中華民國第57屆中小學科學展覽會
作品說明書

高級中等學校組　數學科

佳作

050417

球球相扣—球內接正多面體的定值問題探討

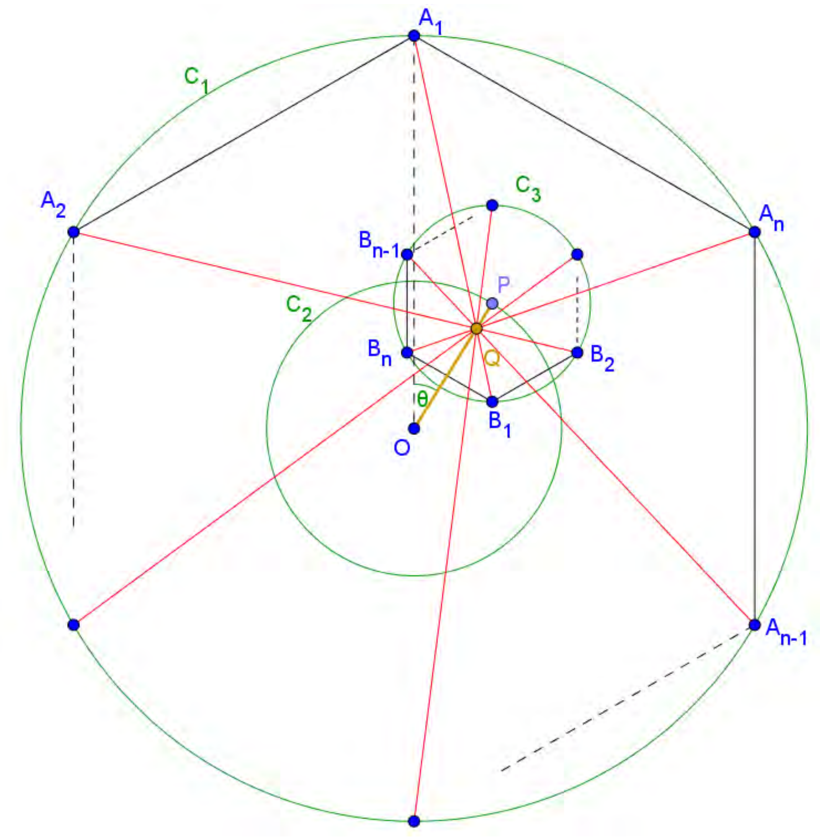
學校名稱：花蓮縣私立海星高級中學

作者：	指導老師：
高二 吳柏毅 高二 劉心雨	陳定邦 呂正基

關鍵詞：向量、正多面體

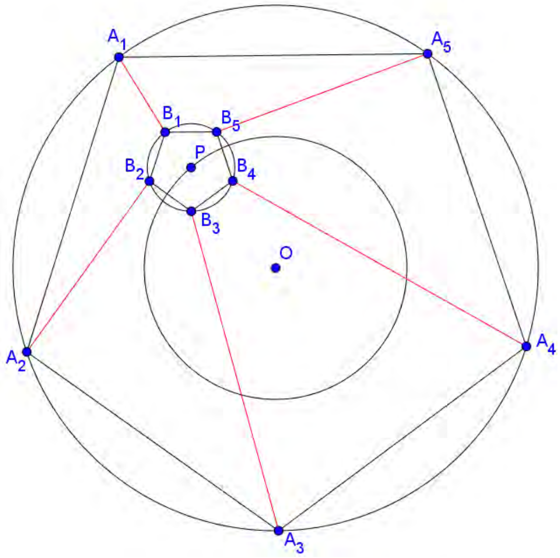
摘要

本研究是將平面上正n邊形與其外接圓上一動點P之間的定值問題推廣到空間中。我們藉由 Geogebra 繪圖軟體發現以O為圓心，作同心圓C_1、C_2且半徑分別為R_1、R_2，並作C_1的內接正n邊形，再以圓C_2上一動點P為圓心作圓C_3且半徑為r，再作圓C_3內接正n邊形。當反向時，連接兩兩頂點的n條線段會共點。除此之外，O與P和連線的交點亦會共線，而這性質在空間中也會成立。



壹、研究動機

在專題課時老師介紹了一篇第五十屆科展的文章(許勝傑[1])，文章後留下一個定值的問題：以O為圓心，作同心圓C_1、C_2，半徑分別為R_1、R_2，並作圓C_1的內接正五邊形$A_1 \cdots A_5$，再以圓C_2上一動點P為圓心作圓C_3，半徑為r，再作圓C_3內接正五邊形$B_1 \cdots B_5$，則兩正五邊形各頂點距離二次、四次、六次、八次方和恆為定值。在教授的評語中有提到可以用複數幾何或其他幾何工具來處理部分結果。無意間我們發現另一個幾何工具「向量」，它能將原本複雜的複數幾何算式，透過向量的運算讓式子變得精簡，也更能有效的解決問題，並可將平面上大部分的結果推廣到空間中，於是我們就改用向量的概念嘗試處理問題。



貳、研究目的

找出圓上一動點P與其內接正n邊形之各頂點所衍生的定值之公式，並將部分結果推廣到空間中的正多面體。

參、研究設備及器材

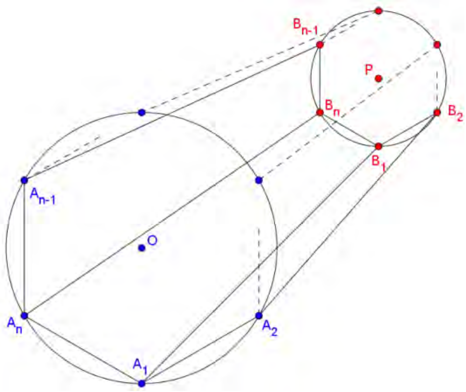
紙、筆、電腦、Geogebra 繪圖軟體、MathType。

肆、研究過程

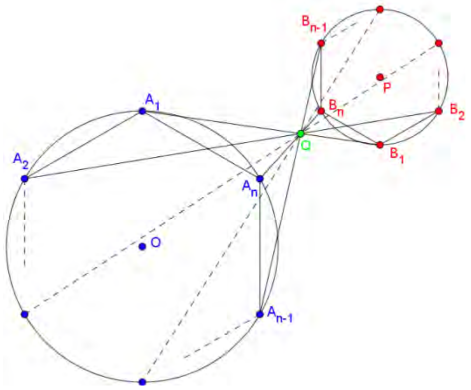
一、定義：

(一) 文章中，為了方便敘述。我們給了以下兩個定義。

> 定義 1：
> 在平面上，將兩正n邊形$A_1A_2\cdots A_n$與$B_1B_2\cdots B_n$邊長的比值設為L且O、P分別為其中心。若$\overrightarrow{OA_k}=L\,\overrightarrow{PB_k}$，$k=1,2,\cdots,n$，則稱兩正$n$邊形為同向；若$\overrightarrow{OA_k}=-L\,\overrightarrow{PB_k}$，$k=1,2,\cdots,n$，則稱兩正$n$邊形為反向。



(同向)



(反向)

> 定義 2：
> 在空間中，將兩正多面體$A_1A_2\cdots A_V$與$B_1B_2\cdots B_V$邊長的比值設為L且O、P分別為其中心，若$\overrightarrow{OA_k}=L\,\overrightarrow{PB_k}$，$k=1,2,\cdots,V$，則稱兩正多面體為同向；若$\overrightarrow{OA_k}=-L\,\overrightarrow{PB_k}$，$k=1,2,\cdots,V$，則稱兩正面體為反向。

二、平面上定值之探討：

(一) 為了推廣及證明一般的情況，我們先證明幾個引理。

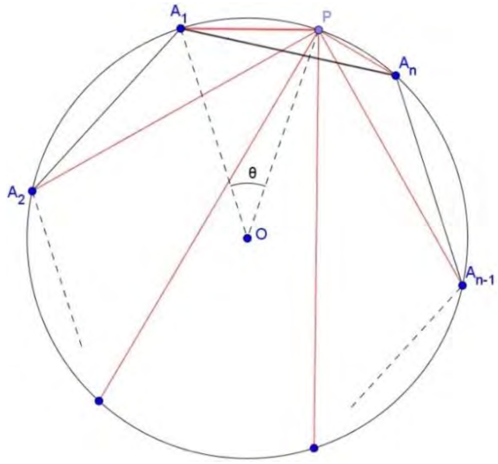
> 引理 1：(許勝傑[1])
> $$\sum_{k=1}^{n}\cos t\left(\frac{2k\pi}{n}+\theta\right)=\begin{cases}0\left(t\text{不是}n\text{的倍數}\right)\\ n\cos t\theta\left(t\text{是}n\text{的倍數}\right)\end{cases}\left(\text{其中}n,t\in N\right)$$

> 引理 2：
> 以O為圓心半徑為R作一圓，再作其內接正n邊形$A_1A_2\cdots A_n$，圓上有一動點P，則$\sum_{k=1}^{n}\cos\angle POA_k=0$。

證明：

不失一般性，設P落於A_1A_n上，設$\angle POA_1=\theta$

則 $\angle POA_k = \dfrac{2(k-1)\pi}{n} + \theta$ ，$k = 1, 2, \cdots, n$



$$\sum_{k=1}^{n} \cos \angle POA_k = \sum_{k=1}^{n} \cos\left[\frac{2(k-1)\pi}{n} + \theta\right]$$

由引理 1 得 $\sum_{k=1}^{n} \cos\left[\dfrac{2(k-1)\pi}{n} + \theta\right] = 0$

$\therefore \sum_{k=1}^{n} \cos \angle POA_k = 0$

引理 3： 以 O 為圓心半徑為 R 作一球，再作其內接正 n 邊形 $A_1A_2 \cdots A_n$ ，圓上有一動點 P ，則 $\sum_{k=1}^{n} \cos^2 \angle POA_k = \dfrac{n}{2}$ 。

證明：

不失一般性，設 P 點落於 A_1A_n 上，設 $\angle POA_1 = \theta$

則 $\angle POA_k = \dfrac{2(k-1)\pi}{n} + \theta$ ，$k = 1, 2, \cdots, n$

$$\cos^2 \angle POA_1 = \frac{1 + \cos 2\angle POA_1}{2}$$

$$\vdots$$

$$\cos^2 \angle POA_n = \frac{1 + \cos 2\angle POA_n}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \cos^2 \angle POA_k = \frac{n + \sum_{k=1}^{n} \cos 2\angle POA_k}{2}$$

$$= \frac{n + \sum_{k=1}^{n} \cos 2\left[\frac{2(k-1)\pi}{n} + \theta\right]}{2}$$

由引理 1 得 $\sum_{k=1}^{n} \cos 2\left[\dfrac{2(k-1)\pi}{n} + \theta\right] = 0$ $\therefore \sum_{k=1}^{n} \cos^2 \angle POA_k = \dfrac{n}{2}$

(二) 一些已知定理

定理 1-1：(許勝傑[1]) 半徑為 R 之圓上一動點 P ，到其內接正 n 邊形各頂點距離平方和恆為定值，其值為 $2nR^2$ 。

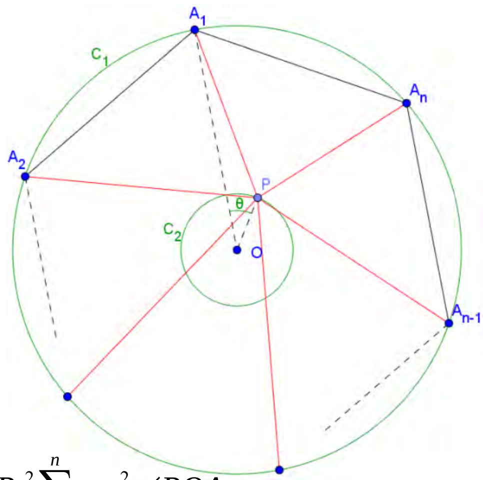
定理 1-2：(許勝傑[1])
半徑為 R 之圓上一動點 P，到其內接正 n 邊形各頂點距離四次方和恆為定值，其值為 $6nR^4$。

定理 1-3：(許勝傑[1])
以 O 為圓心，作同心圓 C_1、C_2，半徑分別為 R_1、R_2，則圓 C_2 上一動點 P 到圓 C_1 內接正 n 邊形各頂點距離平方和恆為定值，其值為 $n\left(R_1^2+R_2^2\right)$。

(三) 探討同心圓 C_2 上一動點 P 到圓 C_1 內接正 n 邊形各頂點距離四次方和。

定理 1-4：
以 O 為圓心，作同心圓 C_1、C_2，半徑分別為 R_1、R_2，則圓 C_2 上一動 P 點到圓 C_1 內接正 n 邊形各頂點距離四次和恆為定值，其值為 $n\left[\left(R_1^2+R_2^2\right)^2+2R_1^2R_2^2\right]$。

證明：



$$\overline{PA_k}^4=\left(\overline{PA_k}^2\right)^2$$
$$=\left(R_1^2+R_2^2-2R_1R_2\cos\angle POA_k\right)^2$$
$$=\left(R_1^2+R_2^2\right)^2-4R_1R_2\left(R_1^2+R_2^2\right)\cos\angle POA_k$$
$$+4R_1^2R_2^2\cos^2\angle POA_k$$
$$\sum_{k=1}^{n}\overline{PA_k}^4=n\left(R_1^2+R_2^2\right)^2$$
$$-4R_1R_2\left(R_1^2+R_2^2\right)\sum_{k=1}^{n}\cos\angle POA_k+4R_1^2R_2^2\sum_{k=1}^{n}\cos^2\angle POA_k$$

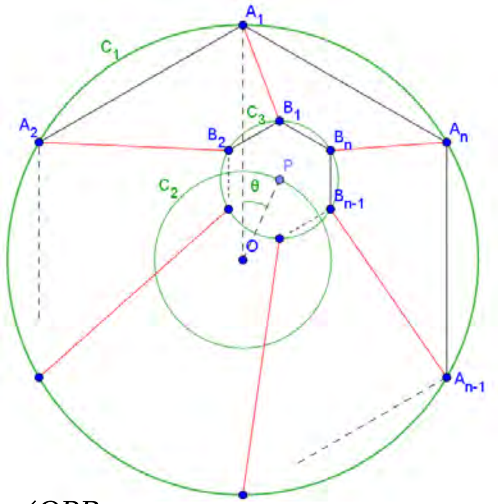
由引理 2、3 得 $\sum_{k=1}^{n}\cos\angle POA_k=0$，$\sum_{k=1}^{n}\cos^2\angle POA_k=\frac{n}{2}$

$$\therefore\sum_{k=1}^{n}\overline{PA_k}^4=n\left(R_1^2+R_2^2\right)^2+2nR_1^2R_2^2$$
$$=n\left[\left(R_1^2+R_2^2\right)^2+2R_1^2R_2^2\right]$$

(四) 探討以 C_2 上一動點 P 為圓心之圓 C_3 的內接正 n 邊形各頂點到圓 C_1 內接正 n 邊形各頂點距離平方和，且兩正 n 邊形同向。

定理 1-5：
以 O 為圓心，作同心圓 C_1、C_2，半徑分別為 R_1、R_2，並作圓 C_1 的內接正 n 邊形，再以圓 C_2 上一動點 P 為圓心作圓 C_3，半徑為 r，再作圓 C_3 內接正 n 邊形，且兩正 n 邊形同向，則兩正 n 邊形各頂點距離平方和恆為定值，其值為 $n\left[\left(R_1-r\right)^2+R_2^2\right]$。

證明：



$$\overline{A_kB_k}^2=\left|\overrightarrow{A_kB_k}\right|^2$$
$$=\left|\overrightarrow{A_kO}+\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PB_k}\right|^2$$
$$=\left|\overrightarrow{A_kO}\right|^2+\left|\overrightarrow{OP}\right|^2+\left|\overrightarrow{PB_k}\right|^2$$
$$+2\overrightarrow{A_kO}\cdot\overrightarrow{OP}+2\overrightarrow{A_kO}\cdot\overrightarrow{PB_k}+2\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{PB_k}$$
$$=R_1^2+R_2^2+r^2$$
$$-2R_1R_2\cos\angle POA_k+2R_1r\cos\pi-2R_2r\cos\angle OPB_k$$

$\because \angle POA_k$ 與 $\angle OPB_k$ 為同側內角 $\therefore \angle OPB_k=\pi-\angle POA_k$ ，$\cos\angle OPB_k=-\cos\angle POA_k$

$$\overline{A_kB_k}^2=R_1^2+R_2^2+r^2-2R_1R_2\cos\angle POA_k-2R_1r+2R_2r\cos\angle POA_k$$
$$=(R_1-r)^2+R_2^2-2R_2(R_1-r)\cos\angle POA_k$$
$$\sum_{k=1}^{n}\overline{A_kB_k}^2=n\left[(R_1-r)^2+R_2^2\right]-2R_2(R_1-r)\sum_{k=1}^{n}\cos\angle POA_k$$

