐幾里得家族得知存在$m, u_m, v_m \in N, u_m > v_m, (u_m, v_m) = 1$且$u_m, v_m$為一奇一偶，使得$|a_m - b_m| = |(u_m - v_m)^2 - 2{v_m}^2|$為質數。因此，也存在$p \in Z$ 使得$|a_m - b_m| = |8p \pm 1|$為質數。

②當$|8l \pm 1|$ 為質數時，由定理 5 得到 $\left(\frac{2}{|8l \pm 1|}\right) = 1$，所以由二次剩餘可知$(u_m - v_m)^2 \equiv 2{v_m}^2 (\mathrm{mod}|8l \pm 1|)$。因此$|8l \pm 1|$整除$|(u_m - v_m)^2 - 2{v_m}^2|$。

③由①與②可知$|8l \pm 1|$為$|8p \pm 1|$的質因數，由於$|8l \pm 1|$與$|8p \pm 1|$皆為質數，所以$|8l \pm 1| = |8p \pm 1|$為最簡股差。

⑶由⑵可知當$|8l \pm 1|$為質數時，則$|8l \pm 1|$為最簡股差。再由定理 1 得知最簡股差的乘積仍為最簡股差。因此存在一合數的所有質因數皆可寫成$|8l \pm 1|$的形式時，則此合數為最簡股差。 □

五、 最簡真分數數列的條數

(一)最簡真分數數列

1. 因為**歐幾里得家族**生成公式中$(u_n, v_n) = 1$且$u_n > v_n$，所以$\frac{v_n}{u_n}$是最簡真分數。因此**歐幾里得家族的最簡真分數數列**可表示為$\langle \frac{v_n}{u_n} \rangle : \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{2}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{6}, \frac{5}{6}, \cdots, \frac{v_n}{u_n}$。數列中每一項最簡真分數都以一對一的方式對應著每一組素勾股數（表 2）。

表 2

$\frac{v_n}{u_n}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$
(a_n, b_n, c_n)	$(3,4,5)$	$(5,12,13)$	$(15,8,17)$	$(7,24,25)$	$(21,20,29)$	$(9,40,41)$	$(35,12,37)$	$(11,60,61)$

2. 由於歐幾里得家族中每一組素勾股數的$|a_n - b_n| = |{u_n}^2 - {v_n}^2 - 2u_n v_n|$，所以我將$\frac{v_n}{u_n}$與最簡股差對應關係整理如表 3。

表 3

$\frac{v_n}{u_n}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$
股差	1	7	7	17	1	31	23	49	17	23	71	47	7	41	97	41	7
$\frac{v_n}{u_n}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{2}{11}$	$\frac{4}{11}$	$\frac{6}{11}$	$\frac{8}{11}$	$\frac{10}{11}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{11}{12}$	$\frac{2}{13}$	$\frac{4}{13}$	$\frac{6}{13}$
股差	127	79	31	89	161	73	17	47	119	199	119	1	73	241	113	49	23
$\frac{v_n}{u_n}$	$\frac{8}{13}$	$\frac{10}{13}$	$\frac{12}{13}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{9}{14}$	$\frac{11}{14}$	$\frac{13}{14}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{14}{15}$	……			
股差	103	191	287	167	103	31	137	233	337	161	89	79	391	……			

(二)關係式(1)

1. 若$u_n = P_{n+1}$，$v_n = P_n$且$P_{n+1} = 2P_n + P_{n-1}$，$P_0 = 0, P_1 = 1$，則由歐幾里得家族產生費氏家族。此時，由費氏家族可得到關係式(1)。

$$\frac{v_n}{u_n} = \frac{1}{2 + \frac{v_{n-1}}{u_{n-1}}}$$ **關係式(1)**

證明：因為 $\frac{v_n}{u_n} = \frac{P_n}{P_{n+1}}$，所以 $\frac{u_n}{v_n} - \frac{v_{n-1}}{u_{n-1}} = \frac{P_{n+1}}{P_n} - \frac{P_{n-1}}{P_n} = \frac{2P_n + P_{n-1}}{P_n} - \frac{P_{n-1}}{P_n} = \frac{2P_n}{P_n} = 2$，

由此可推得 $\frac{u_n}{v_n} = 2 + \frac{v_{n-1}}{u_{n-1}}$，再取倒式得 $\frac{v_n}{u_n} = \frac{1}{2+\frac{v_{n-1}}{u_{n-1}}}$。

2. 費馬家族的最簡真分數數列就是將歐幾里得家族第一項的最簡真分數$\frac{1}{2}$當作$\frac{v_1}{u_1}$，並代入關係式(1) $\frac{v_n}{u_n} = \frac{1}{2+\frac{v_{n-1}}{u_{n-1}}}$迭代產生$\langle\frac{P_n}{P_{n+1}}\rangle$。

說明：(1)由$\frac{v_1}{u_1} = \frac{1}{2}$ 可得$u_1 = 2 = 2P_1 + P_0 = P_2$，$v_2 = 1 = P_1$。

(2)由關係式(1)可得$\frac{v_2}{u_2} = \frac{1}{2+\frac{v_1}{u_1}} = \frac{1}{2+\frac{1}{2}} = \frac{2}{5}$，因此$u_2 = 5 = 2P_2 + P_1 = P_3$，$v_2 = 2 = P_2$。

(3)由關係式(1)可得$\frac{v_3}{u_3} = \frac{1}{2+\frac{v_2}{u_2}} = \frac{1}{2+\frac{2}{5}} = \frac{5}{12}$，因此$u_3 = 12 = 2P_3 + P_2 = P_4$，$v_3 = 5 = P_3$。

(4)同理，由關係式(1)可遞推得 $u_{n-1} = 2P_{n-1} + P_{n-2} = P_n$，$v_{n-1} = P_{n-1}$。

(5)由(4)可得$\frac{v_n}{u_n} = \frac{1}{2+\frac{P_{n-1}}{P_n}} = \frac{P_n}{2P_n + P_{n-1}}$，因此$u_n = 2P_n + P_{n-1} = P_{n+1}$，$v_n = P_n$。

(6)所以由(5)可得$\langle\frac{v_n}{u_n}\rangle = \langle\frac{P_n}{P_{n+1}}\rangle$。

(三)股差為$|u_1{}^2 - v_1{}^2 - 2u_1v_1|$的素勾股數家族

我將歐幾里得家族中任一個最簡真分數分別當作$\frac{v_1}{u_1}$，並代入關係式(1)，由此產生的$\frac{v_n}{u_n}$皆為歐幾里得家族的最簡真分數，即定理 9。再由定理 10 的方法求得股差為定值（$|u_1{}^2 - v_1{}^2 - 2u_1v_1|$）的素勾股數家族。

定理 9：當$\frac{v_n}{u_n} = \frac{1}{2+\frac{v_{n-1}}{u_{n-1}}}$ ，$u_1, v_1 \in N, u_1 > v_1, (u_1, v_1) = 1$且 u_1, v_1為一奇一偶，則$\langle\frac{v_n}{u_n}\rangle$符合 $n, u_n, v_n \in N, u_n > v_n, (u_n, v_n) = 1, u_n, v_n$為一奇一偶。

證明：(1)因為 $u_1 > v_1, (u_1, v_1) = 1$且$u_1, v_1$為一奇一偶，所以 $2u_1 + v_1 > u_1$,

$(2u_1+v_1,u_1)=1$且$2u_1+v_1,u_1$為一奇一偶，因此由$\frac{v_2}{u_2}=\frac{1}{2+\frac{v_1}{u_1}}=\frac{u_1}{2u_1+v_1}$可得

$u_2=2u_1+v_1$，$v_2=u_1$，因此$u_2>v_2,(u_2,v_2)=1$且u_2,v_2為一奇一偶。

(2)因為$u_2>v_2,(u_2,v_2)=1$且u_2,v_2為一奇一偶，所以 $2u_2+v_2>u_2$,

$(2u_2+v_2,u_2)=1$且$2u_2+v_2,u_2$為一奇一偶，因此由$\frac{v_3}{u_3}=\frac{1}{2+\frac{v_2}{u_2}}=\frac{u_2}{2u_2+v_2}$可得

$u_3=2u_2+v_2$，$v_3=u_2$，因此$u_3>v_3,(u_3,v_3)=1$且u_3,v_3為一奇一偶。

(3)同理可推得$u_{n-1}>v_{n-1},(u_{n-1},v_{n-1})=1$且$u_{n-1},v_{n-1}$為一奇一偶，所以

$(2u_{n-1}+v_{n-1})>u_{n-1},(2u_{n-1}+v_{n-1},u_{n-1})=1$且$2u_{n-1}+v_{n-1},u_{n-1}$為一奇一偶，因此由$\frac{v_n}{u_n}=\frac{1}{2+\frac{v_{n-1}}{u_{n-1}}}=\frac{u_{n-1}}{2u_{n-1}+v_{n-1}}$ 可得 $u_n=2u_{n-1}+v_{n-1}$，$v_n=u_{n-1}$，因此$u_n>v_n,(u_n,v_n)=1$且u_n,v_n為一奇一偶。 □

定理 10：當$(a_n,b_n,c_n)=(u_n{}^2-v_n{}^2,2u_nv_n,u_n{}^2+v_n{}^2),\frac{v_n}{u_n}=\frac{1}{2+\frac{v_{n-1}}{u_{n-1}}},n,u_1,v_1\in N$, $u_1>v_1$，$(u_1,v_1)=1$，u_1,v_1為一奇一偶，則$|a_n-b_n|=|u_1{}^2-v_1{}^2-2u_1v_1|$。

證明：由定理 9 的證明得知：$u_n=2u_{n-1}+v_{n-1}$，$v_n=u_{n-1}$，

即 $u_n=2u_{n-1}+v_{n-1}$，$v_n=2u_{n-2}+v_{n-2}$，所以

$$|a_n-b_n|=|u_n{}^2-v_n{}^2-2u_nv_n|$$

$$=|(2u_{n-1}+v_{n-1})^2-u_{n-1}{}^2-2(2u_{n-1}+v_{n-1})u_{n-1}|$$

$$=|-u_{n-1}{}^2+v_{n-1}{}^2+2u_{n-1}v_{n-1}|=|u_{n-1}{}^2-v_{n-1}{}^2-2u_{n-1}v_{n-1}|$$

$$=|a_{n-1}-b_{n-1}|=|a_{n-2}-b_{n-2}|=\cdots=|a_2-b_2|=|a_1-b_1|$$

$$=|u_1{}^2-v_1{}^2-2u_1v_1|$$ □

(四)關係式(2)與(3)

由定理 1 得知最簡股差的乘積仍是最簡股差，由此我得到關係式(2)與(3)。此時，將歐幾里得家族中任兩個最簡真分數代入關係式(2)與(3)求得合成股差的最簡真分數數列。

1. 當n,u_s,v_s,u_t,v_t ,$u_r,v_r\in N,u_s>v_s,u_t>v_t,u_r>v_r,(u_s,v_s)=1,(u_t,v_t)=1,(u_r,v_r)=1,u_s,v_s$為一奇一偶，$u_t,v_t$為一奇一偶，$u_r,v_r$為一奇一偶時，我由$|u_r{}^2-v_r{}^2-2u_rv_r|=|u_s{}^2-v_s{}^2-2u_sv_s|$ $|u_t{}^2-v_t{}^2-2u_tv_t|$得到關係式(2)。

$$\frac{v_r}{u_r}=\frac{\frac{v_s}{u_s}+\frac{v_t}{u_t}-2\left(\frac{v_s}{u_s}\right)\left(\frac{v_t}{u_t}\right)}{1+\left(\frac{v_s}{u_s}\right)\left(\frac{v_t}{u_t}\right)}$$ 關係式(2)

