中華民國第 57 屆中小學科學展覽會
作品說明書

高級中等學校組　數學科

050415

從 2D 投影建構 3D 立體策略之探討

學校名稱：臺中市立臺中第一高級中等學校

作者：	指導老師：
高二 黃維坪	包宏信

關鍵詞：遞迴、估計與構造、極值問題

摘要

2D 與 3D 間的轉換一直以來都是重要的科學問題，其中從平面投影建構 3D 模型的方法及策略是其主要的研究方向。一般而言，會使用坐標系轉換的方法，需要仰賴電腦的運算能力來完成大量的計算。我們在想是否能夠找出更有效率的策略，希望以更少操作建立 3D 模型。此方法將根據當前的狀況來判定最佳的下一步。我們選擇凸多面體，尤其是柱、錐體，作為研究對象，並對各種情況進行分析。此研究中探討了完全還原立體所需之條件，以及還原柱、錐體下的最佳與最差狀況，最後提出對於特定情況下的還原策略。儘管並沒有找出方法來解決所有情況，但本文中已導出一部分的結論，希望未來能夠研究更複雜情況下的還原策略。

壹、研究動機

近幾年以來，科技不斷在尋求能快速且精準的以 2D 重新建構 3D 模型的方法，在上網查詢資料後發現大多的運算皆是以數學的座標轉換配合電腦的高速運算，或者考慮照片上的光影深淺或顏色，再利用一些演算法去還原。我想利用投影去嘗試還原立體，研究用投影還原立體的方法，並在某些情況下找出一個最佳策略，讓投影的次數最少。

貳、研究目的

一、用投影完全還原凸多面體的策略的相關探討

二、以水平投影還原角柱體、角錐體之策略的相關探討

參、研究設備與器材

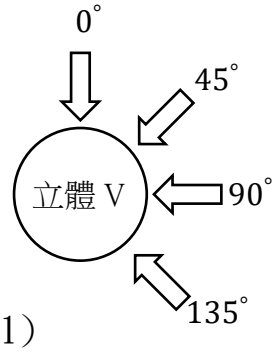
紙、筆、Geogebra5.0

肆、研究過程或方法

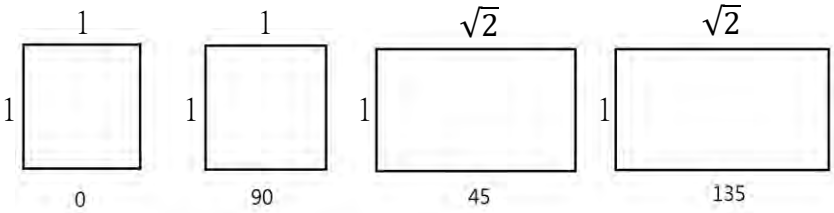
一、用投影完全還原凸多面體的策略的相關探討

(一)投影完全還原立體之充要條件

我觀察到在某些情況下，用有限個投影是有可能還原一個凸多面體，例如從圖 1-1 中的四個方向投影，並分別得到圖 1-2 中四個影子的情況下，可以推論出該未知物體 V 必定是個單位正方體。

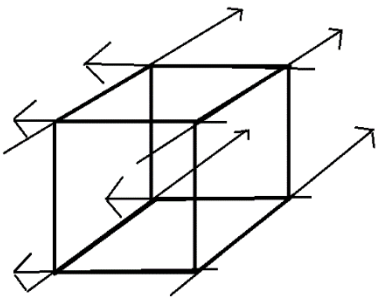


圖(1-1)

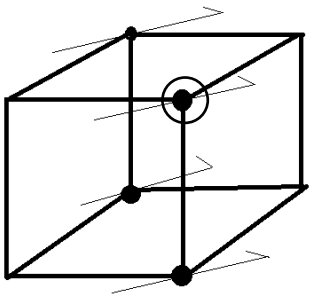


圖(1-2)

說明：由 0 度和 90 度方向的投影知道未知物體 V 的範圍被侷限在圖 1-3 的單位正方體之中。反過來假設未知物體 V 不是該正方體，由於 V 是凸多面體，故在單位正方體的八個頂點之中必有一頂點落在 V 外，但是由圖 1-4 可知必與 45 度和 135 度方向的兩個投影矛盾。故此情況下被唯一確定了。



圖(1-3)



不妨假設圖中被圈起的頂點在 V 之外，那麼 45 或 135 方向兩個方向之中其中一個在該處不會產生影子，不可能產生如圖 1-2 的長方形影子(會缺一角)。

圖(1-4)

從這個例子可以發現有限個投影在某些情況下是可以唯一確定某個凸多面體的，而且立體被確定的條件即是所有頂點都被「固定」住了，也就是說存在一部分投影所圍出的凸多面體的所有頂點都被某條投影線通過而且該投影線只經過該點，此時便可如上述方法反證該未知凸多面體被完全還原(確定)了。

那如果已知有限個投影完全還原了未知立體，必能在這有限個投影中發現上述情況嗎？答案是肯定的，對於該未知凸多面體的某一頂點 A，考慮頂點 A 不符上述條件，把頂點 A 移除極小一角，並不矛盾任何投影的結果而產生新立體，儘管誤差極小但仍不是完全還原，於是便有：

定理 1：有限個投影還原凸多面體之充要條件為：存在一部分投影所圍成的多面體區域，其每一個頂點都被某條投影線通過，而且該投影線只經過該點。

(二)投影方向探討

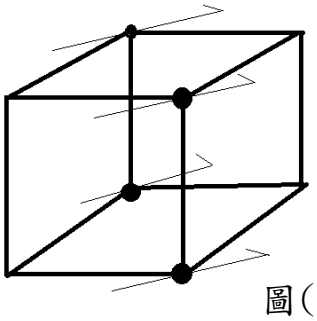
由於三維下決定投影向量有三個變數，會大大增加分析的複雜度，於是在接下來的研究特別探討只取z=0 的向量下的還原。此時投影皆繞著z軸旋轉，又可以變成用單變量角度來表示。在此定義若投影向量的z分量為 0 則該投影為水平投影。

(三)最簡還原策略

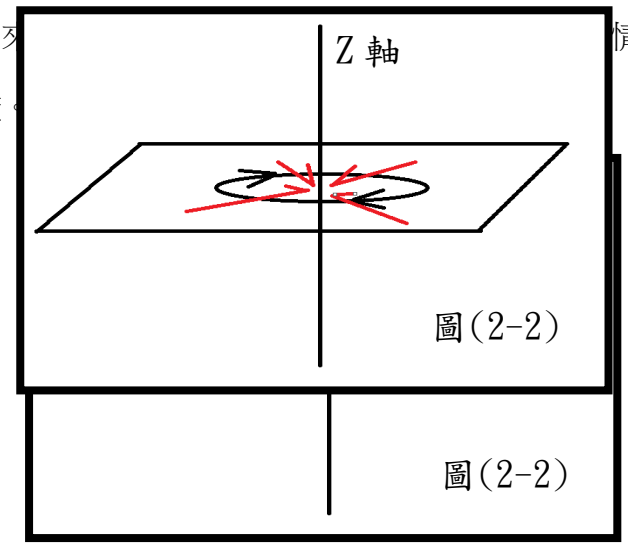
接下來舉一個最簡策略來完全還原凸多面體，即對於所有z=0 的投影向量都取一次投影即可(即取所有的水平投影一次)。

證明：

由於未知物體是凸多面體且面有限，必可找到其中有限個投影恰好圍出該凸多面體，且該凸多面體的每個頂點都被某條投影線通過而且該投影線只經過該點(取特定投影方向使得投影線剛好「切」凸多面體於那個頂點，如圖 2-1)。於是可以取其中有限個投影，即圍成該凸多面體的那些投影和用來 情況，由**定理 1** 得到完全還原的結果，得證。



圖(2-1)



圖(2-2)

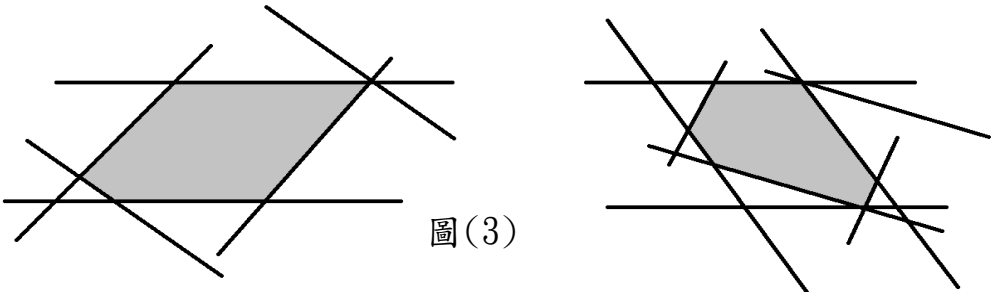
圖(2-2)

結論 1：最簡完全還原策略為：取所有的水平投影一次。

二、以水平投影還原角柱體、角錐體之策略的相關探討

(一)建立表達方法&基礎性質

接下來探討只使用z=0 的投影(水平投影)的情況，由於在柱體跟錐體的情況下，投影的高都是相同的，於是投影只給予寬的限制條件，可視為還原一平面圖形(即底面)。投影狀況可以使用下列作圖法表達(圖 3)，其中灰色區域即代表底面圖形被限制的範圍



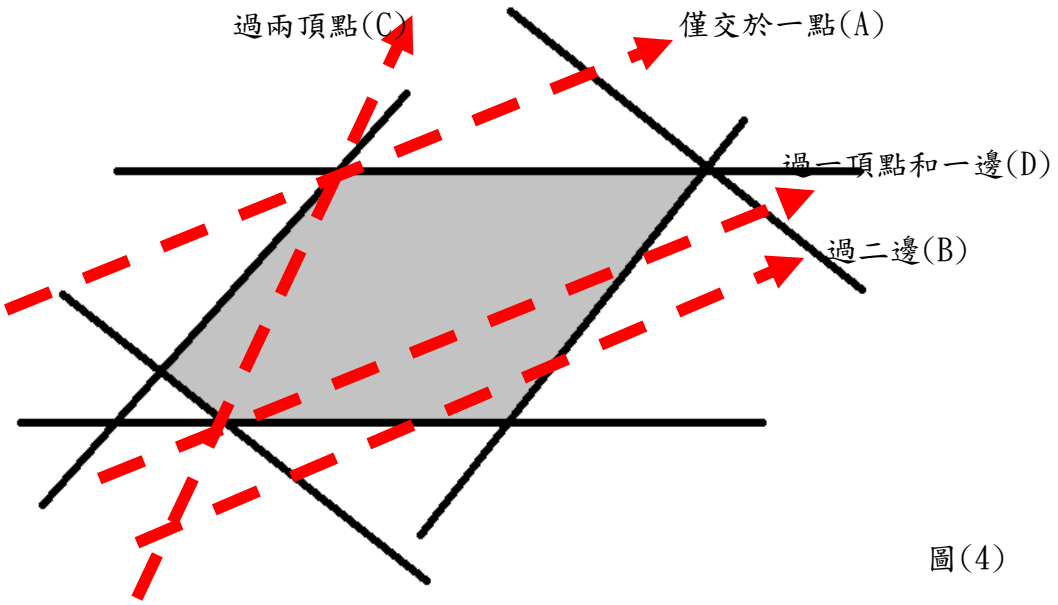
圖(3)

因為對未知的底面圖形而言，每次的水平投影相當給予其兩條平行投影線的限制，而底面圖形將會被限制於多組平行線所圍成的灰色區域內，圖 3 為觀察者俯視底面圖形時所見的情況。先假設好未知的底面圖形，從畫圖觀察中可以發現：

1.灰色區域(可行解區域)的每一條邊至少通過底面的某一頂點。(點佔線原理)

2.三條(投影)線交於一點時則該點必為頂點。(三線共點)

3.每次投影產生兩條投影線，每條線與目前的可能區域(灰色區域)的互動可能有四種結果：僅交於一點(A)、與灰色區域的邊交兩點(B)、通過灰色區域兩頂點(C)，以及交兩點且其中一點為頂點(D)。(圖 4)

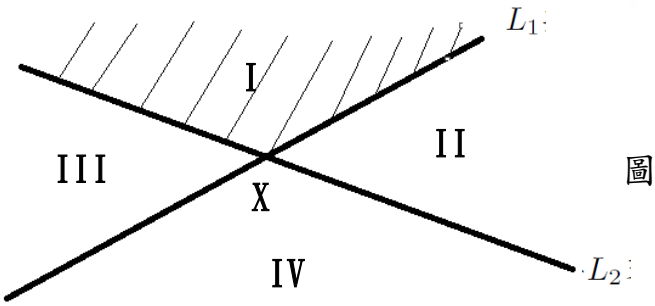


圖(4)