由引理 2 得 $\sum_{k=1}^{n}\cos\angle POA_k=0$

$$\therefore\sum_{k=1}^{n}\overline{A_kB_k}^2=n\left[(R_1-r)^2+R_2^2\right]$$

(五) 探討以 C_2 上一動點 P 為圓心之圓 C_3 的內接正 n 邊形各頂點到圓 C_1 內接正 n 邊形各頂點距離四次方和，且兩正 n 邊形同向。

定理 1-6：
以 O 為圓心，作同心圓 C_1、C_2 ，半徑分別為 R_1、R_2 ，並作圓 C_1 的內接正 n 邊形，再以圓 C_2 上一動點 P 為圓心作圓 C_3 ，半徑為 r ，再作圓 C_3 內接正 n 邊形，且兩正 n 邊形同向，則兩正 n 邊形各頂點距離四次方和恆為定值，其值為

$n\left[(R_1-r)^4+R_2^4+4R_2^2(R_1-r)^2\right]$ 。

證明：

$$\overline{A_kB_k}^4=\left(\overline{A_kB_k}^2\right)^2$$
$$=\left[(R_1-r)^2+R_2^2-2R_2(R_1-r)\cos\angle POA_k\right]^2$$
$$=\left[(R_1-r)^2+R_2^2\right]^2-4R_2(R_1-r)\left[(R_1-r)^2+R_2^2\right]\cos\angle POA_k$$
$$+4R_2^2(R_1-r)^2\cos^2\angle POA_k$$

$$\sum_{k=1}^{n}\overline{A_kB_k}^4 = n\left[\left(R_1-r\right)^2+R_2^{\ 2}\right]^2-4R_2\left(R_1-r\right)\left[\left(R_1-r\right)^2+R_2^{\ 2}\right]\sum_{k=1}^{n}\cos\angle POA_k$$

$$+4R_2^{\ 2}\left(R_1-r\right)^2\sum_{k=1}^{n}\cos^2\angle POA_k$$

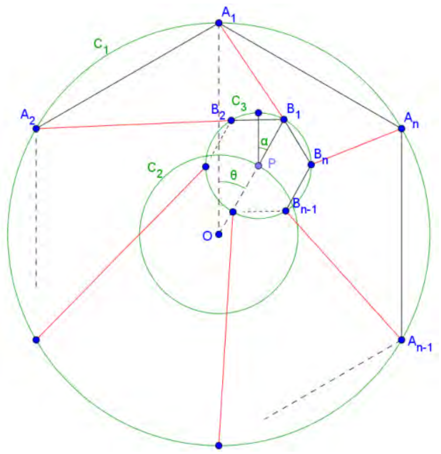
由引理 2、3 得 $\sum_{k=1}^{n}\cos\angle POA_k=0$ ，$\sum_{k=1}^{n}\cos^2\angle POA_k=\dfrac{n}{2}$

$$\therefore\sum_{k=1}^{n}\overline{A_kB_k}^4 = n\left[\left(R_1-r\right)^2+R_2^{\ 2}\right]^2+2nR_2^{\ 2}\left(R_1-r\right)^2 = n\left[\left(R_1-r\right)^4+R_2^{\ 4}+4R_2^{\ 2}\left(R_1-r\right)^2\right]$$

(六) 探討以 C_2 上一動點 P 為圓心之圓 C_3 的內接正 n 邊形各頂點到圓 C_1 內接正 n 邊形各頂點距離平方和，且圓 C_3 任意旋轉 α 角。

> 定理 1-7：
> 以 O 為圓心，作同心圓 C_1、C_2 ，半徑分別為 R_1、R_2 ，並作圓 C_1 的內接正 n 邊形，再以圓 C_2 上一動點 P 為圓心作圓 C_3，半徑為 r，再作圓 C_3 內接正 n 邊形，且圓 C_3 任意旋轉 α 角，則兩正 n 邊形各頂點距離平方和不為定值，其值為
>
> $n\left(R_1^{\ 2}+R_2^{\ 2}+r^2-2R_1r\cos\alpha\right)$。

證明：



$$\overline{A_kB_k}^2 = \left|\overrightarrow{A_kB_k}\right|^2$$

$$= \left|\overrightarrow{A_kO}+\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PB_k}\right|^2$$

$$= \left|\overrightarrow{A_kO}\right|^2+\left|\overrightarrow{OP}\right|^2+\left|\overrightarrow{PB_k}\right|^2$$

$$+2\,\overrightarrow{A_kO}\cdot\overrightarrow{OP}+2\,\overrightarrow{A_kO}\cdot\overrightarrow{PB_k}+2\,\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{PB_k}$$

$$= R_1^{\ 2}+R_2^{\ 2}+r^2-2R_1R_2\cos\angle POA_k$$

$$-2R_1r\cos\alpha-2R_2r\cos\angle OPB_k$$

$\because \angle OPB_k=\pi-\angle POA_k+\alpha \quad \therefore \cos\angle OPB_k=-\cos\left(\angle POA_k-\alpha\right)$

$$\overline{A_kB_k}^2 = R_1^{\ 2}+R_2^{\ 2}+r^2-2R_1R_2\cos\angle POA_k-2R_1r\cos\alpha+2R_2r\cos\left(\angle POA_k-\alpha\right)$$

$$\sum_{k=1}^{n}\overline{A_kB_k}^2 = n\left(R_1^{\ 2}+R_2^{\ 2}+r^2\right)-2R_1R_2\sum_{k=1}^{n}\cos\angle POA_k-2nR_1r\cos\alpha+2R_2r\sum_{k=1}^{n}\cos\left(\angle POA_k-\alpha\right)$$

由引理 1、2 得 $\sum_{k=1}^{n}\cos\left(\angle POA_k-\alpha\right)=0$ ，$\sum_{k=1}^{n}\cos\angle POA_k=0$

$$\therefore\sum_{k=1}^{n}\overline{A_kB_k}^2 = n\left(R_1^{\ 2}+R_2^{\ 2}+r^2\right)-2nR_1r\cos\alpha=n\left(R_1^{\ 2}+R_2^{\ 2}+r^2-2R_1r\cos\alpha\right)$$

(七) 探討以 C_2 上一動點 P 為圓心之圓 C_3 的內接正 n 邊形各頂點到圓 C_1 內接正 n 邊形各頂點距離四次方和，且圓 C_3 任意旋轉 α 角。

定理 1-8：
以 O 為圓心，作同心圓 C_1、C_2，半徑分別為 R_1、R_2，並作圓 C_1 的內接正 n 邊形，再以圓 C_2 上一動點 P 為圓心作圓 C_3，半徑為 r，再作圓 C_3 內接正 n 邊形，且圓 C_3 任意旋轉 α 角，則兩正 n 邊形各頂點距離四次方和不為定值，其值為

$$n\left[\left(R_1^2+R_2^2+r^2\right)^2-4R_1r\cos\theta\left(R_1^2+R_2^2+r^2\right)+2R_1^2R_2^2+4R_1^2r^2\cos^2\theta+2R_2^2r^2-4R_1R_2^2r\cos\theta\right]。$$

證明：

$$\overline{A_kB_k}^4=\left(\overline{A_kB_k}^2\right)^2$$
$$=\left(R_1^2+R_2^2+r^2-2R_1R_2\cos\angle POA_k-2R_1r\cos\theta-2R_2r\cos\angle OPB_k\right)^2$$
$$=\left(R_1^2+R_2^2+r^2\right)^2-4\left(R_1^2+R_2^2+r^2\right)\left(R_1R_2\cos\angle POA_k+R_1r\cos\theta+R_2r\cos\angle OPB_k\right)$$
$$+4\Big(R_1^2R_2^2\cos^2\angle POA_k+R_1^2r^2\cos^2\theta+R_2^2r^2\cos^2\angle OPB_k+2R_1^2R_2r\cos\angle POA_k\cos\theta$$
$$+2R_1R_2^2r\cos\angle POA_k\cos\angle OPB_k+2R_1R_2r^2\cos\angle OPB_k\cos\theta\Big)$$
$$=\left(R_1^2+R_2^2+r^2\right)^2-4\left(R_1^2+R_2^2+r^2\right)\left(R_1R_2\cos\angle POA_k+R_1r\cos\theta+R_2r\cos\angle OPB_k\right)$$
$$+4\Big\{R_1^2R_2^2\cos^2\angle POA_k+R_1^2r^2\cos^2\theta+R_2^2r^2\cos^2\angle OPB_k+R_1R_2r\Big[R_1\left(\cos(\angle POA_k+\theta)\right.$$
$$\left.+\cos(\angle POA_k-\theta)\right)R_2\left(\cos(\angle POA_k+\angle OPB_k)+\cos(\angle POA_k-\angle OPB_k)\right)+r\left(\cos(\angle OPB_k+\theta)+\cos(\angle OPB_k-\theta)\right)\Big]\Big\}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\overline{A_kB_k}^4=n\left(R_1^2+R_2^2+r^2\right)^2-4\left(R_1^2+R_2^2+r^2\right)\left(R_1R_2\sum_{k=1}^{n}\cos\angle POA_k+nR_1r\cos\theta+R_2r\sum_{k=1}^{n}\cos\angle OPB_k\right)$$
$$+4\Bigg\{R_1^2R_2^2\sum_{k=1}^{n}\cos^2\angle POA_k+nR_1^2r^2\cos^2\theta+R_2^2r^2\sum_{k=1}^{n}\cos^2\angle OPB_k+R_1R_2r\Bigg[R_1\sum_{k=1}^{n}\left(\cos(\angle POA_k+\theta)+\cos(\angle POA_k-\theta)\right)$$
$$+R_2\sum_{k=1}^{n}\left(\cos(\angle POA_k+\angle OPB_k)+\cos(\angle POA_k-\angle OPB_k)\right)+r\sum_{k=1}^{n}\left(\cos(\angle OPB_k+\theta)+\cos(\angle OPB_k-\theta)\right)\Bigg]\Bigg\}$$

由引理1、2、3得 $\sum_{k=1}^{n}\left(\cos(\angle POA_k+\theta)+\cos(\angle POA_k-\theta)\right)=\sum_{k=1}^{n}\cos(\angle POA_k-\angle OPB_k)=\sum_{k=1}^{n}\left(\cos(\angle OPB_k+\theta)+\cos(\angle OPB_k-\theta)\right)=0$

，$\sum_{k=1}^{n}\cos^2\angle POA_k=\sum_{k=1}^{n}\cos^2\angle OPB_k=\dfrac{n}{2}$

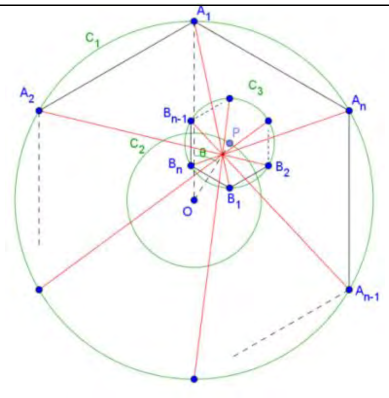
$$\sum_{k=1}^{n}\overline{A_kB_k}^4=n\left(R_1^2+R_2^2+r^2\right)^2-4nR_1r\cos\theta\left(R_1^2+R_2^2+r^2\right)+2\left(nR_1^2R_2^2+2nR_1^2r^2\cos^2\theta+nR_2^2r^2-2nR_1R_2^2r\cos\theta\right)$$
$$=n\left[\left(R_1^2+R_2^2+r^2\right)^2-4R_1r\cos\theta\left(R_1^2+R_2^2+r^2\right)+2R_1^2R_2^2+4R_1^2r^2\cos^2\theta+2R_2^2r^2-4R_1R_2^2r\cos\theta\right]$$

(八) 探討以 C_2 上一動點 P 為圓心之圓 C_3 的內接正 n 邊形各頂點到圓 C_1 內接正 n 邊形各頂點距離平方和，且兩正 n 邊形反向。

定理 1-9：
以 O 為圓心，作同心圓 C_1、C_2，半徑分別為 R_1、R_2，並作圓 C_1 的內接正 n 邊形，再以圓 C_2 上一動點 P 為圓心作圓 C_3，半徑為 r，再作圓 C_3 內接正 n 邊形，且兩正 n 邊形反向，則兩正 n 邊形各頂點距離平方和恆為定值，其值為 $n\left[\left(R_1+r\right)^2+R_2^2\right]$。

證明：

$$\overline{A_kB_k}^2=\left|\overrightarrow{A_kB_k}\right|^2$$
$$=\left|\overrightarrow{A_kO}+\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PB_k}\right|^2$$



$$=\left|\overrightarrow{A_kO}\right|^2+\left|\overrightarrow{OP}\right|^2+\left|\overrightarrow{PB_k}\right|^2+2\,\overrightarrow{A_kO}\cdot\overrightarrow{OP}+2\,\overrightarrow{A_kO}\cdot\overrightarrow{PB_k}+2\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{PB_k}$$

$$=R_1^{\ 2}+R_2^{\ 2}+r^2-2R_1R_2\cos\angle POA_k+2R_1r\cos 2\pi-2R_2r\cos\angle OPB_k$$

$\because\angle POA_k$ 與 $\angle OPB_k$ 為內錯角 $\therefore\angle OPB_k=\angle POA_k$ ，$\cos\angle OPB_k=\cos\angle POA_k$

$$\overline{A_kB_k}^2=R_1^{\ 2}+R_2^{\ 2}+r^2-2R_1R_2\cos\angle POA_k+2R_1r-2R_2r\cos\angle POA_k$$

$$=\left(R_1+r\right)^2+R_2^{\ 2}-2R_2\left(R_1+r\right)\cos\angle POA_k$$

$$\sum_{k=1}^{n}\overline{A_kB_k}^2=n\left[\left(R_1+r\right)^2+R_2^{\ 2}\right]-2R_2\left(R_1+r\right)\sum_{k=1}^{n}\cos\angle POA_k$$

由引理 2 得 $\sum_{k=1}^{n}\cos\angle POA_k=0$ $\therefore\sum_{k=1}^{n}\overline{A_kB_k}^2=n\left[\left(R_1+r\right)^2+R_2^{\ 2}\right]$

(九) 探討以 C_2 上一動點 P 為圓心之圓 C_3 的內接正 n 邊形各頂點到圓 C_1 內接正 n 邊形各頂點距離四次方和，且兩正 n 邊形反向。

定理 1-10：
以 O 為圓心，作同心圓 C_1、C_2 ，半徑分別為 R_1、R_2 ，並作圓 C_1 的內接正 n 邊形，再以圓 C_2 上一動點 P 為圓心作圓 C_3 ，半徑為 r ，再作圓 C_3 內接正 n 邊形，且兩正 n 邊形反向，則兩正 n 邊形各頂點距離四次方和恆為定值，其值為
$n\left[\left(R_1+r\right)^4+R_2^{\ 4}+4R_2^{\ 2}\left(R_1+r\right)^2\right]$。

證明：

$$\overline{A_kB_k}^4=\left(\overline{A_kB_k}^2\right)^2$$

$$=\left[\left(R_1+r\right)^2+R_2^{\ 2}-2R_2\left(R_1+r\right)\cos\angle POA_k\right]^2$$

$$=\left[\left(R_1+r\right)^2+R_2^{\ 2}\right]^2-4R_2\left(R_1+r\right)\left[\left(R_1+r\right)^2+R_2^{\ 2}\right]\cos\angle POA_k+4R_2^{\ 2}\left(R_1+r\right)^2\cos^2\angle POA_k$$

$$\sum_{k=1}^{n}\overline{A_kB_k}^4=n\left[\left(R_1+r\right)^2+R_2^{\ 2}\right]^2-4R_2\left(R_1+r\right)\left[\left(R_1+r\right)^2+R_2^{\ 2}\right]\sum_{k=1}^{n}\cos\angle POA_k$$

$$+4R_2^{\ 2}\left(R_1+r\right)^2\sum_{k=1}^{n}\cos^2\angle POA_k$$

由引理 2、3 得 $\sum_{k=1}^{n}\cos\angle POA_k=0$ ，$\sum_{k=1}^{n}\cos^2\angle POA_k=\dfrac{n}{2}$

$$\therefore\sum_{k=1}^{n}\overline{A_kB_k}^4=n\left[\left(R_1+r\right)^2+R_2^{\ 2}\right]^2+2nR_2^{\ 2}\left(R_1+r\right)^2$$

$$=n\left[\left(R_1+r\right)^4+R_2^{\ 4}+4R_2^{\ 2}\left(R_1+r\right)^2\right]$$

(十) 定理 1-9 中我們發現當兩正 n 邊形反向時，n 條線段 $\overline{A_kB_k}$ 會交於一點，因此我們加以證明此性質。

性質 1：
給定平面上正 n 邊形 $A_1A_2\cdots A_n$ 與正 n 邊形 $B_1B_2\cdots B_n$ 邊長比值設為 L，O、P 分別為其中心，且兩正 n 邊形反向，則：(1) n 條線段 $\overline{A_kB_k}$ 交於一點 Q (2) $O-Q-P$ 共線