證明： $|u_r{}^2-v_r{}^2-2u_rv_r|$

$=|(u_r-v_r)^2-2v_r{}^2|$

$=|u_s{}^2-v_s{}^2-2u_sv_s||u_t{}^2-v_t{}^2-2u_tv_t|$

$=|(u_s-v_s)^2-2v_s{}^2||(u_t-v_t)^2-2v_t{}^2|$

$=|[(u_s-v_s)(u_t-v_t)+2v_sv_t]^2-2[v_s(u_t-v_t)+v_t(u_s-v_s)]^2|$

取$\begin{cases} u_r-v_r=(u_s-v_s)(u_t-v_t)+2v_sv_t \\ v_r=v_s(u_t-v_t)+v_t(u_s-v_s) \end{cases}$，

移項得到$\begin{cases} u_r=(u_r-v_r)+v_r=u_su_t+v_sv_t \\ v_r=u_tv_s+u_sv_t-2v_sv_t \end{cases}$，

所以$\frac{v_r}{u_r}=\frac{\frac{v_s}{u_s}+\frac{v_t}{u_t}-2\left(\frac{v_s}{u_s}\right)\left(\frac{v_t}{u_t}\right)}{1+\left(\frac{v_s}{u_s}\right)\left(\frac{v_t}{u_t}\right)}$ □

2. 當n,u_s,v_s,u_t,v_t ,$u_r,v_r\in N,u_s>v_s,u_t>v_t,u_r>v_r,(u_s,v_s)=1,(u_t,v_t)=1,$ $(u_r,v_r)=1,u_s,v_s$為一奇一偶，u_t,v_t為一奇一偶，u_r,v_r為一奇一偶時，我由 $|u_r{}^2-v_r{}^2-2u_rv_r|=|u_s{}^2-v_s{}^2-2u_sv_s|\ |u_t{}^2-v_t{}^2-2u_tv_t|$得到關係式(3)。

$$\frac{v_r}{u_r}=\frac{\left|\frac{v_s}{u_s}-\frac{v_t}{u_t}\right|}{\left|1-\frac{v_s}{u_s}-\frac{v_t}{u_t}-\left(\frac{v_s}{u_s}\right)\left(\frac{v_t}{u_t}\right)\right|+\left|\frac{v_s}{u_s}-\frac{v_t}{u_t}\right|}$$ 關係式(3)

證明： $|u_r{}^2-v_r{}^2-2u_rv_r|$

$=|(u_r-v_r)^2-2v_r{}^2|$

$=|u_s{}^2-v_s{}^2-2u_sv_s||u_t{}^2-v_t{}^2-2u_tv_t|$

$=|(u_s-v_s)^2-2v_s{}^2||(u_t-v_t)^2-2v_t{}^2|$

$=|[(u_s-v_s)(u_t-v_t)-2v_sv_t]^2-2[v_s(u_t-v_t)-v_t(u_s-v_s)]^2|$

取$\begin{cases} u_r-v_r=|(u_s-v_s)(u_t-v_t)-2v_sv_t|=|u_su_t-u_sv_t-u_tv_s-v_sv_t| \\ v_r=|v_s(u_t-v_t)-v_t(u_s-v_s)|\ =|u_tv_s-u_sv_t| \end{cases}$，

移項得到$\begin{cases} u_r=|u_su_t-u_sv_t-u_tv_s+v_sv_t|+|u_tv_s-u_sv_t| \\ v_r=|u_tv_s-u_sv_t| \end{cases}$，

所以$\frac{v_r}{u_r}=\frac{\left|\frac{v_s}{u_s}-\frac{v_t}{u_t}\right|}{\left|1-\frac{v_s}{u_s}-\frac{v_t}{u_t}-\left(\frac{v_s}{u_s}\right)\left(\frac{v_t}{u_t}\right)\right|+\left|\frac{v_s}{u_s}-\frac{v_t}{u_t}\right|}$ □

(五) 各種股差的最簡真分數數列

由於最簡股差可分別為 1，質數，或為合數，因此取各種最簡股差中任兩個最簡真分數，然後代入關係式(2)與(3)求得合成股差的最簡真分數數列。

1. 最簡股差為1的最簡真分數數列

費馬家族的最簡股差為 1 ，費馬家族的最簡真分數數列就是以$\frac{v_1}{u_1}=\frac{1}{2}$代入關係式(1)迭代產生$\langle\frac{v_n}{u_n}\rangle$為$\frac{1}{2},\frac{2}{5},\frac{5}{12},\frac{12}{29},\frac{29}{70},\cdots$，我稱此$\langle\frac{v_n}{u_n}\rangle$為1A數列。

若取 1A 數列中任兩項最簡真分數分別當作$\frac{v_s}{u_s}$與$\frac{v_t}{u_t}$，再由關係式(2)與(3)所求得的$\frac{v_r}{u_r}$仍然是1A數列中某一項最簡真分數。因此，由關係式(2)與(3)只求得一條數列，即1A數列，我並沒找到第二條存在關係式(1)的數列（表 4）。

表 4

	遞迴關係式(2)							遞迴關係式(3)						
$\frac{v_s}{u_s}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{12}$
$\frac{v_t}{u_t}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{12}{29}$	$\frac{29}{70}$	$\frac{12}{29}$	$\frac{29}{70}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{12}{29}$	$\frac{29}{70}$	$\frac{12}{29}$	$\frac{29}{70}$
$\frac{v_r}{u_r}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{12}{29}$	$\frac{29}{70}$	$\frac{70}{169}$	$\frac{169}{408}$	$\frac{169}{408}$	$\frac{408}{985}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$

2. 最簡股差為質數的最簡真分數數列

取表 2 中的最簡股差為7,17,23,31, 41與47等質數的最簡真分數，再由遞迴關係式(1)產生下列的數列，我可發現這些最簡股差皆有兩條數列，命名如下：

最簡股差7：$\frac{2}{3},\frac{3}{8},\frac{8}{19},\frac{19}{46},\frac{46}{111},\cdots$稱為7A數列， $\frac{1}{4},\frac{4}{9},\frac{9}{22},\frac{22}{53},\frac{53}{128},\cdots$稱為7B數列，

最簡股差17：$\frac{3}{4},\frac{4}{11},\frac{11}{26},\frac{26}{63},\frac{63}{152},\cdots$稱為17A數列， $\frac{2}{7},\frac{7}{16},\frac{16}{39},\frac{39}{94},\frac{94}{227},\cdots$稱為17B數列，

最簡股差23： $\frac{1}{6},\frac{6}{13},\frac{13}{32},\frac{32}{77},\frac{77}{186},\cdots$稱為23A數列， $\frac{4}{7},\frac{7}{18},\frac{18}{43},\frac{43}{104},\frac{104}{251},\cdots$稱為23B數列，

最簡股差31：$\frac{4}{5},\frac{5}{14},\frac{14}{33},\frac{33}{80},\frac{80}{193},\cdots$稱為31A數列， $\frac{3}{10},\frac{10}{23},\frac{23}{56},\frac{56}{135},\frac{135}{326},\cdots$ 稱為31B數列，

最簡股差41：$\frac{5}{8},\frac{8}{21},\frac{21}{50},\frac{50}{121},\frac{121}{292},\cdots$稱為41A數列， $\frac{2}{9},\frac{9}{20},\frac{20}{49},\frac{49}{118},\frac{118}{285},\cdots$ 稱為41B數列，

最簡股差47：$\frac{1}{8},\frac{8}{17},\frac{17}{42},\frac{42}{101},\frac{101}{244},\cdots$稱為47A數列， $\frac{6}{11},\frac{11}{28},\frac{28}{67},\frac{67}{162},\frac{162}{391},\cdots$ 稱為47A數列。

令q為7,17,23,31,41,47的任一數，則最簡股差為 q 皆有兩條存在關係式(1)的數列，即qA與qB數列。若取最簡股差為1的 1A 數列中任一項最簡真分數當作$\frac{v_s}{u_s}$，再取qA數列中任一項最簡真分數當作$\frac{v_t}{u_t}$，由關係式(2)所求得的 $\frac{v_r}{u_r}$ 仍是qA數列中某一項之最簡真分數；若取最簡股差為1的 1A 數列中任一項最簡真分數當作$\frac{v_s}{u_s}$，再取qB數列之任一項最簡真分數當作$\frac{v_t}{u_t}$，由關係式(2)所求得的 $\frac{v_r}{u_r}$ 仍是qB數列中某一項之最簡真分數；若取最簡股差為1的 1A 數列中任一項最簡真分數當作$\frac{v_s}{u_s}$，再取qA數列或qB數列之任一項最簡真分數當作$\frac{v_t}{u_t}$，由關係式(3)所求得的$\frac{v_r}{u_r}$是qA數列或qB數列中某一項之最簡真分數。因此，並沒找到第三條存在關係式(1)的數列（表 5）。

將最簡股差延伸為質數p且可寫成$|8k \pm 1|$的形式時，如表 5 的方法，由關係式(2)與(3)只求得pA數列與pB數列，無法找到第三條存在關係式(1)的數列。

表 5

	遞迴關係式(2)									
$\frac{v_s}{u_s}$	1A	1A	1A	1A	1A	1A	1A	1A	1A	1A
$\frac{v_t}{u_t}$	7A	7B	17A	17B	23A	23B	31A	31B	47A	47B
$\frac{v_r}{u_r}$	7A	7B	17A	17B	23A	23B	31A	31B	47A	47B
	遞迴關係式(3)									
$\frac{v_s}{u_s}$	1A	1A	1A	1A	1A	1A	1A	1A	1A	1A
$\frac{v_t}{u_t}$	7A	7B	17A	17B	23A	23B	31A	31B	47A	47B
$\frac{v_r}{u_r}$	7A 7B	7A 7B	17A 17B	17A 17B	23A 23B	23A 23B	31A 31B	31A 31B	47A 47B	47A 47B

3. 最簡股差為合數的最簡真分數數列

(1)同一最簡股差（質數）的冪次方

當最簡股差為質數p且可寫成$|8k \pm 1|$的形式時，如表 6 的方法，我由p^{n-m}A

數列，p^{n-m}B數列，p^{m}A數列與p^{m}B數列以關係式(2)與(3)求得p^{n}A數列與p^{n}B數列，無法找到第三條存在關係式(1)的數列，其中 $m,n \in N, n>m$。

表 6

	遞迴關係式(2)				遞迴關係式(3)			
$\frac{v_s}{u_s}$	p^{n-m}A	p^{n-m}A	p^{n-m}B	p^{n-m}B	p^{n-m}A	p^{n-m}A	p^{n-m}B	p^{n-m}B
$\frac{v_t}{u_t}$	p^{m}A	p^{m}B	p^{m}A	p^{m}B	p^{m}A	p^{m}B	p^{m}A	p^{m}B
$\frac{v_r}{u_r}$	p^{n}B			p^{n}A		p^{n}A p^{n}B	p^{n}A p^{n}B	

①因為$49 = 7^2$，所以如同表 6 的方法，由關係式(2)與(3)只求得49A與49B數列，並未找到第三條存在關係式(1)的數列。

$\frac{5}{6},\frac{6}{17},\frac{17}{40},\frac{40}{97},\frac{97}{234},\cdots$稱為49A數列，$\frac{4}{13},\frac{13}{30},\frac{30}{73},\frac{73}{176},\frac{176}{425},\cdots$稱為49B數列。

②因為$289 = 17^2$，所以最簡股差為289的最簡真分數數列有289A與289B數列。因為$529 = 23^2$，所以最簡股差為529的最簡真分數數列有529A與529B數列。如同表 6 的方法，這些最簡股差皆未找到第三條存在關係式(1)的數列。

$\frac{13}{20},\frac{20}{53},\frac{53}{126},\frac{126}{305},\frac{305}{736},\cdots$稱為289A數列，$\frac{6}{25},\frac{25}{56},\frac{56}{137},\frac{137}{330},\frac{330}{797},\cdots$ 稱為289B數列。

$\frac{17}{24},\frac{24}{65},\frac{65}{154},\frac{154}{373},\frac{373}{900},\cdots$ 稱為529A數列，$\frac{10}{37},\frac{37}{84},\frac{84}{205},\frac{205}{494},\frac{494}{1193},\cdots$稱為529B數列。

