

中華民國第 57 屆中小學科學展覽會

作品說明書

高級中等學校組 數學科

第三名

050414

永恆的旋轉木馬

學校名稱：國立臺灣師範大學附屬高級中學

作者： 高二 王 凱 高二 江佑龍 高二 林智為	指導老師： 周洺朱
---	------------------

關鍵詞：不變量(Invariants)、

圓錐曲線(Conic Sections)、

空間焦半徑(3rd Dimensional Focal
Radiuses)

摘要

本研究作品主要在探討「平面上各種曲線內關於相鄰等角割線段的新的不變量」與「空間中特殊圓錐曲面的特殊等角割線段的新的不變量」。

若圓錐曲線、蚘線等曲線中有相鄰等角的 n 條割線段，則這 n 條割線段之 m 次方和為定值。在圓錐曲線中這些割線段的交點可以是焦點、曲線內任意點，在蚘線中則為基點。甚至經由反演，還能將此性質推廣至直線上。

研究最後擴及至空間，先考慮橢圓、拋物、雙曲球面，其一焦點為 F ，將正 N 面體 V_N 之重心 G 與 F 重合，使得 V_N 以 F 為旋轉中心任意旋轉，此時由 F 對 V_N 之各頂點做射線交圓錐曲面於 P_u ，則 $\overline{FP_u}$ 之倒數 m 次方和為定值，其中 $u = 1, \dots, n$ ， $N = 4, 6, 8, 12, 20$ 。

Abstract

The main focuses of this research are “the new invariants of the line segments of curves” and “the new invariants of the line segments of special quadric surfaces” when the segments satisfy the following statement: let M be any point not on the curve or surface, the endpoints of every segment are M and any point on the curve or surface, and the angles between the segments are the same.

If there are a number of those segments in a conic section or limaçon, the sum of the reciprocal of the m^{th} power of them is fixed. In the case of a conic section, M can be the focal point or any point in it. As for a limaçon, M is the pole. We can even apply this theorem to a line by inversion.

Finally, we generalized this theorem to the 3-dimension. We consider the special quadric surfaces whose intersection with the xy-plane are conic sections that share the same focal points with them. Let F be one of the focal points. Move the gravity G of a platonic solid V_N to F . When V_N spins with F being the center of rotation, draw rays starting from F and passing the vertexes of V_N and intersect Ω at P_u , then the sum of reciprocal of the m^{th} power of $\overline{FP_u}$ is fixed.

壹、研究動機

起初在練習競賽題：「橢圓的兩垂直焦點弦被焦點所分成的四段線段長的倒數平方和為定值。」我們在解題過程中感受到了很大的興趣，便開始思考這題目的各種變化，從四條線到 n 條，甚至到倒數 m 次方和。此外我們利用極座標認識了更多有趣的曲線，更利用 GeoGebra 畫出令人驚豔的 3D 模擬圖，激發進一步研究的好奇心。

貳、研究目的

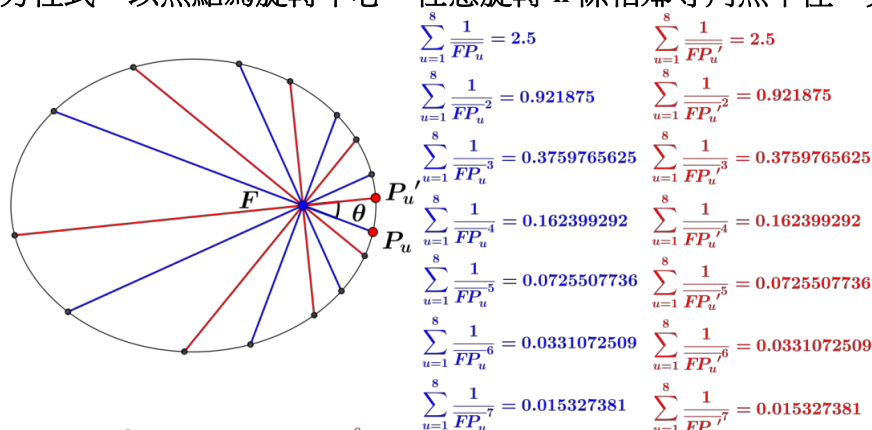
- 一、固定圓錐曲線方程式的情況下，以焦點為旋轉中心，則 n 條相鄰等角焦半徑經任意旋轉時的倒數 m 次方和為定值，其中 $n > m, \forall n, m \in \mathbb{N}$ 。
- 二、固定圓錐曲線方程式的情況下，以其內任意一點為旋轉中心，則過此點的 n 條相鄰等角割線段經任意旋轉時的倒數 m 次方和為定值，其中 $n > m, n, m$ 為偶數。
- 三、在空間中，固定特殊橢圓、拋物、雙曲曲面方程式的情況下，以焦點為旋轉中心，則此焦點向正 N 面體的各頂點做射線交曲面的各線段之倒數 m 次方和為定值。
- 四、在空間中，任意正多面體之頂點到任意點、線、面之距離 m 次方和為定值。

參、研究設備及器材

- 一、紙筆
- 二、GeoGebra
- 三、文獻

肆、研究過程與方法

- 一、固定橢圓方程式，以焦點為旋轉中心，任意旋轉 n 條相鄰等角焦半徑，其 m 次方和為定值



一開始我們利用 GeoGebra 測試在橢圓中的相鄰等角八條焦半徑中，發現當其焦半徑以焦點為中心任意旋轉(即 $\theta \in \mathbb{R}$)時，則 $\overline{FP_u}$ 的倒數 m 次方和皆為定值(如上圖所示)，其中 $u = 1, 2, \dots, 8$ 且 $m < 8, \forall m \in \mathbb{N}$ ，而當割線段的次方數大於或等於等分數時，則旋轉時其割線段的倒數 m 次方和為一變數，其中 $m \geq 8, \forall m \in \mathbb{N}$ 。且若等分數為奇數時，也符合上述性質。

於是利用這個觀察，我們猜測：在橢圓方程式固定的前提下，以焦點作為旋轉中心，則 n 條相鄰等角焦半徑任意旋轉時的倒數 m 次方和會是一個定值，其中 $n > m, \forall n, m \in \mathbb{N}$ 。以下為方便討論，令 l 為圓錐曲線之半正焦弦長， e 為離心率，且 $\overline{FP_u}$ 為相鄰等角、依逆時針排列的焦半徑，其中 $u = 1, 2, \dots, n$ 。