證明:

(1)令 $\overline{A_1B_1}$ 與 $\overline{A_2B_2}$ 交於 Q 點，則 $\overline{QA_1}:\overline{QB_1}=\overline{QA_2}:\overline{QB_2}=L:1$

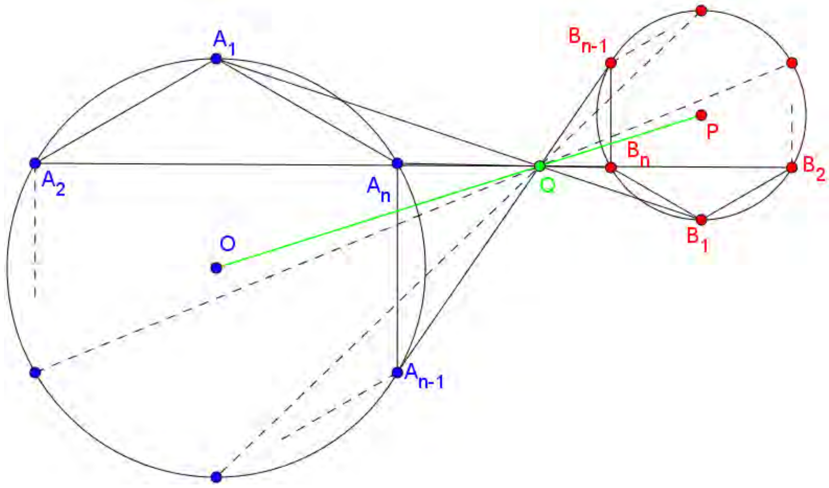
令 $\overline{A_2B_2}$ 與 $\overline{A_3B_3}$ 交於 Q' 點，則可得到 $\overline{Q'A_2}:\overline{Q'B_2}=\overline{Q'A_3}:\overline{Q'B_3}=L:1=\overline{QA_2}:\overline{QB_2}$

故 $Q'=Q$，即 $\overline{A_1B_1}$、$\overline{A_2B_2}$、$\overline{A_3B_3}$ 三線段交於一點，重複以上步驟，可證明 $\overline{A_kB_k}$、$\overline{A_{k+1}B_{k+1}}$、$\overline{A_{k+2}B_{k+2}}$ 三線段交於一點，故此 n 條線段 $\overline{A_kB_k}$ 交於一點。

(2)已知 $R_1:r=\dfrac{L}{2\sin\left(\dfrac{\pi}{n}\right)}:\dfrac{1}{2\sin\left(\dfrac{\pi}{n}\right)}=L:1$ (維基百科/外接圓[10])

令 $\overline{A_1B_1}$ 與 $\overline{OP}$ 交於 Q'' 點，則 $\overline{Q''A_1}:\overline{Q''B_1}=R_1:r=L:1=\overline{QA_1}:\overline{QB_1}$

故 $Q''=Q$，即 $O-Q-P$ 共線。



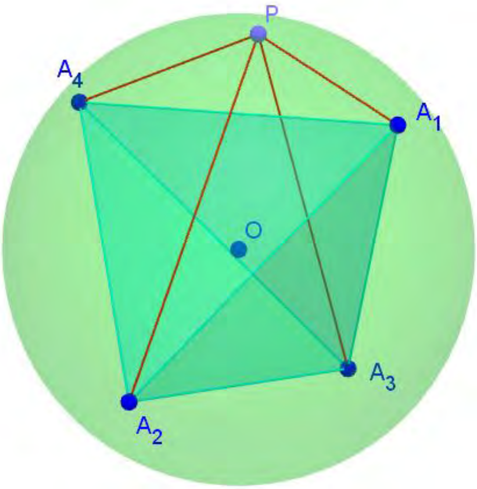
三、空間中點與點距離定值之探討(為了公式的一致性，定義 V 為正多面體頂點的個數)：

(一) 探討球上一動點 P 到其內接正多面體各頂點距離平方和。

定理 2-1：
以 O 為球心，半徑為 R 之球上一動點 P，到其內接正多面體 $A_1A_2\cdots A_V$ 各頂點距離平方和恆為定值，其值為 $2VR^2$。

證明：

$$\overline{PA_k}^2=\left|\overrightarrow{PA_k}\right|^2$$
$$=\left|\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OA_k}\right|^2$$
$$=\left|\overrightarrow{PO}\right|^2+2\,\overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{OA_k}+\left|\overrightarrow{OA_k}\right|^2$$
$$=2R^2-2R^2\cos\angle POA_k$$
$$=2R^2\left(1-\cos\angle POA_k\right)$$
$$\sum_{k=1}^{V}\overline{PA_k}^2=2R^2\left(V-\sum_{k=1}^{V}\cos\angle POA_k\right)$$



由參考資料[11]，得$\sum_{k=1}^{V}\cos\angle POA_k=0$ $\therefore\sum_{k=1}^{V}\overline{PA_k}^2=2VR^2$

(二) 探討球上一動點 P 到其內接正多面體各頂點距離四次方和。

定理 2-2：
以 O 為球心，半徑為 R 之球上一動點 P，到其內接正多面體 $A_1A_2\cdots A_V$ 各頂點距離四次方和恆為定值，其值為$\frac{16}{3}VR^4$。

證明：

$$\overline{PA_k}^4=\left(\overline{PA_k}^2\right)^2$$
$$=\left[2R^2\left(1-\cos\angle POA_k\right)\right]^2$$
$$=4R^4\left(\cos^2\angle POA_k-2\cos\angle POA_k+1\right)$$
$$\sum_{k=1}^{V}\overline{PA_k}^4=4R^4\left(\sum_{k=1}^{V}\cos^2\angle POA_k-2\sum_{k=1}^{V}\cos\angle POA_k+V\right)$$

由參考資料[11]、[12]，得$\sum_{k=1}^{V}\cos\angle POA_k=0$，$\sum_{k=1}^{V}\cos^2\angle POA_k=\frac{V}{3}$

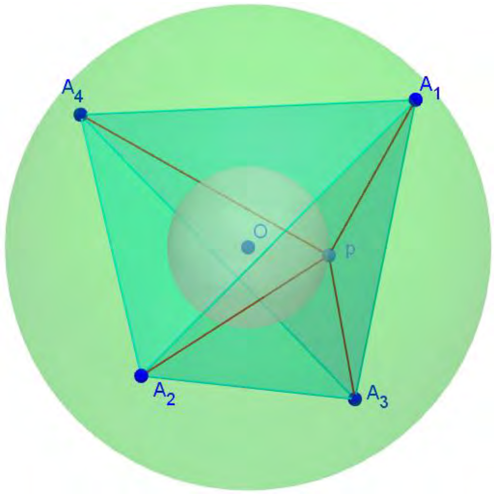
$$\therefore\sum_{k=1}^{V}\overline{PA_k}^4=4R^4\left(\frac{V}{3}+V\right)$$
$$=\frac{16}{3}VR^4$$

(三) 探討同心球 C_2 上一動點 P 到球 C_1 內接正多面體各頂點距離平方和。

定理 2-3：
以 O 為球心，做同心球 C_1、C_2，半徑分別為 R_1、R_2，則球 C_2 上一動點 P 到球 C_1 內接正多面體各頂點距離平方和恆為定值，其值為$V\left(R_1^2+R_2^2\right)$。

證明：

$$\overline{PA_k}^2=\left|\overrightarrow{PA_k}\right|^2$$
$$=\left|\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OA_k}\right|^2$$
$$=\left|\overrightarrow{PO}\right|^2+2\,\overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{OA_k}+\left|\overrightarrow{OA_k}\right|^2$$
$$=R_1^{\,2}+R_2^{\,2}-2R_1R_2\cos\angle POA_k$$
$$\sum_{k=1}^{V}\overline{PA_k}^2=V\left(R_1^{\,2}+R_2^{\,2}\right)-2R_1R_2\sum_{k=1}^{V}\cos\angle POA_k$$



由參考資料[11]，得$\sum_{k=1}^{V}\cos\angle POA_k=0$

$$\therefore\sum_{k=1}^{V}\overline{PA_k}^2=V\left(R_1^{\,2}+R_2^{\,2}\right)$$

(四) 探討同心球C_2上一動點P到球C_1內接正多面體各頂點距離四次方和。

定理 2-4：
以O為球心，做同心球C_1、C_2，半徑分別為R_1、R_2，則球C_2上一動點P到球C_1內接正多面體各頂點距離四次方和恆為定值，其值為$V\left[\left(R_1^{\,2}+R_2^{\,2}\right)^2+\frac{4}{3}R_1^{\,2}R_2^{\,2}\right]$。

證明：

$$\overline{PA_k}^4=\left(\overline{PA_k}^2\right)^2$$
$$=\left(R_1^{\,2}+R_2^{\,2}-2R_1R_2\cos\angle POA_k\right)^2$$
$$=\left(R_1^{\,2}+R_2^{\,2}\right)^2-4R_1R_2\left(R_1^{\,2}+R_2^{\,2}\right)\cos\angle POA_k+4R_1^{\,2}R_2^{\,2}\cos^2\angle POA_k$$
$$\sum_{k=1}^{V}\overline{PA_k}^4=V\left(R_1^{\,2}+R_2^{\,2}\right)^2-4R_1R_2\left(R_1^{\,2}+R_2^{\,2}\right)\sum_{k=1}^{V}\cos\angle POA_k+4R_1^{\,2}R_2^{\,2}\sum_{k=1}^{V}\cos^2\angle POA_k$$

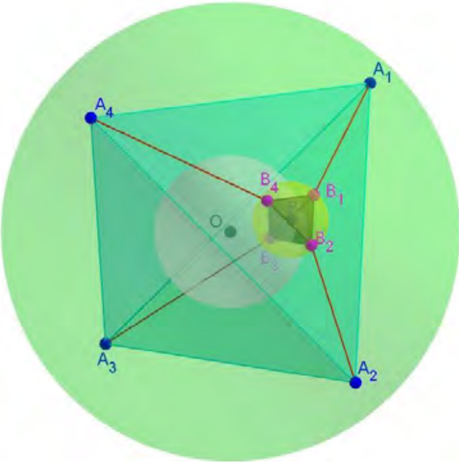
由參考資料[11]、[12]，得$\sum_{k=1}^{V}\cos\angle POA_k=0$，$\sum_{k=1}^{V}\cos^2\angle POA_k=\frac{V}{3}$

$$\therefore\sum_{k=1}^{V}\overline{PA_k}^4=V\left(R_1^{\,2}+R_2^{\,2}\right)^2+\frac{4}{3}VR_1^{\,2}R_2^{\,2}=V\left[\left(R_1^{\,2}+R_2^{\,2}\right)^2+\frac{4}{3}R_1^{\,2}R_2^{\,2}\right]$$

(五) 探討以同心球C_2上一動點P為球心之球C_3的內接正多面體各頂點到球C_1內接正多面體各頂點距離平方和，且兩正多面體同向。

定理 2-5：
以O為球心，做同心球C_1、C_2，半徑分別為R_1、R_2，並作球C_1的內接正多面體，再以球C_2上一動點P為球心作球C_3，半徑為r，再作球C_3內接正多面體，且兩正多面體同向，則兩正多面體各頂點距離平方和恆為定值，其值為$V\left[\left(R_1-r\right)^2+R_2^{\,2}\right]$。

證明：



$$\overline{A_kB_k}^2=\left|\overrightarrow{A_kB_k}\right|^2$$

$$=\left|\overrightarrow{A_kO}+\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PB_k}\right|^2$$

$$=\left|\overrightarrow{A_kO}\right|^2+\left|\overrightarrow{OP}\right|^2+\left|\overrightarrow{PB_k}\right|^2$$

$$+2\overrightarrow{A_kO}\cdot\overrightarrow{OP}+2\overrightarrow{A_kO}\cdot\overrightarrow{PB_k}+2\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{PB_k}$$

$$=R_1^2+R_2^2+r^2-2R_1R_2\cos\angle POA_k+2R_1r\cos\pi-2R_2r\cos\angle OPB_k$$

$\because \angle POA_k$ 與 $\angle OPB_k$ 為同側內角 $\therefore \angle OPB_k=\pi-\angle POA_k$ ，$\cos\angle OPB_k=-\cos\angle POA_k$

$$\overline{A_kB_k}^2=R_1^2+R_2^2+r^2-2R_1R_2\cos\angle POA_k-2R_1r+2R_2r\cos\angle POA_k$$

$$=(R_1-r)^2+R_2^2-2R_2(R_1-r)\cos\angle POA_k$$

$$\sum_{k=1}^{V}\overline{A_kB_k}^2=V\left[(R_1-r)^2+R_2^2\right]-2R_2(R_1-r)\sum_{k=1}^{V}\cos\angle POA_k$$

由參考資料[11]，得 $\sum_{k=1}^{V}\cos\angle POA_k=0$ $\therefore \sum_{k=1}^{V}\overline{A_kB_k}^2=V\left[(R_1-r)^2+R_2^2\right]$

(六) 探討以同心球 C_2 上一動點 P 為球心之球 C_3 的內接正多面體各頂點到球 C_1 內接正多面體各頂點距離四次方和，且兩正多面體同向。

> 定理 2-6：
> 以 O 為球心，做同心球 C_1、C_2 ，半徑分別為 R_1、R_2 ，並作球 C_1 的內接正多面體，再以球 C_2 上一動點 P 為球心作球 C_3 ，半徑為 r ，再作球 C_3 內接正多面體，且兩正多面體同向則兩正多面體各頂點距離四次方和恆為定值，其值為
> $V\left[(R_1-r)^4+R_2^4+\frac{10}{3}R_2^2(R_1-r)^2\right]$ 。

證明：

$$\overline{A_kB_k}^4=\left(\overline{A_kB_k}^2\right)^2$$

$$=\left[(R_1-r)^2+R_2^2-2R_2(R_1-r)\cos\angle POA_k\right]^2$$

$$=\left[(R_1-r)^2+R_2^2\right]^2-4R_2(R_1-r)\left[(R_1-r)^2+R_2^2\right]\cos\angle POA_k+4R_2^2(R_1-r)^2\cos^2\angle POA_k$$

$$\sum_{k=1}^{V}\overline{A_kB_k}^4=V\left[(R_1-r)^2+R_2^2\right]^2-4R_2(R_1-r)\left[(R_1-r)^2+R_2^2\right]\sum_{k=1}^{V}\cos\angle POA_k$$

$$+4R_2^2(R_1-r)^2\sum_{k=1}^{V}\cos^2\angle POA_k$$

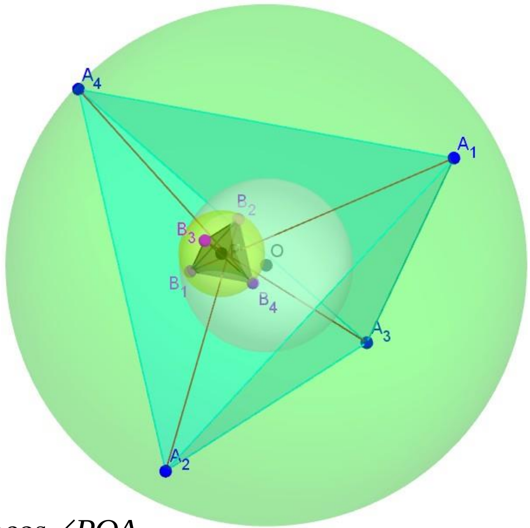
由參考資料[11]、[12]，得 $\sum_{k=1}^{V}\cos\angle POA_k=0$ ，$\sum_{k=1}^{V}\cos^2\angle POA_k=\frac{V}{3}$

$$\therefore \sum_{k=1}^{V}\overline{A_kB_k}^4=V\left[\left(R_1-r\right)^2+R_2^2\right]^2+\frac{4}{3}VR_2^2\left(R_1-r\right)^2=V\left[\left(R_1-r\right)^4+R_2^4+\frac{10}{3}R_2^2\left(R_1-r\right)^2\right]$$

(七) 探討以同心球 C_2 上一動點 P 為球心之球 C_3 的內接正多面體各頂點到球 C_1 內接正多面體各頂點距離平方和，且兩正多面體反向。

> 定理 2-7：
> 以 O 為球心，作同心球 C_1、C_2，半徑分別為 R_1、R_2，並作球 C_1 的內接正多面體，再以球 C_2 上一動點 P 為球心作球 C_3，半徑為 r，再作球 C_3 內接正多面體，且兩正多面體反向則兩正多面體各頂點距離平方和恆為定值，其值為 $V\left[\left(R_1+r\right)^2+R_2^2\right]$。