③因為$343 = 7^3 = 49\times7$，$4913 = 17^3 = 289\times17$以及$12167 = 23^3 = 529\times23$，所以如同表 6 的方法，最簡股差為343，4913以及12167皆未找到第三條存在遞迴關係式(1)的數列。

$\frac{3}{22},\frac{22}{47},\frac{47}{116},\frac{116}{279},\frac{279}{674},\cdots$ 稱為343A數列，$\frac{16}{29},\frac{29}{74},\frac{74}{177},\frac{177}{428},\frac{428}{1033},\cdots$稱為343B數列。

$\frac{8}{79},\frac{79}{166},\frac{166}{411},\frac{411}{988},\frac{988}{2387},\cdots$稱為4913A數列，$\frac{63}{118},\frac{118}{299},\frac{299}{716},\frac{716}{1731},\frac{1731}{4178},\cdots$ 稱為4913B數列。

$\frac{78}{79},\frac{79}{236},\frac{236}{551},\frac{551}{1338},\frac{1338}{3227},\cdots$ 稱為12167A數列，$\frac{77}{232},\frac{232}{541},\frac{541}{1314},\frac{1314}{3169},\frac{3169}{7652},\cdots$稱為12167B數列。

④最簡股差為$2401 = 7^4$，只有 2401A與2401B數列；最簡股差為$83521 = 17^4$，只有3521A與83521B數列；最簡股差為$279841 = 23^4$，只有279841A與279841B數列。這些最簡股差並未找到第三條存在關係式(1)的數列。

$\frac{10}{61},\frac{61}{132},\frac{132}{325},\frac{325}{782},\frac{782}{1889},\cdots$ 稱為2401A數列，$\frac{41}{72},\frac{72}{185},\frac{185}{442},\frac{442}{1069},\frac{1069}{2580},\cdots$稱為2401B數列。

$\frac{389}{540},\frac{540}{1469},\frac{1469}{3478},\frac{3478}{8425},\frac{8425}{20328},\cdots$稱為83521A數列，$\frac{182}{569},\frac{569}{1320},\frac{1320}{3209},\frac{3209}{7738},\frac{7738}{18685},\cdots$ 稱為83521B數列。

$\frac{78}{79},\frac{79}{236},\frac{236}{551},\frac{551}{1338},\frac{1338}{3227},\cdots$ 稱為279841A數列，$\frac{391}{552},\frac{552}{1495},\frac{1495}{3542},\frac{3542}{8579},\frac{8579}{20700},\cdots$稱為279841B數列。

(2)不同最簡股差（質數）的乘積

當最簡股差為質數p_n且可寫成$|8k \pm 1|$的形式時，則由關係式(2)與(3)求得最簡股差為$p_1p_2\cdots p_{n-1}p_n$的2^n 條數列。

①因為$119 = (17\times7)$，所以如表 7 的方法，由關係式(2)與(3)求得2^2條數列。

$\frac{8}{11},\frac{11}{30},\frac{30}{71},\frac{71}{172},\frac{172}{415},\cdots$稱為119A數列，$\frac{1}{12},\frac{12}{25},\frac{25}{62},\frac{62}{149},\frac{149}{360},\cdots$稱為119B數列，

$\frac{5}{18},\frac{18}{41},\frac{41}{100},\frac{100}{241},\frac{241}{582},\cdots$稱為119C數列， $\frac{10}{19},\frac{19}{48},\frac{48}{115},\frac{115}{278},\frac{278}{671},\cdots$稱為119D數列。

表 7

	遞迴關係式(2)				遞迴關係式(3)			
$\frac{v_s}{u_s}$	17A	17A	17B	17B	17A	17A	17B	17B
$\frac{v_t}{u_t}$	7A	7B	7A	7B	7A	7B	7A	7B
$\frac{v_r}{u_r}$	119C	119D	119B	119A	119B 119D	119A 119C	119A 119C	119B 119D

②因為$161 = (23\times7)$，所以如同表 7 的方法求得2^2條數列。

$\frac{9}{10},\frac{10}{29},\frac{29}{68},\frac{68}{165},\frac{165}{398},\cdots$稱為161A數列，$\frac{2}{15},\frac{15}{32},\frac{32}{79},\frac{79}{190},\frac{190}{459},\cdots$稱為161B數列，

$\frac{11}{20},\frac{20}{51},\frac{51}{122},\frac{122}{295},\frac{295}{712},\cdots$稱為161C數列， $\frac{8}{25},\frac{25}{58},\frac{58}{141},\frac{141}{340},\frac{340}{821},\cdots$稱為161D數列。

③因為$391 = (23\times17)$，所以如同表 7 的方法求得2^2條數列。

$\frac{14}{15},\frac{15}{44},\frac{44}{103},\frac{103}{250},\frac{250}{603},\cdots$稱為391A數列，$\frac{5}{26},\frac{26}{57},\frac{57}{140},\frac{140}{337},\frac{337}{814},\cdots$稱為391B數列，

$\frac{16}{27},\frac{27}{70},\frac{70}{167},\frac{167}{404},\frac{404}{975},\cdots$稱為391C數列， $\frac{13}{40},\frac{40}{93},\frac{93}{226},\frac{226}{545},\frac{545}{1316},\cdots$稱為391D數列。

④因為$2737 = (7\times17\times23) = (119\times23) = (161\times17) = (391\times7)$，所以如同表 7 的方法求得$2^3$ 條數列。

$\frac{37}{38},\frac{38}{113},\frac{113}{264},\frac{264}{641},\frac{641}{1546},\cdots$稱為2737A數列，$\frac{6}{59},\frac{59}{124},\frac{124}{307},\frac{307}{738},\frac{738}{1783},\cdots$稱為2737B數列，

$\frac{41}{66},\frac{66}{173},\frac{173}{412},\frac{412}{997},\frac{997}{2406},\cdots$稱為2737C數列，$\frac{12}{67},\frac{67}{146},\frac{146}{359},\frac{359}{864},\frac{864}{2087},\cdots$稱為2737D數列，

$\frac{16}{73},\frac{73}{162},\frac{162}{397},\frac{397}{956},\frac{956}{2309},\cdots$稱為2737E數列，$\frac{43}{74},\frac{74}{191},\frac{191}{456},\frac{456}{1103},\frac{1103}{2662},\cdots$稱為2737F數列，

$\frac{47}{88},\frac{88}{223},\frac{223}{534},\frac{534}{1291},\frac{1291}{3116},\cdots$稱為2737G數列，$\frac{36}{109},\frac{109}{254},\frac{254}{617},\frac{617}{1488},\frac{1488}{3593},\cdots$稱為2737H數列。

(3)不同最簡股差（質數）的冪次方乘積

當最簡股差為質數p_n且可寫成$|8k \pm 1|$的形式時，則由關係式(2)與(3)可求得最簡股差為$p_1{}^{q_1}p_2{}^{q_2}\cdots p_{n-1}{}^{q_{n-1}}p_n{}^{q_n}$的$2^n$ 條數列，其中 $q_n \in N$。

①因為$14161 = (17^2 \times 7^2) = (289 \times 49)$，所以如表 8 的方法，由關係式(2)與(3)求得2^2條數列。

$\frac{89}{130},\frac{130}{349},\frac{349}{828},\frac{828}{2005},\frac{2005}{4838},\cdots$稱為14161A數列，$\frac{22}{145},\frac{145}{312},\frac{312}{769},\frac{769}{1850},\frac{1850}{4469},\cdots$稱為14161B數列，

$\frac{101}{180},\frac{180}{461},\frac{461}{1102},\frac{1102}{2665},\frac{2665}{6432},\cdots$稱為14161C數列，$\frac{48}{185},\frac{185}{418},\frac{418}{1021},\frac{1021}{2460},\frac{2460}{5941},\cdots$稱為14161D數列。

表 8

	遞迴關係式(2)				遞迴關係式(3)			
$\frac{v_s}{u_s}$	289A	289A	289B	289B	289A	289A	289B	289B
$\frac{v_t}{u_t}$	49A	49B	49A	49B	49A	49B	49A	49B
$\frac{v_r}{u_r}$	14161D	14161B	14161C	14161A	14161B 14161C	14161A 14161D	14161A 14161D	14161B 14161C

②因為$25921 = (23^2 \times 7^2) = (529 \times 49)$，所以如同表 8 的方法求得$2^2$條數列。

$\frac{18}{181},\frac{181}{380},\frac{380}{941},\frac{941}{2262},\frac{2262}{5465},\cdots$稱為25921A數列，$\frac{125}{198},\frac{198}{521},\frac{521}{1240},\frac{1240}{3001},\frac{3001}{7242},\cdots$稱為25921B數列，

$\frac{52}{229},\frac{229}{510},\frac{510}{1249},\frac{1249}{3008},\frac{3008}{7265},\cdots$稱為25921C數列，$\frac{145}{272},\frac{272}{689},\frac{689}{1650},\frac{1650}{3989},\frac{3989}{9628},\cdots$稱為25921D數列。

③因為$152881 = (23^2 \times 17^2) = (529 \times 289)$，所以如同表 8 的方法求得$2^2$條數列。

$\frac{281}{352},\frac{352}{985},\frac{985}{2322},\frac{2322}{5629},\frac{5629}{13580},\cdots$稱為152881A數列，$\frac{28}{421},\frac{421}{870},\frac{870}{2161},\frac{2161}{5192},\frac{5192}{12545},\cdots$稱為152881B數列，

$\frac{210}{701},\frac{701}{1612},\frac{1612}{3925},\frac{3925}{9462},\frac{9462}{22849},\cdots$ 稱為152881C數列，$\frac{365}{702},\frac{702}{1769},\frac{1769}{4240},\frac{4240}{10249},\frac{10249}{24738},\cdots$稱為152881D數列。

④由於$491169 = (7^2 \times 17^2 \times 23^2) = (14161 \times 529) = (25921 \times 289) = (152881 \times 49)$，所以如同表 8 的方法求得$2^3$條數列。

$\frac{1937}{2050},\frac{2050}{6037},\frac{6037}{14124},\frac{14124}{34285},\frac{34285}{82694},\cdots$稱為7491169A數列，$\frac{1933}{2666},\frac{2666}{7325},\frac{7325}{17316},\frac{17316}{41957},\frac{41957}{101230},\cdots$稱為7491169B數列，

$\frac{74}{2813},\frac{2813}{5700},\frac{5700}{14213},\frac{14213}{34126},\frac{34126}{82465},\cdots$稱為7491169C數列，$\frac{636}{3517},\frac{3517}{7570},\frac{7670}{18857},\frac{18857}{45384},\frac{45384}{109625},\cdots$稱為7491169D數列，

$\frac{2245}{3854}, \frac{3854}{9953}, \frac{9953}{23760}, \frac{23760}{57473}, \frac{57473}{138706}, \cdots$稱為7491169E數列，$\frac{1320}{4633}, \frac{4633}{10586}, \frac{10586}{25805}, \frac{25805}{62196}, \frac{62196}{150197}, \cdots$稱為7491169F數列，

$\frac{2665}{5256}, \frac{5256}{13177}, \frac{13177}{31610}, \frac{31610}{76397}, \frac{76397}{184404}, \cdots$稱為7491169G數列，$\frac{1824}{5585}, \frac{5585}{12994}, \frac{12994}{31573}, \frac{31573}{76140}, \frac{76140}{183853}, \cdots$稱為7491169H數列。

六、 勾股鐵路網

(一) 「勾股鐵路網」作品由各種最簡股差的整數數列建立「勾股鐵路網」，可是整數數列只能表示在直線座標，並無法呈現數列網。當然最簡真分數數列同樣無法呈現數列網。但是， 若將(u_n, v_n)當成平面座標(x, y)，則$|a_n - b_n|$為定值的$\{(u_n, v_n)\}$則好比一條鐵路， (u_n, v_n)是鐵路的個別車站， $|a_n - b_n|$為鐵路的名稱；或將素勾股數(a_n, b_n, c_n)當成空間座標(x, y, z)，則$|a_n - b_n|$為定值的$\{(a_n, b_n, c_n)\}$好比一條鐵路，(a_n, b_n, c_n)是鐵路的個別車站， $|a_n - b_n|$為鐵路的名稱（圖 5）。