Lemma1：橢圓 $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的焦半徑 $\overline{FP_u}$ 長為 $\frac{l}{e \cos \left(\phi + \frac{2(u-1)\pi}{n} \right) + 1}$ ， $a > b > 0, \forall n \in \mathbb{N}$

<proof>

令 $P_1(a \cos \theta, b \sin \theta) \in \Gamma$ ，第一象限中 $\overline{FP_1}$ 與 x 軸正

向夾角 ϕ 為最小，其中 θ 為 $\overline{OP_1}$ 與 x 軸正向夾角

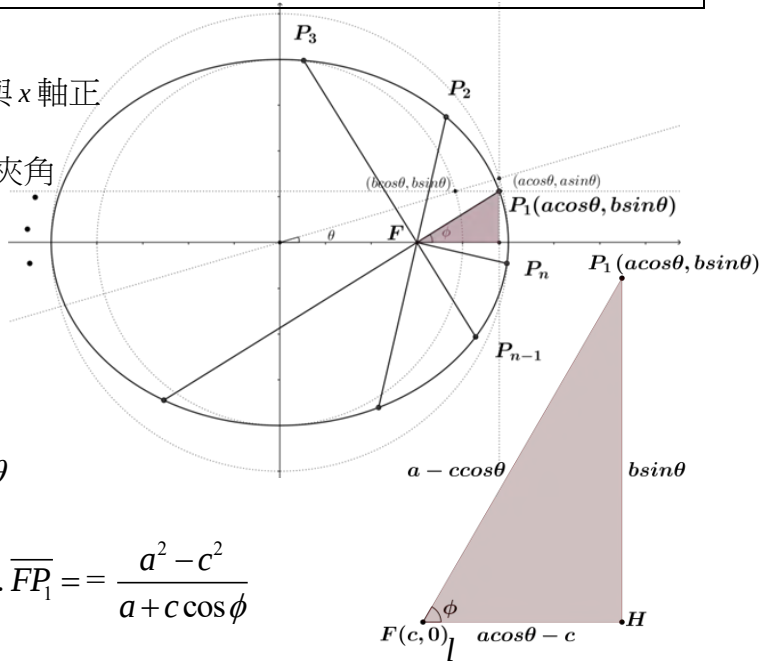
如右圖，過 P_1 做垂直於 x 軸的鉛直線，可得一直角三角形 $\Delta P_1 H F$ 。(如右下圖所示)

利用畢氏定理可得：

$$\overline{FP_1} = \sqrt{(a \cos \theta - c)^2 + (b \sin \theta)^2} = a - c \cos \theta$$

$$\because \cos \phi = \frac{a \cos \theta - c}{a - c \cos \theta} \Rightarrow \cos \theta = \frac{a \cos \phi + c}{a + c \cos \phi} \quad \therefore \overline{FP_1} = \frac{a^2 - c^2}{a + c \cos \phi}$$

$$\text{再用 } e \text{ 及 } l \text{ 簡化得 } \overline{FP_1} = \frac{l}{1 + e \cos \phi}。 \text{同理，} n \text{ 條焦半徑時，} \overline{FP_u} = \frac{l}{e \cos \left(\phi + \frac{2(u-1)\pi}{n} \right) + 1} \quad \#$$



Lemma2： $\sum_{u=1}^n \cos \left[k \left(\phi + \frac{2u\pi}{n} \right) \right] = 0, n > |k|, \forall n \geq 3, k \in \mathbb{Z} - \{0\}$

<proof>

$$\begin{aligned} \sum_{u=1}^n \cos \left[k \left(\phi + \frac{2u\pi}{n} \right) \right] &= \frac{1}{2 \sin \frac{k\pi}{n}} \cdot \left[2 \cos \left(k\phi + \frac{2k\pi}{n} \right) \sin \frac{k\pi}{n} + 2 \cos \left(k\phi + \frac{4k\pi}{n} \right) \sin \frac{k\pi}{n} + \dots + 2 \cos \left(k\phi + \frac{2nk\pi}{n} \right) \sin \frac{k\pi}{n} \right] \\ &= \frac{1}{2 \sin \frac{k\pi}{n}} \cdot \left\{ \left[\sin \left(k\phi + \frac{3k\pi}{n} \right) - \sin \left(k\phi + \frac{5k\pi}{n} \right) \right] + \left[\sin \left(k\phi + \frac{5k\pi}{n} \right) - \sin \left(k\phi + \frac{3k\pi}{n} \right) \right] + \dots + \left[\sin \left(k\phi + \frac{(2n+1)k\pi}{n} \right) - \sin \left(k\phi + \frac{(2n-1)k\pi}{n} \right) \right] \right\} \\ &= \frac{1}{2 \sin \frac{k\pi}{n}} \cdot \left[\sin \left(k\phi + \frac{(2n+1)k\pi}{n} \right) - \sin \left(k\phi + \frac{k\pi}{n} \right) \right] = \frac{1}{2 \sin \frac{k\pi}{n}} \cdot \left[2 \cos \left(k\phi + \frac{(n+1)k\pi}{n} \right) \cdot \sin k\pi \right] \\ &= \frac{1}{2 \sin \frac{k\pi}{n}} \cdot \left[2 \cos \left(k\phi + \frac{(n+1)k\pi}{n} \right) \cdot 0 \right] = 0 \quad \# \end{aligned}$$

$$\textbf{Lemma3} : \cos^n \theta = \frac{1}{2^{n-1}} \left[C_{\left[\frac{n}{2}\right]}^n \cdot \frac{(-1)^n + 1}{4} + \sum_{j=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} C_j^n \cdot \cos(n-2j)\theta \right], \forall n \in \mathbb{N}$$