證明：



$$\begin{aligned}
\overline{A_kB_k}^2&=\left|\overrightarrow{A_kB_k}\right|^2\\
&=\left|\overrightarrow{A_kO}+\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PB_k}\right|^2\\
&=\left|\overrightarrow{A_kO}\right|^2+\left|\overrightarrow{OP}\right|^2+\left|\overrightarrow{PB_k}\right|^2\\
&\quad+2\,\overrightarrow{A_kO}\cdot\overrightarrow{OP}+2\,\overrightarrow{A_kO}\cdot\overrightarrow{PB_k}+2\,\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{PB_k}\\
&=R_1^2+R_2^2+r^2-2R_1R_2\cos\angle POA_k\\
&\quad+2R_1r\cos 2\pi-2R_2r\cos\angle OPB_k
\end{aligned}$$

$\because \angle POA_k$ 與 $\angle OPB_k$ 為內錯角 $\therefore\ \cos\angle OPB_k=\cos\angle POA_k$

$$\begin{aligned}
\overline{A_kB_k}^2&=R_1^2+R_2^2+r^2-2R_1R_2\cos\angle POA_k-2R_1r+2R_2r\cos\angle POA_k\\
&=\left(R_1+r\right)^2+R_2^2-2R_2\left(R_1+r\right)\cos\angle POA_k
\end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^{V}\overline{A_kB_k}^2=V\left[\left(R_1+r\right)^2+R_2^2\right]-2R_2\left(R_1+r\right)\sum_{k=1}^{V}\cos\angle POA_k$$

由參考資料[11]，得 $\sum_{k=1}^{V}\cos\angle POA_k=0$ $\therefore \sum_{k=1}^{V}\overline{A_kB_k}^2=V\left[\left(R_1+r\right)^2+R_2^2\right]$

(八) 探討以同心球 C_2 上一動點 P 為球心之球 C_3 的內接正多面體各頂點到球 C_1 內接正多面體各頂點距離四次方和，且兩正多面體反向。

> 定理 2-8：
> 以 O 為球心，做同心球 C_1、C_2，半徑分別為 R_1、R_2，並作球 C_1 的內接正多面體，再以球 C_2 上一動點 P 為球心作球 C_3，半徑為 r，再作球 C_3 內接正多面體，且兩正多面體反向，則兩正多面體各頂點距離四次方和恆為定值，其值為
> $V\left[\left(R_1+r\right)^4+R_2^4+\frac{10}{3}R_2^2\left(R_1+r\right)^2\right]$。

證明：

$$\overline{A_kB_k}^4=\left(\overline{A_kB_k}^2\right)^2$$
$$=\left[\left(R_1+r\right)^2+R_2^{\,2}-2R_2\left(R_1+r\right)\cos\angle POA_k\right]^2$$
$$=\left[\left(R_1+r\right)^2+R_2^{\,2}\right]^2-4R_2\left(R_1+r\right)\left[\left(R_1+r\right)^2+R_2^{\,2}\right]\cos\angle POA_k$$
$$+4R_2^{\,2}\left(R_1+r\right)^2\cos^2\angle POA_k$$
$$\sum_{k=1}^{V}\overline{A_kB_k}^4=V\left[\left(R_1+r\right)^2+R_2^{\,2}\right]^2-4R_2\left(R_1+r\right)\left[\left(R_1+r\right)^2+R_2^{\,2}\right]\sum_{k=1}^{V}\cos\angle POA_k$$
$$+4R_2^{\,2}\left(R_1+r\right)^2\sum_{k=1}^{V}\cos^2\angle POA_k$$

由參考資料[11]、[12]，得 $\sum_{k=1}^{V}\cos\angle POA_k=0$ ，$\sum_{k=1}^{V}\cos^2\angle POA_k=\dfrac{V}{3}$

$$\therefore\sum_{k=1}^{V}\overline{A_kB_k}^4=V\left[\left(R_1+r\right)^2+R_2^{\,2}\right]^2+\frac{4}{3}VR_2^{\,2}\left(R_1+r\right)^2=V\left[\left(R_1+r\right)^4+R_2^{\,4}+\frac{10}{3}R_2^{\,2}\left(R_1+r\right)^2\right]$$

(九) 定理 2-7 中我們發現當兩正多面體反向時，V 條線段 $\overline{A_kB_k}$ 會交於一點，因此我們加以證明此性質。

> 性質 2：
> 給定空間中正多面體 $A_1A_2\cdots A_V$ 與正多面體 $B_1B_2\cdots B_V$ 邊長比值設為 L ，O、P 分別為其中心，且兩正多面體反向，則：(1) V 條線段 $\overline{A_kB_k}$ 交於一點 Q (2) $O-Q-P$ 共線

證明：

(1) $\therefore\overline{OA_k}\,//\,\overline{PB_k}$、$\overline{OB_{k+1}}\,//\,\overline{PB_{k+1}}$ $\because A_k$、A_{k+1}、B_k、B_{k+1} 共平面令 $\overline{A_1B_1}$ 與 $\overline{A_2B_2}$ 交於 Q 點

，則 $\overline{QA_1}:\overline{QB_1}=\overline{QA_2}:\overline{QB_2}=L:1$

令 $\overline{A_2B_2}$ 與 $\overline{A_3B_3}$ 交於 Q' 點，則可得到 $\overline{Q'A_2}:\overline{Q'B_2}=\overline{Q'A_3}:\overline{Q'B_3}=L:1=\overline{QA_2}:\overline{QB_2}$

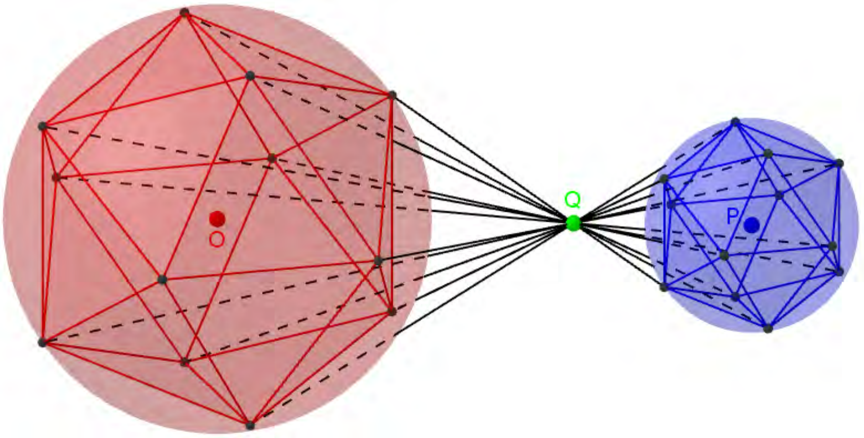
故 $Q'=Q$ ，即 $\overline{A_1B_1}$、$\overline{A_2B_2}$、$\overline{A_3B_3}$ 三線段交於一點，重複以上步驟，可證明

$\overline{A_kB_k}$、$\overline{A_{k+1}B_{k+1}}$、$\overline{A_{k+2}B_{k+2}}$ 三線段交於一點，故此 V 條線段 $\overline{A_kB_k}$ 交於一點。

(2)已知 $R_1:r=kL:k=L:1$ ，$k\in\mathbb{R}$ (維基百科/正多面體[9])

令 $\overline{A_1B_1}$ 與 $\overline{OP}$ 交於 Q'' 點，則 $\overline{Q''A_1}:\overline{Q''B_1}=R_1:r=L:1=\overline{QA_1}:\overline{QB_1}$

故 $Q''=Q$ ，即 $O-Q-P$ 共線。



四、空間中點與正多面體各平面距離定值之探討：

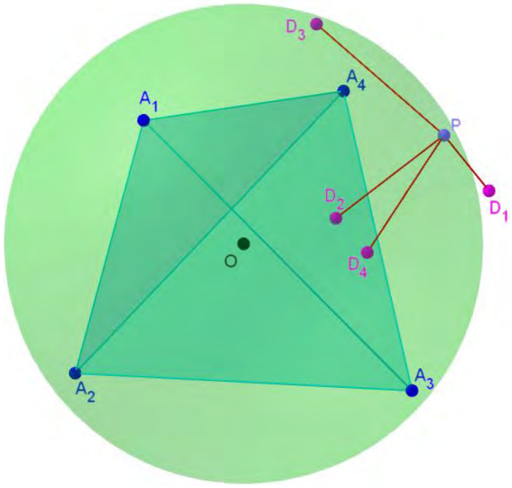
(一) 探討球上一動點 P 到其內接正多面體各面距離平方和。

1. 正四面體情況。

定理 2-9： 以 O 為球心，半徑為 R 之球上一動點 P，對其內接正四面體各面作投影點 D_1、D_2、D_3、D_4，則 P 點到各投影點距離平方和恆為定值，其值為 $\frac{16}{9}R^2$。

證明：設 P 座標為 (a,b,c)

由參考資料[13]可知正四面體各平面方程式，並用點到平面距離公式得到各線段長度平方。



$$\overline{PD_1}^2=\left(\frac{\left|a+b+c+\frac{R}{\sqrt{3}}\right|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}\right)^2=\frac{a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc+\frac{R^2}{3}+\frac{2R}{\sqrt{3}}(a+b+c)}{3}$$

$$\overline{PD_2}^2=\left(\frac{\left|a-b-c+\frac{R}{\sqrt{3}}\right|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}\right)^2=\frac{a^2+b^2+c^2-2ab-2ac+2bc+\frac{R^2}{3}-\frac{2R}{\sqrt{3}}(-a+b+c)}{3}$$

$$\overline{PD_3}^2=\left(\frac{\left|-a+b-c+\frac{R}{\sqrt{3}}\right|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}\right)^2=\frac{a^2+b^2+c^2-2ab+2ac-2bc+\frac{R^2}{3}-\frac{2R}{\sqrt{3}}(a-b+c)}{3}$$

$$\overline{PD_4}^2=\left(\frac{\left|-a-b+c+\frac{R}{\sqrt{3}}\right|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}\right)^2=\frac{a^2+b^2+c^2+2ab-2ac-2bc+\frac{R^2}{3}-\frac{2R}{\sqrt{3}}(a+b-c)}{3}$$

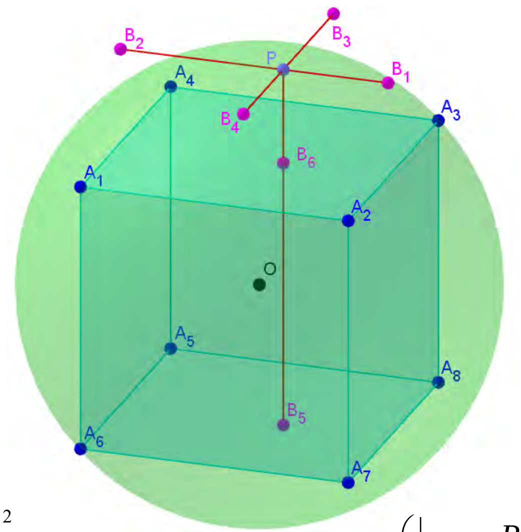
$$\sum_{k=1}^{4}\overline{PD_k}^2=\frac{4\left(a^2+b^2+c^2\right)+\frac{4R^2}{3}}{3}=\frac{16R^2}{9}$$

2. 正六面體情況。

> 定理 2-10：
> 以 O 為球心，半徑為 R 之球上一動點 P ，對其內接正六面體各面作投影點 D_1、……、D_6 ，則 P 點到各投影點距離平方和恆為定值，其值為 $4R^2$ 。

證明：設 P 座標為 (a,b,c)

由參考資料[14]可知正六面體各平面方程式，並用點到平面距離公式得到各線段長度平方。



$$\overline{PD_1}^2=\left(\frac{\left|a+\frac{R}{\sqrt{3}}\right|}{\sqrt{1^2}}\right)^2=a^2+\frac{R^2}{3}+\frac{2aR}{\sqrt{3}} \quad , \quad \overline{PD_2}^2=\left(\frac{\left|-a+\frac{R}{\sqrt{3}}\right|}{\sqrt{1^2}}\right)^2=a^2+\frac{R^2}{3}-\frac{2aR}{\sqrt{3}}$$

$$\overline{PD_3}^2=\left(\frac{\left|b+\frac{R}{\sqrt{3}}\right|}{\sqrt{1^2}}\right)^2=b^2+\frac{R^2}{3}+\frac{2bR}{\sqrt{3}} \quad , \quad \overline{PD_4}^2=\left(\frac{\left|-b+\frac{R}{\sqrt{3}}\right|}{\sqrt{1^2}}\right)^2=b^2+\frac{R^2}{3}-\frac{2bR}{\sqrt{3}}$$

$$\overline{PD_5}^2=\left(\frac{\left|c+\frac{R}{\sqrt{3}}\right|}{\sqrt{1^2}}\right)^2=c^2+\frac{R^2}{3}+\frac{2cR}{\sqrt{3}}\quad,\quad\overline{PD_6}^2=\left(\frac{\left|-c+\frac{R}{\sqrt{3}}\right|}{\sqrt{1^2}}\right)^2=c^2+\frac{R^2}{3}-\frac{2cR}{\sqrt{3}}$$

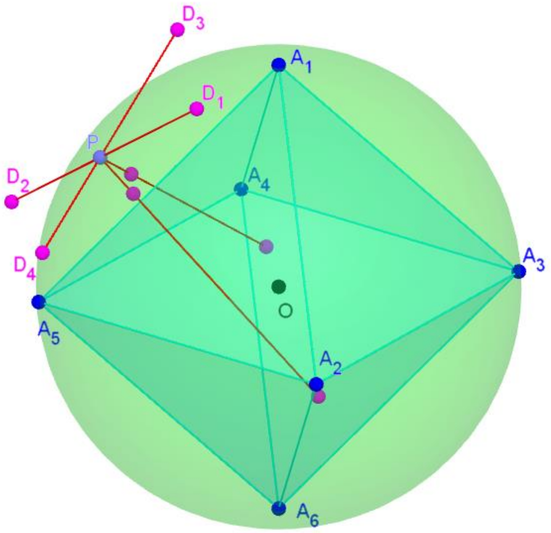
$$\sum_{k=1}^{6}\overline{PD_k}^2=2\left(a^2+b^2+c^2\right)+\frac{6R^2}{3}=4R^2$$

3. 正八面體情況。

> 定理 2-11：
> 以 O 為球心，半徑為 R 之球上一動點 P ，對其內接正八面體各面作投影點 D_1、……、D_8 ，則 P 點到各投影點距離平方和恆為定值，其值為 $\frac{16}{3}R^2$ 。

證明：設 P 座標為 (a,b,c)

由參考資料[15]可知正八面體各平面方程式，並用點到平面距離公式得到各線段長度平方。



$$\overline{PD_1}^2=\left(\frac{\left|-a-b-c+R\right|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}\right)^2=\frac{a^2+b^2+c^2+R^2+2ab+2ac+2bc-2R(a+b+c)}{3}$$

$$\overline{PD_2}^2=\left(\frac{\left|a+b+c+R\right|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}\right)^2=\frac{a^2+b^2+c^2+R^2+2ab+2ac+2bc+2R(a+b+c)}{3}$$

$$\overline{PD_3}^2=\left(\frac{\left|a-b-c+R\right|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}\right)^2=\frac{a^2+b^2+c^2+R^2-2ab-2ac+2bc-2R(-a+b+c)}{3}$$

$$\overline{PD_4}^2=\left(\frac{\left|-a+b+c+R\right|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}\right)^2=\frac{a^2+b^2+c^2+R^2-2ab-2ac+2bc+2R(-a+b+c)}{3}$$

$$\overline{PD_5}^2=\left(\frac{\left|-a+b-c+R\right|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}\right)^2=\frac{a^2+b^2+c^2+R^2-2ab+2ac-2bc-2R(a-b+c)}{3}$$

$$\overline{PD_6}^2=\left(\frac{|a-b+c+R|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}\right)^2=\frac{a^2+b^2+c^2+R^2-2ab+2ac-2bc+2R(a-b+c)}{3}$$

$$\overline{PD_7}^2=\left(\frac{|-a-b+c+R|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}\right)^2=\frac{a^2+b^2+c^2+R^2+2ab-2ac-2bc-2R(a+b-c)}{3}$$

$$\overline{PD_8}^2=\left(\frac{|a+b-c+R|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}\right)^2=\frac{a^2+b^2+c^2+R^2+2ab-2ac-2bc+2R(a+b-c)}{3}$$

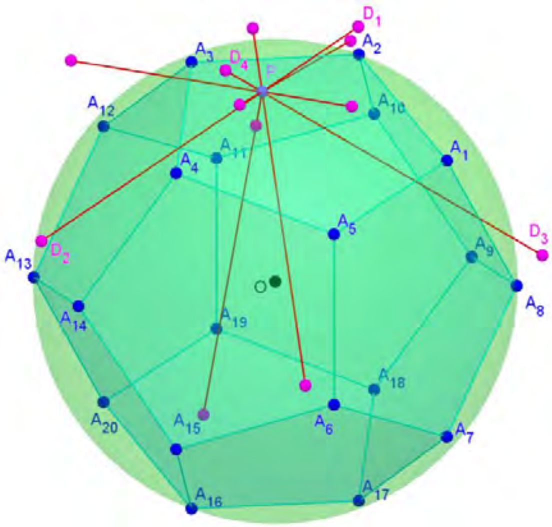
$$\sum_{k=1}^{8}\overline{PD_k}^2=\frac{8(a^2+b^2+c^2)+8R^2}{3}=\frac{16R^2}{3}$$