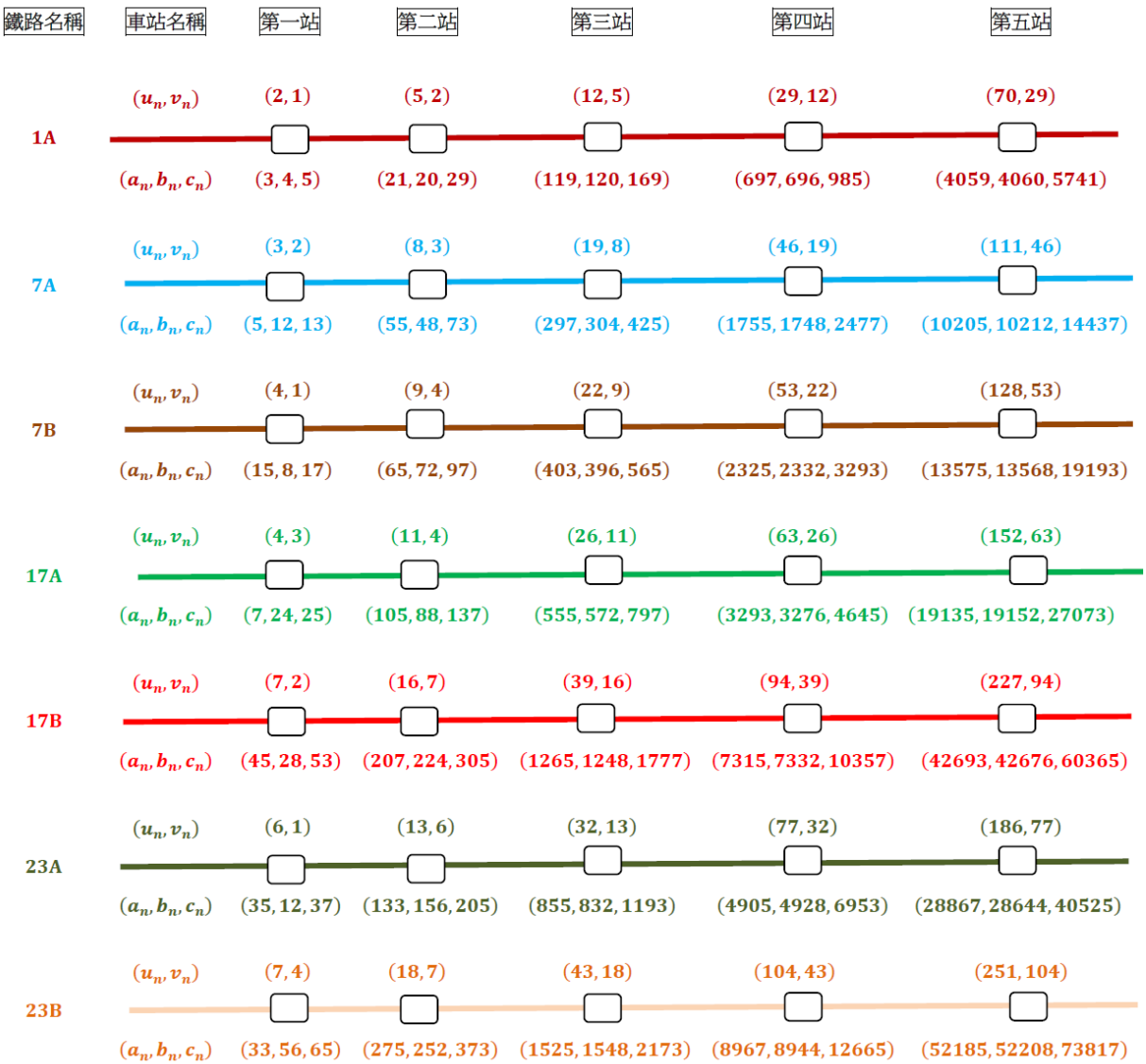

圖 5 勾股鐵路

1. 我將各種$|a_n - b_n|$為定值的$\{(u_n, v_n)\}$建構平面座標中的「勾股鐵路網」，如圖 6。我由此發現所有的勾股鐵路趨近於直線L：$y = (\sqrt{2}-1)x$，說明如下：

⑴由定理 9 可知$(u_n, v_n) = (2u_{n-1} + v_{n-1}, u_{n-1})$，並由此推得定理 11。

定理 11：若$\frac{v_n}{u_n} = \frac{1}{2+\frac{v_{n-1}}{u_{n-1}}}$，其中 $n, u_1, v_1 \in N$，$u_1 > v_1, (u_1, v_1) = 1$,且$u_1, v_1$為一奇一偶，則 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{v_n}{u_n} = \sqrt{2} - 1$。

證明：①由定理 9 可知$(u_n, v_n) = (2u_{n-1} + v_{n-1}, u_{n-1})$，所以$u_n = 2u_{n-1} + u_{n-2} \cdots (1)$。

因此由式(1)可得特徵方程式$x^2 - 2x - 1 = 0$，求解可得$x = 1 \pm \sqrt{2}$。

所以可得一般解為 $u_n = A(1+\sqrt{2})^n + B(1-\sqrt{2})^n \cdots (2)$。

②以u_1與$u_2 = 2u_1 + v_1$代入式(2)可得 $A = \frac{(2+\sqrt{2})u_1+v_1}{4+2\sqrt{2}}, B = \frac{(2-\sqrt{2})u_1+v_1}{4-2\sqrt{2}}$。

因此$u_n = \frac{(2+\sqrt{2})u_1+v_1}{4+2\sqrt{2}}(1+\sqrt{2})^n + \frac{(2-\sqrt{2})u_1+v_1}{4-2\sqrt{2}}(1-\sqrt{2})^n$

③因為$v_n = u_{n-1}$，所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{v_n}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n-1}}{u_n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(2+\sqrt{2})u_1+v_1}{4+2\sqrt{2}}(1+\sqrt{2})^{n-1} + \frac{(2-\sqrt{2})u_1+v_1}{4-2\sqrt{2}}(1-\sqrt{2})^{n-1}}{\frac{(2+\sqrt{2})u_1+v_1}{4+2\sqrt{2}}(1+\sqrt{2})^{n} + \frac{(2-\sqrt{2})u_1+v_1}{4-2\sqrt{2}}(1-\sqrt{2})^{n}}$$

$$= \frac{\frac{(2+\sqrt{2})u_1+v_1}{4+2\sqrt{2}}(1+\sqrt{2})^{n-1}}{\frac{(2+\sqrt{2})u_1+v_1}{4+2\sqrt{2}}(1+\sqrt{2})^{n}} = \sqrt{2} - 1 \qquad \square$$

⑵當n趨近於無限大時，平面座標中的「勾股鐵路」趨近於直線L：$y = (\sqrt{2}-1)x$，證明如下：

證明：①當n趨近於∞時，假設平面座標中的「勾股鐵路」趨近於直線L：$y = kx + l$。

②因為$\begin{cases}(x_{n+1}, y_{n+1}) = (u_{n+1}, v_{n+1}) = (2u_n + v_n, u_n) \\ (x_n, y_n) = (u_n, v_n) = (2u_{n-1} + v_{n-1}, u_{n-1})\end{cases}$，

所以當n趨近於無限大時，可得$k = \frac{y_{n+1}-y_n}{x_{n+1}-x_n} = \frac{u_n - v_n}{(2u_n+v_n)-u_n} = \frac{u_n-v_n}{u_n+v_n} \cdots (1)$，

③當n趨近於無限大時，由定理 11 可得$v_n = (\sqrt{2}-1)u_n \cdots (2)$，

將式(2)代入式(1)可得$k=\frac{u_n-(\sqrt{2}-1)u_n}{u_n+(\sqrt{2}-1)u_n}=\sqrt{2}-1\cdots(3)$，

將式(3)代入直線L可得 $y=(\sqrt{2}-1)x+l\cdots(4)$，

④將$(x_{n+1},y_{n+1})=(2u_n+v_n,u_n)$代入式(4)可得

$u_n=(\sqrt{2}-1)(2u_n+v_n)+l\cdots(5)$，

⑤將式(2)代入式(5)可得$u_n=(\sqrt{2}-1)[2u_n+(\sqrt{2}-1)u_n]+l$，因此 $l=0$。

所以可得直線L：$y=(\sqrt{2}-1)x$。 □

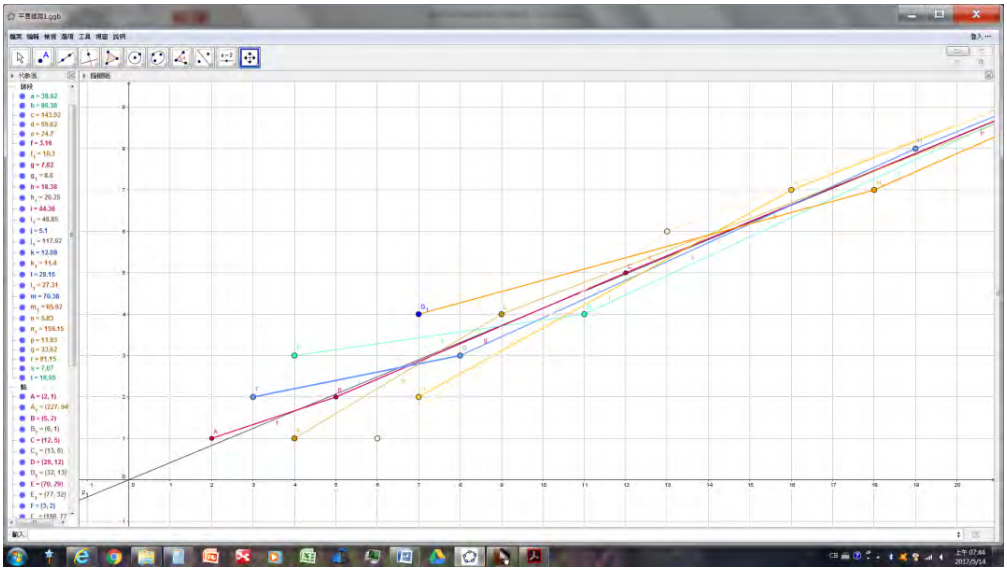

圖 6　平面座標中的勾股鐵路網

2. 如圖 7，將各種$|a_n-b_n|$為定值的$\{(a_n,b_n,c_n)\}$構成空間座標中的「勾股鐵路網」，。我發現所有的勾股鐵路趨近於直線M：$\begin{cases}x^2+y^2=z^2\\x=y\end{cases}$，說明如下：。

⑴因為(a_n,b_n,c_n)皆符合${a_n}^2+{b_n}^2={c_n}^2$，所以可得$x^2+y^2=z^2$，因此「勾股鐵路網」皆可標示於在x,y,z為正數的四分之一圓錐 $\Gamma：x^2+y^2=z^2$。

⑵因為每條勾股鐵路有固定的$|a_n-b_n|$，但是由定理 1 可知$\begin{cases}a_n={u_n}^2-{v_n}^2\\b_n=2u_nv_n\end{cases}$，因此隨著$n$越大，$a_n$與$b_n$的值也越大。當$n$趨近於無限大時，$a_n$與$b_n$幾乎相等，即$x_n$與$y_n$幾乎相等，因此勾股鐵路趨近於平面E：$x=y$。所以當$n$趨近於無限大時，勾股鐵路趨近於直線M：$\begin{cases}x^2+y^2=z^2\\x=y\end{cases}$。