<proof>

$$(i) \text{ 當 } n=1, \text{ RHS } = \frac{1}{2^0} \left[C_0^1 \cdot \frac{-1+1}{4} + \sum_{j=0}^0 C_j^1 \cdot \cos(1-2j)\theta \right] = \cos \theta = \text{LHS} \therefore \text{成立}$$

$$(ii) \text{ 設 } n=k \text{ 成立, 即 } \cos^k \theta = \frac{1}{2^{k-1}} \left[C_{\left[\frac{k}{2}\right]}^k \cdot \frac{(-1)^k + 1}{4} + \sum_{j=0}^{\left[\frac{k-1}{2}\right]} C_j^k \cdot \cos(k-2j)\theta \right]$$

$$(iii) \text{ 當 } n=k+1, \cos^{k+1} \theta = \frac{1}{2^{k-1}} \left[C_{\left[\frac{k}{2}\right]}^k \cdot \cos \theta \cdot \frac{(-1)^k + 1}{4} + \sum_{j=0}^{\left[\frac{k-1}{2}\right]} C_j^k \cdot \cos(k-2j)\theta \cdot \cos \theta \right] \dots (*)$$

$$\text{Case1}^\circ k \text{ 為偶數} : (*) = \frac{1}{2^{k-1}} \left\{ C_{\frac{k}{2}}^k \cdot \cos \theta \cdot \frac{1}{2} + \sum_{j=0}^{\frac{k}{2}-1} C_j^k \cdot \frac{1}{2} [\cos(k-2j+1)\theta + \cos(k-2j-1)\theta] \right\}$$

$$= \frac{1}{2^k} \left\{ C_{\frac{k}{2}}^k \cdot \cos \theta + \left\{ C_0^k \cdot [\cos(k+1)\theta + \cos(k-1)\theta] + \dots + C_{\frac{k}{2}-1}^k \cdot [\cos 3\theta + \cos \theta] \right\} \right\}$$

$$= \frac{1}{2^k} \left\{ C_0^k \cdot \cos(k+1)\theta + (C_0^k + C_1^k) \cdot \cos(k-1)\theta + \dots + \left(C_{\frac{k}{2}-2}^k + C_{\frac{k}{2}-1}^k \right) \cdot \cos 3\theta + \left(C_{\frac{k}{2}-1}^k + C_{\frac{k}{2}}^k \right) \cdot \cos \theta \right\}$$

$$= \frac{1}{2^k} \left\{ C_0^{k+1} \cdot \cos(k+1)\theta + C_1^{k+1} \cdot \cos(k-1)\theta + \dots + C_{\frac{k}{2}-1}^{k+1} \cdot \cos 3\theta + C_{\frac{k}{2}}^{k+1} \cdot \cos \theta \right\}$$

$$= \frac{1}{2^{(k+1)-1}} \left[\sum_{j=0}^{\frac{k}{2}} C_j^{k+1} \cdot \cos(k+1-2j)\theta \right] = \frac{1}{2^{(k+1)-1}} \left[\sum_{j=0}^{\left[\frac{(k+1)-1}{2}\right]} C_j^{k+1} \cdot \cos(k+1-2j)\theta \right] \therefore \text{成立}$$

$$\text{Case2}^\circ k \text{ 為奇數} : (*) = \frac{1}{2^{k-1}} \left\{ \frac{1}{2} \cdot \sum_{j=0}^{\frac{k-1}{2}} C_j^k \cdot [\cos(k-2j+1)\theta + \cos(k-2j-1)\theta] \right\}$$

$$= \frac{1}{2^k} \left\{ C_0^k \cdot \cos(k+1)\theta + (C_0^k + C_1^k) \cdot \cos(k-1)\theta + \dots + \left(C_{\frac{k-3}{2}}^k + C_{\frac{k-1}{2}}^k \right) \cdot \cos 2\theta + C_{\frac{k-1}{2}}^k \cdot \cos(0 \cdot \theta) \right\}$$

$$= \frac{1}{2^k} \left[C_0^{k+1} \cdot \cos(k+1)\theta + C_1^{k+1} \cdot \cos(k-1)\theta + \dots + C_{\frac{k-1}{2}}^{k+1} \cdot \cos 2\theta + C_{\frac{k-1}{2}}^k \cdot 1 \right]$$

$$= \frac{1}{2^k} \left\{ \left[\sum_{j=0}^{\frac{k-1}{2}} C_j^{k+1} \cdot \cos(k+1-2j)\theta \right] + C_{\frac{k-1}{2}}^k \right\} = \frac{1}{2^{(k+1)-1}} \left\{ \frac{1}{2} \cdot C_{\left[\frac{k+1}{2}\right]}^{k+1} + \left[\sum_{j=0}^{\left[\frac{(k+1)-1}{2}\right]} C_j^{k+1} \cdot \cos(k+1-2j)\theta \right] \right\} \therefore \text{成立}$$

$$\text{由數學歸納法, } \cos^n \theta = \frac{1}{2^{n-1}} \left[C_{\left[\frac{n}{2}\right]}^n \cdot \frac{(-1)^n + 1}{4} + \sum_{j=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} C_j^n \cdot \cos(n-2j)\theta \right], \forall n \in \mathbb{N} \quad \#$$

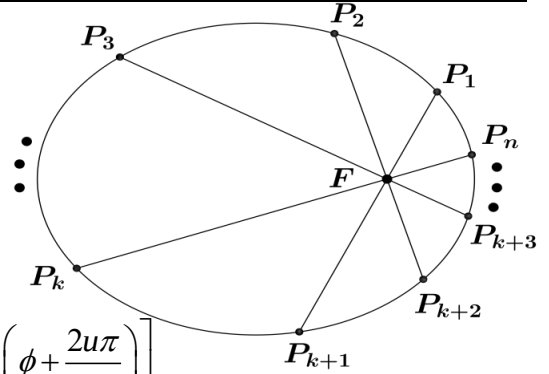
Theorem1：以 F 為其一焦點的圓錐曲線，其任意 n 條相鄰等角的焦半徑的倒數 m 次方

和為定值，即 $\sum_{u=1}^n \frac{1}{\overline{FP_u}^m} = \frac{n}{l^m} \cdot \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} C_{2j}^m \cdot C_j^{2j} \cdot \left(\frac{e}{2}\right)^{2j}$ 為定值，其中 $n > m, \forall n, m \in \mathbb{N}$