4. 正十二面體情況。（ 其中$\phi=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$(維基百科/正十二面體[7])）

> 定理 2-12：
> 以O為球心，半徑為R之球上一動點P，對其內接正十二面體各面作投影點D_1、……、D_{12}，則P點到各投影點距離平方和恆為定值，其值為$\frac{8(5+\sqrt{5})}{5}R^2$。

證明：設P座標為(a,b,c)

由參考資料[16]可知正十二面體各平面方程式，並用點到平面距離公式得到各線段長度平方。



$$\overline{PD_1}^2=\left(\frac{\left|-b\phi-c+\frac{R}{\sqrt{3}}\phi^2\right|}{\sqrt{1^2+\phi^2}}\right)^2=\frac{(b\phi+c)^2-\frac{2(b\phi+c)\phi^2}{\sqrt{3}}R+\frac{\phi^4}{3}R^2}{\phi^2+1}$$

$$\overline{PD_2}^2=\left(\frac{\left|b\phi+c+\frac{\phi^2}{\sqrt{3}}R\right|}{\sqrt{1^2+\phi^2}}\right)^2=\frac{\left(b\phi+c\right)^2+\frac{2\left(b\phi+c\right)\phi^2}{\sqrt{3}}R+\frac{\phi^4}{3}R^2}{\phi^2+1}$$

$$\overline{PD_3}^2=\left(\frac{\left|-b\phi+c+\frac{\phi^2}{\sqrt{3}}R\right|}{\sqrt{1^2+\phi^2}}\right)^2=\frac{\left(b\phi-c\right)^2-\frac{2\left(b\phi-c\right)\phi^2}{\sqrt{3}}R+\frac{\phi^4}{3}R^2}{\phi^2+1}$$

$$\overline{PD_4}^2=\left(\frac{\left|b\phi-c+\frac{\phi^2}{\sqrt{3}}R\right|}{\sqrt{1^2+\phi^2}}\right)^2=\frac{\left(b\phi-c\right)^2+\frac{2\left(b\phi-c\right)\phi^2}{\sqrt{3}}R+\frac{\phi^4}{3}R^2}{\phi^2+1}$$

$$\overline{PD_5}^2=\left(\frac{\left|-c\phi-a+\frac{\phi^2}{\sqrt{3}}R\right|}{\sqrt{1^2+\phi^2}}\right)^2=\frac{\left(c\phi+a\right)^2-\frac{2\left(c\phi+a\right)\phi^2}{\sqrt{3}}R+\frac{\phi^4}{3}R^2}{\phi^2+1}$$

$$\overline{PD_6}^2=\left(\frac{\left|c\phi+a+\frac{\phi^2}{\sqrt{3}}R\right|}{\sqrt{1^2+\phi^2}}\right)^2=\frac{\left(c\phi+a\right)^2+\frac{2\left(c\phi+a\right)\phi^2}{\sqrt{3}}R+\frac{\phi^4}{3}R^2}{\phi^2+1}$$

$$\overline{PD_7}^2=\left(\frac{\left|-c\phi+a+\frac{\phi^2}{\sqrt{3}}R\right|}{\sqrt{1^2+\phi^2}}\right)^2=\frac{\left(c\phi-a\right)^2-\frac{2\left(c\phi-a\right)\phi^2}{\sqrt{3}}R+\frac{\phi^4}{3}R^2}{\phi^2+1}$$

$$\overline{PD_8}^2=\left(\frac{\left|c\phi-a+\frac{\phi^2}{\sqrt{3}}R\right|}{\sqrt{1^2+\phi^2}}\right)^2=\frac{\left(c\phi-a\right)^2+\frac{2\left(c\phi-a\right)\phi^2}{\sqrt{3}}R+\frac{\phi^4}{3}R^2}{\phi^2+1}$$

$$\overline{PD_9}^2=\left(\frac{\left|-a\phi-b+\frac{\phi^2}{\sqrt{3}}R\right|}{\sqrt{1^2+\phi^2}}\right)^2=\frac{\left(a\phi+b\right)^2-\frac{2\left(a\phi+b\right)\phi^2}{\sqrt{3}}R+\frac{\phi^4}{3}R^2}{\phi^2+1}$$

$$\overline{PD_{10}}^2=\left(\frac{\left|a\phi+b+\frac{\phi^2}{\sqrt{3}}R\right|}{\sqrt{1^2+\phi^2}}\right)^2=\frac{\left(a\phi+b\right)^2+\frac{2\left(a\phi+b\right)\phi^2}{\sqrt{3}}R+\frac{\phi^4}{3}R^2}{\phi^2+1}$$

$$\overline{PD_{11}}^2=\left(\frac{\left|-a\phi+b+\frac{R}{\sqrt{3}}\phi^2\right|}{\sqrt{1^2+\phi^2}}\right)^2=\frac{(a\phi-b)^2-\frac{2(a\phi-b)\phi^2}{\sqrt{3}}R+\frac{\phi^4}{3}R^2}{\phi^2+1}$$

$$\overline{PD_{12}}^2=\left(\frac{\left|a\phi-b+\frac{R}{\sqrt{3}}\phi^2\right|}{\sqrt{1^2+\phi^2}}\right)^2=\frac{(a\phi-b)^2+\frac{2(a\phi-b)\phi^2}{\sqrt{3}}R+\frac{\phi^4}{3}R^2}{\phi^2+1}$$

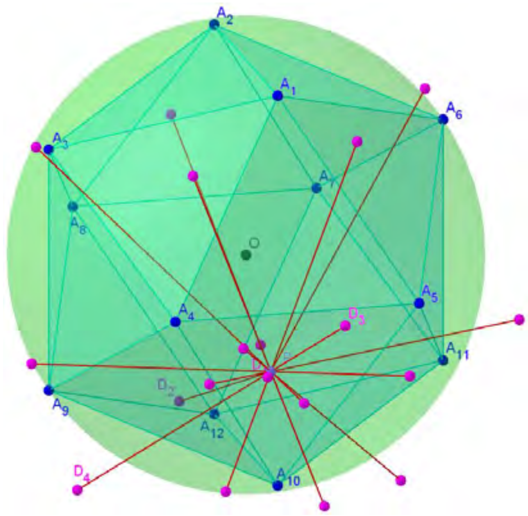
$$\sum_{k=1}^{12}\overline{PD_k}^2=\frac{4(a^2+b^2+c^2)(\phi^2+1)+4\phi^4R^2}{\phi^2+1}=\frac{8(5+\sqrt{5})}{5}R^2$$

5. 正二十面體情況。

> 定理 2-13：
>
> 以 O 為球心，半徑為 R 之球上一動點 P，對其內接正二十面體各面作投影點 D_1、……、D_{20}，則 P 點到各投影點距離平方和恆為定值，其值為 $\frac{8(5+\sqrt{5})}{3}R^2$。

證明：設 P 座標為 (a,b,c)

由參考資料[17]可知正二十面體各平面方程式，並用點到平面距離公式得到各線段長度平方。



$$\overline{PD_1}^2=\left(\frac{\left|-a-b-c+\frac{R}{\sqrt{\phi^2+1}}\phi^2\right|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}\right)^2=\frac{a^2+b^2+c^2+\frac{\phi^4}{\phi^2+1}R^2-\frac{2(a+b+c)\phi^2}{\sqrt{\phi^2+1}}R+2ab+2ac+2bc}{3}$$

$$\overline{PD_2}^2=\left(\frac{\left|a+b+c+\dfrac{\phi^2}{\sqrt{\phi^2+1}}R\right|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}\right)^2=\frac{a^2+b^2+c^2+\dfrac{\phi^4}{\phi^2+1}R^2+\dfrac{2(a+b+c)\phi^2}{\sqrt{\phi^2+1}}R+2ab+2ac+2bc}{3}$$

$$\overline{PD_3}^2=\left(\frac{\left|a-b-c+\dfrac{\phi^2}{\sqrt{\phi^2+1}}R\right|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}\right)^2=\frac{a^2+b^2+c^2+\dfrac{\phi^4}{\phi^2+1}R^2-\dfrac{2(-a+b+c)\phi^2}{\sqrt{\phi^2+1}}R-2ab-2ac+2bc}{3}$$

$$\overline{PD_4}^2=\left(\frac{\left|-a+b+c+\dfrac{\phi^2}{\sqrt{\phi^2+1}}R\right|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}\right)^2=\frac{a^2+b^2+c^2+\dfrac{\phi^4}{\phi^2+1}R^2+\dfrac{2(-a+b+c)\phi^2}{\sqrt{\phi^2+1}}R-2ab-2ac+2bc}{3}$$

$$\overline{PD_5}^2=\left(\frac{\left|-a+b-c+\dfrac{\phi^2}{\sqrt{\phi^2+1}}R\right|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}\right)^2=\frac{a^2+b^2+c^2+\dfrac{\phi^4}{\phi^2+1}R^2-\dfrac{2(a-b+c)\phi^2}{\sqrt{\phi^2+1}}R-2ab+2ac-2bc}{3}$$

$$\overline{PD_6}^2=\left(\frac{\left|a-b+c+\dfrac{\phi^2}{\sqrt{\phi^2+1}}R\right|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}\right)^2=\frac{a^2+b^2+c^2+\dfrac{\phi^4}{\phi^2+1}R^2+\dfrac{2(a-b+c)\phi^2}{\sqrt{\phi^2+1}}R-2ab+2ac-2bc}{3}$$

$$\overline{PD_7}^2=\left(\frac{\left|-a-b+c+\dfrac{\phi^2}{\sqrt{\phi^2+1}}R\right|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}\right)^2=\frac{a^2+b^2+c^2+\dfrac{\phi^4}{\phi^2+1}R^2-\dfrac{2(a+b-c)\phi^2}{\sqrt{\phi^2+1}}R+2ab-2ac-2bc}{3}$$

$$\overline{PD_8}^2=\left(\frac{\left|a+b-c+\dfrac{\phi^2}{\sqrt{\phi^2+1}}R\right|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}\right)^2=\frac{a^2+b^2+c^2+\dfrac{\phi^4}{\phi^2+1}R^2+\dfrac{2(a+b-c)\phi^2}{\sqrt{\phi^2+1}}R+2ab-2ac-2bc}{3}$$

$$\overline{PD_9}^2=\left(\frac{\left|-\phi b-(\phi-1)c+\dfrac{\phi^2}{\sqrt{\phi^2+1}}R\right|}{\sqrt{\phi^2+(\phi-1)^2}}\right)^2=\frac{\left[\phi b+(\phi-1)c\right]^2+\dfrac{\phi^4}{\phi^2+1}R^2-\dfrac{2\left[\phi b+(\phi-1)c\right]\phi^2}{\sqrt{\phi^2+1}}R}{\phi^2+(\phi-1)^2}$$

$$\overline{PD_{10}}^2=\left(\frac{\left|\phi b-(\phi-1)c+\dfrac{\phi^2}{\sqrt{\phi^2+1}}R\right|}{\sqrt{\phi^2+(\phi-1)^2}}\right)^2=\frac{\left[\phi b-(\phi-1)c\right]^2+\dfrac{\phi^4}{\phi^2+1}R^2+\dfrac{2\left[\phi b-(\phi-1)c\right]\phi^2}{\sqrt{\phi^2+1}}R}{\phi^2+(\phi-1)^2}$$

$$\overline{PD_{11}}^2 = \left(\frac{\left| \phi b + (\phi - 1)c + \frac{\phi^2}{\sqrt{\phi^2+1}} R \right|}{\sqrt{\phi^2 + (\phi-1)^2}} \right)^2 = \frac{\left[\phi b + (\phi-1)c\right]^2 + \frac{\phi^4}{\phi^2+1} R^2 + \frac{2\left[\phi b + (\phi-1)c\right]\phi^2}{\sqrt{\phi^2+1}} R}{\phi^2 + (\phi-1)^2}$$

$$\overline{PD_{12}}^2 = \left(\frac{\left| -\phi b + (\phi - 1)c + \frac{\phi^2}{\sqrt{\phi^2+1}} R \right|}{\sqrt{\phi^2 + (\phi-1)^2}} \right)^2 = \frac{\left[\phi b - (\phi-1)c\right]^2 + \frac{\phi^4}{\phi^2+1} R^2 - \frac{2\left[\phi b - (\phi-1)c\right]\phi^2}{\sqrt{\phi^2+1}} R}{\phi^2 + (\phi-1)^2}$$

$$\overline{PD_{13}}^2 = \left(\frac{\left| -\phi a - (\phi - 1)b + \frac{\phi^2}{\sqrt{\phi^2+1}} R \right|}{\sqrt{\phi^2 + (\phi-1)^2}} \right)^2 = \frac{\left[\phi a + (\phi-1)b\right]^2 + \frac{\phi^4}{\phi^2+1} R^2 - \frac{2\left[\phi a + (\phi-1)b\right]\phi^2}{\sqrt{\phi^2+1}} R}{\phi^2 + (\phi-1)^2}$$

$$\overline{PD_{14}}^2 = \left(\frac{\left| \phi a - (\phi - 1)b + \frac{\phi^2}{\sqrt{\phi^2+1}} R \right|}{\sqrt{\phi^2 + (\phi-1)^2}} \right)^2 = \frac{\left[\phi a - (\phi-1)b\right]^2 + \frac{\phi^4}{\phi^2+1} R^2 + \frac{2\left[\phi a - (\phi-1)b\right]\phi^2}{\sqrt{\phi^2+1}} R}{\phi^2 + (\phi-1)^2}$$

$$\overline{PD_{15}}^2 = \left(\frac{\left| \phi a + (\phi - 1)b + \frac{\phi^2}{\sqrt{\phi^2+1}} R \right|}{\sqrt{\phi^2 + (\phi-1)^2}} \right)^2 = \frac{\left[\phi a + (\phi-1)b\right]^2 + \frac{\phi^4}{\phi^2+1} R^2 + \frac{2\left[\phi a + (\phi-1)b\right]\phi^2}{\sqrt{\phi^2+1}} R}{\phi^2 + (\phi-1)^2}$$

$$\overline{PD_{16}}^2 = \left(\frac{\left| -\phi a + (\phi - 1)b + \frac{\phi^2}{\sqrt{\phi^2+1}} R \right|}{\sqrt{\phi^2 + (\phi-1)^2}} \right)^2 = \frac{\left[\phi a - (\phi-1)b\right]^2 + \frac{\phi^4}{\phi^2+1} R^2 - \frac{2\left[\phi a - (\phi-1)b\right]\phi^2}{\sqrt{\phi^2+1}} R}{\phi^2 + (\phi-1)^2}$$

$$\overline{PD_{17}}^2 = \left(\frac{\left| -\phi c - (\phi - 1)a + \frac{\phi^2}{\sqrt{\phi^2+1}} R \right|}{\sqrt{\phi^2 + (\phi-1)^2}} \right)^2 = \frac{\left[\phi c + (\phi-1)a\right]^2 + \frac{\phi^4}{\phi^2+1} R^2 - \frac{2\left[\phi c + (\phi-1)a\right]\phi^2}{\sqrt{\phi^2+1}} R}{\phi^2 + (\phi-1)^2}$$

$$\overline{PD_{18}}^2 = \left(\frac{\left| \phi c - (\phi - 1)a + \frac{\phi^2}{\sqrt{\phi^2+1}} R \right|}{\sqrt{\phi^2 + (\phi-1)^2}} \right)^2 = \frac{\left[\phi c - (\phi-1)a\right]^2 + \frac{\phi^4}{\phi^2+1} R^2 + \frac{2\left[\phi c - (\phi-1)a\right]\phi^2}{\sqrt{\phi^2+1}} R}{\phi^2 + (\phi-1)^2}$$

$$\overline{PD_{19}}^2=\left(\frac{\left|\phi c+(\phi-1)a+\frac{\phi^2}{\sqrt{\phi^2+1}}R\right|}{\sqrt{\phi^2+(\phi-1)^2}}\right)^2=\frac{\left[\phi c+(\phi-1)a\right]^2+\frac{\phi^4}{\phi^2+1}R^2+\frac{2\left[\phi c+(\phi-1)a\right]\phi^2}{\sqrt{\phi^2+1}}R}{\phi^2+(\phi-1)^2}$$

$$\overline{PD_{20}}^2=\left(\frac{\left|-\phi c+(\phi-1)a+\frac{\phi^2}{\sqrt{\phi^2+1}}R\right|}{\sqrt{\phi^2+(\phi-1)^2}}\right)^2=\frac{\left[\phi c-(\phi-1)a\right]^2+\frac{\phi^4}{\phi^2+1}R^2-\frac{2\left[\phi c-(\phi-1)a\right]\phi^2}{\sqrt{\phi^2+1}}R}{\phi^2+(\phi-1)^2}$$

$$\sum_{k=1}^{20}\overline{PD_k}^2=\frac{8(a+b+c)^2+\frac{8\phi^4}{\phi^2+1}R^2}{3}+\frac{4(a+b+c)^2\left[\phi^2+(\phi-1)^2\right]+\frac{12\phi^4}{\phi^2+1}R^2}{\phi^2+(\phi-1)^2}$$

$$=\frac{8\left(5+\sqrt{5}\right)}{3}R^2$$

(二) 探討同心球 C_2 上一動點 P 到球 C_1 內接正多面體各面距離平方和。

1. 正四面體情況。

> 定理 2-14：
> 以 O 為球心，作同心球 C_1、C_2，半徑分別為 R_1、R_2，則球 C_2 上一動 P，對球 C_1 內接正四面體各面作投影點 D_1、D_2、D_3、D_4，則 P 點到各投影點距離平方和恆為定值，其值為 $\frac{4R_1^2+12R_2^2}{9}$。