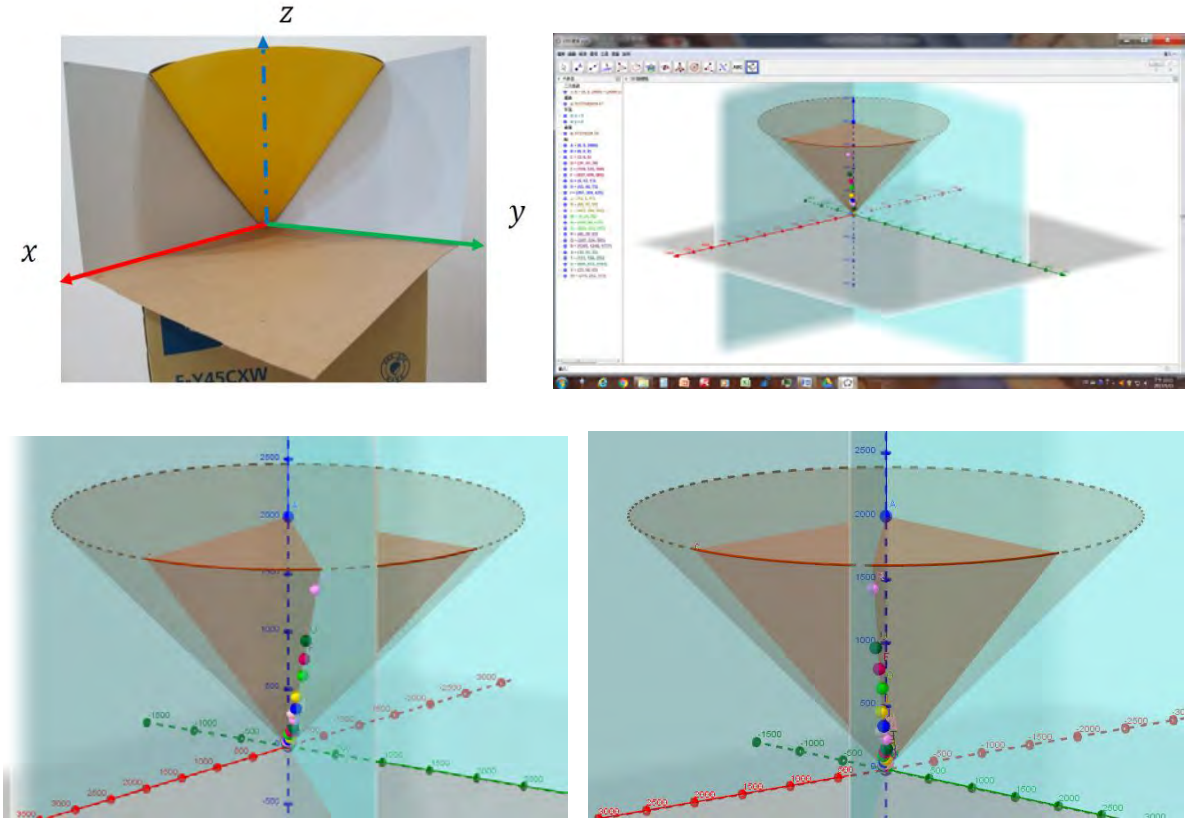

圖 7　空間座標中的勾股鐵路網

(二) 並由關係式(2)與(3)確認或預估各種股差為定值的勾股鐵路之條數。

1. 當$|a_n - b_n| = 1$時，只有1條勾股鐵路，即1A鐵路。
2. 當$|a_n - b_n|$為質數p時，至少有2條勾股鐵路： pA鐵路與pB鐵路。
3. 當$|a_n - b_n|$為質數p的n次方時，至少有2條勾股鐵路： p^nA鐵路與p^nB鐵路。
4. 當$|a_n - b_n|$為n個不同質數的乘積時，至少有2^n 條勾股鐵路。
5. 當$|a_n - b_n|$為n個不同質數之冪次方乘積時，至少有2^n 條勾股鐵路。

伍、　研究結果

一、　最簡股差的判別

(一) 由$|a_n - b_n| = |{u_n}^2 - {v_n}^2 - 2u_nv_n|$ 證明$|a_n - b_n|$皆可寫成$|8k \pm 1|$的形式，$k \in Z$。

(二) 最簡股差判別法為當一正整數的所有質因數皆可寫成$|8l \pm 1|$的形式（其中 $l \in Z$）時，則此正整數為最簡股差（圖 8）。我在本研究中由二次剩餘證明這個判別法。

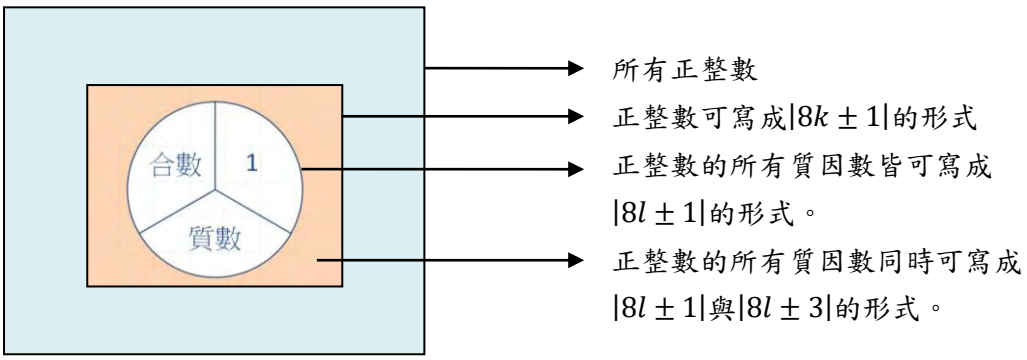

圖 8　最簡股差的判別

二、　最簡真分數數列的條數

(一)我由股差為 1 的費馬家族得到關係式(1) $\frac{v_n}{u_n} = \frac{1}{2+\frac{v_{n-1}}{u_{n-1}}}$。

(二)將歐幾里得家族中的最簡真分數列中的每一個最簡真分數數列分別當作$\frac{v_1}{u_1}$，代入遞迴關係式(1)　$\frac{v_n}{u_n} = \frac{1}{2+\frac{v_{n-1}}{u_{n-1}}}$，產生$\langle\frac{v_n}{u_n}\rangle$，再由歐幾里得家族的生成公式產生股差為$|{u_1}^2 - {v_1}^2 - 2u_1v_1|$的素勾股數家族。

(三)由$|{u_r}^2 - {v_r}^2 - 2u_rv_r| = |{u_s}^2 - {v_s}^2 - 2u_sv_s|\ |{u_t}^2 - {v_t}^2 - 2u_tv_t|$得到

關係式(2)　$\frac{v_r}{u_r} = \frac{\frac{v_s}{u_s}+\frac{v_t}{u_t}-2\left(\frac{v_s}{u_s}\right)\left(\frac{v_t}{u_t}\right)}{1+\left(\frac{v_s}{u_s}\right)\left(\frac{v_t}{u_t}\right)}$ 與關係式(3) $\frac{v_r}{u_r} = \frac{\left|\frac{v_s}{u_s}-\frac{v_t}{u_t}\right|}{\left|1-\frac{v_s}{u_s}-\frac{v_t}{u_t}-\left(\frac{v_s}{u_s}\right)\left(\frac{v_t}{u_t}\right)\right|+\left|\frac{v_s}{u_s}-\frac{v_t}{u_t}\right|}$，

其中$n, u_s, v_s, u_t, v_t\ , u_r, v_r \in N, u_s > v_s, u_t > v_t, u_r > v_r, (u_s, v_s) = 1, (u_t, v_t) = 1,$ $(u_r, v_r) = 1, u_s, v_s$為一奇一偶，u_t, v_t為一奇一偶，u_r, v_r為一奇一偶。

(四)由關係式(2)與(3)確認或預估各種股差為定值的最簡真分數數列之條數。

1. 當$|a_n - b_n| = 1$時，只有一條最簡真分數數列，即1A數列。
2. 當$|a_n - b_n|$為質數p時，至少有兩條最簡真分數數列： pA與pB數列。
3. 當$|a_n - b_n|$為質數p的n次方時，至少有兩條最簡真分數數列： p^nA與p^nB數列。
4. 當$|a_n - b_n|$為n個不同質數的乘積時，至少有2^n 條最簡真分數數列。
5. 當$|a_n - b_n|$為n個不同質數之冪次方乘積時，至少有2^n 條最簡真分數數列。

三、　勾股鐵路網

(一) 將(u_n, v_n)當成平面中的座標(x, y)，則$|a_n - b_n|$為定值的$\{(u_n, v_n)\}$則好比一條鐵路，

(u_n, v_n)是個別的車站， $|a_n - b_n|$為鐵路的名稱，由不同$|a_n - b_n|$的鐵路建構「勾股鐵路網」。當n趨近於無限大時，勾股鐵路趨近於直線L：$y = (\sqrt{2} - 1)x$。

(二) 將(a_n, b_n, c_n)當成空間中的座標(x, y, z)，則$|a_n - b_n|$為定值的$\{(a_n, b_n, c_n)\}$好比一條鐵路，(a_n, b_n, c_n)是個別的車站，$|a_n - b_n|$為鐵路的名稱，由不同$|a_n - b_n|$的鐵路建構「勾股鐵路網」。當n趨近於無限大時，勾股鐵路趨近於直線M：$\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 \\ x = y \end{cases}$。

(三) 由關係式⑵與⑶確認或預估各種股差為定值的「勾股鐵路」之條數。

1. 當$|a_n - b_n| = 1$時，只有一條勾股鐵路，即1A鐵路。
2. 當$|a_n - b_n|$為質數p時，至少有兩條勾股鐵路： pA鐵路與pB鐵路。
3. 當$|a_n - b_n|$為質數p的n次方時，至少有兩條勾股鐵路： p^nA鐵路與p^nB鐵路。
4. 當$|a_n - b_n|$為n個不同質數的乘積時，至少有2^n 條勾股鐵路。
5. 當$|a_n - b_n|$為n個不同質數之冪次方乘積時，至少有2^n 條勾股鐵路。

陸、 討論

一、 雖然「勾股鐵路網」作品已經利用「最簡股差皆可寫成$|8k \pm 1|$的形式」剔除一大部份不可能是最簡股差的正整數，但是仍然沒辦法直接由一大片正整數集合中直接挑出最簡股差。我證明：凡是最簡股差皆可寫成$|8k \pm 1|$的形式，接著提出並證明：最簡股差判別法為當一正整數的所有質因數皆可寫成$|8l \pm 1|$的形式時，則此正整數為最簡股差。因此，屬於質數的最簡股差之個數為無窮多個。此外，「勾股鐵路網」作品已經證得：若已知的兩組素勾股數中其中有一的最簡股差為質數，能找到最簡股差為原兩組最簡股差之積的素勾股數。我則證得：若沒有質數的限制亦成立。

二、 「勾股鐵路網」作品是藉由其中一條整數數列的衍生數對與構造式，作者找到共軛式與共軛數對，再由共軛數對可產生另一條整數數列，然後由歐幾里得家族生成公式產生相同股差的另一素勾股數家族。而我將費馬家族中任一個最簡真分數與歐幾里得家族中任一個最簡真分數代入關係式⑵，由此求得相同股差的最簡真

分數，再代入關係式(1)，由此產生的$\frac{v_n}{u_n}$，然後由歐幾里得家族生成公式產生相同股差的另一素勾股數家族（表 9）。

三、 「勾股鐵路網」作品藉由其中一條整數數列的衍生數對與構造式，作者找到共軛式與共軛數對，再由共軛數對可產生另一條整數數列，接著藉由不同最簡股差的構造式或共軛式之乘積產生合成最簡股差之構造式，並由此產生合成最簡股差的所有整數數列，然後由歐幾里得家族生成公式產生合成股差的素勾股數家族。而我將不同最簡股差的最簡真分數分別代入關係式(2)與(3)，由此求得各種最簡股差的最簡真分數，再代入關係式(1)，由此產生的$\frac{v_n}{u_n}$，然後由歐幾里得家族生成公式產生合成股差的素勾股數家族（表 9）。