<proof of Thm1> (1) 先以橢圓為例

由 **Lemma1** 可得 $\overline{FP_u} = \frac{l}{e \cos\left(\phi + \frac{2(u-1)\pi}{n}\right) + 1}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sum_{u=1}^n \frac{1}{\overline{FP_u}^m} &= \frac{1}{l^m} \cdot \sum_{u=1}^n \left[e \cos\left(\phi + \frac{2(u-1)\pi}{n}\right) + 1 \right]^m \\ &= \frac{1}{l^m} \cdot \sum_{u=1}^n \left[e \cos\left(\phi + \frac{2u\pi}{n}\right) + 1 \right]^m = \frac{1}{l^m} \cdot \sum_{u=1}^n \left[\sum_{j=0}^m C_j^m \cdot e^j \cos^j\left(\phi + \frac{2u\pi}{n}\right) \right] \\ &= \sum_{u=1}^n \left[\sum_{j=0}^m C_j^m \cdot \frac{e^j}{l^m \cdot 2^{j-1}} \cdot \left(C_{\lfloor \frac{j}{2} \rfloor}^j \cdot \frac{(-1)^j + 1}{4} + \sum_{h=0}^{\lfloor \frac{j-1}{2} \rfloor} C_h^j \cdot \cos(j-2h)\left(\phi + \frac{2u\pi}{n}\right) \right) \right] \quad (\text{由 Lemma3}) \\ &= \frac{n}{l^m} \cdot \sum_{j=0}^m \left[\frac{C_j^m \cdot C_{\lfloor \frac{j}{2} \rfloor}^j \cdot e^j}{2^{j-1}} \cdot \frac{(-1)^j + 1}{4} + \frac{1}{l^m} \cdot \sum_{j=0}^m \left\{ \sum_{h=0}^{\lfloor \frac{j-1}{2} \rfloor} \left[\frac{C_j^m \cdot C_h^j \cdot e^j}{2^{j-1}} \cdot \sum_{u=1}^n \cos(j-2h)\left(\phi + \frac{2u\pi}{n}\right) \right] \right\} \right] \dots (*) \\ \because h \leq \left\lfloor \frac{j-1}{2} \right\rfloor, 2h \leq j-1 \text{ 且 } (j-2h) \in \mathbb{N} \text{ 且 } j-2h \leq j \leq m < n \therefore \sum_{u=1}^n \cos(j-2h)\left(\phi + \frac{2u\pi}{n}\right) &= 0 \quad (\text{由 Lemma2}) \\ \Rightarrow (*) &= \frac{n}{l^m} \cdot \sum_{j=0}^m \left[\frac{C_j^m \cdot C_{\lfloor \frac{j}{2} \rfloor}^j \cdot e^j}{2^{j-1}} \cdot \frac{(-1)^j + 1}{4} + \frac{1}{l^m} \cdot \sum_{j=0}^m \left\{ \sum_{h=0}^{\lfloor \frac{j-1}{2} \rfloor} \left[\frac{C_j^m \cdot C_h^j \cdot e^j}{2^{j-1}} \cdot 0 \right] \right\} \right] \\ &= \frac{n}{l^m} \cdot \sum_{j=0}^m \left[\frac{C_j^m \cdot C_{\lfloor \frac{j}{2} \rfloor}^j \cdot e^j}{2^{j-1}} \cdot \frac{(-1)^j + 1}{4} \right] = \frac{n}{l^m} \cdot \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} C_{2j}^m \cdot C_j^{2j} \cdot \left(\frac{e}{2}\right)^{2j}, n > m, \forall n, m \in \mathbb{N} \quad \# \end{aligned}$$



(2) 後來我們發現能用圓錐曲線的極座標表示法精簡證明。因為圓錐曲線(非退化)的極座標

可表示為 $r = \frac{ep}{1 - e \cos \theta}$ ，其中 e 為圓錐曲線之離心率， p 為極點到準線的距離， θ 為 r 與 x 軸

正向的夾角，與 **Lemma1** 的焦半徑表示法不盡相同。於是我們以極座標方程式來精簡以下的

證明。藉此可以將 **Theorem1** 中橢圓的結論推廣至所有圓錐曲線，即「在圓錐曲線固定的

情況下，任意 n 條焦半徑的倒數 m 次方和經任意旋轉時是一個定值」。當拋物線焦半徑 $\overline{FP_u}$

平行拋物線的對稱軸，即 $\overline{FP_u}$ 與拋物線無交點時，我們定義 $\frac{1}{\overline{FP_u}}$ 為零；當雙曲線焦半徑 $\overline{FP_u}$

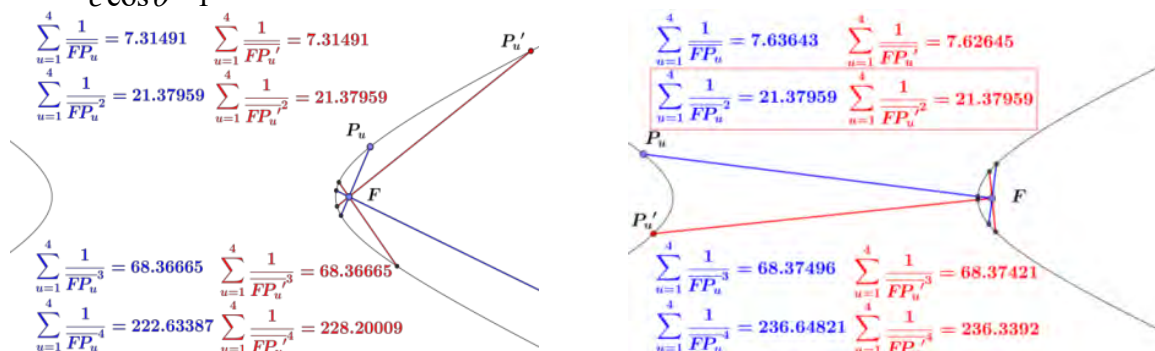
無法與較近一支雙曲線有交點時，則定義 $\overline{FP_u}'$ 為此時的焦半徑， P_u' 為 $\overline{P_u'F}$ 與較遠一支雙曲線的交點，如圖 0。