證明：同定理 2-9

$$\sum_{k=1}^{4}\overline{PD_k}^2=\frac{4\left(a^2+b^2+c^2\right)+\frac{4R_1^2}{3}}{3}=\frac{4R_1^2+12R_2^2}{9}$$

2. 正六面體情況。

> 定理 2-15：
> 以 O 為球心，作同心球 C_1、C_2，半徑分別為 R_1、R_2，則球 C_2 上一動 P，對球 C_1 內接正六面體各面作投影點 D_1、……、D_6，則 P 點到各投影點距離平方和恆為定值，其值為 $2\left(R_1^2+R_2^2\right)$。

證明：同定理 2-10

$$\sum_{k=1}^{6}\overline{PD_k}^2=2\left(a^2+b^2+c^2\right)+\frac{6R_1^2}{3}=2\left(R_1^2+R_2^2\right)$$

3. 正八面體情況。

定理 2-16：
以O為球心，作同心球C_1、C_2，半徑分別為R_1、R_2，則球C_2上一動P，對球C_1內接正八面體各面作投影點D_1、……、D_8，則P點到各投影點距離平方和恆為定值，其值為$\frac{8}{3}\left(R_1^{\ 2}+R_2^{\ 2}\right)$。

證明：同定理 2-11

$$\sum_{k=1}^{8}\overline{PD_k}^2=\frac{8\left(a^2+b^2+c^2\right)+8R_1^{\ 2}}{3}=\frac{8}{3}\left(R_1^{\ 2}+R_2^{\ 2}\right)$$

4. 正十二面體情況。

定理 2-17：
以O為球心，作同心球C_1、C_2，半徑分別為R_1、R_2，則球C_2上一動P，對球C_1內接正十二面體各面作投影點D_1、……、D_{12}，則P點到各投影點距離平方和恆為定值，其值為$\frac{4}{5}\left[5R_2^{\ 2}+\left(5+2\sqrt{5}\right)R_1^{\ 2}\right]$。

證明：同定理 2-12

$$\sum_{k=1}^{12}\overline{PD_k}^2=\frac{4\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(\phi^2+1\right)+4\phi^4R_1^{\ 2}}{\phi^2+1}=\frac{4}{5}\left[5R_2^{\ 2}+\left(5+2\sqrt{5}\right)R_1^{\ 2}\right]$$

5. 正二十面體情況。

定理 2-18：
以O為球心，作同心球C_1、C_2，半徑分別為R_1、R_2，則球C_2上一動P，對球C_1內接正二十面體各面作投影點D_1、……、D_{20}，則點P到各投影點距離平方和恆為定值，其值為$\frac{4}{3}\left[5R_2^{\ 2}+\left(5+2\sqrt{5}\right)R_1^{\ 2}\right]$。

證明：同定理 2-13

$$\sum_{k=1}^{20}\overline{PD_k}^2=\frac{8\left(a+b+c\right)^2+\frac{8\phi^4}{\phi^2+1}R_1^{\ 2}}{3}+\frac{4\left(a+b+c\right)^2\left[\phi^2+\left(\phi-1\right)^2\right]+\frac{12\phi^4}{\phi^2+1}R_1^{\ 2}}{\phi^2+\left(\phi-1\right)^2}$$
$$=\frac{4}{3}\left[5R_2^{\ 2}+\left(5+2\sqrt{5}\right)R_1^{\ 2}\right]$$

五、定值公式的最大次方之探討：

(一) 平面點$\rightarrow$點最大次方。

次方為偶數時$2\left(n-1\right)$和為最大次方，到$2n$次方時和就不為定值。以定理 1-1 為例，以下是證明：

$$\sum_{k=1}^{n}\overline{PA_k}^{2n}=\sum_{k=1}^{n}\left[2R^2\left(1-\cos\angle POA_k\right)\right]^n$$

$$=2^nR^{2n}\sum_{k=1}^{n}\left\{1-\cos\left[\frac{2(k-1)\pi}{n}+\theta\right]\right\}^n$$

$$=2^nR^{2n}\sum_{k=1}^{n}\left\{\pm\cos^n\left[\frac{2(k-1)\pi}{n}+\theta\right]\mp C_{n-1}^{n}\cos^{n-1}\left[\frac{2(k-1)\pi}{n}+\theta\right]\pm\cdots+1\right\}$$

其中最高次的餘弦值次方為n，由參考資料[8]得出

$$\pm\sum_{k=1}^{n}\cos^n\left[\frac{2(k-1)\pi}{n}+\theta\right]=\pm2^{1-n}\sum_{k=1}^{n}\cos n\left[\frac{2(k-1)\pi}{n}+\theta\right]+\cdots$$

由引理 1 可知$\pm2^{1-n}\sum_{k=1}^{n}\cos n\left[\frac{2(k-1)\pi}{n}+\theta\right]=\pm2^{1-n}n\left(\cos n\theta\right)\Rightarrow$不為定值，

故正n邊形在$2n$次方時和不為定值。

(二) 空間點$\rightarrow$點最大次方。

跟平面的一樣都是餘弦最高次方導致是否為定值，就像參考資料[11]、[12]是一次方和二次方，它們都為定值，三次方時正四面體$\sum_{k=1}^{n}\cos^3\angle POA_k$就不為定值，我們發現

	餘弦值次方和為定值
正四面體	1、2
正六面體	1、2、3
正八面體	1、2、3
正十二面體	1、2、3、4、5
正二十面體	1、2、3、4、5

其中奇數次方和為0、二次方和為$\frac{V}{3}$、四次方和為$\frac{V}{5}$

可得到五個正面體為幾次方時和有定值

	$\overline{A_kB_k}$ 次方和為定值
正四面體	2、4
正六面體	2、4、6
正八面體	2、4、6
正十二面體	2、4、6、8、10
正二十面體	2、4、6、8、10

(三) 空間點$\rightarrow$平面最大次方。

由點到平面距離公式將一次方、二次方、…、五次方直接相加，可得到最大次方為

	P 到各平面次方為定值
正四面體	1、2
正六面體	1、2、3
正八面體	1、2、3
正十二面體	1、2、3、4、5
正二十面體	1、2、3、4、5

但是當 R_2 大於正多面體內切球半徑 R_i 時奇數次方和不為定值，原因為點到平面距離公式絕對值內的數值可正可負，而其正負須由動點 P 的位置決定。當 R_2 等於 R_i 時，絕對值內的最小值為 0；若 R_2 大於 R_i 時，則 R_1、R_2 的比值變小，且絕對值內的最小值必為負數。我們以正四面體為例：

證明：設 P 座標為 (a,b,c) 且 $a^2+b^2+c^2=R_2{}^2$，$\frac{R_1}{R_i}=3$ (維基百科/正多面體[9])

平面 $A_2A_3A_4$：$x+y+z+\frac{R_1}{\sqrt{3}}=0$ (參考資料[3])，則 P 到平面 $A_2A_3A_4$ 距離為 $\frac{\left|a+b+c+\frac{R_1}{\sqrt{3}}\right|}{\sqrt{3}}$

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)(1+1+1)\geq(a+b+c)^2$$
$$\sqrt{3}R_2\geq a+b+c\geq-\sqrt{3}R_2$$
$$\text{當}R_2=R_i\text{時}$$
$$\sqrt{3}R_i+\frac{R_1}{\sqrt{3}}\geq a+b+c+\frac{R_1}{\sqrt{3}}\geq-\sqrt{3}R_i+\frac{R_1}{\sqrt{3}}$$
$$2\sqrt{3}R_i\geq a+b+c+\frac{R_1}{\sqrt{3}}\geq 0$$

伍、研究結果

一、以 O 為圓心，作同心圓 C_1、C_2，半徑分別為 R_1、R_2，並作圓 C_1 的內接正 n 邊形，再以圓 C_2 上一動點 P 為圓心作圓 C_3，半徑為 r，再作圓 C_3 內接正 n 邊形，且兩正 n 邊形同 (反) 向，則兩正 n 邊形各頂點距離平方和恆為定值，其值為 $n\left[\left(R_1\mp r\right)^2+R_2{}^2\right]$。

二、以 O 為圓心，作同心圓 C_1、C_2，半徑分別為 R_1、R_2，並作圓 C_1 的內接正 n 邊形，再以圓 C_2 上一動點 P 為圓心作圓 C_3，半徑為 r，再作圓 C_3 內接正 n 邊形，且兩正 n 邊形同(反)向，則兩正 n 邊形各頂點距離四次方和恆為定值，其值為
$n\left[\left(R_1\mp r\right)^4+R_2{}^4+4R_2{}^2\left(R_1\mp r\right)^2\right]$。

三、給定平面上正 n 邊形 $A_1A_2\cdots A_n$ 與正 n 邊形 $B_1B_2\cdots B_n$ 邊長比值設為 L，O、P 分別為其中心，且兩正 n 邊形反向，則：(1) n 條線段 $\overline{A_kB_k}$ 交於一點 Q (2) $O-Q-P$ 共線

四、以O為球心，半徑為R之球上一動點P，到其內接正多面體$A_1A_2\cdots A_V$各頂點距離平方和恆為定值，其值為$2VR^2$。

五、以O為球心，半徑為R之球上一動點P，到其內接正多面體$A_1A_2\cdots A_V$各頂點距離四次方和恆為定值，其值為$\frac{16}{3}VR^4$。

六、以O為球心，做同心球C_1、C_2，半徑分別為R_1、R_2，並作球C_1的內接正多面體，再以球C_2上一動點P為球心作球C_3，半徑為r，再作球C_3內接正多面體，且兩正多面體同(反)向，則兩正多面體各頂點距離平方和恆為定值，其值為$V\left[\left(R_1\mp r\right)^2+R_2{}^2\right]$。

七、以O為球心，做同心球C_1、C_2，半徑分別為R_1、R_2，並作球C_1的內接正多面體，再以球C_2上一動點P為球心作球C_3，半徑為r，再作球C_3內接正多面體，且兩正多面體同向，則兩正多面體各頂點距離四次方和恆為定值，其值為

$V\left[\left(R_1\mp r\right)^4+R_2{}^4+\frac{10}{3}R_2{}^2\left(R_1\mp r\right)^2\right]$。

八、給定空間中正多面體$A_1A_2\cdots A_V$與正多面體$B_1B_2\cdots B_V$邊長比值設為L，O、P分別為其中心，且兩正多面體反向，則：(1)V條線段$\overline{A_kB_k}$交於一點Q (2)$O-Q-P$共線

九、以O為球心，作同心球C_1、C_2，半徑分別為R_1、R_2，則球C_2上一動點P，對球C_1內接正四面體各面作投影點D_1、D_2、D_3、D_4，則P點到各投影點距離平方和恆為定值，其值為$\frac{4R_1{}^2+12R_2{}^2}{9}$。

十、以O為球心，作同心球C_1、C_2，半徑分別為R_1、R_2，則球C_2上一動點P，對球C_1內接正六、八面體各面作投影點，則P點到各投影點距離平方和恆為定值，其值為

$\frac{F}{3}\left(R_1{}^2+R_2{}^2\right)$。($F$為正六、八面體平面個數)

十一、以O為球心，作同心球C_1、C_2，半徑分別為R_1、R_2，則球C_2上一動點P，對球C_1內接正十二、二十面體各面作投影點，則P點到各投影點距離平方和恆為定值，其值為

$\frac{F}{15}\left[5R_2{}^2+\left(5+2\sqrt{5}\right)R_1{}^2\right]$。($F$為正十二、二十面體平面個數)

陸、參考資料

1. 許勝傑等(民 99)。第 50 屆中小學科展。台北市立麗山高中，點到為止。
2. 高中數學課本/第三冊/第三章/平面向量/翰林出版。
3. 高中數學課本/第四冊/第一、二章/空間向量、空間中的平面與直線/翰林出版。
4. 維基百科/正四面體/
https://zh.wikipedia.org/wiki/%E6%AD%A3%E5%9B%9B%E9%9D%A2%E9%AB%94
5. 維基百科/正六面體/
https://zh.wikipedia.org/wiki/%E7%AB%8B%E6%96%B9%E9%AB%94

6. 維基百科/正八面體/
https://zh.wikipedia.org/wiki/%E6%AD%A3%E5%85%AB%E9%9D%A2%E9%AB%94
7. 維基百科/正十二面體/
https://zh.wikipedia.org/wiki/%E6%AD%A3%E5%8D%81%E4%BA%8C%E9%9D%A2%E9%AB%94
8. 維基百科/正二十面體/
https://zh.wikipedia.org/wiki/%E6%AD%A3%E4%BA%8C%E5%8D%81%E9%9D%A2%E9%AB%94
9. 維基百科/正多面體/
https://zh.wikipedia.org/wiki/%E6%AD%A3%E5%A4%9A%E9%9D%A2%E9%AB%94
10. 維基百科/外接圓/
https://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%A4%96%E6%8E%A5%E5%9C%93
11. 正多面體有關餘弦值和之問題/
https://drive.google.com/open?id=0B4QqeySwczaUZ1pOWExqSzdwN1RqalM1UGZVc09pRHh6WXJV
12. 正多面體有關餘弦值和之問題/
https://drive.google.com/open?id=0B4QqeySwczaUREh4c0tMM3pMSXFFWGY3ckZWNmE1dndIeTVZ
13. 正四面體各平面方程式求法/
https://drive.google.com/open?id=0B4QqeySwczaUWE5jWGxqWDUyS2t6NTFkRG1qbTRRd1ZSWXp3
14. 正六面體各平面方程式/
https://drive.google.com/open?id=0B4QqeySwczaUZ2t3cmhIZ0gxb0V2U2Flczg1TDNLM05lS2lr
15. 正八面體各平面方程式/
https://drive.google.com/open?id=0B4QqeySwczaUbmR6ODE0XzhoRjY2UklDYW5zaVI1Sm9aa0M0
16. 正十二面體各平面方程式/
https://drive.google.com/open?id=0B4QqeySwczaUaGdtQ2dGWGRzMm53eW02bHBVUDhPMjJ5NXo4
17. 正二十面體各平面方程式/
https://drive.google.com/open?id=0B4QqeySwczaUN1VYZGVBdk9HMmgtcktxeHFDbnBvQ1VPdTd3
18. 餘弦值的n次方降次/
https://drive.google.com/open?id=0B4QqeySwczaUdEdsT05BZ3lhZlhDYWNhdWd3M1Vqb2VBMDM4

【評語】050417

本研究以 Geogebra 為實驗工具，利用向量的手法，處理參考資料 1 第 50 屆科展《點到為止》所留下的問題，推廣至正 n 邊形外接圓上一動點到各點距離平方和，並在三維情形，探討球上動點到五種正多面體距離平方和為定值，得到了不錯的結果，有一定程度的興趣。在討論的過程中，均明確交代所引用參考文獻的內容，只是有些參考資料所列超連結文獻無法打開，應再檢視修正。

作品海報

摘要

本研究是將平面上正n邊形與其外接圓上一動點P之間的定值問題推廣到空間中。我們藉由Geogebra繪圖軟體發現以O為圓心，作同心圓C_1、C_2且半徑分別為R_1、R_2，並作圓C_1的內接正n邊形，再以圓C_2上一動點P為圓心作圓C_3且半徑為r，再作圓C_3內接正n邊形。當反向時，連接兩兩頂點的n條線段會共點。除此之外，O與P和連線的交點亦會共線，而這性質在空間中也會成立。

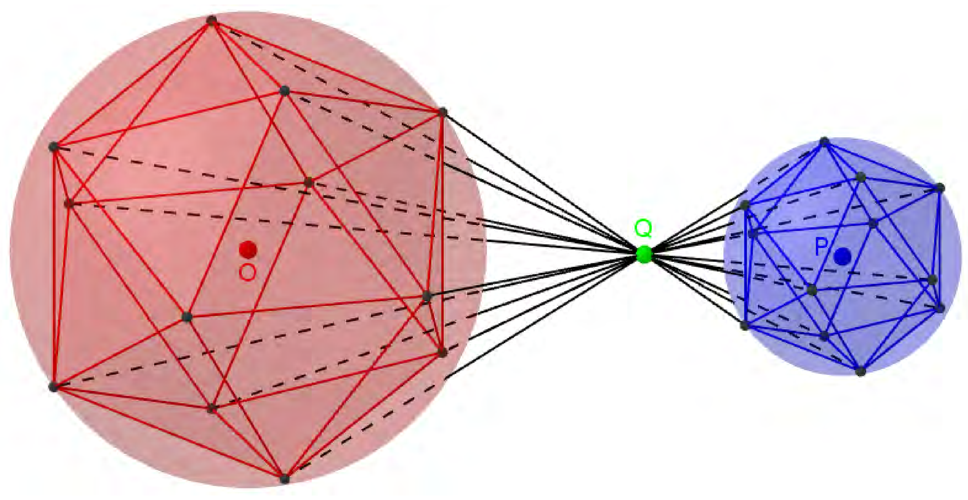


圖1.