表 9 「勾股鐵路網」與「再探勾股鐵路網」比較表

作品名稱	勾股鐵路網	再探勾股鐵路網
相同股差的另一素勾數家族產生法	(1)衍生數對(m,n) (2)構造式$\Delta m+m\sqrt{2}$ (3)由共軛式$-\Delta m+m\sqrt{2}$或$\Delta m-m\sqrt{2}$為正數者得新衍生數對(m',n') (4)遞迴關係式$S_n+2S_{n+1}=S_{n+2}$ (5)勾股數$\begin{cases} a=n'^2-m'^2 \\ b=2n'm' \\ c=n'^2+m'^2 \end{cases}$	(1)最簡真分數$\left(\frac{v_n}{u_n}\right)$ (2)$\frac{v_r}{u_r}=\frac{\frac{v_s}{u_s}+\frac{v_t}{u_t}-2\left(\frac{v_s}{u_s}\right)\left(\frac{v_t}{u_t}\right)}{1+\left(\frac{v_s}{u_s}\right)\left(\frac{v_t}{u_t}\right)}$ (3)關係式$\frac{v_n}{u_n}=\frac{1}{2+\frac{v_{n-1}}{u_{n-1}}}$ (4)勾股數$\begin{cases} a_n={u_n}^2-{v_n}^2 \\ b_n=2u_nv_n \\ c_n={u_n}^2+{v_n}^2 \end{cases}$
合成股差的素勾數家族產生法	(1)衍生數對(m_s,n_s)與(m_t,n_t) (2)構造式$\Delta m_s+m_s\sqrt{2}$與$\Delta m_t+m_t\sqrt{2}$， (3)新股差構造式$\Delta m_r+m_r\sqrt{2}$ 等於 $(\Delta m_s\Delta m_t+2m_sm_t)+(m_s\Delta m_t+m_t\Delta m_s)\sqrt{2}$ (4)新股差共軛式$\Delta m_r-m_r\sqrt{2}$ 等於 $(\Delta m_s\Delta m_t+2m_sm_t)-(m_s\Delta m_t+m_t\Delta m_s)\sqrt{2}$ (5)新股差衍生數對(m_r,n_r) (6)遞迴關係式$S_n+2S_{n+1}=S_{n+2}$ (7)勾股數$\begin{cases} a={n_r}^2-{m_r}^2 \\ b=2n_rm_r \\ c={n_r}^2+{m_r}^2 \end{cases}$	(1)最簡真分數$\left(\frac{v_n}{u_n}\right)$ (2)$\frac{v_r}{u_r}=\frac{\frac{v_s}{u_s}+\frac{v_t}{u_t}-2\left(\frac{v_s}{u_s}\right)\left(\frac{v_t}{u_t}\right)}{1+\left(\frac{v_s}{u_s}\right)\left(\frac{v_t}{u_t}\right)}$ 或 $\frac{v_r}{u_r}=\frac{\left\lvert\frac{v_s}{u_s}-\frac{v_t}{u_t}\right\rvert}{\left\lvert 1-\frac{v_s}{u_s}-\frac{v_t}{u_t}-\left(\frac{v_s}{u_s}\right)\left(\frac{v_t}{u_t}\right)\right\rvert+\left\lvert\frac{v_s}{u_s}-\frac{v_t}{u_t}\right\rvert}$ (3)關係式$\frac{v_n}{u_n}=\frac{1}{2+\frac{v_{n-1}}{u_{n-1}}}$ (4)勾股數$\begin{cases} a_n={u_n}^2-{v_n}^2 \\ b_n=2u_nv_n \\ c_n={u_n}^2+{v_n}^2 \end{cases}$

四、 除了「勾股鐵路網」作品以及我的方法，我發現由貝格倫（B. Berggrens）的素勾股數三元樹（a tree of primitive Pythagorean triples）〔5〕也可產生不同的「勾股鐵路」。

1. 貝格倫在 1934 年以(3 ,4 ,5)當作(a_1, b_1, c_1)，由迭代公式(1)，(2)和(3)交互迭代產生(a_2, b_2, c_2)為$(5,12,13), (15,8,17), (21,20,29)$。再以$(a_2, b_2, c_2)$產生$(a_3, b_3, c_3)$，以此類推產生$(a_4, b_4, c_4), (a_5, b_5, c_5), \cdots, (a_n, b_n, c_n)$，由此建立了素勾股數三元樹(圖 9)。

$$(1)\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \\ c_{n-1} \end{bmatrix}, (2)\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \\ c_{n-1} \end{bmatrix}, (3)\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \\ c_{n-1} \end{bmatrix}$$

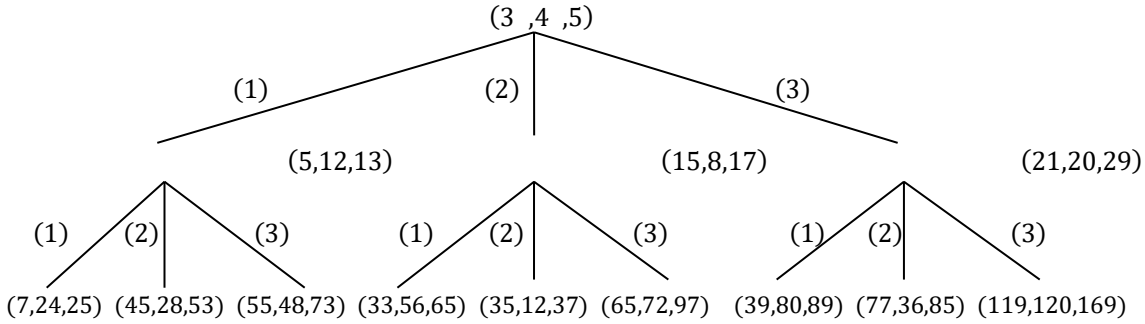

圖 9 貝格倫由迭代公式(1)、(2)和(3)建立了素勾股數三元樹

2. 在貝格倫的素勾股數三元樹中，可由迭代公式(3)連續迭代產生「勾股鐵路」：

(1)股差為 1 的「勾股鐵路」：以(3 ,4 ,5)當作(a_1, b_1, c_1)，再由迭代公式(3)連續迭代產生$\{(a_n, b_n, c_n)\}$，只有一條勾股鐵路。

(2)股差為 7 的「勾股鐵路」：以(3 ,4 ,5)藉由迭代公式(1)與(2)分別產生(5,12,13)與(15,8,17)，再以(5,12,13)與(15,8,17)分別當作(a_1, b_1, c_1)，再由迭代公式(3)分別連續迭代產生兩種$\{(a_n, b_n, c_n)\}$，有 2 條勾股鐵路。

(3)股差為17 的「勾股鐵路」：以(5,12,13)藉由迭代公式(1)與(2)分別產生(7,24,25)與(45,28,53)，再以(7,24,25)與(45,28,53)分別當作(a_1, b_1, c_1)，再由迭代公式(3)分別連續迭代產生兩種$\{(a_n, b_n, c_n)\}$，有 2 條勾股鐵路。

(4)股差為23 的「勾股鐵路」：以(15,8,17)藉由迭代公式(1)與(2)分別產生(33,56,65)與(35,12,37)，再以(33,56,65)與(35,12,37)分別當作(a_1, b_1, c_1)，再由迭代公式(3)分別連續迭代產生兩種$\{(a_n, b_n, c_n)\}$，有 2 條勾股鐵路。

柒、 結論

為了「勾股鐵路網」作品中未解決的問題，我進一步探討股差為定值的素勾股數家族與最簡真分數數列的關聯性。我找到並證明最簡股差的判別方法，這個方法讓我可由正整數集合中可直接挑出最簡股差，我接著找到了三種遞迴關係式，並藉由這三種遞迴關係式產生最簡股差為定值的素勾股數家族的所有最簡真分數數列，因此本研究解決了「勾股鐵路網」尚未解決的前四項問題。希望未來能探討第五項尚未解決的問題：推廣至夾角非90 度之三角形，探討其夾角兩邊的差與整數邊長之關係。此外，我也希望能由素勾股數三元樹探討空間座標中的「勾股鐵路網」。

捌、 參考資料

〔1〕 高中數學課本第二冊（2017）。第一章：數列與級數。南一書局。

〔2〕 王重臻（2007）。勾股鐵路網。中華民國第四十七屆中小學科學展覽會高中組數學科。http://activity.ntsec.gov.tw/activity/race-1/47/senior/040410.pdf

〔3〕 張文忠（2002）。基礎數論-原理及題解。台北市。中央圖書。405-414。

〔4〕 蔡聰明 (2010)。數學拾貝。台北市。三民。189–217。

〔5〕 Price, H. Lee (2008). "The Pythagorean Tree: A New Species".arXiv:0809.4324 [math.HO], from:http://arxiv.org/pdf/0809.4324.pdf

【評語】050418

本篇論文研究兩股長度差為 1 的最簡股數家族的相關結果，特別是，證明了最簡股差的判別法，並解決了 2007 年第 47 屆科展論文《勾股鐵路網》留下來的大部分問題，證明的方法比較屬於初等數論的論證,結果有一定程度的興趣。本作品明確交代是延續作品，並改進已發表文獻之作法，值得鼓勵。定理 6 的論證可再斟酌；在研究動機中，提及研究者刊登在中研院數學傳播的一篇文章，可考慮納入參考資料；建議可考慮加強說明研究動機及三個研究目的。

作品海報

壹、摘要

本研究以不同的$\frac{v_1}{u_1}$代入關係式$\frac{v_n}{u_n}=\frac{1}{2+\frac{v_{n-1}}{u_{n-1}}}$，迭代產生不同的$\langle\frac{v_n}{u_n}\rangle$，$u_1>v_1,(u_1,v_1)=1,u_1,v_1$為一奇一偶。再由$(a_n,b_n,c_n)=(u_n{}^2-v_n{}^2,2u_nv_n,u_n{}^2+v_n{}^2)$產生股差為$|u_1{}^2-v_1{}^2-2u_1v_1|$ 的素勾股數家族；將(u_n,v_n)當成平面座標(x,y)，則股差為定值的$\{(u_n,v_n)\}$構成平面座標中的「勾股鐵路網」；將(a_n,b_n,c_n)當成空間座標(x,y,z)，則股差為定值的$\{(a_n,b_n,c_n)\}$構成空間座標中的「勾股鐵路網」；由不同最簡股差的乘積找到另外兩個關係式，由此得到股差為定值的素勾股數家族之不同的最簡真分數數列，由此確認最簡股差為定值的勾股鐵路條數。

貳、研究動機

在第 47 屆科展的「勾股鐵路網」發現最簡股差皆可寫成$|8k\pm1|$的形式，將各種股差的整數數列構成「勾股鐵路網」。我想證明最簡股差的判別方法，並由關係式產生各種股差為定值的素勾股數家族，然後構成平面與空間座標中的「勾股鐵路網」。

參、研究目的

一、證明最簡股差的判別方法。

二、合成各種股差的最簡真分數數列。

三、建立平面與空間座標中的「勾股鐵路網」。

肆、研究設備及器材

紙、筆、電腦、電子計算機、Excel 試算表、Geogebra。

伍、研究過程與方法

一、最簡股差的判別

（一）第 47 屆全國科展「勾股鐵路網」科展作品發現並且證明了定理 1。

定理1（王重臻〔2〕）：若$|d_s|$與$|d_t|$最簡股差（且$|d_s|$為質數），則$|d_sd_t|$亦為最簡股差。

（二）第47屆全國科展「勾股鐵路網」雖然提出「最簡股差皆可寫成$|8k\pm1|$的形式」，卻未提出證明〔2〕，因此我由$|a_n-b_n|=|u_n{}^2-v_n{}^2-2u_nv_n|$證明定理2。

定理 2：最簡股差皆可寫成$|8k\pm1|$的形式，其中 $k\in Z$。

（三）我在定理 3 證明$|8k\pm1|$的所有質因數有$|8l\pm1|$或$|8l\pm3|$的形式。

定理 3：$|8k\pm1|$的所有質因數只可寫成$|8l\pm1|$或$|8l\pm3|$的形式，其中 $k,l\in Z$。

（四）由表 1 發現當一正整數的所有因數皆可寫成$|8l\pm1|$ 的形式時，此正整數為最簡股差。

表 1

$\|8k\pm1\|$		因數形式	最簡股差
1		$\|8l\pm1\|$	是
7, 17, 23, 31, 41, 47, 71, 73, ⋯	質數	$\|8l\pm1\|$	是
49, 119, 161, 217, 287, 289, ⋯	合數	$\|8l\pm1\|$	是
9, 15, 25, 33, 39, 55, 57, 63, ⋯	合數	$\|8l\pm1\|$ 與$\|8l\pm3\|$	否