* 雙曲線之特例

由於雙曲線之離心率 $e > 1$ ，以極座標 $r = \frac{ep}{1 - e \cos \theta}$ 來表示可能遇到 $r < 0$ 的情況，取其長度

值得 $|r| = \frac{ep}{e \cos \theta - 1}$ 。

圖 0



Corollary 1：若存在 k 條焦半徑與其餘 $n - k$ 條不在同側，其倒數 m 次方和仍為定值，其中 $1 \leq k < n, \forall n, k \in \mathbb{N}, m$ 為偶數。

<proof> 先討論 $k = 1$ 的情況，令 $\cos \theta_\eta > \frac{1}{e}$ ，其中 $1 \leq \eta \leq n, \eta \in \mathbb{N}$ ，則

$$\sum_{u=1}^n \frac{1}{FP_u^m} = \left[\sum_{u=1}^n \frac{(1 - e \cos \theta_u)^m}{(ep)^m} \right] - \frac{(1 - e \cos \theta_\eta)^m}{(ep)^m} + \frac{(e \cos \theta_\eta - 1)^m}{(ep)^m} \dots (*)$$

$$\text{Case 1}^\circ m \text{ is even } (*) = \left[\sum_{u=1}^n \frac{(1 - e \cos \theta_u)^m}{(ep)^m} \right] - \frac{(1 - e \cos \theta_\eta)^m}{(ep)^m} + \frac{(1 - e \cos \theta_\eta)^m}{(ep)^m} = \sum_{u=1}^n \frac{(1 - e \cos \theta_u)^m}{(ep)^m}$$

Case 2° m is odd

為定值 (與上述證法相同)

$$(*) = \left[\sum_{u=1}^n \frac{(1 - e \cos \theta_u)^m}{(ep)^m} \right] + \frac{2(e \cos \theta_\eta - 1)^m}{(ep)^m} = \frac{n}{(ep)^m} \cdot \left[\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} C_{2j}^m \cdot C_j^{2j} \cdot \left(\frac{e}{2}\right)^{2j} - \frac{2}{n} \cdot \sum_{h=0}^m C_h^m \cdot (-1)^h e^{m-h} \cos^{m-h} \theta_\eta \right]$$

無法將 $\cos \theta_\eta$ 消去，即異側焦半徑的角度影響 $\sum_{u=1}^n \frac{1}{FP_u^m}$ 的值。同理可推得 k 條異側的情況，

其中 $k \in \mathbb{N}$ 。綜合 (i), (ii)， $\sum_{u=1}^n \frac{1}{FP_u^m}$ 為定值，其中 $1 \leq k < n, \forall n, k \in \mathbb{N}, m$ 為偶數。 #

由定理一的證明可以再推論出以下引理，

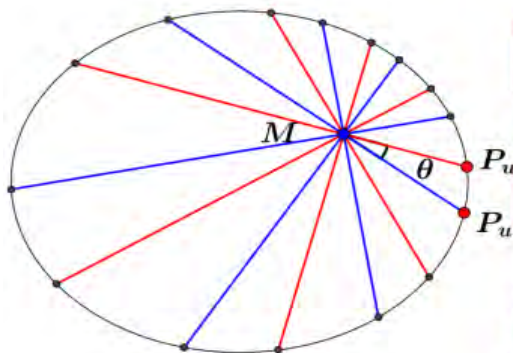
Lemma 4： $\sum_{u=1}^n \left[w \cos \left(\theta + \frac{2u\pi}{n} \right) + 1 \right]^m = n \cdot \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} C_{2j}^m \cdot C_j^{2j} \cdot \left(\frac{w}{2} \right)^{2j}, n > m, \forall n, m \in \mathbb{N}, w \in \mathbb{R}$

二、 固定圓錐曲線方程式，以曲線內「任意點 M 」為旋轉中心，任意旋轉 n 條相鄰等角割線段，其 m 次方和為定值

以上的討論中，在固定圓錐曲線的前提下，以焦點為旋轉中心任意旋轉相鄰等角的 n 條焦半徑，其倒數 m 次方和會是定值。而我們不禁思考，若將其旋轉中心從焦點移到圓錐曲線內的任意一點，這些等角割線段在任意旋轉的情況下是否也有不變量的性質。於是同樣地，先利用 GeoGeBra 做觀察，再進行嚴謹證明。

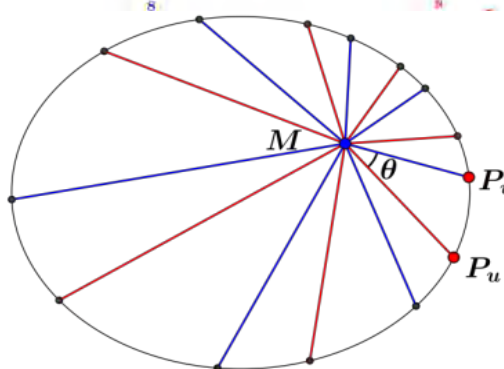
由圖一可見橢圓內有八條等角割線段時，其倒數的偶數次方和經任意旋轉仍為定值，其中倒數次方數皆小於割線段條數(紅框所示)。而由圖二可以見當條數為奇數時，其倒數任意次方和皆為變量。

圖一 橢圓偶數條割線段 (以八條為例)



$\sum_{u=1}^8 \frac{1}{FP_u} = 2.3220542475$	$\sum_{u=1}^8 \frac{1}{FP_u'} = 2.3220383982$
$\sum_{u=1}^8 \frac{1}{FP_u^2} = 0.7811653904$	$\sum_{u=1}^8 \frac{1}{FP_u'^2} = 0.7811653904$
$\sum_{u=1}^8 \frac{1}{FP_u^3} = 0.2913184887$	$\sum_{u=1}^8 \frac{1}{FP_u'^3} = 0.2913109893$
$\sum_{u=1}^8 \frac{1}{FP_u^4} = 0.1159904783$	$\sum_{u=1}^8 \frac{1}{FP_u'^4} = 0.1159904783$
$\sum_{u=1}^8 \frac{1}{FP_u^5} = 0.0481097151$	$\sum_{u=1}^8 \frac{1}{FP_u'^5} = 0.0481140654$
$\sum_{u=1}^8 \frac{1}{FP_u^6} = 0.0204891052$	$\sum_{u=1}^8 \frac{1}{FP_u'^6} = 0.0204891052$