1.的原因顯然，因為投影線必至少通過一未知底面圖形的頂點才能產生影子；3.為列舉出的情況；2.的證明如下。

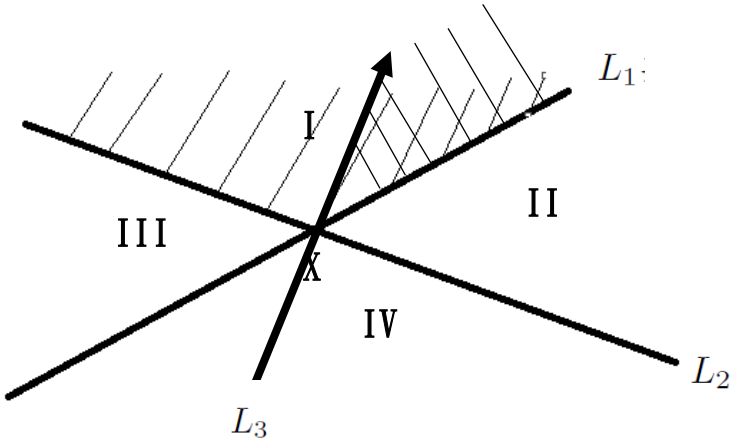
證明：

L_1與L_2交於點X，將平面分成四個區域 I , II , III , IV，如圖所示：

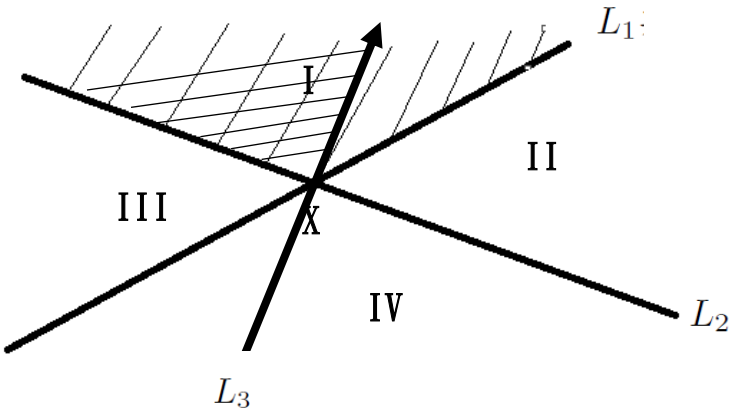


圖(5)

不妨假設 I 爲灰色區域，若L_3只過 II , III，由點佔線原理知道X必須爲頂點；若只過 I, IV，則有下列兩種可能：



若灰色區域變成剩下右邊，則對 L_2 用點佔線知道 X 為頂點。



若灰色區域變成剩下左邊，則對 L_1 用點佔線知道 X 為頂點。

所以知道不論如何 X 必為頂點，故原命題得證。

定理 2：可能區域(灰色區域)的每條邊上都至少存在一個頂點。(點佔線原理)

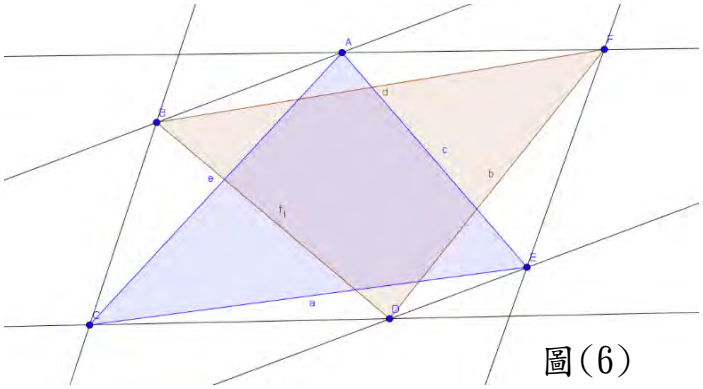
定理 3：三投影線共點則該點必為頂點。(三線共點)

(二)水平投影還原三角柱(錐)

不論先投影任兩個方向皆可得到可能區域為一平行四邊形。此時取對角線方向作第三次投影，可以把可能的情況分成五類：

1.兩投影線交平行四邊形於四點，且無三線共點

可能區域為一六邊形，且每個頂點最多被兩條邊通過，但根據點佔線原理每條邊至少通過一頂點，而圖中有六條邊卻只有三個頂點，故三個頂點必為下列兩種可能(ACE)或(BDF)，欲判別只需再取另一條對角線的方向的投影一次，共四次。(圖 6)

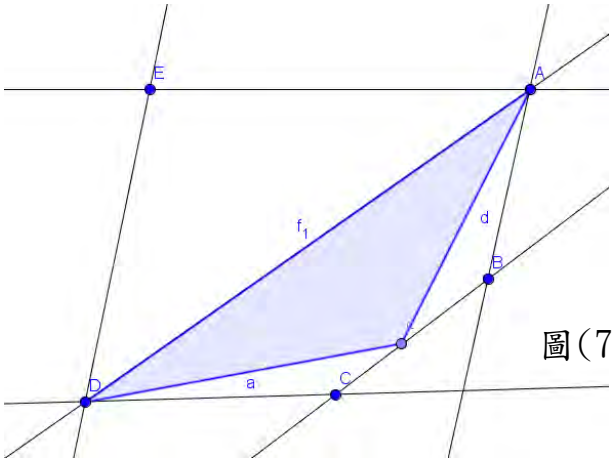


圖(6)

欲分辨此兩種狀況只需再取另一條對角線的方向的投影即可。

2.兩投影線交平行四邊形於四點，且可能區域為梯形

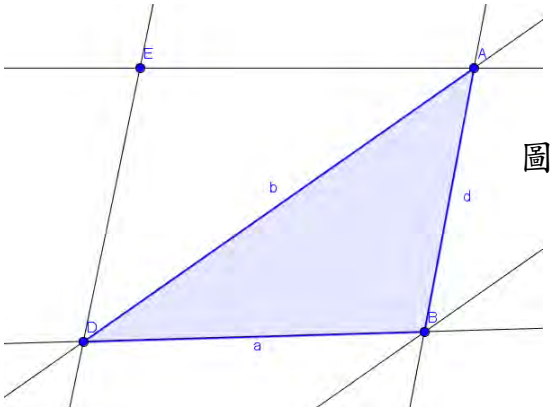
兩個三線共點，確認 AD 兩點，由點佔線知道最後一個點位於 BC 邊上，再取 AC 方向投影即可得知該點在線上的確切位置，共四次。(圖 7)



圖(7)

3.兩投影線交平行四邊形於三點，且可能區域為三角形

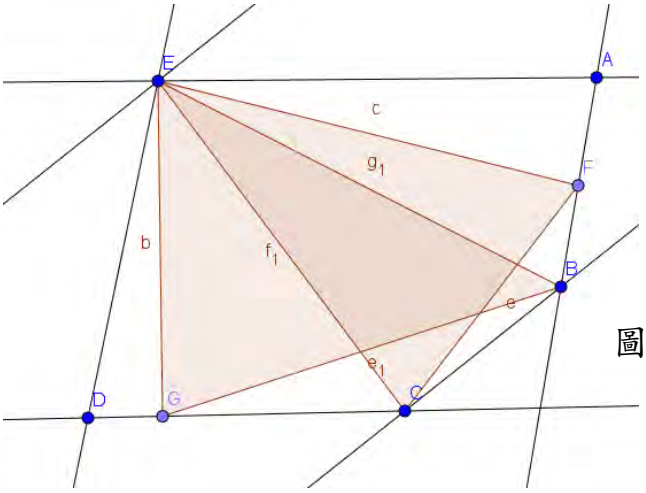
直接出現三個三線共點，共三次。(圖 8)



圖(8)

4.兩投影線交平行四邊形於三點，且可能區域為五邊形

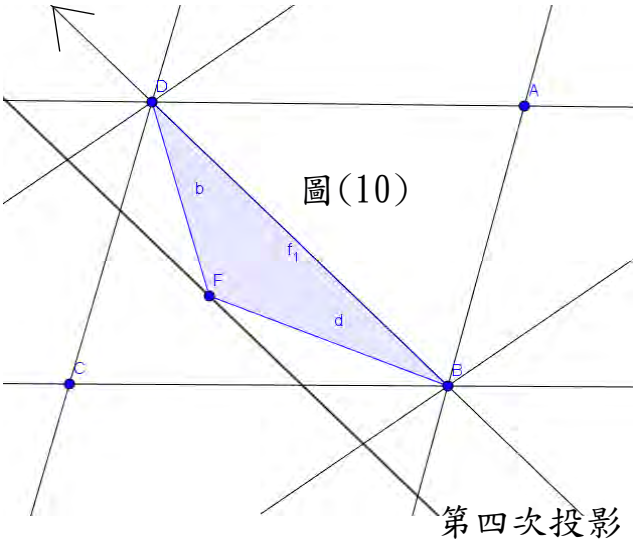
出現一個三線共點，由點佔線知道 B 與 C 至少其中一個為頂點，此時只要再取另一條對角線方向的投影便可得到另兩個點，總共四次。(圖 9)



圖(9)

5.兩投影線交平行四邊形於二點，可能區域仍為平行四邊形

確認兩點，但卻會使剩下那個點完全無線索可循，策略為先取另一條對角線方向投影使得該點被限制在某條線上，再以一次投影確認其在線上的位置(類似 2.的作法)，共五次。而四次是不可能的，因為最後那個點在三次投影後沒有任何線限制，至少還需要兩條不同的投影線限制，所以至少還需兩次投影，故五次為最少。(圖 10)



圖(10)

第四次和第五次投影用來找出 F 的確切位置(兩投影線交點)。

從這裡得到一套策略一定可以在五次以內還原三角柱(錐)，現證明這是最佳策略，也就是不可能只用四次投影就保證完全還原三角柱(錐)。

證明：

不論取任意前三次投影後都可能產生 5.的情況，由上述討論過程便可知在該情況下至少還需要兩次投影，於是該情況下至少要 5 次才能還原底面三角形，故得證。

結論 2：水平投影下最少五次可以保證完全還原三角柱(錐)。

明顯的在研究過程中變數極多，四邊形的情況變得非常複雜，而由上述探討可以發現兩個主要問題：

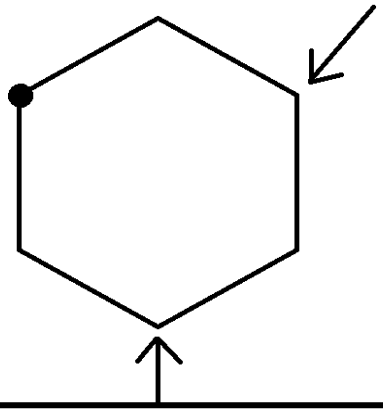
1.最少可能只要幾次投影就能完全還原s角柱(錐)？(最佳狀況)

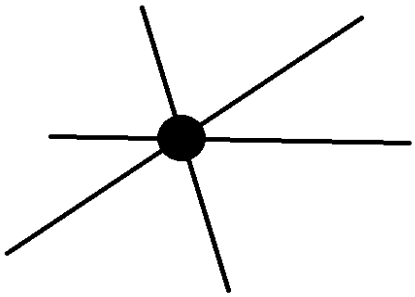
2.最少需要幾次投影才能保證完全還原s角柱(錐)？(最差狀況)

(三)水平投影下還原s角柱(錐)的最佳狀況

用一次投影不可能就確定還原出該未知底面圖形，於是必存在一最小值，使得至少要用超過這個次數的水平投影才能還原出該底面圖形，換句話說，即考慮最佳狀況下還原該底面圖形所需的投影次數。如果完全還原了一個s邊形底面，那麼我們必定確認了它s個頂點的位置，但是一個頂點要被確認，必須有投影線限制它，於是以投影線的不變量來分析。事實上底面為三角形時兩次投影只能產生平行四邊形的可行解區域故至少要三次才可能完全還原，而在嘗試四邊形的狀況後得到答案為四次，因此猜測還原s邊形底面最佳狀況需要s次投影。

證明：



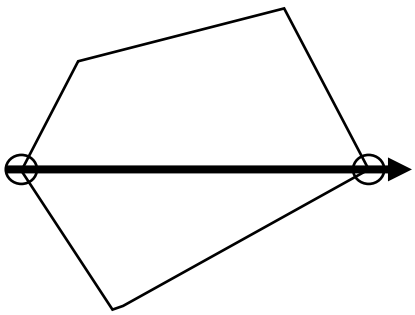


第一類：
例如已知底面為三角形，且已經確認一個頂點的所在，則根據點占線原理(**定理 2**)知道另兩頂點在箭頭處上。則這兩個被確認的頂點屬於第一類。

第二類：
三線(或以上)共點。(**定理 3**)

注意到頂點被確認要失去兩個自由度(至少被兩條線通過)，而第一類為恰好被兩條線通過時頂點被確認的方式，第二類則是因為三條線以上通過而確認。

現在我分析整張圖上所有線的數量，假設s個頂點都被確定時，有k個頂點屬於第二類，$s-k$個屬於第一類，計算圖中投影線的數量L。第一類的頂點由於點占線原理，會對應到通過它的兩條投影線且這兩條投影線不會被重複計算，不然便無法使用點占線原理；第二類的頂點則是對應到通過它的線(至少三條)，且可以與相鄰的第二類頂點至多共用一條投影線。