壹、研究動機

在專題課時老師介紹了一篇第五十屆科展的文章(許勝傑[1])，文章後留下一個定值的問題：以O為圓心，作同心圓C_1、C_2，半徑分別為R_1、R_2，並作圓C_1的內接正五邊形$A_1 \cdots A_5$，再以圓C_2上一動點P為圓心作圓C_3，半徑為r，再作圓C_3內接正五邊形$B_1 \cdots B_5$，則兩正五邊形各頂點距離二次、四次、六次、八次方和恆為定值。在教授的評語中有提到可以用複數幾何或其他幾何工具來處理部分結果。無意間我們發現另一個幾何工具「向量」，它能將原本複雜的複數幾何算式，透過向量的運算讓式子變得精簡，也更能有效的解決問題，並可以將大部分的結果推廣到空間中，於是我們就改用向量的概念嘗試處理問題。

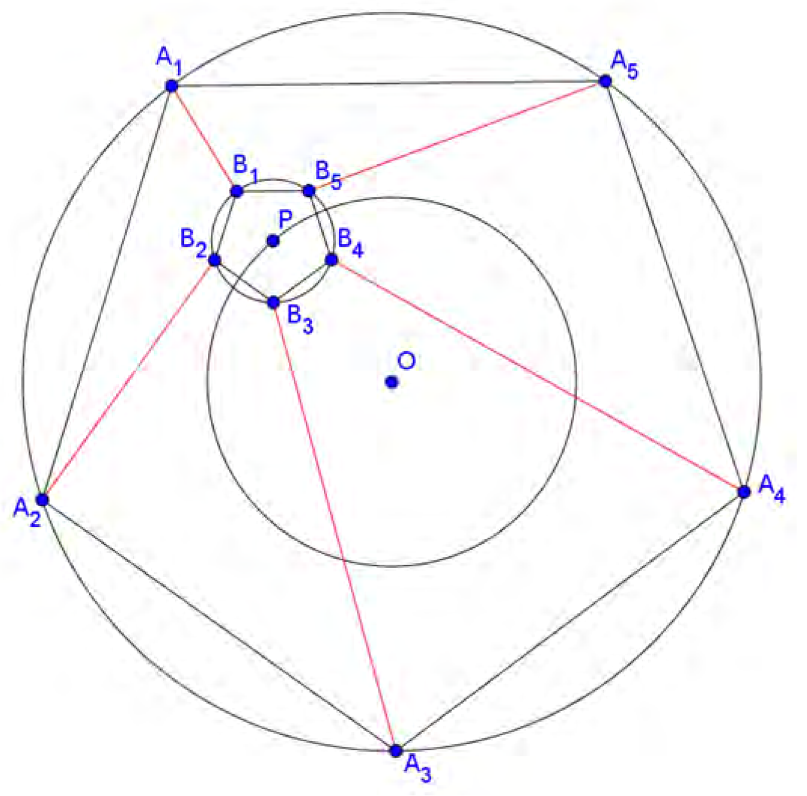


圖2.

貳、研究目的

找出圓上一動點P與其內接正n邊形之各頂點所衍生的定值之公式，並將部分結果推廣到空間中的正多面體。

參、研究設備及器材

紙、筆、電腦、Geogebra繪圖軟體、MathType。

肆、研究過程

一、空間上定值之探討(為了公式的一致性，定義V為正多面體頂點的個數)：

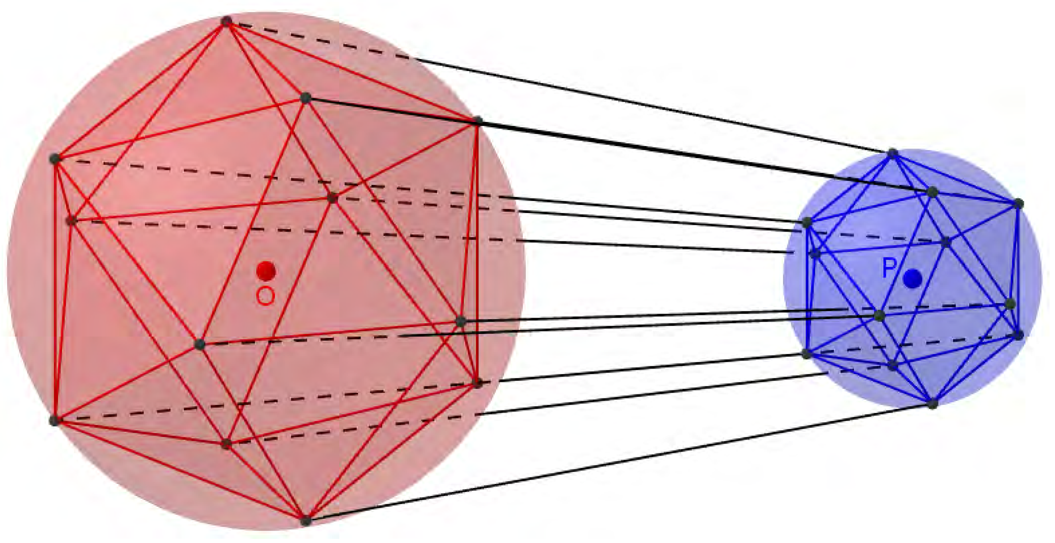


圖3.

定義1：
在空間中，將兩正多面體$A_1A_2 \cdots A_V$與$B_1B_2 \cdots B_V$邊長的比值設為L且O、P分別為其中心，若$\overrightarrow{OA_k} = L\,\overrightarrow{PB_k}$，$k = 1,2,\cdots,V$則稱兩正多面體為同向；若$\overrightarrow{OA_k} = -L\,\overrightarrow{PB_k}$，$k = 1,2,\cdots,V$則稱兩正面體為反向。

定理一：
以O為球心，半徑為R之球上一動點P，到其內接正多面體各頂點距離平方和恆為定值，其值為$2VR^2$。

證明：

$$\overline{PA_k}^2 = \left|\overrightarrow{PA_k}\right|^2 = \left|\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OA_k}\right|^2 = \left|\overrightarrow{PO}\right|^2 + 2\,\overrightarrow{PO} \cdot \overrightarrow{OA_k} + \left|\overrightarrow{OA_k}\right|^2$$

$$= 2R^2 - 2R^2 \cos\angle POA_k = 2R^2\left(1 - \cos\angle POA_k\right)$$

$$\sum_{k=1}^{V} \overline{PA_k}^2 = 2R^2\left(V - \sum_{k=1}^{V} \cos\angle POA_k\right)$$

由參考資料[11]，得$\sum_{k=1}^{V} \cos\angle POA_k = 0 \quad \therefore \sum_{k=1}^{V} \overline{PA_k}^2 = 2VR^2$

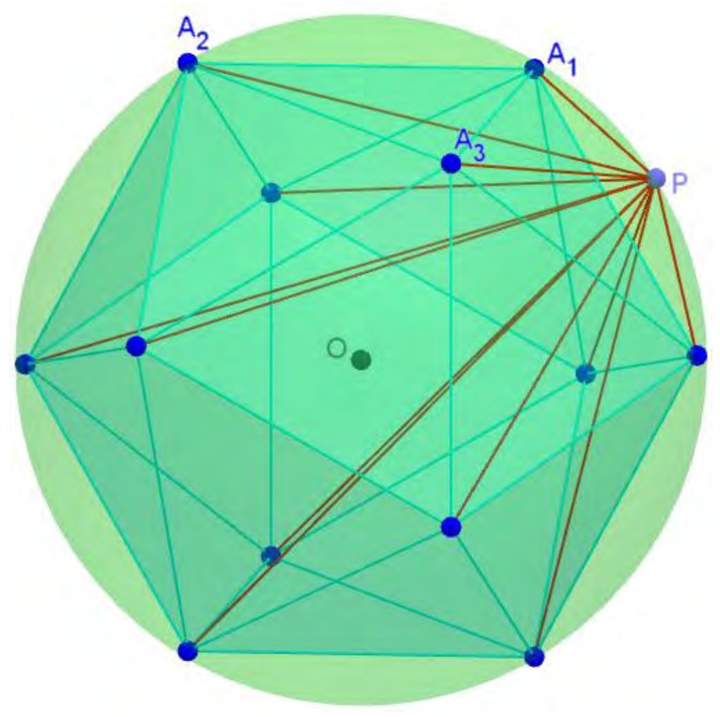


圖4.

定理二：
以O為球心，作同心球C_1、C_2，半徑分別為R_1、R_2，則球C_2上一動點P到球C_1內接正多面體各頂點距離平方和恆為定值，其值為$V\left(R_1^2 + R_2^2\right)$。

證明：

$$\overline{PA_k}^2 = \left|\overrightarrow{PA_k}\right|^2 = \left|\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OA_k}\right|^2 = \left|\overrightarrow{PO}\right|^2 + 2\,\overrightarrow{PO} \cdot \overrightarrow{OA_k} + \left|\overrightarrow{OA_k}\right|^2$$

$$= R_1^2 + R_2^2 - 2R_1R_2 \cos\angle POA_k$$

$$\sum_{k=1}^{V} \overline{PA_k}^2 = V\left(R_1^2 + R_2^2\right) - 2R_1R_2 \sum_{k=1}^{V} \cos\angle POA_k$$

由參考資料[11]，得$\sum_{k=1}^{V} \cos\angle POA_k = 0 \quad \therefore \sum_{k=1}^{V} \overline{PA_k}^2 = V\left(R_1^2 + R_2^2\right)$

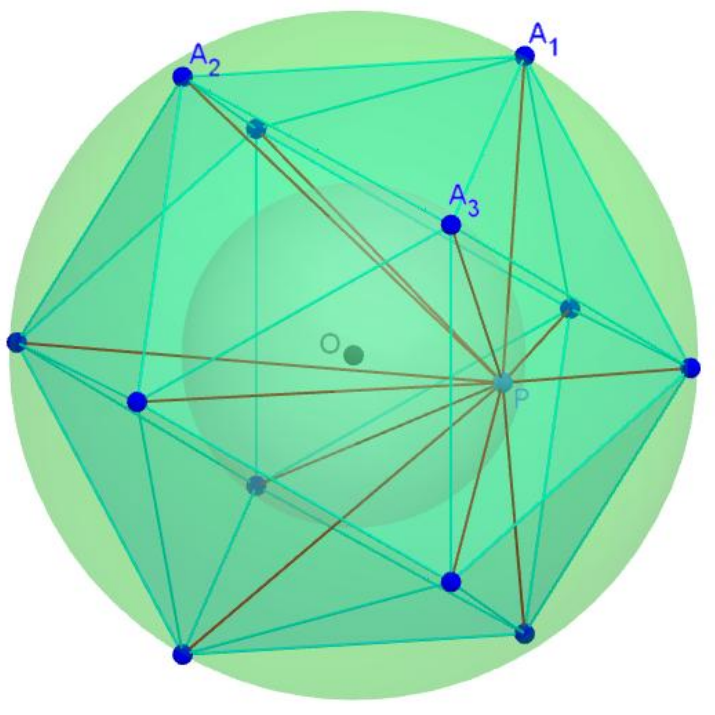


圖5.

定理三：
以O為球心，做同心球C_1、C_2，半徑分別為R_1、R_2，並作球C_1的內接正多面體，再以球 上一動點P為球心作球C_3，半徑為r再作球C_3內接正多面體，且兩正多面體同向，則兩正多面體各頂點距離平方和恆為定值，其值為$V\left[\left(R_1 - r\right)^2 + R_2^2\right]$。

證明：

$$\overline{A_kB_k}^2 = \left|\overrightarrow{A_kB_k}\right|^2 = \left|\overrightarrow{A_kO} + \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PB_k}\right|^2$$

$$= \left|\overrightarrow{A_kO}\right|^2 + \left|\overrightarrow{OP}\right|^2 + \left|\overrightarrow{PB_k}\right|^2 + 2\,\overrightarrow{A_kO} \cdot \overrightarrow{OP} + 2\,\overrightarrow{A_kO} \cdot \overrightarrow{PB_k} + 2\,\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{PB_k}$$

$$= R_1^2 + R_2^2 + r^2 - 2R_1R_2 \cos\angle POA_k + 2R_1 r \cos\pi - 2R_2 r \cos\angle OPB_k$$

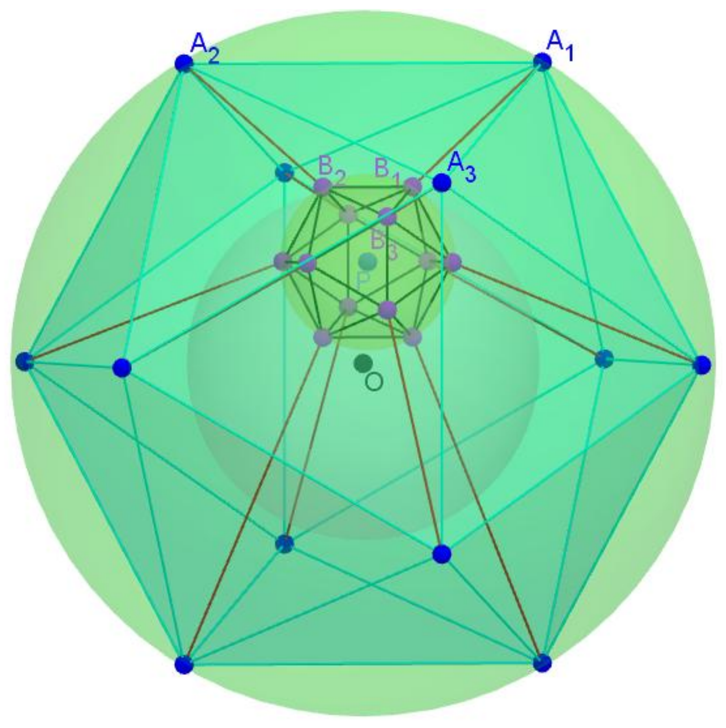


圖6.

$\because \angle POA_k$ 與 $\angle OPB_k$ 為同側內角 $\therefore \angle OPB_k=\pi-\angle POA_k$ ，$\cos\angle OPB_k=-\cos\angle POA_k$

$$\overline{A_kB_k}^2=R_1^2+R_2^2+r^2-2R_1R_2\cos\angle POA_k-2R_1r+2R_2r\cos\angle POA_k$$
$$=\left(R_1-r\right)^2+R_2^2-2R_2\left(R_1-r\right)\cos\angle POA_k$$
$$\sum_{k=1}^{V}\overline{A_kB_k}^2=V\left[\left(R_1-r\right)^2+R_2^2\right]-2R_2\left(R_1-r\right)\sum_{k=1}^{V}\cos\angle POA_k$$

由參考資料[11]，得 $\sum_{k=1}^{V}\cos\angle POA_k=0$ $\therefore \sum_{k=1}^{V}\overline{A_kB_k}^2=V\left[\left(R_1-r\right)^2+R_2^2\right]$

定理四：
以 O 為球心，作同心球 C_1、C_2，半徑分別為 R_1、R_2，並作球 C_1 的內接正多面體，再以球 C_2 上一動點 P 為球心作球 C_3，半徑為 r，再作球 C_3 內接正多面體，且兩正多面體反向則兩正多面體各頂點距離平方和恆為定值，其值為 $V\left[\left(R_1+r\right)^2+R_2^2\right]$。

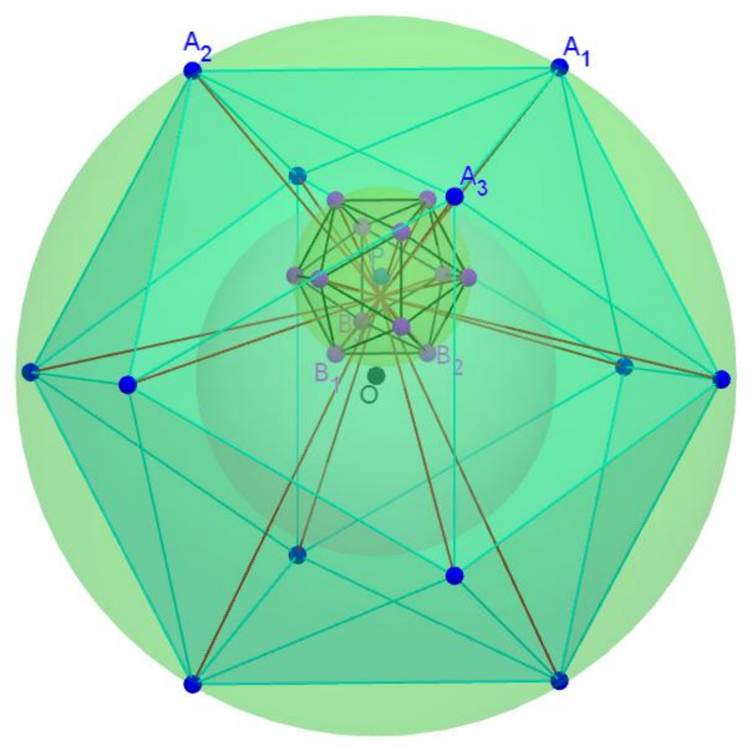


圖7.