圖二 橢圓奇數條割線段 (以七條為例)



$\sum_{u=1}^8 \frac{1}{FP_u^7} = 0.008885416$	$\sum_{u=1}^8 \frac{1}{FP_u'^7} = 0.0088790341$
$\sum_{u=1}^8 \frac{1}{FP_u} = 2.0317946793$	$\sum_{u=1}^8 \frac{1}{FP_u'} = 2.0317946696$
$\sum_{u=1}^7 \frac{1}{FP_u^2} = 0.68347483$	$\sum_{u=1}^7 \frac{1}{FP_u'^2} = 0.6835486467$
$\sum_{u=1}^7 \frac{1}{FP_u^3} = 0.2548993044$	$\sum_{u=1}^7 \frac{1}{FP_u'^3} = 0.2548993069$
$\sum_{u=1}^7 \frac{1}{FP_u^4} = 0.1015053015$	$\sum_{u=1}^7 \frac{1}{FP_u'^4} = 0.1014765277$
$\sum_{u=1}^7 \frac{1}{FP_u^5} = 0.04209812$	$\sum_{u=1}^7 \frac{1}{FP_u'^5} = 0.0420981199$
$\sum_{u=1}^7 \frac{1}{FP_u^6} = 0.0179156879$	$\sum_{u=1}^7 \frac{1}{FP_u'^6} = 0.0179461387$

於是我們猜測：在圓錐曲線方程式固定的情況下，以任意一點 M 為旋轉中心，任意旋轉 n 條相鄰等角割線段，其倒數 m 次方和為定值，其中 $n > m$ 且 n, m 皆為偶數。而這正是在參考文獻(曾靖國 [3][4]，未來展望)中留下的未證出來的問題，在參考資料(曾靖國 [4]，Theorem)中，原作者認為利用牛頓恆等式與橢圓相交弦定理即可證出此猜測中的一個特例，但經非常多的嘗試，發現這個方向只會讓求證過程更加複雜，而後來我們又不斷的努力，發現將割線段用兩兩 m 次方的配對相加後，再利用 Lemma 5 對稱式的表示才能證得結論，且只能透過此法寫出具體、簡潔的嚴格證明。

Lemma5 (A. Waterson [1]，Theorem): $x^m + y^m = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} (-1)^j \cdot \frac{m}{m-j} \cdot C_j^{m-j} (x+y)^{m-2j} (xy)^j, \forall m \in \mathbb{N}, x, y \in \mathbb{R}$

<proof>

(i) 當 $m=1$ ， $x+y = \sum_{j=0}^0 (-1)^j \cdot \frac{1}{1-j} \cdot C_j^{1-j} (x+y)^{1-2j} (xy)^j = x+y \therefore$ 成立

當 $m=2$ ， $x^2+y^2 = \sum_{j=0}^1 (-1)^j \cdot \frac{2}{2-j} \cdot C_j^{2-j} (x+y)^{2-2j} (xy)^j = (x+y)^2 - 2(xy)^2 \therefore$ 成立

(ii) 設此定理對於任意兩連續的 m 都成立，令其為 $k-1$ 與 k

$$x^k + y^k = (x+y)^k - \frac{k}{k-1} \cdot C_1^{k-1} (x+y)^{k-2} (xy) + \dots + (-1)^j \cdot \frac{k}{k-j} \cdot C_j^{k-j} (x+y)^{k-2j} (xy)^j + \dots$$

$$x^{k-1} + y^{k-1} = (x+y)^{k-1} - \frac{k-1}{k-2} \cdot C_1^{k-2} (x+y)^{k-3} (xy) + \dots + (-1)^{j-1} \cdot \frac{k-1}{k-j} \cdot C_{j-1}^{k-j} (x+y)^{k-2j+1} (xy)^{j-1} \dots$$

(iii) 當 $m = k+1$,

$$x^{k+1} + y^{k+1} = (x^k + y^k)(x+y) - (x^{k-1} + y^{k-1})xy$$

$$= \left[(x+y)^k - \frac{k}{k-1} \cdot C_1^{k-1} (x+y)^{k-2} (xy) + \dots \right] (x+y) - \left[(x+y)^{k-1} - \frac{k-1}{k-2} \cdot C_1^{k-2} (x+y)^{k-3} (xy) + \dots \right] xy$$

其中 $(x+y)^{k-2j+1} (xy)^j$ 之係數為，

$$(-1)^j \cdot \frac{k}{k-j} \cdot C_j^{k-j} - (-1)^{j-1} \cdot \frac{k-1}{k-j} \cdot C_{j-1}^{k-j} = (-1)^j \left[\frac{k}{k-j} \cdot C_j^{k-j+1} - \frac{1}{k-j} \cdot C_{j-1}^{k-j} \right]$$

$$= (-1)^j \left[\frac{k}{k-j} - \frac{j}{(k-j)(k-j+1)} \right] \cdot C_j^{k-j+1} = (-1)^j \cdot \frac{k+1}{k-j+1} \cdot C_j^{k-j+1} \text{ 符合定理中之係數 } \therefore \text{成立}$$

由雙基數學歸納法， $x^m + y^m = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} (-1)^j \cdot \frac{m}{m-j} \cdot C_j^{m-j} (x+y)^{m-2j} (xy)^j$, $\forall m \in \mathbb{N}, x, y \in \mathbb{R}$ #

Lemma6 : $\sum_{u=1}^k \cos^i 2 \left(\theta + \frac{2u\pi}{n} \right) \cos^j 2 \left(\theta' + \frac{2u\pi}{n} \right) = \begin{cases} 0, i, j \text{ is odd} \\ C_i^i C_j^j, n > i+j, n=2k, \forall k \in \mathbb{N} \\ k \cdot \frac{2}{2^{i+j}}, i, j \text{ is even} \end{cases}$
--