如左圖，若兩個圈起來的未知圖形的頂點共用了投影線，則該投影線通過此兩點，直接穿過了該未知圖形，違反投影的原理。故非相鄰的第二類頂點間不能共用投影線。

$k<s$：計算線的數量可得

$$L \geq 3k-(k-1)+2(s-k)=2s+1$$

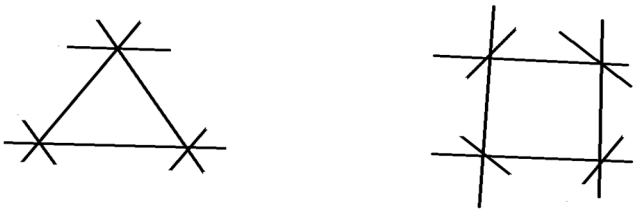
（至多共用$k-1$條投影線）

$k=s$：計算線的數量可得

$$L \geq 3k-k=2k=2s$$

（至多共用k條投影線）

由於每次投影產生兩條投影線，不難知道上述兩種狀況皆至少需要s次投影。現在構造s次投影便可完全還原的例子，即未知底面圖形正s邊形(圖 11)，然後取s次投影使得每個頂點都恰好被三線通過(圖 11)，故得證。



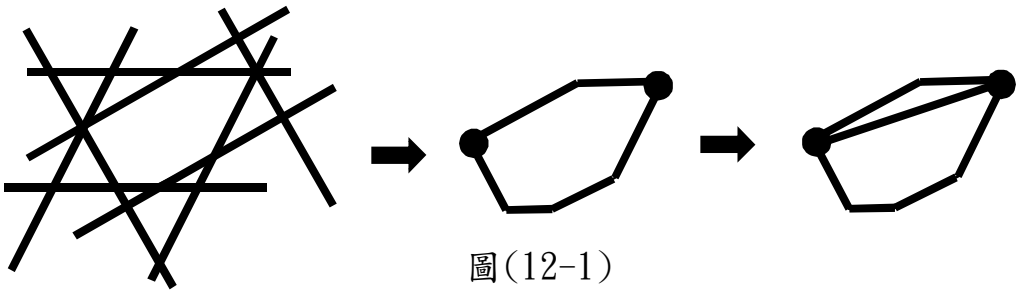
$s = 3$　　圖(11)　　$s = 4$

定理 4：水平投影下最少s次便可能完全還原s角柱(錐)。(最佳狀況)

(四)水平投影下還原s角柱(錐)的最差狀況

最差狀況的探討如果用像分析三角形的枚舉法，產生的可能結果非常多且複雜，所以我先探討了一些比較特定的情況。這裡先定義一些新名詞：

1.情況圖：一種更進階的表達方法，產生方法為：先將原本的表達方法中與可行解區域無關(沒有用)的線去掉，並把已確認(三線共點)的頂點標出，然後若有多個已確認頂點則將其凸包畫出。(圖 12-1)

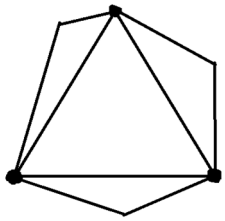


圖(12-1)

對於每一張情況圖G，定義$f(G)$為在此情況下保證完全還原至少所需投影次數，即最糟狀況下所需要的投影次數。

2.情況圖G的基本資訊包含：已確認點個數K，未確認點個數k，區域數n，各區域邊數 $a_1, a_2, \ldots, a_n$，易知欲確認的底面為$K + k$邊形。區域數不包含已知頂點所形成的凸包的區域，例如圖 12-1 情況圖的區域數為 2，而一個區域的邊數則定義為該區域的總邊數扣除兩端點都是已知頂點的邊。(圖 12-2)

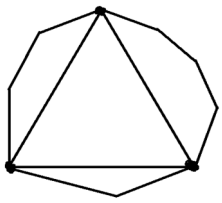
圖(12-2)



區域數$n = 3$,已確認頂點個數$K = 3$
區域邊數：2,2,2

3. $min(G)$：情況圖G邊界上至少存在的頂點個數(可用點佔線算出)。(圖 12-3)

圖(12-3)



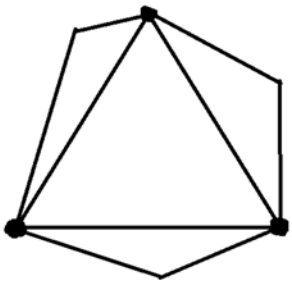
$min(G) = 5$，因為右上的區域邊界上至少還有一個頂點，而左上的區域邊界上至少還有一個頂點，加上原本就已確認的三個頂點，共五個

4. std：若$min(G) = K + k$，稱G為標準(std)狀態。

5. $only$：若情況圖G滿足：在任意角度的投影下所產生的兩條新投影線中，都必定有一條投影線僅交G於一已知頂點，稱G為唯一($only$)狀態。(圖 12-4)

6.令情況圖G經水平投影v(角度θ)後可能變成的圖的集合為$\{G'\}$，記為$v_\theta(G) = \{G'\}$。

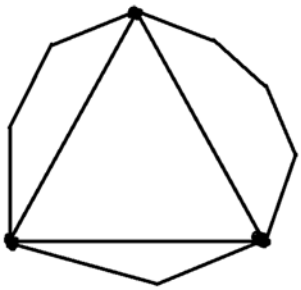
$only$實質上代表每一次投影可視為只有一條投影線，因為另一條投影線根據定義僅交G於一已知頂點，對情況圖不會有任何影響；而std實質上代表所有頂點都已經位於圖G的邊界上，意即所有點都至少已被一條線限制，自由度小等於 1。



$n = 3, K = 3, min(G) = 3, G$為$only$

區域邊數：2, 2, 2

圖(12-4)



$n = 3, K = 3, min(G) = 5, G$非$only$

區域邊數：2, 2, 2

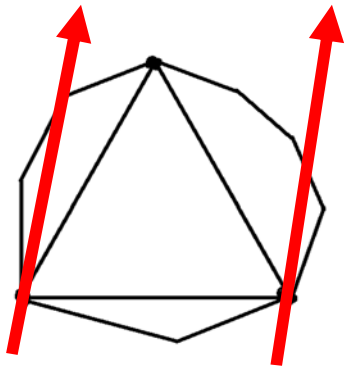
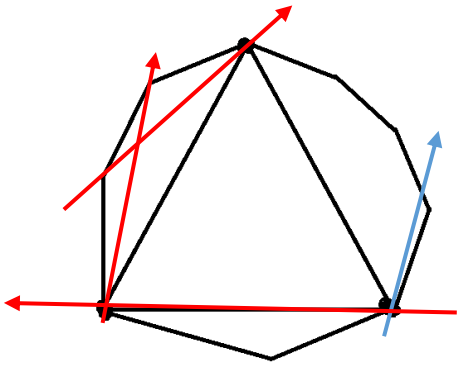


圖 12-4 下方的圖為非$only$，因為紅線方向的投影可能產生不滿足$only$定義的結果。

7.定義將所有的投影方向分成兩類：規則和不規則。若投影方向滿足下面條件則稱該投影方向為規則的，其餘方向則為不規則的(圖 12-5)：

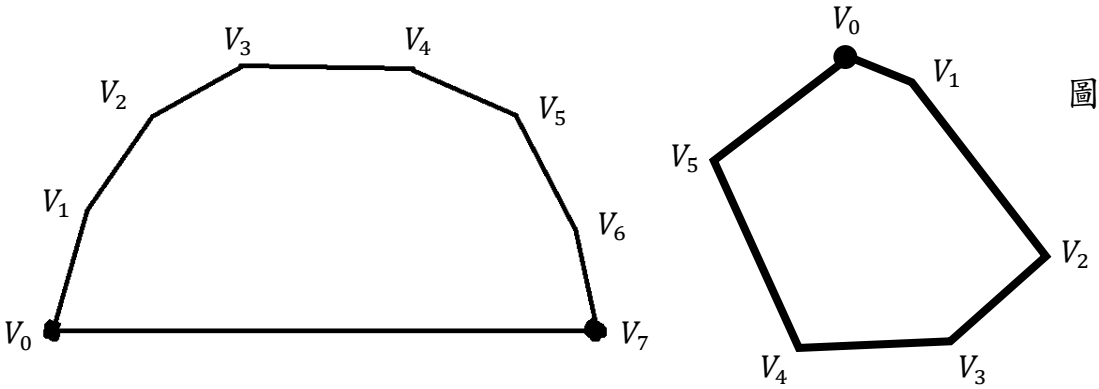
存在一區域在標號其頂點後，有下標 i 使得$\overline{V_iV_{i+2}}$與投影方向相同(平行投影方向)

對單一個區域標號頂點的方法則如圖 12-6 所示。



圖(12-5)

紅箭頭方向為規則的
藍箭頭方向為不規則的



圖(12-6)

依照順序標點，一個區域可能有 0 到 2 個已知頂點，若有則以已知頂點開始標號並以已知頂點結束標號，若為 0 個已知頂點則隨意取起點開始標

在沒有給定底面圖形為幾邊形的狀況下，可以想像最糟狀況需要非常多次投影，實際上可猜測是需要無限多次投影的，因為該底面可能為s邊形而s極大。猜想在沒有給定幾邊形的狀況下必需要無限多次投影，而在有給定的情況下應該是有限多次。

證明：

假設每一次的投影都產生下面的情況：兩條投影線與可能區域的邊交於四點，可能區域會從原本的m條邊變成$m+2$條邊，不斷增加而無法確認任何頂點，故需要無限多次。但是在給定s邊形的情況下，若不確認任何頂點，則根據點佔線原理，可能區域的邊數有上界，至多為$2s$，故有限次內必定會出現三線共點的情況(確認一頂點)，類似的過程再經過有限次後又會出現三線共點，於是最終便會確認所有點。故得證。

定理 5：最糟情況下，若給定底面為s邊形，則可保證以水平投影在有限多次內完全還原，反之若沒給定，則無法保證以水平投影在有限次內完全還原。

可以想像這是一個使用遞迴的問題，每一次投影將情況圖G轉成很多種可能的新情況圖的集合$\{G'\}$，而最佳的策略使用貪心法。先找出不同角度的投影方向下所產生的最糟情況，再找出這些最糟狀況裡所需最少次數(最好)的，然後選擇那個角度進行下一次投影。可以寫成遞迴形式，其狀態轉移方程式為：

$$f(G) = min\{max\{f(P)|P \in v_\theta(G)\}|0 \le \theta \le 2\pi\} + 1$$

只考慮第一次投影，則用上述方法所選擇的角度必可以使總投影次數最小，也就是最佳策略。max表示考慮特定角度下的最差狀況，然後min表示選擇最好的”最差狀況”，最後加 1 為此次投影。

定理 6：分析最糟情況時可以用遞迴，其狀態轉移方程式為：

$$f(G) = min\{max\{f(P)|P \in v_\theta(G)\}|0 \le \theta \le 2\pi\} + 1$$

有了此方程式，我先探討一些較容易被計算出$f(G)$的值的情況圖G，然後將其他較複雜的圖G經過上面的方程式轉成這些簡單的狀況便可計算，然後又可探討更複雜的情況，於是可以探討通式。

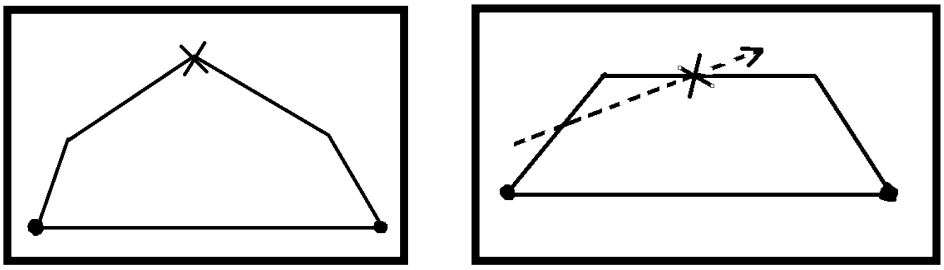
1. $K \ge 2, only, std$

因為情況圖G為std且$only$，所有頂點都已經在邊界上且每次投影只需考慮一條線，為最基礎的情況。此情況下由於每一條線只會影響單一區域，且區域內所存在的頂點的數量可被算出(因為std，取決於該區域的邊數)，因此每個區域是互相獨立的。於是分別算出還原每個區域的所需保證次數，再累加即為$f(G)$。接下來我以k為變量，並先只觀察規則方向的投影：