證明：

$$\overline{A_kB_k}^2=\left|\overrightarrow{A_kB_k}\right|^2=\left|\overrightarrow{A_kO}+\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PB_k}\right|^2$$
$$=\left|\overrightarrow{A_kO}\right|^2+\left|\overrightarrow{OP}\right|^2+\left|\overrightarrow{PB_k}\right|^2+2\overrightarrow{A_kO}\cdot\overrightarrow{OP}+2\overrightarrow{A_kO}\cdot\overrightarrow{PB_k}+2\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{PB_k}$$
$$=R_1^2+R_2^2+r^2-2R_1R_2\cos\angle POA_k+2R_1r\cos 2\pi-2R_2r\cos\angle OPB_k$$

$\because \angle POA_k$ 與 $\angle OPB_k$ 為內錯角 $\therefore \angle OPB_k=\angle POA_k$ ，$\cos\angle OPB_k=\cos\angle POA_k$

$$\overline{A_kB_k}^2=R_1^2+R_2^2+r^2-2R_1R_2\cos\angle POA_k+2R_1r-2R_2r\cos\angle POA_k$$
$$=\left(R_1+r\right)^2+R_2^2-2R_2\left(R_1+r\right)\cos\angle POA_k$$
$$\sum_{k=1}^{V}\overline{A_kB_k}^2=V\left[\left(R_1+r\right)^2+R_2^2\right]-2R_2\left(R_1+r\right)\sum_{k=1}^{V}\cos\angle POA_k$$

由參考資料[11]，得 $\sum_{k=1}^{V}\cos\angle POA_k=0$ $\therefore \sum_{k=1}^{V}\overline{A_kB_k}^2=V\left[\left(R_1+r\right)^2+R_2^2\right]$

性質1：
給定空間中正多面體 $A_1A_2\cdots A_V$ 與正多面體 $B_1B_2\cdots B_V$ 邊長比值設為 L，O、P 分別為其中心，且兩正多面體反向，則：(1) V 條線段 $\overline{A_kB_k}$ 交於一點 Q (2) $O-Q-P$ 共線

(1) $\therefore \overline{OA_k}\,//\,\overline{PB_k}$、$\overline{OB_{k+1}}\,//\,\overline{PB_{k+1}}$ $\because A_k$、A_{k+1}、B_k、B_{k+1} 共平面令 $\overline{A_1B_1}$ 與 $\overline{A_2B_2}$ 交於 Q 點

，則 $\overline{QA_1}:\overline{QB_1}=\overline{QA_2}:\overline{QB_2}=L:1$

令 $\overline{A_2B_2}$ 與 $\overline{A_3B_3}$ 交於 Q' 點，則可得到 $\overline{Q'A_2}:\overline{Q'B_2}=\overline{Q'A_3}:\overline{Q'B_3}=L:1=\overline{QA_2}:\overline{QB_2}$

故 $Q'=Q$ ，即 $\overline{A_1B_1}$、$\overline{A_2B_2}$、$\overline{A_3B_3}$ 三線段交於一點，重複以上步驟

，可證明 $\overline{A_kB_k}$、$\overline{A_{k+1}B_{k+1}}$、$\overline{A_{k+2}B_{k+2}}$ 三線段交於一點，故此 V 條線段 $\overline{A_kB_k}$ 交於一點。

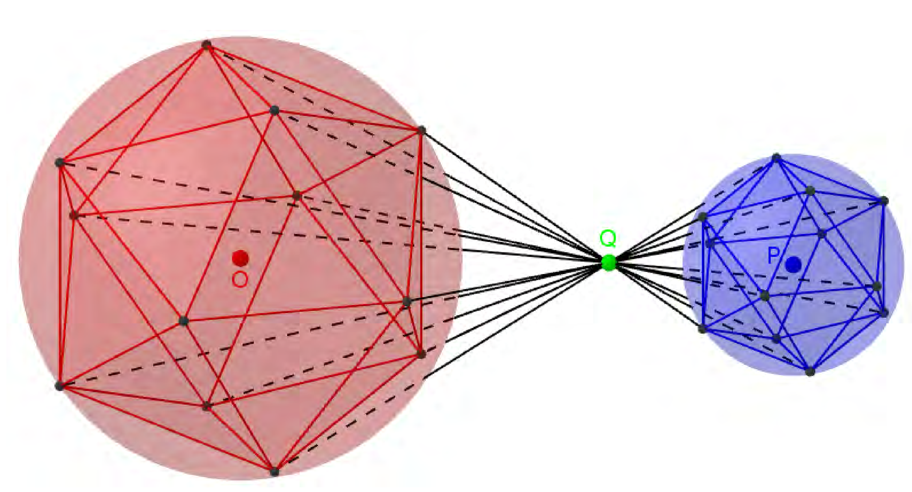


圖8.

(2) 已知 $R_1:r=kL:k=L:1$ ，$k\in\mathbb{R}$(維基百科 / 正多面體[9])

令 $\overline{A_1B_1}$ 與 $\overline{OP}$ 交於 Q'' 點，則 $\overline{Q''A_1}:\overline{Q''B_1}=R_1:r=L:1=\overline{QA_1}:\overline{QB_1}$

故 $Q''=Q$ ，即 $O-Q-P$ 共線。

定理五：
以 O 為球心，作同心球 C_1、C_2，半徑分別為 R_1、R_2，則球 C_2 上一動點 P，對球 C_1 內接正二十面體各面作投影點 D_1、……、D_{20}，則點 P 到各投影點距離平方和恆為定值，其值為 $\frac{4}{3}\left[5R_2^2+\left(5+2\sqrt{5}\right)R_1^2\right]$。

證明：P21、P25

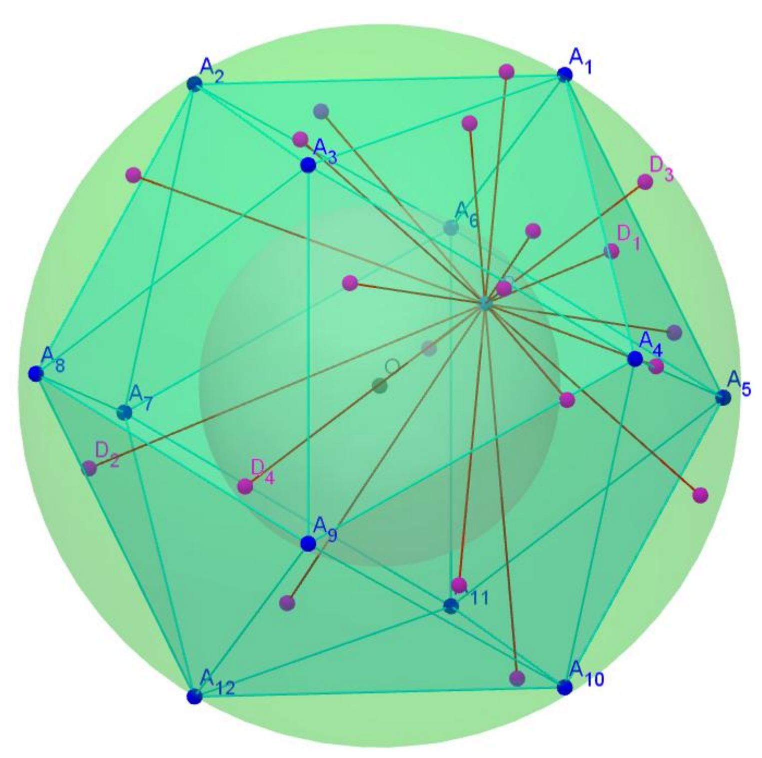


圖9.

二、探討定值公式的最大次方為何：

(一) 平面點→點最大次方：

次方為偶數時 $2(n-1)$ 和為最大次方，到 $2n$ 次方時和就不為定值。以定理1-1為例，

$$\sum_{k=1}^{n}\overline{PA_k}^{2n}=\sum_{k=1}^{n}\left[2R^2\left(1-\cos\angle POA_k\right)\right]^n$$
$$=2^nR^{2n}\sum_{k=1}^{n}\left\{1-\cos\left[\frac{2(k-1)\pi}{n}+\theta\right]\right\}^n$$
$$=2^nR^{2n}\sum_{k=1}^{n}\left\{\pm\cos^n\left[\frac{2(k-1)\pi}{n}+\theta\right]\mp C_{n-1}^{n}\cos^{n-1}\left[\frac{2(k-1)\pi}{n}+\theta\right]\pm\cdots+1\right\}$$

其中最高次的餘弦值次方為 n，，由參考資料[18]得出

$\pm\sum_{k=1}^{n}\cos^n\left[\frac{2(k-1)\pi}{n}+\theta\right]=\pm2^{1-n}\sum_{k=1}^{n}\cos n\left[\frac{2(k-1)\pi}{n}+\theta\right]+\cdots$ ，再由引理1可知

$\pm2^{1-n}\sum_{k=1}^{n}\cos n\left[\frac{2(k-1)\pi}{n}+\theta\right]=\pm2^{1-n}n\left(\cos n\theta\right)\Rightarrow$ 不為定值，故正 n 邊形在 $2n$ 次方時和不為定值。

(二)空間點→點最大次方：

跟平面的一樣都是餘弦最高次方導致是否為定值，就像參考資料[11]、[12]是一次方和二次方，它們都為定值，三次方時正四面體 $\sum_{k=1}^{n}\cos^3\angle POA_k$ 就不為定值，我們發現(表1.)

	餘弦值次方和為定值
正四面體	1、2
正六面體	1、2、3
正八面體	1、2、3
正十二面體	1、2、3、4、5
正二十面體	1、2、3、4、5

表1.

	$\overline{A_kB_k}$ 次方和為定值
正四面體	2、4
正六面體	2、4、6
正八面體	2、4、6
正十二面體	2、4、6、8、10
正二十面體	2、4、6、8、10

表2.

其中奇數次方和為0、二次方和為 $\frac{V}{3}$ 四次方和為 $\frac{V}{5}$。(表1.)

可得到五個正 n 面體為幾次方和時有定值。(表2.)

(三) 空間點 → 平面最大次方：

由點到平面距離公式直接一次方、二次方、等等相加，可得到最大次方為(表3.)

	P 到各平面次方為定值
正四面體	1、2
正六面體	1、2、3
正八面體	1、2、3
正十二面體	1、2、3、4、5
正二十面體	1、2、3、4、5

表3.

但是當 R_2 大於正多面體內切球半徑 R_i 時奇數次方和不為定值，原因為點到平面距離公式絕對值內的數值可正可負，而其正負須由動點 P 的位置決定。當 R_2 等於 R_i 時，絕對值內的最小值為0；若 R_2 大於 R_i 時，則 R_1、R_2 的比值變小，且絕對值內的最小值必為負數。

證明：P27

伍、研究結果

一、以 O 為圓心，作同心圓 C_1、C_2，半徑分別為 R_1、R_2，並作圓 C_1 的內接正 n 邊形，再以圓 C_2 上一動點 P 為圓心作圓 C_3，半徑為 r，再作圓 C_3 內接正 n 邊形，且兩正 n 邊形同(反)向，則兩正 n 邊形各頂點距離平方和恆為定值，其值為 $n\left[(R_1 \mp r)^2 + R_2^2\right]$。

二、以 O 為圓心，作同心圓 C_1、C_2，半徑分別為 R_1、R_2，並作圓 C_1 的內接正 n 邊形，再以圓 C_2 上一動點 P 為圓心作圓 C_3，半徑為 r，再作圓 C_3 內接正 n 邊形，且兩正 n 邊形同(反)向，則兩正 n 邊形各頂點距離四次方和恆為定值，其值為 $n\left[(R_1 \mp r)^4 + R_2^4 + 4R_2^2(R_1 \mp r)^2\right]$。

三、給定平面上正 n 邊形 $A_1A_2\cdots A_n$ 與正 n 邊形 $B_1B_2\cdots B_n$ 邊長比值設為 L，O、P 分別為其中心且兩正 n 邊形反向，則：(1) n 條線段 $\overline{A_kB_k}$ 交於一點 Q (2) $O-Q-P$ 共線

四、以 O 為球心，半徑為 R 之球上一動點 P，到其內接正 n 面體 $A_1A_2\cdots A_V$ 各頂點距離平方和恆為定值，其值為 $2VR^2$。

五、以 O 為球心，半徑為 R 之球上一動點 P，到其內接正 n 面體 $A_1A_2\cdots A_V$ 各頂點距離四次方和恆為定值，其值為 $\frac{16}{3}VR^4$。

六、以 O 為球心，做同心球 C_1、C_2，半徑分別為 R_1、R_2，並作球 C_1 的內接正多面體，再以球 C_2 上一動點 P 為球心作球 C_3，半徑為 r，再作球 C_3 內接正多面體，且兩正多面體同(反)向，則兩正多面體各頂點距離平方和恆為定值，其值為 $V\left[(R_1 \mp r)^2 + R_2^2\right]$。

七、以 O 為球心，做同心球 C_1、C_2，半徑分別為 R_1、R_2，並作球 C_1 的內接正多面體，再以球 C_2 上一動點 P 為球心作球 C_3，半徑為 r，在作球 C_3 內接正多面體，且兩正多面體同向，則兩正多面體各頂點距離四次方和恆為定值，其值為 $V\left[(R_1 \mp r)^4 + R_2^4 + \frac{10}{3}R_2^2(R_1 \mp r)^2\right]$。

八、給定空間中正多面體 $A_1A_2\cdots A_V$ 與正多面體 $B_1B_2\cdots B_V$ 邊長比值設為 L，O、P 分別為其中心，且兩正多面體反向，則：(1) V 條線段 $\overline{A_kB_k}$ 交於一點 Q (2) $O-Q-P$ 共線

九、以 O 為球心，作同心球 C_1、C_2，半徑分別為 R_1、R_2，則球 C_2 上一動點 P，對球 C_1 內接正四面體各面作投影點 D_1、D_2、D_3、D_4，則 P 點到各投影點距離平方和恆為定值，其值為 $\frac{4R_1^2+12R_2^2}{9}$。

十、以 O 為球心，作同心球 C_1、C_2，半徑分別為 R_1、R_2，則球 C_2 上一動點 P，對球 C_1 內接正六、八面體各面作投影點，則 P 點到各投影點距離平方和恆為定值，其值為 $\frac{F}{3}\left(R_1^2+R_2^2\right)$。($F$ 為正六、八面體平面個數)

十一、以 O 為球心，作同心球 C_1、C_2，半徑分別為 R_1、R_2，則球 C_2 上一動點 P，對球 C_1 內接正十二、二十面體各面作投影點，則 P 點到各投影點距離平方和恆為定值，其值為 $\frac{F}{15}\left[5R_2^2+\left(5+2\sqrt{5}\right)R_1^2\right]$。($F$ 為正十二、二十面體平面個數)

陸、參考資料

1.許勝傑等(民99)。第50屆中小學科展。台北市立麗山高中，點到為止。
2高中數學課本/第三冊/第三章/平面向量/翰林出版。
3.高中數學課本/第四冊/第一、二章/空間向量、空間中的平面與直線/翰林出版。
4.維基百科/正四面體
5.維基百科/正六面體
6.維基百科/正八面體
7.維基百科/正十二面體
8.維基百科/正二十面體
9.維基百科/正多面體
10.維基百科/外接圓
11.正多面體有關餘弦值和之問題
12.正多面體有關餘弦值和之問題
13.正四面體各平面方程式求法
14.正六面體各平面方程式求法
15.正八面體各平面方程式求法
16.正十二面體各平面方程式求法
17.正二十面體各平面方程式求法
18.餘弦值的 n 次方降次