<proof>

$$\cos^i 2\theta \cos^j 2\theta' = \frac{1}{2^{i+j-2}} \cdot \left[C_{\lfloor \frac{i}{2} \rfloor}^i \cdot \frac{(-1)^i + 1}{4} + \sum_{\alpha=0}^{\lfloor \frac{i-1}{2} \rfloor} C_{\alpha}^i \cdot \cos 2(i-2\alpha)\theta \right] \cdot \left[C_{\lfloor \frac{j}{2} \rfloor}^j \cdot \frac{(-1)^j + 1}{4} + \sum_{\beta=0}^{\lfloor \frac{j-1}{2} \rfloor} C_{\beta}^j \cdot \cos 2(j-2\beta)\theta' \right]$$

(由 **Lemma3** , 且令 $A = C_{\lfloor \frac{i}{2} \rfloor}^i \cdot \frac{(-1)^i + 1}{4}, B = C_{\lfloor \frac{j}{2} \rfloor}^j \cdot \frac{(-1)^j + 1}{4}$)

$$= \frac{1}{2^{i+j-2}} \left[AB + B \sum_{\alpha=0}^{\lfloor \frac{i-1}{2} \rfloor} C_{\alpha}^i \cdot \cos 2(i-2\alpha)\theta + A \sum_{\beta=0}^{\lfloor \frac{j-1}{2} \rfloor} C_{\beta}^j \cdot \cos 2(j-2\beta)\theta' + \sum_{\alpha=0}^{\lfloor \frac{i-1}{2} \rfloor} \sum_{\beta=0}^{\lfloor \frac{j-1}{2} \rfloor} C_{\alpha}^i C_{\beta}^j \cdot \cos 2(i-2\alpha)\theta \cdot \cos 2(j-2\beta)\theta' \right]$$

$$= \frac{1}{2^{i+j-2}} \left\{ AB + B \cdot \sum_{\alpha=0}^{\lfloor \frac{i-1}{2} \rfloor} C_{\alpha}^i \cdot \cos 2(i-2\alpha)\theta + A \cdot \sum_{\beta=0}^{\lfloor \frac{j-1}{2} \rfloor} C_{\beta}^j \cdot \cos 2(j-2\beta)\theta' \right.$$

$$\left. + \sum_{\alpha=0}^{\lfloor \frac{i-1}{2} \rfloor} \sum_{\beta=0}^{\lfloor \frac{j-1}{2} \rfloor} C_{\alpha}^i C_{\beta}^j \cdot \left[\cos 2((i-2\alpha)\theta + (j-2\beta)\theta') + \cos 2((i-2\alpha)\theta - (j-2\beta)\theta') \right] \right\}$$

將 $\cos^i 2\theta \cdot \cos^j 2\theta'$ 等角累加半個周角 $\Rightarrow \sum_{u=1}^k \cos^i 2 \left(\theta + \frac{2u\pi}{n} \right) \cos^j 2 \left(\theta' + \frac{2u\pi}{n} \right)$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2^{i+j-2}} \left\{ k \cdot AB + B \cdot \sum_{u=1}^k \left[\sum_{\alpha=0}^{\left[\frac{i-1}{2}\right]} C_{\alpha}^i \cdot \cos 2(i-2\alpha) \left(\theta + \frac{2u\pi}{n} \right) \right] + A \cdot \sum_{u=1}^k \left[\sum_{\beta=0}^{\left[\frac{j-1}{2}\right]} C_{\beta}^j \cdot \cos 2(j-2\beta) \left(\theta' + \frac{2u\pi}{n} \right) \right] \right. \\
&\quad + \sum_{\alpha=0}^{\left[\frac{i-1}{2}\right]} \sum_{\beta=0}^{\left[\frac{j-1}{2}\right]} C_{\alpha}^i C_{\beta}^j \cdot \left[\sum_{u=1}^k \cos 2 \left((i-2\alpha)\theta + (j-2\beta)\theta' + (i-2\alpha+j-2\beta) \frac{2u\pi}{n} \right) \right. \\
&\quad \left. \left. + \sum_{u=1}^k \cos 2 \left((i-2\alpha)\theta - (j-2\beta)\theta' + (i-2\alpha-j+2\beta) \frac{2u\pi}{n} \right) \right] \right\}
\end{aligned}$$

由 **Lemma2** 可知道當 $n > i + j, n = 2k, k \in \mathbb{N}$ 時，後四項的 *cosine* 一次方等角連加 2π 後皆為零

$$\therefore \sum_{u=1}^k \cos^i 2 \left(\theta + \frac{2u\pi}{n} \right) \cos^j 2 \left(\theta' + \frac{2u\pi}{n} \right) = \frac{k \cdot AB}{2^{i+j-2}} = \begin{cases} 0, i, j \text{ is odd} \\ C_i^i C_j^j & \# \\ k \cdot \frac{1}{2^{i+j}}, i, j \text{ is even} \end{cases}$$

Theorem2：在圓錐曲線方程式固定的情況下， M 為曲線內任意一點，若 $\overline{MP_u}$ 為任意 n 條相鄰等角割線段，則 $\sum_{u=1}^n \frac{1}{\overline{MP_u}^m}$ 為定值，其中 $n > m$ ， n, m 為偶數。

<proof of Thm2>

令過圓錐曲線內任意一點 M 之相鄰等角的線段依逆時針排列，分別為 $\overline{MP_u}$ ，其中 $\overrightarrow{MP_1}$ 與 x 軸正向夾角為 ϕ 。

(一) 橢圓

1. 令一橢圓 $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ，其中 $a, b \neq 0$ ，設以

$M(h, g)$ 為極點的 P_u 的極座標為 $[r_u, \theta_u]$ ，且 P_u 的

直角座標為 $(r_u \cos \theta_u + h, r_u \sin \theta_u + g)$ $\therefore \frac{(r_u \cos \theta_u + h)^2}{a^2} + \frac{(r_u \sin \theta_u + g)^2}{b^2} = 1$