$k = 1$

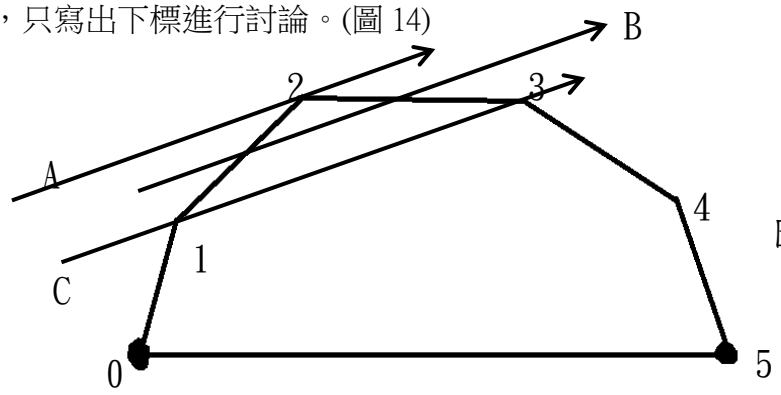
由std和點佔線原理知道區域邊數為 3 或 4。若區域邊數為 4，則由點佔線立刻知該點位置，若區域邊數為 3，則需要一次投影。(圖 13)

圖(13)



$k = 2$

由std和點佔線原理知道區域邊數為 5 或 6。區域邊數為 6 則結束，區域邊數為 5 則分析各規則投影方向所產生的可能，可能為：確認某一點並造成總區域數和各區域邊數改變、區域邊數+1、確認兩點且區域邊數-1。分別稱其為 A,B,C 狀況，並將其標號，只寫出下標進行討論。(圖 14)



圖(14)

在投影後若邊數加一(B 情況)則區域邊數為 6 故由點佔線確認所有點，若為其他情況，則必有三線共點，確認至少 1 點後圖形即成為$k = 1$或0之狀況，可用$k = 1$的結論計算，列出所有規則方向並算出所需次數後做成表格。(表 1)

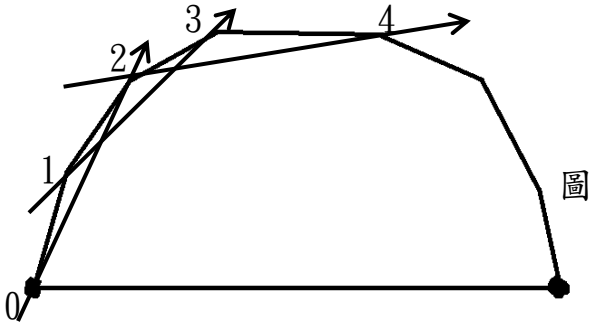
	0--2	1--3	2--4	3--5
A	1	2	2	1
B	1	1	1	1
C	2	1	1	2

表(1)

由於左右兩邊的情況是對稱的，可以只看一半的表格。

$k = 3$

同理，區域邊數為 8 則結束，區域邊數為 7 則分析各規則投影方向所產生的可能，如同處理$k = 2$，可以在確認至少一點之後利用$k = 2$與$k = 1$的結果計算。(圖 15)(表 2)



圖(15)

	0-2	1-3	2-4
A	1	3	2
B	1	1	1
C	3	1	2

表(2)

根據**定理** 6 的概念，應找出每一直行的最大值，即該方向之最糟狀況，再找出哪一個直行的最大值為最小，即最糟狀況裡最好的；注意到這些都是在僅考慮規則的投影方向下所得到的結果。由表格推論$k = 2$時為保證還原次數最少為 2 而$k = 3$時為 2；若G為$only$且std，有一區域邊數為e，定義$f_1(e)$為保證確認該區域所有點之最少投影次數。則可根據上述做法列出前幾個推測的$f_1(e)$，其中e大於 1。(表 3)

e	2	3	4	5	6	7	8	9
$f_1(e)$	0	1	0	2	0	2	0	3
e	10	11	12	13	14	15	16	17
$f_1(e)$	0	3	0	3	0	3	0	4

表(3)

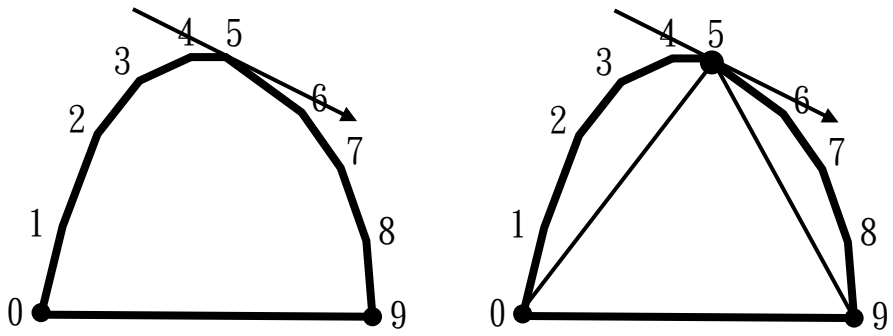
可以猜測與 2 的冪次有關，其通式為：

$$\begin{cases} f_1(e) = [\log_2(e-1)] & , 2 \nmid e \\ f_1(e) = 0 & , 2 \mid e \end{cases}$$

證明：

e為偶數時由點佔線原理即可，於是只探討e為奇數的情況。證明使用強數學歸納法，對k進行歸納，$k = 1$(即$e = 3$)的時候由圖 13 知命題成立，假設$k \leq p - 1$的時候命題皆成立，考量$k = p$(即$e = 2p + 1$)的情況。

產生 B 情況則結束，只需一次；若產生 A 或 C 情況，代表至少確認一頂點。注意到一張$only$且std的情況圖在任意投影後所產生的情況圖仍然是$only$且std，於是至少確認一定點後便可以套用歸納假設。範例(圖 16-1)是區域邊數 9 時 4--6 方向的 A 情況(確認五號點是頂點)所需次數的計算過程。



圖(16-1)

分成兩新區域，用歸納假設可以計算右區域需要 0 次，左區域需要 2 次，故投影後此狀況還需要兩次投影。

以此法將各規則方向的投影分析，計算各情況下還需要的投影次數製作成表格紀錄。(表 4)

	0--2	1--3	2--4	m--$(m+2)$ m為偶數	m--$(m+2)$ m為奇數	$(p-1)$ --$(p+1)$
A	0	$[\log_2(2p-1)]$	1	$[\log_2(m+1)]$	$[\log_2(2p-m)]$	會發現無論如何都是 $[\log_2(p)]$
B	0					
C	$[\log_2(2p-1)]$	0	$[\log_2(2p-3)]$	$[\log_2(2p-m-1)]$	$[\log_2(m)]$	

表(4)

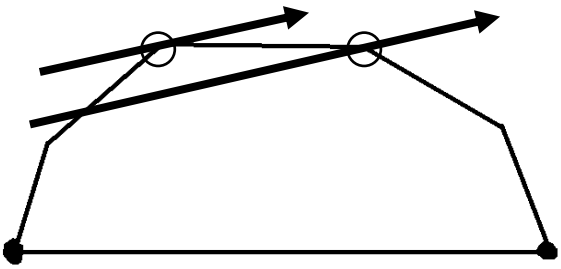
現在分析不規則方向的投影。

引理：任何一個不規則方向的投影產生的最糟狀況，必與某一個規則方向所產生的最糟狀況相同。

證明：

每一個不規則方向所產生的可能性為增加一邊或者確認一點，也就是沒有 C 情況，而增加一邊會導致區域邊數成為偶數，用點占線原理便可以確認所有頂點，故不是最糟狀況，於是最糟狀況是確認一點的情況。

確認一點，那點有兩種可能，但兩個可能的頂點必定相鄰，於是有一個頂點其標號是偶數。(圖 16-2 圈起處)



圖(16-2)

在表(4)中可以將其兩種可能以紅圈圈出，為相鄰的兩格 A 情況。再將每個規則方向的投影的最糟狀況以藍圈圈出。

	0--2	1--3	2--4	m--$(m+2)$ m為偶數	m--$(m+2)$ m為奇數	$(p-1)$ --$(p+1)$
A	0	$[\log_2(2p-1)]$	1	$[\log_2(m+1)]$	$[\log_2(2p-m)]$	會發現無論如何都是 $[\log_2(p)]$
B	0					
C	$[\log_2(2p-1)]$	0	$[\log_2(2p-3)]$	$[\log_2(2p-m-1)]$	$[\log_2(m)]$	

表(4)

由表知m為奇數時，A 情況為最糟狀況。不難發現兩個紅圈中較糟的狀況必為m為奇數時的那格，於是便與藍圈重合，即不規則投影方向的最糟情況與某一規則投影方向的最糟情況相同，**引理**得證。

現在使用**定理** 6 可以知道要找出所有方向的最糟狀況，而由**引理**知道只需考慮那些規則方向的投影的最糟狀況(不規則的最糟狀況被包含進去考慮了)，然後從中選擇最少的那個，也就是 $[\log_2(p)]$。於是再加上第一次投影，由$e=2p+1$以及**定理** 6 即知道最少次數為：

$$1+\left[\log_2\left(\frac{e-1}{2}\right)\right]=[\log_2(e-1)]$$

從上述知道$e=2p+1$時原命題仍然成立，故$k=p$時成立，由數學歸納法得證。最後只要把每一個區域都套用此式算出次數後累加即得到$f(G)$。

定理 7：對於 $K \geq 2$ ，G為$only$且std，$f(G)$的通式為：

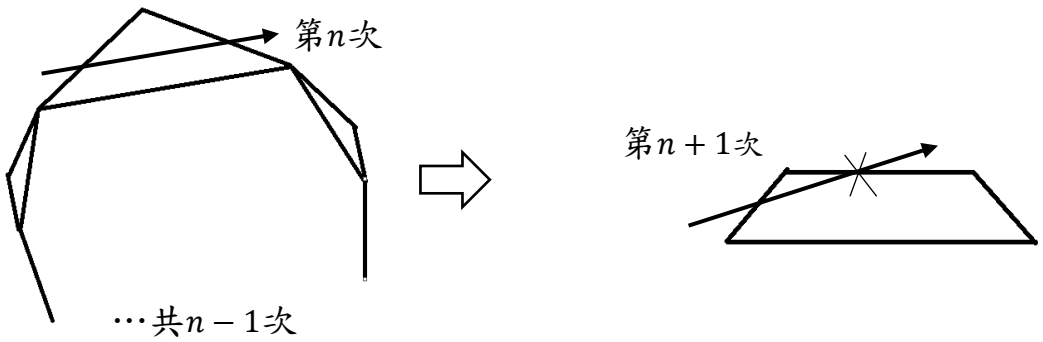
$$f(G)=\sum_{i=1}^{n} f_1(a_i),\ \begin{cases} f_1(a_i)=[\log_2(a_i-1)] & ,2 \nmid a_i \\ f_1(a_i)=0 & ,2 \mid a_i \end{cases}$$

2. $K \geq 2, only,$非std

由於不知道每個區域裡面所包含的頂點的數量，所以必須考慮區域數，且情況更為複雜。同樣從$k=1$開始，先找出$(k,n)=(1,n)$下的通式。$f(G)$受(k,n)影響，令$f_2(k,n)=f(G)$。

$k=1$

不難發現有n個區域的時候由於$only$每次只能影響一個區域，最糟會試遍所有區域直到最後一個區域才存在該未知頂點，也就是n次，而找到點所在的區域後至少還需要一次去確認確切位置，故至少要$n+1$次。(圖 17)



圖(17)

$k=2$

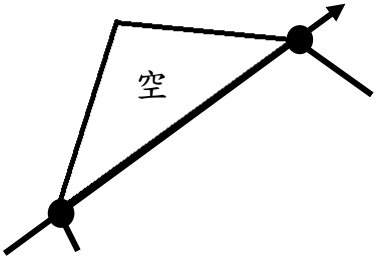
我先只考慮規則的投影方向。先探討$n=1$的情況，該區域邊數可能為 2,3,4，注意到使用**定理 6** 時會發現**必須先算出區域邊數為 4 的情況才能算區域邊數為 3 的情況，要算邊數為 2 則要先算出邊數為 3 的狀況。**過程中若確認頂點則降為$k=1, only$的情況，不論是否為std都有先前結論可用。可將此關係表達為分支圖。(圖 18)

$$\begin{tikzcd} 2 \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow, "k=1"] & 3 \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow, "k=1"] & 4 \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow, "k=1"] & 5(\mathrm{std}) \\ & & & \end{tikzcd}$$

圖(18)

區域邊數 4 時只可能降為$k=1$或者std的狀態，這兩個狀態先前都已經有通

式，於是便可以仿照之前作法製表再用**定理 6** 得出其次數。得到結果為：邊數 4 時需三次，為 3 時需四次，為 2 時需五次。於是接著探討$n = 2$，與上述不同的是，過程中多一種可能，就是投影可能減少一個區域，成為$n = 1$的情況，仍然可用先前結論。(圖 19)



可能一次少一整個區域，因為該區內無點。

圖(19)