（五）在張文忠「基礎數論-原理及題解」中找到最簡股差判別方法的證明線索〔3〕。

定義 1（張文忠〔3〕，定義 2）：$\left(\frac{a}{p}\right)$是一個對於給定的奇質數p，定義在一切與p互質的整數a上的函數，其值為$\left(\frac{a}{p}\right)=\begin{cases}1 & 若是a模p的二次剩餘\\ -1 & 若是a模p的二次非剩餘\end{cases}$

定理 4（張文忠〔3〕，定理 5）：對於奇質數p而言，$\left(\frac{a}{p}\right)$是一個完全積性函數，即

$a=a_1a_2\cdots a_n$時，有 $\left(\frac{a}{p}\right)=\left(\frac{a_1}{p}\right)\left(\frac{a_2}{p}\right)\cdots\left(\frac{a_n}{p}\right)$。

定理 5（張文忠〔3〕，定理 6）：對整數k而言，對於奇質數p有

$$\left(\frac{2}{p}\right)=(-1)^{\frac{p^2-1}{8}}=\begin{cases}1 & p=8k\pm1\\ -1 & p=8k\pm3\end{cases}$$

（六）由二次剩餘的概念，我由定理 6 至 8 證明最簡股差的判別方法：當一正整數的所有因數皆可寫成$|8l\pm1|$的形式（其中 $l\in Z$），則此正整數為最簡股差。

定理 6：最簡股差的所有質因數不可寫成$|8l\pm3|$的形式，其中 $l\in Z$。

定理 7：最簡股差的所有質因數皆可寫成$|8l\pm1|$的形式，其中 $l\in Z$。

定理 8：當一正整數的所有質因數皆可寫成$|8l\pm1|$的形式（其中 $l\in Z$）時，則此正整數為最簡股差。

二、最簡真分數數列的條數

（一）歐幾里得家族的$\langle\frac{v_n}{u_n}\rangle$中每一項$\frac{v_n}{u_n}$都以一對一的方式對應著一組$(a_n,b_n,c_n)$（表 2）。

表 2

$\frac{v_n}{u_n}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$
(a_n,b_n,c_n)	(3,4,5)	(5,12,13)	(15,8,17)	(7,24,25)	(21,20,29)	(9,40,41)	(35,12,37)	(11,60,61)

（二）歐幾里得家族中每一組素勾股數的股差等於$|u_n{}^2-v_n{}^2-2u_nv_n|$（表 3）。

表 3

$\frac{v_n}{u_n}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{7}{8}$	⋯
股差	1	7	7	17	1	31	23	49	17	23	71	47	7	41	97	⋯

（三）由歐幾里得家族產生費馬家族，由費馬家族可得到關係式(1)。

$$\frac{v_n}{u_n}=\frac{1}{2+\frac{v_{n-1}}{u_{n-1}}}$$ 關係式(1)

（四）由歐幾里得家族中任一個最簡真分數分別當作$\frac{v_1}{u_1}$，並代入關係式(1)。由此產生的$\frac{v_n}{u_n}$皆為歐幾里得家族的最簡真分數，即定理 9。

定理 9：當$\frac{v_n}{u_n}=\frac{1}{2+\frac{v_{n-1}}{u_{n-1}}}$，$u_1,v_1\in N, u_1>v_1, (u_1,v_1)=1$且 u_1,v_1為一奇一偶，則$\langle\frac{v_n}{u_n}\rangle$符合 $n,u_n,v_n\in N, u_n>v_n, (u_n,v_n)=1, u_n,v_n$為一奇一偶。

（五）由定理 10 的方法求得股差為定值（$|u_1{}^2-v_1{}^2-2u_1v_1|$）的素勾股數家族。

定理 10：當$(a_n,b_n,c_n)=(u_n{}^2-v_n{}^2, 2u_nv_n, u_n{}^2+v_n{}^2)$，$\frac{v_n}{u_n}=\frac{1}{2+\frac{v_{n-1}}{u_{n-1}}}$，$n,u_1,v_1\in N$，$u_1>v_1$，$(u_1,v_1)=1$，$u_1,v_1$為一奇一偶，則$|a_n-b_n|=|u_1{}^2-v_1{}^2-2u_1v_1|$。

（六）當$n,u_s,v_s,u_t,v_t,u_r,v_r\in N, u_s>v_s, u_t>v_t, u_r>v_r, (u_s,v_s)=1, (u_t,v_t)=1, (u_r,v_r)=1$，$u_s,v_s$為一奇一偶，$u_t,v_t$為一奇一偶，$u_r,v_r$為一奇一偶時，我得到關係式(2)與(3)。

$$\frac{v_r}{u_r}=\frac{\frac{v_s}{u_s}+\frac{v_t}{u_t}-2\left(\frac{v_s}{u_s}\right)\left(\frac{v_t}{u_t}\right)}{1+\left(\frac{v_s}{u_s}\right)\left(\frac{v_t}{u_t}\right)}$$ 關係式 (2)

$$\frac{v_r}{u_r}=\frac{\left|\frac{v_s}{u_s}-\frac{v_t}{u_t}\right|}{\left|1-\frac{v_s}{u_s}-\frac{v_t}{u_t}-\left(\frac{v_s}{u_s}\right)\left(\frac{v_t}{u_t}\right)\right|+\left|\frac{v_s}{u_s}-\frac{v_t}{u_t}\right|}$$ 關係式 (3)

（七）由任兩個歐幾里得家族的最簡真分數代入關係式(2)與(3)求得合成股差的最簡真分數數列。

1. 當股差為1時，只有1條最簡真分數數列，稱為1A數列。
2. 當股差為質數p時，至少有2條最簡真分數數列：pA數列與pB數列。
3. 當股差為質數p的n次方時，至少有2條最簡真分數數列：p^nA數列與p^nB數列。
4. 當股差為n個不同質數的乘積時，至少有2^n 條最簡真分數數列。
5. 當股差為n個不同質數之冪次方乘積時，至少有2^n 條最簡真分數數列。

三、勾股鐵路網

（一）將(u_n,v_n)當成平面座標(x,y)，各種$|a_n-b_n|$為定值的$\{(u_n,v_n)\}$構成平面座標中的「勾股鐵路網」，所有的勾股鐵路趨近於直線L：$y=(\sqrt{2}-1)x$（圖 1 與 2）。

（二）將(a_n,b_n,c_n)當成空間座標(x,y,z)，各種$|a_n-b_n|$為定值的$\{(a_n,b_n,c_n)\}$構成空間座標中的「勾股鐵路網」，(a_n,b_n,c_n)皆可標示於圓錐 Γ：$x^2+y^2=z^2$，其中x,y,z為正整數，且(a_n,b_n,c_n)與平面 E：$x=y$ 的最短距離為$\frac{|a_n-b_n|}{\sqrt{2}}$，勾股鐵路中的$(a_n,b_n,c_n)$與直線M：$\frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{\sqrt{2}}$（Γ與E所相交的直線）的最短距離趨近於$\frac{|a_n-b_n|}{\sqrt{2}}$（圖 1 與 3）。

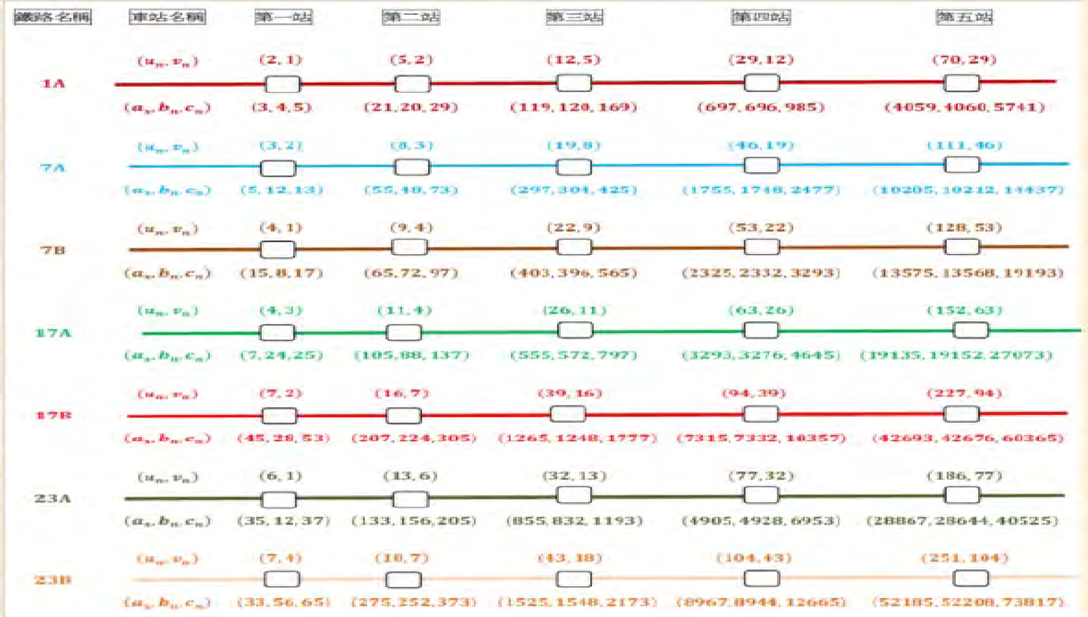

圖 1

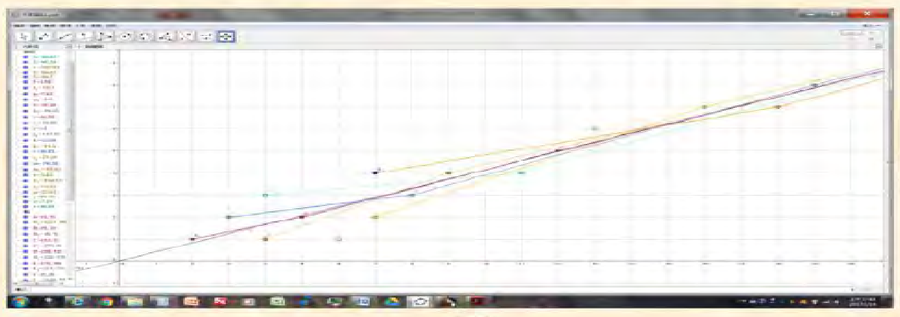

圖 2

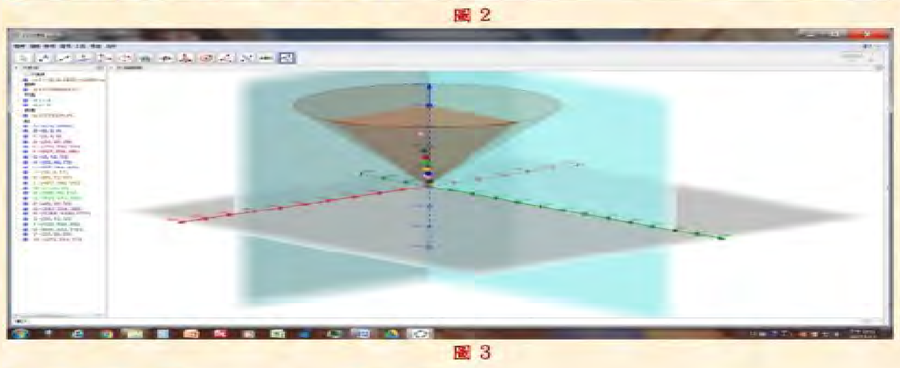

圖 3

（三）由關係式(2)與(3)確認或預估各種股差為定值的「勾股鐵路」之條數。

1. 當$|a_n-b_n|=1$時，只有一條勾股鐵路，即1A鐵路。
2. 當$|a_n-b_n|$為質數p時，至少有兩條勾股鐵路：pA鐵路與pB鐵路。
3. 當$|a_n-b_n|$為質數p的n次方時，至少有兩條勾股鐵路：p^nA鐵路與p^nB鐵路。
4. 當$|a_n-b_n|$為n個不同質數的乘積時，至少有2^n 條勾股鐵路。
5. 當$|a_n-b_n|$為n個不同質數之冪次方乘積時，至少有2^n 條勾股鐵路。