$n = 2$的區域邊數分布狀況只有三種可能。利用同樣方法找出$n = 2$的次數，然後同樣計算前幾個n做成表格。(表 5)

n	2	3	4	5	6	7
(4,2,⋯)	4	5	6	7	8	9
(3,2,⋯)	5	6	7	8	9	10
(2,2,⋯)	6	7	8	9	10	11

表(5)

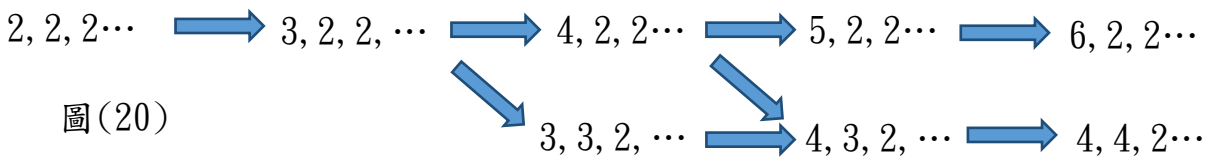
由這些數據可以猜測有：

$$f_2(2,n) = n + 4 - \sum_{i=1}^{n}(a_i - 2)$$

我們先不驗證，先利用$k = 2$分析看看$k = 3$且n較小時的情況。

$k = 3$

先仿$k = 2$作法畫出分支圖，若產生已知狀況則不畫出。(圖 20)



圖(20)

由上圖可以發現這棵樹必須由底層向上遞建，且欲探討$n = p$則必須先探討$n = p - 1$，經由$k = 2$的表格和**定理 6** 的計算可以再次得到下表。(表 6)

n	1	2	3	4
(6,2,2,⋯)	4	5	6	7
(4,4,2,⋯)	至少要 2 區域	5	6	7
(5,2,2,⋯)	5	6	7	8
(4,3,2,⋯)	至少要 2 區域	6	7	8
(4,2,2,⋯)	6	7	8	9
(3,3,2,⋯)	至少要 2 區域	7	8	9
(3,2,2,⋯)	7	8	9	10
(2,2,2,⋯)	8	9	10	11

表(6)

故可猜測有：

$$f_2(3,n) = n + 7 - \sum_{i=1}^{n}(a_i - 2)$$

事實上從$k = 2$和$k = 3$已經可以看出$f_2(k,n)$的約略形式，猜測其為：

$$f_2(k,n) = n + 3k - 2 - \sum_{i=1}^{n}(a_i - 2) = 3n + 3k - 2 - \sum_{i=1}^{n} a_i$$

在$k = 1$的狀況下上式是成立的。接著用數學歸納法來證明此事。

證明：

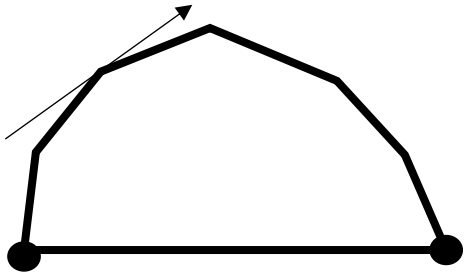
使用兩重的數學歸納法，先對k進行歸納，$k = 1$，即$(k,n) = (1,n)$，而區域邊數必全部為 2(因為G非std，套入原式後得到$n + 1$故成立。於是假設對於$k \le p - 1$時結論皆成立，要證明數對(p,n)也滿足結論，而證明數對(p,n)滿足結論的方法為再對第二個變數歸納，也就是先證明$(p,1)$滿足結論，再假設$n \le q - 1$時結論都成立，最後再證明數對(p,q)也滿足結論。接下來先證明一個**引理**：

引理 1：若$k > 1$，則任意投影方向下皆有可能使得投影後的情況圖仍為$only$且非std。

證明：

若該投影方向可以交區域於兩邊，區域邊數加一，而不形成std則滿足原命題，故只需考慮投影方向所影響的區域邊數為偶數，且$min(G) = K + k - 1$

的情況，此時若區域邊數加一會導致$min(G) = K + k$，成為std狀態。若不是區域邊數加一的情況，則可能為該投影消除一個區域(圖 19)或者該投影有確認頂點 (圖 21) 。



圖(21)

若為消除一個區域的情況，並不影響$min(G)$故投影後仍為$only$且非std。

若是有確認頂點的情況，對於規則方向m--$(m + 2)$而言，若m為偶數則 C 情況會滿足投影後仍然是$only$且非std，若m為奇數則 A 情況可以滿足；如果是不規則方向則確認的頂點的可能是相鄰的兩點，必有一點為偶數點，則確認偶數標號頂點的狀況與m為奇數時的 A 情況相同。

綜上所述，不論如何投影後的情況圖仍有可能是$only$且非std，故得證。

現在證明數對$(p, 1)$符合原命題。

引理 2：數對$(p, 1)$滿足原命題。

證明：

在這裡引入第三個變數，也就是區域邊數的總和，同樣採用數學歸納法，先證明當$(k, n) = (p, 1)$，且區域邊數總和為$2p$時滿足原命題。然後假設當$(k, n) = (p, 1)$且區域邊數總和大於等於$r + 1$時原命題皆成立，並證明當$(k, n) = (p, 1)$且區域邊數總和為r時原命題成立，完成歸納步驟，得到當$(k, n) = (p, 1)$原命題成立。由於原命題的通式由三個變數操控，事實上我正在用巢狀了三次的數學歸納法。

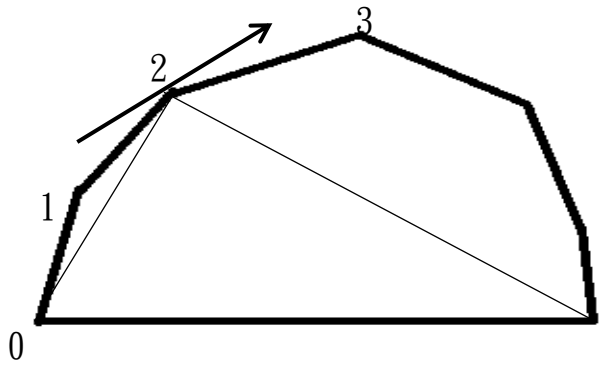
選擇$2p$為起點是因為該圖為非std，於是該區域邊數至多只有$2p$。由**引理 1** 知道任意投影方向可能產生$only$且非std的情況，由於不能增加邊數，必至少確認一頂點變成$k \leq p - 1$的情況，可以套用歸納假設(對k的歸納法)計算次數。接下來分析各種可能的情況。

(1)不規則方向投影

根據**引理** 1 的結論投影後可能成為$only$且非std，即確認一個偶數點的情況(圖 22)。由於區域數變成 2，且確認一點使得$k = p - 1$，且投影前後區域邊數總和不變，用歸納假設可以得到總共所需次數為：

$$1 + 6 + 3(p-1) - 2 - \sum_{i=1}^{2} a_i' = 2 + 3p - a$$

其中 a為原本的區域邊數總和(在此同時為$2p$)。從這裡可以看出任意不規則方向投影下的最糟狀況次數必大等於$2 + 3p - a$。



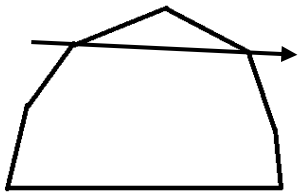
圖(22)

也就是對任意不規則方向(θ)，有：

$$1 + max\{f(P) | P \in v_\theta(G)\} \geq 2 + 3p - a \qquad \text{.....(1)}$$

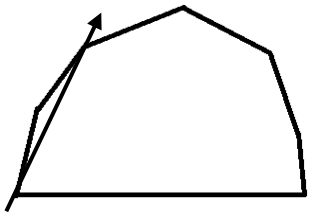
(2)規則方向投影

根據**引理** 1 的結論投影後可能成為$only$且非std，可分為確認一偶數點與確認兩個偶數點的情況，若為前者則與(1)的次數相同，若為後者則又可分為兩種情況：其中一點為標號 0 的點(被重複確認)和其他情況。(圖 23)



$$1 + 6 + 3(p-2) - 2 - \sum_{i=1}^{2} a_i'$$
$$= -1 + 3p - (a-2) = 1 + 3p - a$$

真正確認兩個新點



$$1 + 3 + 3(p-1) - 2 - \sum_{i=1}^{2} a_i'$$
$$= -1 + 3p - (a-2) = 1 + 3p - a$$

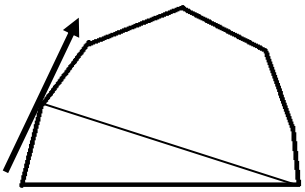
其中一點為已知(標號 0)

圖(23)

於是對於任意規則方向(θ)，有：

$$1 + max\{f(P)|P \in v_\theta(G)\} \geq 1 + 3p - a \qquad \text{.....(2)}$$

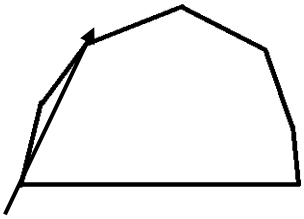
現在特別查看規則方向 0--2，以此方向投影可能有三種情況。(圖 24)



產生std，使用**定理 7**，需要次數：

$[\log_2(a-2)]$

其中第三種情況在圖 23
已討論，為 1+3p-a 次。



產生std，使用**定理 7**，需要次數：

$[\log_2(a)]$

圖(24)

最多次應是$1 + 3p - a$，又a為偶數且大於等於 2，下面不等式顯然成立：

$$[\log_2(a)] \leq 1 + 3p - a = 1 + \frac{a}{2}$$

於是對 0--2 方向(θ)有：

$$1 + max\{f(P)|P \in v_\theta(G)\} = 1 + 3p - a \qquad \text{.....(3)}$$

從(1)(2)(3)三式不難知道應用**定理 6** 後的結果：

$$1 + min\{max\{f(P)|P \in v_\theta(G)\}|0 \leq \theta \leq 2\pi\} = 1 + 3p - a$$

於是當$(k, n) = (p, 1)$，且區域邊數總和為$2p$時滿足原命題。

假設區域邊數大於等於$r + 1$時成立，則區域邊數為r的狀況根據**引理 1** 在投影後可能變成$only$且非std，即有可能沒確認任何點，變成區域邊數$r + 1$的情況，根據歸納假設還需要$1 + 3\mathrm{p} - (r + 1)$次投影，於是對任意投影方向($\theta$)有：

$$1 + max\{f(P)|P \in v_\theta(G)\} \geq 1 + 3p - r$$

同樣特別查看規則方向 0--2，有三種可能狀況，且皆為$only$且非std，分別列出次數後為：1+3p-r,1+3p-r,3p-r。於是在這個角度下最糟狀況即為 1+3p-r 次，於是有在此方向(θ)有：

$$1 + max\{f(P)|P \in v_\theta(G)\} = 1 + 3p - r$$

綜合上式再根據**定理 6** 有：

$$1 + min\{max\{f(P)|P \in v_\theta(G)\}|0 \le \theta \le 2\pi\} = 1 + 3p - r$$

於是仍然滿足原命題，故根據數學歸納法，**引理** 2 得證。

由**引理** 2 知道$(k, n) = (p, 1)$時成立，現在假設$n \le q - 1$時原命題成立，則$n = q$時同樣引入區域邊數總和，先證明區域邊數總和為$2p + 2q - 2$時滿足原命題，選擇此數作為起點的原因與證明**引理** 2 時相同。由**引理** 1 知道任意投影方向必定產生$only$且非std的情況，由於不能增加邊數，可能至少確認一頂點變成$k \le p - 1$的情況，或者直接消除一個區域，兩者皆可用之前的歸納假設計算次數。

(1)不規則方向投影

$only$且非std的狀況為確認一偶數標號頂點，並把區域數加一的狀況，套用歸納假設可得次數為 1+3(q+1)+3(p-1)-2-(2p+2q-2)=q+p+1 次。

(2)規則方向投影

$only$且非std的狀況為確認一頂點，或確認兩頂點，或者直接消除一個區域的狀況，其中確認兩頂點的狀況又可分成兩種，與證明**引理** 2 時類似。

確認一偶數標號頂點(與不規則方向相同)：q+p+1 次

確認兩偶數標號頂點(兩新頂點)：1+3(q+1)+3(p-2)-2-(2p+2q-4)=q+p 次

確認兩偶數標號頂點(一新頂點)：1+3q+3(p-1)-2-(2p+2q-4)=q+p 次

直接消除一個區域(無確認點)：1+3(q-1)+3p-2-(2p+2q-4)=q+p 次

於是對任意投影方向(θ)皆有：

$$1 + max\{f(P)|P \in v_\theta(G)\} \ge q + p$$

選擇任一區域，同樣觀察規則方向 0--2 的三種可能，最後要證明的式子是：

$$[\log_2(a)] \le q + p$$

其中a為該區域的區域邊數，於是$a \le 2p + 2q - 2$(總區域邊數)，於是有：

$$[\log_2(a)] \le 1 + \frac{a}{2} \le q + p$$

a為大於等於 2 之偶數故此式成立，於是對於規則方向 0--2(θ)有：

$$1 + max\{f(P)|P \in v_\theta(G)\} = q + p$$

由**定理** 6 有：

$$1 + min\{max\{f(P)|P \in v_\theta(G)\}|0 \le \theta \le 2\pi\} = q + p$$

於是當$(k,n) = (p,q)$時且區域邊數總和為$2p + 2q - 2$時原命題成立。現在假設當$(k,n) = (p,1)$且區域邊數總和大於等於$r + 1$時原命題皆成立，考慮區域總和為r的情況，根據**引理** 1 在投影後可能變成$only$且非std，即可能產生下列狀況之一：消除一整個區域，確認一偶數頂點，確認兩偶數頂點(又分為兩種)，把某區域邊數加一。不論哪一種可能皆有歸納假設可以使用。

消除一整個區域：1+3(q-1)+3p-2-(r-2)=3q+3p-2-r 次

確認一偶數頂點：1+3(q+1)+3(p-1)-2-r=3q+3p-1-r 次

確認兩偶數標號頂點(兩新頂點)：1+3(q+1)+3(p-2)-2-(r-2)=3q+3p-2-r 次

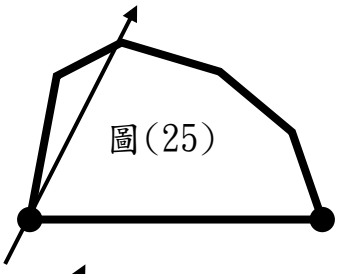
確認兩偶數標號頂點(一新頂點)：1+3q+3(p-1)-2-(r-2)=3q+3p-2-r 次

把某區域邊數加一：1+3q+3p-2-(r+1)=3q+3p-2-r 次

於是對任意投影方向(θ)皆有：

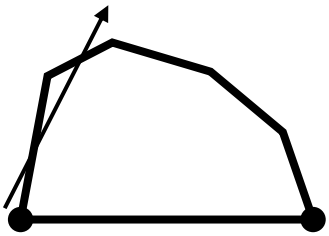
$$1 + max\{f(P)|P \in v_\theta(G)\} \ge 3q + 3p - 2 - r$$

由於區域邊數總和小於$2p + 2q - 2$，所以必可以找到一區域使得其區域邊數加一後情況圖G仍然為$only$且非std，挑選該區域的規則方向 0--2，並分析可能的四種狀況。(圖 25 的四張圖都僅畫出被挑選的那個區域)

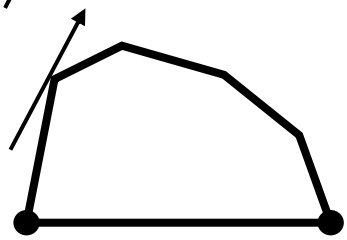


圖(25)

仍為$only$且非std，此情況在先前已討論，為 3p+3q-2-r



仍為$only$且非std，此情況在先前已討論，為 3p+3q-1-r



仍為$only$且非std。由點佔線原理的計算不難知道，若區域邊數加一仍然為非std，則此情況也是非std。套用歸納假設可得共需 3p+3q-1-r 次。

仍為$only$且非std，此情況在先前已討論，為 3p+3q-2-r

於是對於該區域的規則方向 0--2(θ)有：

$$1 + max\{f(P)|P \in v_\theta(G)\} = 3q + 3p - 2 - r$$

由**定理** 6 有：

$$1 + min\{max\{f(P)|P \in v_\theta(G)\}|0 \le \theta \le 2\pi\} = 3q + 3p - 2 - r$$

由歸納假設(對n的)知道對於任意n，數對(p,n)滿足原命題。再由歸納假設(對k的)知道對於任意k,n，數對(k,n)滿足原命題。故原命題得證。

定理 8：對於$K \ge 2, only,$非std，$f(G) = f_2(k,n)$的通式為：

$$f_2(k,n) = n + 3k - 2 - \sum_{i=1}^{n}(a_i - 2) = 3n + 3k - 2 - \sum_{i=1}^{n} a_i$$

3.還原s角柱(錐)

最後來探討原本提出的第二個問題，也就是G為空白(甚麼都沒有)的情況圖。令保證還原s邊形所需最少次數為$f_3(s) = f(G)$。我將證明對於s大於 2：

$$f_3(s) = 3s - 4$$

證明：

先證明一個引理。

引理：對於任何$K \ge 1$的情況圖G，都有：$f(G) \le 3n + 3k - 2 - \sum_{i=1}^{n} a_i$

證明：

考慮以下還原策略，對於G為非$only$，直接將對$only$的策略套用，可以想像每次投影皆只採用一條投影線，把它當成$only$圖操作，這樣的方法對$K \ge 2$時有效，而$K = 1$時則想像是$K = 2$之退化情形，即那兩個點非常非常之靠近，於是也可套用此方法。由於此法必可還原情況圖G，於是$f(G)$必小於等於此策略所使用的操作次數，而這個數字取決於情況圖G為std或非std。根據**定理** 7 與**定理** 8，需要次數分別為：

$$\sum_{i=1}^{n} f_1(a_i), \quad \begin{cases} f_1(a_i) = [\log_2(a_i - 1)] & , 2 \nmid a_i \\ f_1(a_i) = 0 & , 2 \mid a_i \end{cases} \qquad f_2(k,n) = 3n + 3k - 2 - \sum_{i=1}^{n} a_i$$

所以只要證明當G為std時有：

$$\sum_{i=1, 2 \nmid a_i}^{n} [\log_2(a_i - 1)] \le 3n + 3k - 2 - \sum_{i=1}^{n} a_i \qquad \text{..... (1)}$$

令n個區域中有u個區域其區域邊數奇數，v個為偶數；又G為std故：

$$k = min(G) = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{a_i - 1}{2}\right]$$

這式子以點占線原理可以算出。

可以列出有：

$$\sum_{i=1,2\nmid a_i}^{n}[\log_2(a_i-1)] \le \sum_{i=1,2\nmid a_i}^{n}(1+\frac{a_i-1}{2}) = u + \sum_{i=1,2\nmid a_i}^{n}\frac{a_i-1}{2} \quad \text{..... (2)}$$

$$2k - \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_i - u - 2v - \sum_{i=1}^{n} a_i = -2n + u \quad \text{..... (3)}$$

利用(2)(3)，於是(1)變成：

$$\sum_{i=1,2\nmid a_i}^{n}\frac{a_i-1}{2} = \sum_{i=1,2\nmid a_i}^{n}\frac{a_i}{2} - \frac{u}{2} \le n+k-2$$

把k寫成與a_i相關的式子：

$$k = \sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{2} - \frac{u}{2} - v \ge \sum_{i=1,2\nmid a_i}^{n}\frac{a_i}{2} - \frac{u}{2} - v$$

並移項後變成：

$$v + 2 \le n$$

這說明只需再分析$v = n - 1$與$v = n$的情況也成立即可，後者由於全部都是偶數區域邊數，帶入**定理** 7 時得到 0，明顯成立；前者代表$u = 1$，於是要證明：

$$[\log_2(a-1)] \le n + k - 1$$

其中a是一個奇數，為該區($u = 1$)的區域邊數。事實上有：

$$[\log_2(a-1)] \le \left[\frac{a-1}{2}\right] \le k$$

因為a是大於等於 3 的奇數，又n大於等於 1，此情況也成立。**引理**得證。

在投影過程中由於一次最多確認兩個點，可以大致上將情況分為三種：過程中皆無確認點直到最後一步、過程中有一步確認一點形成$K = 1$的情況，過程中有一步確認兩點形成$K = 2$的情況。現在分別幫三種情況制定一套策略。

(1) 過程中皆無確認點直到最後一步

無確認點即無三線共點(**定理** 3)，於是灰色區域(可能解區域)在每一次投影後邊數必增加 2，且根據**定理** 2(點佔線)可能區域至多為$2s$邊形。經過s次投影形成$2s$邊形，此時再投影一次，由於邊數不能再增加，必確認至少一點，再由原本的$2s$邊形配合點占線原理找出剩下所有頂點的位置。於是此狀況下總共需要$s + 1$步。

(2) 過程中有一步確認一點形成$K = 1$的情況

過程中在一步後確認一點形成$K = 1$之後套入$only$的策略可以保證完全還原。

假設在第$r+1$步確認一點，可推算第$r+1$步結束後的資訊為：$K=1, k=s-1, n=1$,區域邊數$2r+1$。注意到r大於等於 2，因為前兩步不會發生此情況。由**引理**知道：

$$\begin{aligned} & f_3(s) \leq r+1+f_2(s-1,1) \\ &= r+1+1+3(s-1)-(2r+1) \\ &= 3s-r-2 \leq 3s-4 \end{aligned}$$

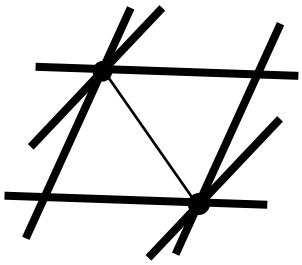
(3)過程中有一步確認兩點形成$K=2$的情況

同理，過程中在一步後確認一點形成$K=2$之後套入$only$的策略可以保證完全還原，卻不知是否為最佳策略，於是會得到一個不等式。假設第$r+1$步確認兩點，若兩確認點在情況圖裡相鄰，可推算第$r+1$步結束後的資訊為：$K=2, k=s-2, n=1$,區域邊數$2r-1$。由**引理**知道：

$$\begin{aligned} & f_3(s) \leq r+1+f_2(s-2,1) \\ &= r+1+1+3(s-2)-(2r-1) \\ &= 3s-r-3 \leq 3s-5 \end{aligned}$$

若兩確認點在情況圖裡不相鄰，可推算第$r+1$步結束後的資訊為：$K=2, k=s-2, n=2$,區域邊數$2r$。由**引理**知道：

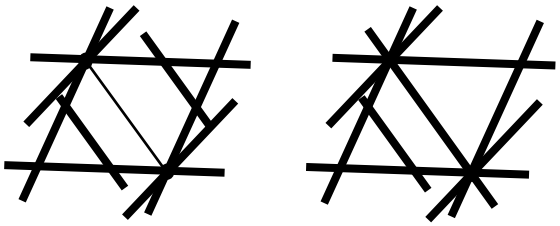
$$\begin{aligned} & f_3(s) \leq r+1+f_2(s-2,2) \\ &= r+1+4+3(s-2)-2r \\ &= 3s-r-1 \leq 3s-3 \end{aligned}$$



圖(26)

分析其上界達到的情況應在三步後如圖所示。(圖 26)

上界達到的情況為第三步確認兩點且兩點在情況圖中不相鄰。為了改進其估計，此時作對角線方向(兩確認點連線方向)的投影，有兩種可能，再對這兩種可能進行估計。(圖 27)



圖(27)

左圖情況是兩區域都有頂點存在而右圖情況為只有一個區域有頂點存在。現在已經做了 4 次投影，分別對兩狀況使用**引理**，會得到分別總共需要$3s-4$和$3s-4$步，所以事實上$3s-3$的情況可以用更少步數完成。於是在此情況下有：

$$f_3(s) \leq 3s-4$$

三種情況的策略都被制定出(不知是否為最佳策略)，由於s大等於 3，必有：

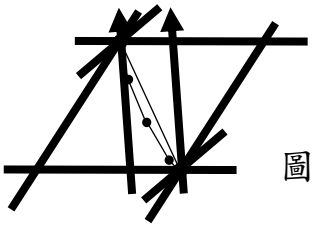
$$f_3(s) \leq 3s - 4$$

故現在只需再證明

$$f_3(s) \geq 3s - 4$$

欲達成此步驟只需要構造一個情況，在此情況下至少必須用$3s - 4$次來還原。考慮任意三次投影後必可以產生圖 26 的狀況，此時第四次投影必須選擇平行對角線方向，否則本體可能為狹長狀而浪費該次投影(圖 28 的箭頭方向)，於是可以注意到圖 27 的右圖是在四次投影後必可能產生的狀況。圖 27 的右圖為一個$only$的圖，且若s大於 4 則該圖為非std，故可以使用**定理 8**，得到至少需要$3s - 4$次才能保證還原。

故原命題得證。



圖(28)

定理 9：保證還原s角柱(錐)至少需要次數為：

$$f_3(s) = 3s - 4, \forall s \geq 3, s \in \mathbb{N}$$

伍、研究結果

一、完全還原凸多面體探討

(一)有限個投影完全還原凸多面體之充要條件為：存在一些投影所圍成的區域，其所有頂點都被某條投影線通過，而且該投影線只經過該頂點。

(二) 最簡單的完全還原策略為取所有z=0 的投影向量投影一次。

二、水平投影還原柱體錐體探討

(一)水平投影下的最佳狀況

1.水平還原下還原s邊形的最佳狀況需要s次投影。

(二)水平投影下的最差狀況

1.若沒給定幾邊形則需無限多次，有給定則必可以有限次完全還原。

2.三角柱(錐)最少需要五次投影才能保證完全還原。

3.可用遞迴，最佳策略即為每一次都找到最好的投影方向，其狀態轉移方程式為：

$$f(G) = min\{max\{f(P)|P \in v_\theta(G)\}|0 \le \theta \le 2\pi\} + 1$$

4.對於G為$K \ge 2, only, std$，$f(G)$的通式為：

$$f(G) = \sum_{i=1}^{n} f_1(a_i), \quad \begin{cases} f_1(a_i) = [\log_2(a_i - 1)], 2 \nmid a_i \\ f_1(a_i) = 0 \qquad\qquad\qquad , 2 \mid a_i \end{cases}$$