陸、研究結果

一、最簡股差的判別

最簡股差判別法為當一正整數的所有質因數皆可寫成$|8l\pm1|$的形式（其中 $l\in Z$）時，則此正整數為最簡股差（圖 4）。我在本研究中由二次剩餘證明這個判別法。

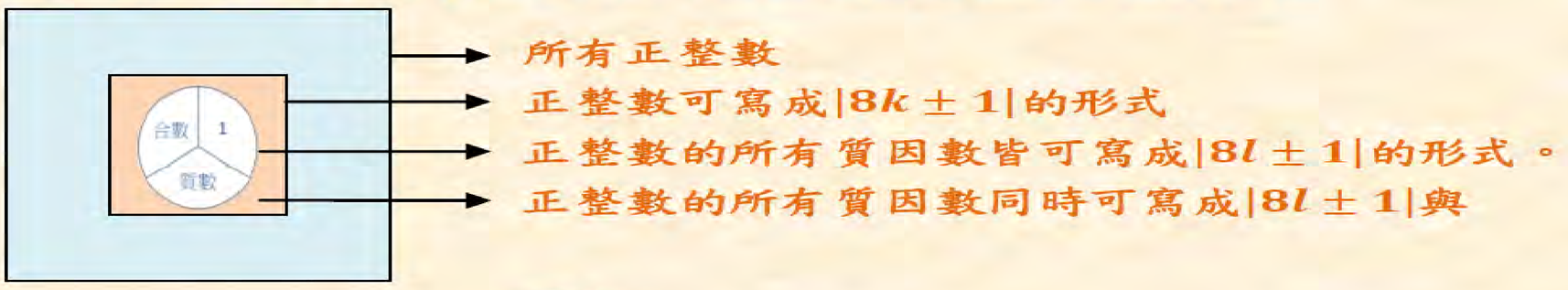

圖 4

二、最簡真分數數列的條數

任兩個歐幾里得家族的最簡真分數代入關係式(2)與(3)求得合成股差的最簡真分數數列。

（一）當股差為1時，只有1條最簡真分數數列，稱為1A數列。

（二）當股差為質數p時，至少有2條最簡真分數數列：pA數列與pB數列。

（三）當股差為質數p的n次方時，至少有2條最簡真分數數列：p^nA數列與p^nB數列。

（四）當股差為n個不同質數的乘積時，至少有2^n 條最簡真分數數列。

（五）當股差為n個不同質數之冪次方乘積時，至少有2^n 條最簡真分數數列。

三、勾股鐵路網

由關係式(2)與(3)確認或預估各種股差為定值的「勾股鐵路」之條數。

(一)當$|a_n-b_n|=1$時，只有一條勾股鐵路，即1A鐵路。

(二)當$|a_n-b_n|$為質數p時，至少有兩條勾股鐵路：pA鐵路與pB鐵路。

(三)當$|a_n-b_n|$為質數p的n次方時，至少有兩條勾股鐵路：p^nA鐵路與p^nB鐵路。

(四)當$|a_n-b_n|$為n個不同質數的乘積時，至少有2^n 條勾股鐵路。

(五)當$|a_n-b_n|$為n個不同質數之冪次方乘積時，至少有2^n 條勾股鐵路。

柒、討論

一、雖然「勾股鐵路網」作品已經利用「最簡股差皆可寫成$|8k\pm1|$的形式」剔除一大部份不可能是最簡股差的正整數，卻無法直接挑出最簡股差。我提出並證明最簡股差判別法為當一正整數的所有質因數皆可寫成$|8l\pm1|$的形式時，則此正整數為最簡股差，因此屬於質數的最簡股差之個數為無窮多個。「勾股鐵路網」作品已經證得若已知的兩組素勾股數中其中有一的最簡股差為質數，能找到最簡股差為原兩組最簡股差之積的素勾股數。我則證得若沒有質數的限制亦成立。

二、「勾股鐵路網」作者是藉由五個步驟產生相同股差的另一素勾股數家族。而我則藉由四個步驟產生相同股差的另一素勾股數家族（表 4）。

表 4

作品名稱	勾股鐵路網	再探勾股鐵路網
相同股差的另一素勾數家族產生法	(1)衍生數對(m,n) (2)構造式$\Delta m+m\sqrt{2}$ (3)由共軛式$-\Delta m+m\sqrt{2}$或$\Delta m-m\sqrt{2}$為正數者得新衍生數對(m',n') (4)遞迴關係式$S_n+2S_{n+1}=S_{n+2}$ (5)勾股數$\begin{cases}a=n'^2-m'^2\\b=2n'm'\\c=n'^2+m'^2\end{cases}$	(1)最簡真分數$\left(\frac{v_n}{u_n}\right)$ (2)$\frac{v_r}{u_r}=\frac{\frac{v_s}{u_s}+\frac{v_t}{u_t}-2\left(\frac{v_s}{u_s}\right)\left(\frac{v_t}{u_t}\right)}{1+\left(\frac{v_s}{u_s}\right)\left(\frac{v_t}{u_t}\right)}$ (3)關係式$\frac{v_n}{u_n}=\frac{1}{2+\frac{v_{n-1}}{u_{n-1}}}$ (4)勾股數$\begin{cases}a_n=u_n{}^2-v_n{}^2\\b_n=2u_nv_n\\c_n=u_n{}^2+v_n{}^2\end{cases}$

三、「勾股鐵路網」作者藉由七個步驟產生合成股差的素勾股數家族。而我則藉由四個步驟產生合成股差的素勾股數家族（表 5）。

表 5

作品名稱	勾股鐵路網	再探勾股鐵路網
合成股差的素勾數家族產生法	(1)衍生數對(m_s,n_s)與(m_t,n_t) (2)構造式$\Delta m_s+m_s\sqrt{2}$與$\Delta m_t+m_t\sqrt{2}$， (3)新股差構造式$\Delta m_r+m_r\sqrt{2}$ 等於 $(\Delta m_s\Delta m_t+2m_sm_t)+(m_s\Delta m_t+m_t\Delta m_s)\sqrt{2}$ (4)新股差共軛式$\Delta m_r-m_r\sqrt{2}$ 等於 $(\Delta m_s\Delta m_t+2m_sm_t)-(m_s\Delta m_t+m_t\Delta m_s)\sqrt{2}$ (5)新股差衍生數對(m_r,n_r) (6)遞迴關係式$S_n+2S_{n+1}=S_{n+2}$ (7)勾股數$\begin{cases}a=n_r{}^2-m_r{}^2\\b=2n_rm_r\\c=n_r{}^2+m_r{}^2\end{cases}$	(1)最簡真分數$\left(\frac{v_n}{u_n}\right)$ (2)$\frac{v_r}{u_r}=\frac{\frac{v_s}{u_s}+\frac{v_t}{u_t}-2\left(\frac{v_s}{u_s}\right)\left(\frac{v_t}{u_t}\right)}{1+\left(\frac{v_s}{u_s}\right)\left(\frac{v_t}{u_t}\right)}$或 $\frac{v_r}{u_r}=\frac{\left\lvert\frac{v_s}{u_s}-\frac{v_t}{u_t}\right\rvert}{\left\lvert1-\frac{v_s}{u_s}-\frac{v_t}{u_t}-\left(\frac{v_s}{u_s}\right)\left(\frac{v_t}{u_t}\right)\right\rvert+\left\lvert\frac{v_s}{u_s}-\frac{v_t}{u_t}\right\rvert}$ (3)關係式$\frac{v_n}{u_n}=\frac{1}{2+\frac{v_{n-1}}{u_{n-1}}}$ (4)勾股數$\begin{cases}a_n=u_n{}^2-v_n{}^2\\b_n=2u_nv_n\\c_n=u_n{}^2+v_n{}^2\end{cases}$

四、除了「勾股鐵路網」作品以及我的方法，我發現由貝格倫（B. Berggrens）的素勾股數三元樹(a tree of primitive Pythagorean triples)〔5〕(圖 5)也可產生不同的「勾股鐵路」。

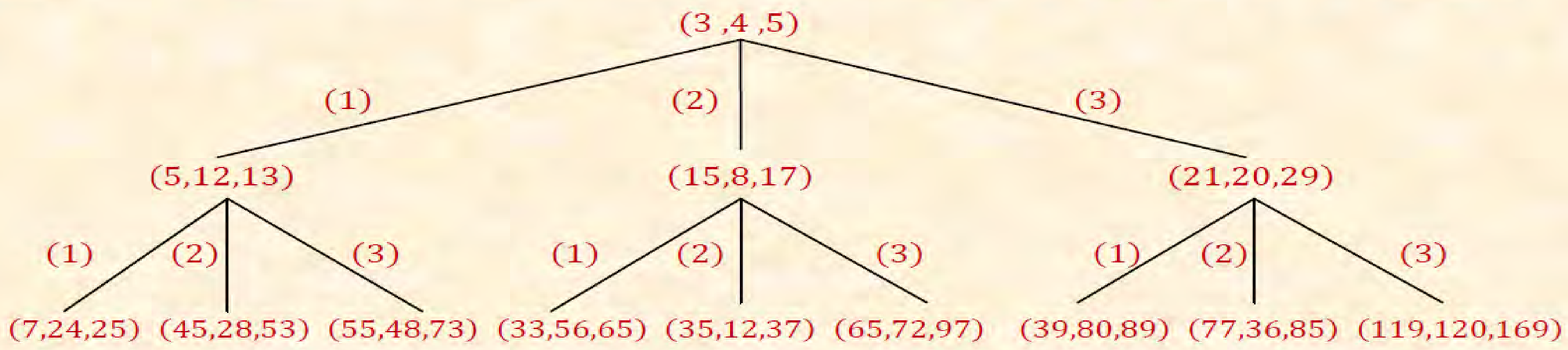

圖 5

說明：貝格倫由迭代公式(1)、(2)和(3)建立了素勾股數三元樹

$$(1)\begin{bmatrix}a_n\\b_n\\c_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-2&2\\2&-1&2\\2&-2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{n-1}\\b_{n-1}\\c_{n-1}\end{bmatrix},(2)\begin{bmatrix}a_n\\b_n\\c_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&2&2\\-2&1&2\\-2&2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{n-1}\\b_{n-1}\\c_{n-1}\end{bmatrix},(3)\begin{bmatrix}a_n\\b_n\\c_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{n-1}\\b_{n-1}\\c_{n-1}\end{bmatrix}$$

捌、結論

為了「勾股鐵路網」作品中未解決的問題，我探討股差為定值的素勾股數家族與最簡真分數數列。我找到並證明最簡股差的判別方法，可由正整數集合中可直接挑出最簡股差，接著找到三種關係式，並藉由這三種關係式產生最簡股差為定值的素勾股數家族的所有最簡真分數數列，因此解決「勾股鐵路網」尚未解決的前四項問題。希望未來能探討第五項尚未解決的問題：推廣至夾角非90度之三角形，探討其夾角兩邊的差與整數邊長之關係。此外，我也希望能由素勾股數三元樹探討空間座標中的「勾股鐵路網」，並且進一步應用於密碼學。

玖、參考資料及其他

〔1〕 高中數學課本第二冊（2017）。第一章：數列與級數。南一書局。

〔2〕 王重臻（2007）。勾股鐵路網。中華民國第四十七屆中小學科學展覽會高中組數學科。http://activity.ntsec.gov.tw/activity/race-1/47/senior/040410.pdf

〔3〕 張文忠（2002）。基礎數論-原理及題解。台北市。中央圖書。405-414。

〔4〕 蔡聰明（2010）。數學拾貝。台北市。三民。189－217。

〔5〕 Price, H. Lee (2008). "The Pythagorean Tree: A New Species". arXiv:0809.4324 [math.HO], from:http://arxiv.org/pdf/0809.4324.pdf