5.對於G為$K \ge 2, only,$非std，$f(G)$的通式為：

$$f_2(k, n) = n + 3k - 2 - \sum_{i=1}^{n}(a_i - 2) = 3n + 3k - 2 - \sum_{i=1}^{n} a_i$$

6.利用估計與分析可以找出還原s角柱(錐)的最少保證還原次數為：

$$f_3(s) = 3s - 4$$

陸、討論與未來展望

可以看出還原s角柱(錐)時，$only$把非$only$的狀況給蓋過去了，因為$only$的情況圖所需次數較多，但是若單純討論最差狀況下還原任意非$only$的情況圖時，本文並沒有找出其最少次數，即類似**定理** 7 和**定理** 8 的通式。可以看出規則方向投影所給予的條件較多，因此皆選擇規則方向去投影會較有效率，所需總次數較少。若要分析其他立體，也須定義出類似的資訊(例如本文中的區域數，區域邊數)，如何去找出需要哪些資訊，又該如何去定義那些資訊，事實上是整個研究開始時的難點所在。

此問題最有趣之處在於其最佳與最差狀況下的還原次數，未來希望能夠找到分析多面體的方法，進而導出多面體最佳/最差狀況的通式。關於此方面的研究可以用來改進現有演算法的策略，希望在未來可以結合現有方法應用於各種領域。

柒、結論

本文中給出了完全還原所需之條件以及探討了最基礎的多面體—柱體與錐體的完全還原策略，導出水平投影下最佳以及最差狀況下的還原次數。過程中發現可以使用樹與遞迴來漂亮的拆分這個看似沒有規律的問題，並且從遞迴過程中就可以看出最佳的還原策略。

捌、參考資料及其他

张垚 數學奧林匹亞小叢書 高中卷 11 組合數學 九章出版社

【評語】050415

2D & 3D 間的轉控是重要的問題，其中從平面投影建構 3D 模型的方法及策略為本作品主要的研究方向。本作品對於特殊情況給出還原次數的最佳及最差狀況，並提出還原策略，其結果有一定程度的興趣。建議作者需作更詳細的文獻探討，以了解相關的主題。另對專有名詞，需作解釋，例如：完全還原，有限個投影等。

作品海報

壹、摘要

2D與3D間的轉換一直以來都是重要的科學問題，其中從平面投影建構3D模型的方法及策略是其主要的研究方向。一般而言，會使用坐標系轉換的方法，需要仰賴電腦的運算能力來完成大量的計算。我們在想是否能夠找出更有效率的策略，希望以更少操作建立3D模型。此方法將根據當前的狀況來判定最佳的下一步。我們選擇凸多面體，尤其是柱、錐體，作為研究對象，並對各種情況進行分析。此研究中探討了完全還原立體所需之條件，以及還原柱、錐體下的最佳與最差狀況，最後提出對於特定情況下的還原策略。儘管並沒有找出方法來解決所有情況，但本文中已導出一部分的結論，希望未來能夠研究更複雜情況下的還原策略。

貳、研究動機

近幾年以來，科技尋求能快速且精準的2D重新建構3D模型的方法。在查詢資料後，發現大多的方法皆是以數學的座標轉換，配合電腦的高速運算及一些演算法去還原。我想以投影的方式作為研究方法，找出能夠將還原效率提高的還原策略，由當下的狀況去判定接下來策略的選擇。

參、研究目的

一、用投影完全還原凸多面體的策略的相關探討
二、以水平投影還原柱體、錐體之策略的相關探討

肆、研究設備及器材

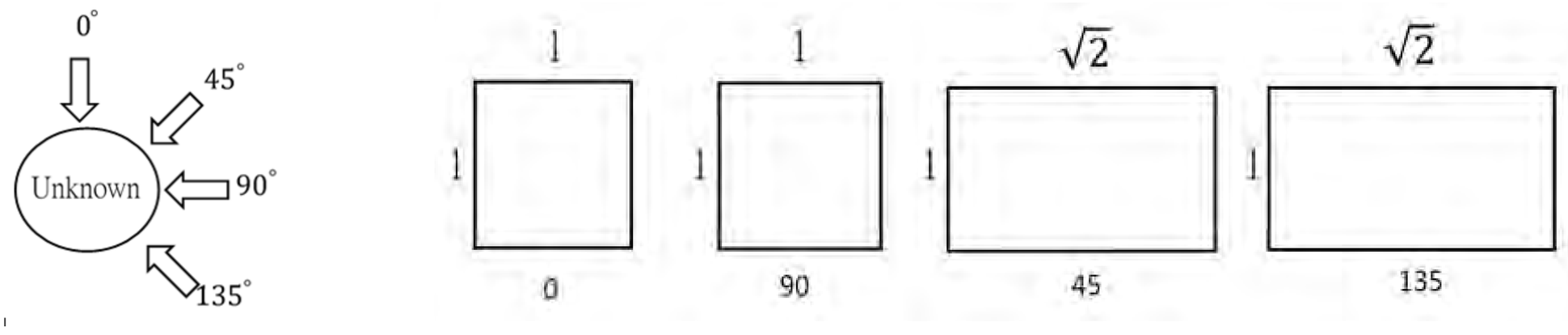
紙、筆、 Geogebra5.0

伍、研究過程及方法

一、完全還原策略相關探討

完全還原必備之條件

在某些情況下，用有限個投影是有可能還原一個凸多面體的。例如從下圖中的四個方向投影，得到四個影子的情況下，可以推論出該未知物體必定是個單位正方體。

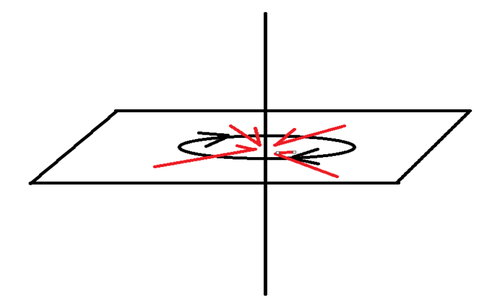


從推論的過程中可以發現用類似方法會有：

定理1 有限個投影還原凸多面體之充要條件為：存在一部分投影所圍成的多面體區域，其每一個頂點都被某條投影線通過，而且該投影線只經過該點。

利用定理1可以找到最簡還原策略並證明可行：

結論1 最簡完全還原策略為：對於所有Z=0的投影向量都取一次投影。



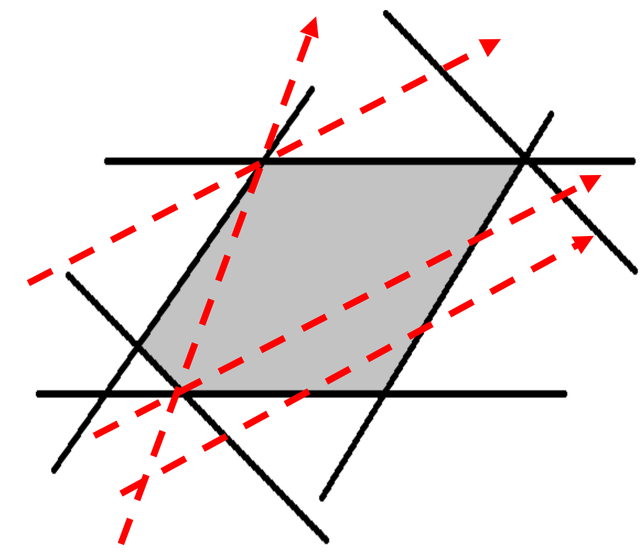
二、水平投影還原柱體、錐體之策略的相關探討

可視為還原一平面圖形(即底面)。投影狀況可以使用下列作圖法表達，其中灰色區域即代表底面圖形被限制的範圍。

定理2 可能區域(灰色區域)的每條邊上都至少存在一個頂點。(點佔線原理)

定理3 三投影線共點則該點必為頂點。(三線共點)

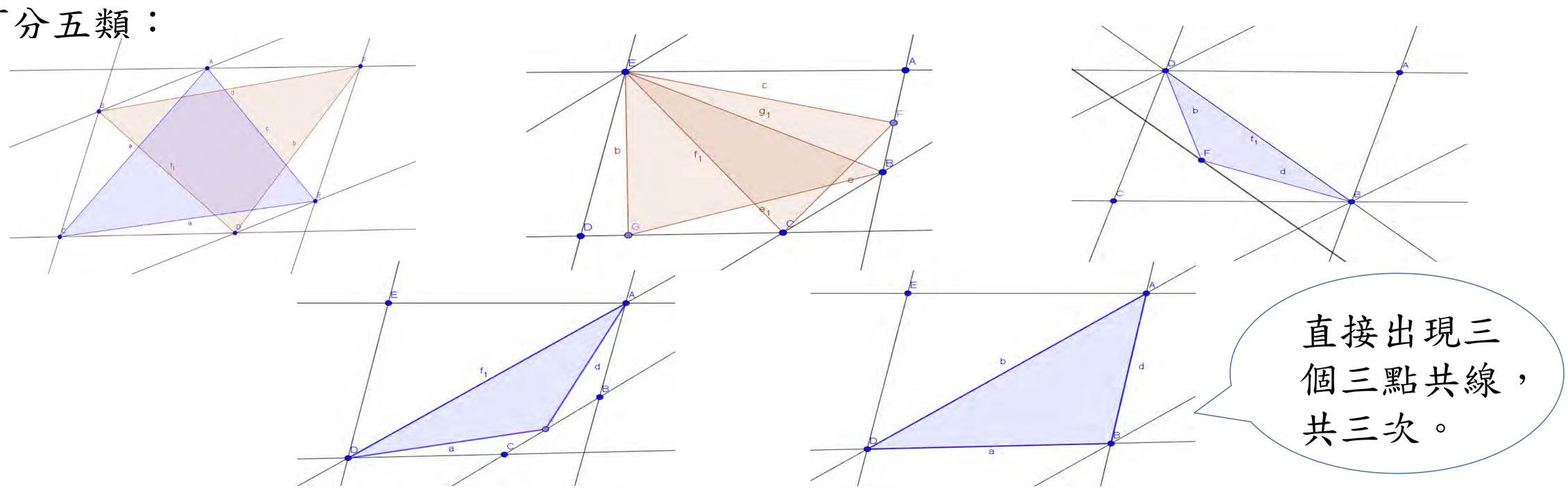
另外還有一些關於此表達圖本身的性質，如一次投影會產生兩條投影線等等。



投影線可能相交的情況

還原三角柱(錐)策略

先投影任兩個方向得到可能區域為一平行四邊形。取對角線方向作第三次投影，可能情況可分五類：

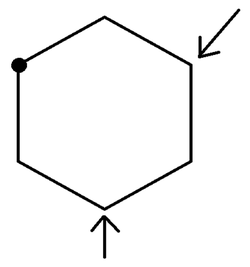


利用**定理2**和**定理3**和基本性質，可針對這五種情況分別制定一套策略，並保證都在五次投影內找到該三角形。其次證明有一情況(右上角)必至少需要五次投影才能找出。故知保證還原三角柱(錐)，最少需要五次投影，且給出策略。

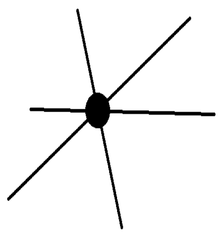
結論2 水平投影下最少五次可以保證完全還原三角柱(錐)。

水平投影還原柱錐體最佳狀況

至少要n次投影才有可能完全還原n邊形底面。而確認的n個頂點可依被確認的方式分成兩類：



第一類：
根據**定理2**知道另兩頂點在箭頭處上。
(例圖為n=3)



第二類：三線(以上)共點。(**定理3**)

假設n個頂點都被確定時，有k個頂點屬於第二類，n-k個屬於第一類，並計算圖中投影線的數量L。第一類的頂點皆需要兩條投影線且投影線不會被重複計算；第二類的頂點可以與相鄰的第二類頂點至多共用一條投影線。

n>k：至多共用k-1條投影線 $L \geq 3k-(k-1)+2(n-k)=2n+1$

n=k：至多共用k條投影線 $L \geq 3k-k=2k=2n$

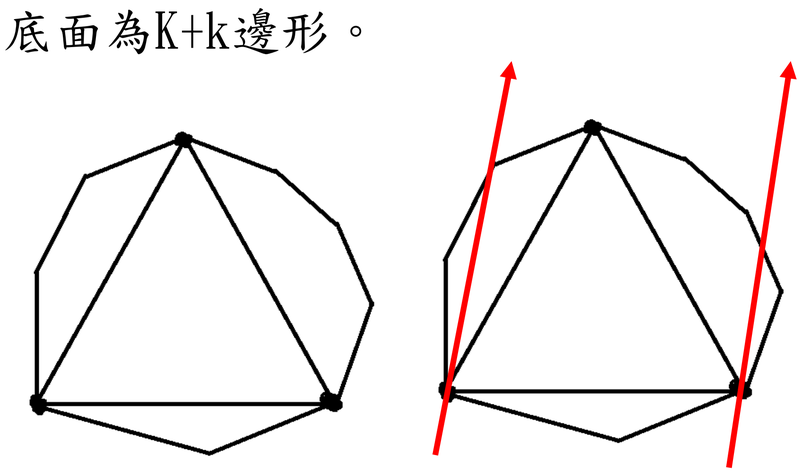
每次投影都產生兩條投影線。

定理4 水平投影下最少n次便可能完全還原n角柱(錐)。

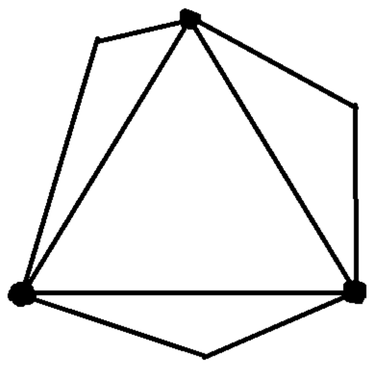
水平投影還原柱錐體最差狀況

定義名詞：

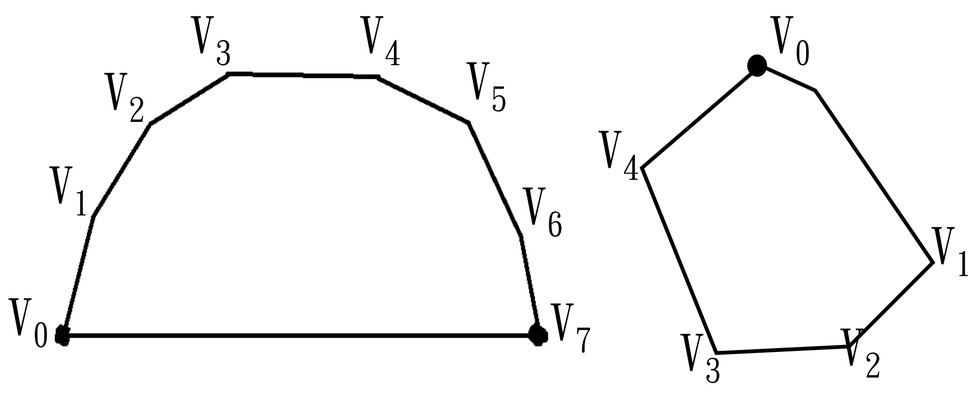
1. 對於每一張圖G，定義f(G)為在圖G的最糟狀況至少幾次可完全還原。
2. 圖G的基本資訊包含：已確認點個數K，未確認點個數k，區域數n，各區域邊數 $a_1, a_2, \ldots, a_n$，易知欲確認的底面為K+k邊形。
3. min(G)：圖G邊界上至少存在的頂點個數(可用點佔線算出)。
4. 若G在任意角度投影下，都必定有一條投影線僅交G於一已知頂點，稱G為唯一(only)狀態。
5. 若min(G)=K+k，稱G為標準(std)狀態。
6. 圖G在投影v(θ)後可能變成的圖的集合記為 $v_\theta(G)$。



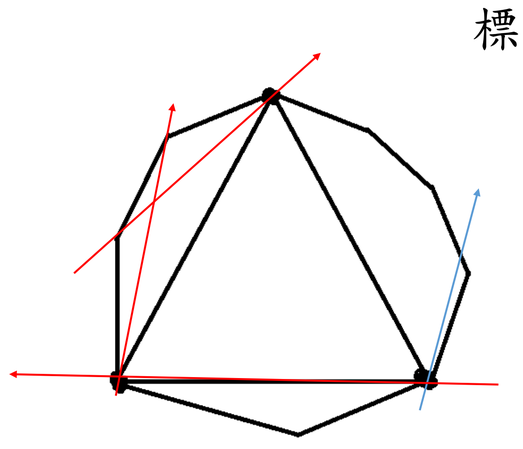
n=3, K=3, min(G)=5,G非only,區域邊數：2,3,4



n=3, K=3, min(G)=3,G為only,區域邊數：2,2,2



標號



紅箭頭方向為規則的
藍箭頭方向為不規則的

定理5 沒有給定底面圖形為幾邊形的狀況下，最糟狀況需要無限多次投影，因為該底面可能為s邊形而s極大。在有給定幾邊形的狀況下則是有限多次。

狀態轉移方程式(定理6)

可以想像這是一個使用遞迴的問題，且使用貪心法。其狀態轉移方程式為：

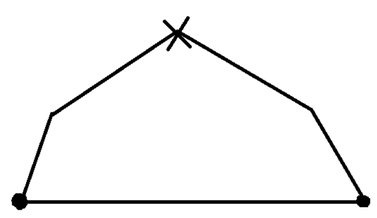
$$f(G)=min\{max\{f(P)|P \in v_\theta(G)\}|0 \leq \theta \leq 2\pi\}+1$$

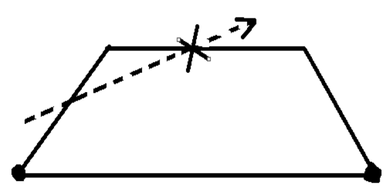
$K \geq 2$, $only, std$

所有頂點都已經在邊界上且每次投影只需考慮一條線，且可以把每一個區域的最糟狀況次數算出再累加即為f(G)。分析當一區域未知頂點個數為k時，區域邊數的可能性和保證還原該區域的最少次數。

$k=1$

由std和點佔線知道邊數為3或4。若區域邊數為4，則由點佔線立刻知該點位置，若區域邊數為3，則需要一次投影。

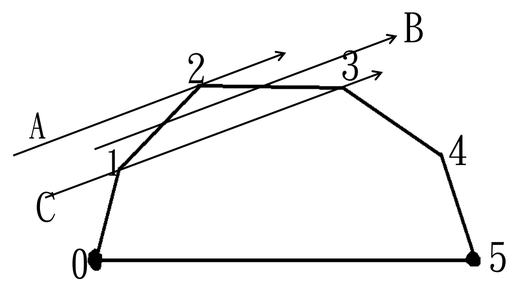




$k=2$

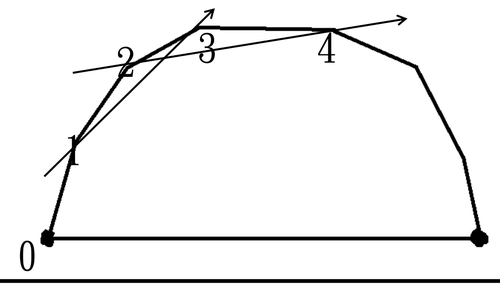
區域邊數為6則仿k=1，區域邊數為5則分析投影各對角線方向所產生的可能，可能為確認某一點、區域邊數+1、確認兩點。分別稱其為A,B,C狀況，並將每個灰色區域頂點標號以利進行討論。由**定理6**知道答案為兩次。

	0-2	1-3	2-4	3-5
A	1	2	2	1
B	1	1	1	1
C	2	1	1	2



$k=3$

計算k=3時會用到k=1,k=2的結論，由表及**定理6**知道為兩次。觀察前幾個數字的規律猜測通解，再進一步的去用數學歸納法證明：



	0-2	1-3	2-4
A	1	3	2
B	1	1	1
C	3	1	2

定理7 對於 $K \geq 2$,G為only且std，f(G)的通式為：

$$f(G)=\sum_{i=1}^{n} f_1(a_i), \quad \begin{cases} f_1(a_i)=[\log_2(a_i-1)] & ,2 \nmid a_i \\ f_1(a_i)=0 & ,2 \mid a_i \end{cases}$$

$K \geq 2, only$，非std

$k = 1$

only每次只能影響一個區域，最糟會試遍所有區域，也就是n次，找到點所在的區域後至少還需要一次去確認，故至少要n+1次。

$k = 2$

可用先前結論計算各個情況，而邊數分配有三種可能，製表：

n	2	3	4	5	6	7
(4, 2)	4	5	6	7	8	9
(3, 2)	5	6	7	8	9	10
(2, 2)	6	7	8	9	10	11

$k = 3$

n	1	2	3	4	5
(6, 2, 2, ⋯)	4	5	6	7	8
(4, 4, 2, ⋯)	4	5	6	7	8
(5, 2, 2, ⋯)	5	6	7	8	9
(4, 3, 2, ⋯)	5	6	7	8	9
(4, 2, 2, ⋯)	6	7	8	9	10
(3, 3, 2, ⋯)	6	7	8	9	10
(3, 2, 2, ⋯)	7	8	9	10	11
(2, 2, 2, ⋯)	8	9	10	11	12

同樣猜測通式，再用巢狀的歸納法分別處理變數可證明：

定理8：對於$K \geq 2$,G為only且非std，f(G)的通式為：

$$f_2(k,n) = n + 3k - 2 - \sum_{i=1}^{n}(a_i - 2) = 3n + 3k - 2 - \sum_{i=1}^{n} a_i$$

還原n角柱(錐)

利用**定理6、7、8**，再配合一些估計策略可以導出還原n角柱(錐)的最少保證次數通式，經過上界的改進和構造下界的情況，可以得到：

定理9：保證還原s角柱(錐)至少需要次數為：

$$f_3(s) = 3s - 4, \forall s \geq 3, s \in \mathbb{N}$$

陸、研究結果

定理1 有限個投影還原凸多面體之充要條件為：存在一部分投影所圍成的多面體區域，其每一個頂點都被某條投影線通過，而且該投影線只經過該點。

定理2 可能區域(灰色區域)的每條邊上都至少存在一個頂點。(點佔線原理)

定理3 三投影線共點則該點必為頂點。(三線共點)

定理4 水平投影下最少n次便可能完全還原n角柱(錐)。

定理5 沒有給定底面圖形為幾邊形的狀況下，最糟狀況需要無限多次投影，因為該底面可能為s邊形而s極大。在有給定幾邊形的狀況下則是有限多次。

定理6 可以想像這是一個使用遞迴的問題，且使用貪心法。其狀態轉移方程式為：

$$f(G) = min\{max\{f(P)|P \in v_\theta(G)\}|0 \leq \theta \leq 2\pi\} + 1$$

定理7 對於$K \geq 2$,G為only且std，f(G)的通式為：

$$f(G) = \sum_{i=1}^{n} f_1(a_i), \begin{cases} f_1(a_i) = [\log_2(a_i - 1)], 2 \nmid a_i \\ f_1(a_i) = 0 \qquad\qquad\qquad , 2 \mid a_i \end{cases}$$

定理8：對於$K \geq 2$,G為only且非std，f(G)的通式為：

$$f_2(k,n) = n + 3k - 2 - \sum_{i=1}^{n}(a_i - 2) = 3n + 3k - 2 - \sum_{i=1}^{n} a_i$$

定理9：保證還原s角柱(錐)至少需要次數為：

$$f_3(s) = 3s - 4, \forall s \geq 3, s \in \mathbb{N}$$

柒、討論

可以看出還原n角柱(錐)時，only把非only的狀況給蓋過去了，因為only的情況圖所需次數較多，但是若單純討論最差狀況下還原任意非only的情況圖時，本文並沒有找出其最少次數，即類似定理7和定理8的通式。可以看出規則方向投影所給予的條件較多，因此皆選擇規則方向去投影會較有效率，所需總次數較少。若要分析非柱錐體，也必須定義出類似的資訊(例如本文中的區域數，區域邊數)，如何去找出需要哪些資訊，又該如何去定義那些資訊，事實上是整個研究開始時的難點所在。

此問題最有趣之處在於其最佳與最差狀況下的還原次數，未來希望能夠找到分析多面體的方法，進而導出多面體最佳/最差狀況的通式。關於此方面的研究可以用來改進現有演算法的策略，希望在未來可以結合現有方法應用於各種領域。

捌、結論

本文中給出了完全還原所需之條件以及探討了最基礎的多面體—柱體與錐體的完全還原策略。由於任意投影的變數多，便降低一個維度使用水平投影來還原，導出最佳以及最差狀況下的還原次數。過程中發現可以使用樹與遞迴來漂亮的拆分這個看似沒有規律的問題，目前找出了一些簡單的規則，並且從遞迴過程中就可以看出最佳的還原策略。

玖、參考資料及其他

张垚 數學奧林匹亞小叢書 高中卷11組合數學 九章出版社