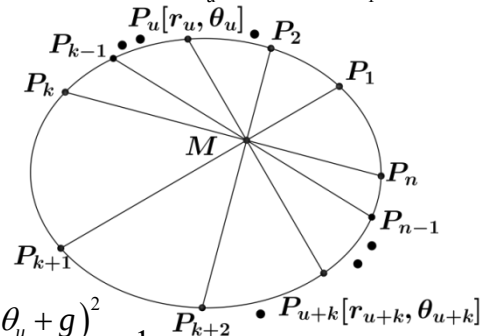
$$\Rightarrow r_u^2 + \frac{q \sin(\theta_u + \phi)}{t(1 - p \cos 2\theta_u)} \cdot r_u + \frac{s}{t(1 - p \cos 2\theta_u)} = 0 \quad \therefore r_u = \sqrt{\left[\frac{q \sin(\theta_u + \phi)}{2t(1 - p \cos 2\theta_u)} \right]^2 - \frac{s}{t(1 - p \cos 2\theta_u)}} - \frac{q \sin(\theta_u + \phi)}{2t(1 - p \cos 2\theta_u)}$$

$$\begin{aligned}
&\text{(其中 } \sin \phi = \frac{b^2 h}{\sqrt{a^4 g^2 + b^4 h^2}}, \cos \phi = \frac{a^2 g}{\sqrt{a^4 g^2 + b^4 h^2}}, t = \frac{a^2 + b^2}{2}, p = \frac{c^2}{a^2 + b^2}, q = 2\sqrt{a^4 g^2 + b^4 h^2} \\
&\quad, s = a^2 g^2 + b^2 h^2 - a^2 b^2) \quad (\because p < 1 \therefore p \cos 2\theta_u < 1 \Rightarrow 1 - p \cos 2\theta_u \neq 0)
\end{aligned}$$

$$\text{將 } \theta_u + \pi \text{ 代回原式的 } \theta_u \quad \therefore r_{u+k} = \sqrt{\left[\frac{q \sin(\theta_u + \phi)}{2t(1 - p \cos 2\theta_u)} \right]^2 - \frac{s}{t(1 - p \cos 2\theta_u)}} + \frac{q \sin(\theta_u + \phi)}{2t(1 - p \cos 2\theta_u)}$$

2. 欲求 $\frac{1}{r_u^2} + \frac{1}{r_{u+k}^2}$ 及 $\frac{1}{r_u^2 \cdot r_{u+k}^2}$ 的值 (證明 3. 欲求的值)

$$(1) \frac{1}{r_u^2 \cdot r_{u+k}^2} = \frac{t^2}{s^2} (1 - p \cos 2\theta_u)^2$$



$$\begin{aligned}
(2) \quad \frac{1}{r_u^2} + \frac{1}{r_{u+k}^2} &= \frac{r_u^2 + r_{u+k}^2}{r_u^2 \cdot r_{u+k}^2} = \left\{ \left[\frac{q \sin(\theta_u + \phi)}{t(1 - p \cos 2\theta_u)} \right]^2 - \frac{2s}{t(1 - p \cos 2\theta_u)} \right\} \cdot \frac{t^2(1 - p \cos 2\theta_u)^2}{s^2} \\
&= \frac{q^2}{2s^2} \cdot (1 - \cos(2\theta_u + 2\phi)) - \frac{2t}{s} (1 - p \cos 2\theta_u) \\
&= \left(\frac{q^2}{2s^2} - \frac{2t}{s} \right) + \left(\frac{2tp}{s} - \frac{q^2}{2s^2} \cdot \cos 2\phi \right) \cdot \cos 2\theta_u + \left(\frac{q^2}{2s^2} \cdot \sin 2\phi \right) \cdot \sin 2\theta_u = R(1 + w \cos 2\theta_u)
\end{aligned}$$

3. 證其為定值

(其中 R, w 為常數)

$$\begin{aligned}
\sum_{u=1}^n \frac{1}{MP_u^m} &= \sum_{u=1}^k \left(\frac{1}{MP_u^m} + \frac{1}{MP_{u+k}^m} \right) = \sum_{u=1}^k \left(\frac{1}{r_u^{2d}} + \frac{1}{r_{u+k}^{2d}} \right) \quad (\text{其中 } n = 2k, m = 2d, \forall k, d \in \mathbb{N}) \\
&= \sum_{u=1}^k \left\{ \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor} (-1)^j \cdot \frac{d}{d-j} \cdot C_j^{d-j} [R(1 + w \cos 2\theta_u)]^{d-2j} \left[\frac{t}{s} (1 - p \cos 2\theta_u) \right]^{2j} \right\} \quad (\text{由 Lemma 5 及 (2)}) \\
&= \sum_{u=1}^k \left\{ \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor} (-1)^j R^{d-2j} \left(\frac{t}{s} \right)^{2j} \cdot \frac{d \cdot C_j^{d-j}}{d-j} \cdot \left[\sum_{\alpha=0}^{d-2j} C_\alpha^{d-2j} \cdot w^\alpha \cos^\alpha 2\theta_u \right] \cdot \left[\sum_{\beta=0}^{2j} C_\beta^{2j} \cdot (-p)^\beta \cos^\beta 2\theta_u \right] \right\} \\
&= \sum_{\alpha=0}^{d-2j} \sum_{\beta=0}^{2j} \left\{ \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor} (-1)^j R^{d-2j} \left(\frac{t}{s} \right)^{2j} \cdot \frac{d \cdot C_j^{d-j}}{d-j} \cdot C_\alpha^{d-2j} C_\beta^{2j} \cdot w^\alpha \cdot (-p)^\beta \left[\sum_{u=1}^k \cos^\alpha 2\left(\theta_u' + \frac{2u\pi}{n}\right) \cos^\beta 2\left(\theta + \frac{2u\pi}{n}\right) \right] \right\} \\
&\because \sum_{u=1}^k \cos^\alpha 2\left(\theta_u' + \frac{2u\pi}{n}\right) \cos^\beta 2\left(\theta + \frac{2u\pi}{n}\right) \text{ 為定值且 } \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor} \left[\sum_{\alpha=0}^{d-2j} \sum_{\beta=0}^{2j} (-1)^j R^{d-2j} \left(\frac{t}{s} \right)^{2j} w^\alpha (-p)^\beta \cdot \frac{d \cdot C_j^{d-j} \cdot C_\alpha^{d-2j} \cdot C_\beta^{2j}}{d-j} \right] \text{ 為} \\
&\text{一常數 (由 Lemma 6)} \therefore \sum_{u=1}^n \frac{1}{MP_u^m} \text{ 為定值, 其中 } n > m, n, m \text{ 為偶數}
\end{aligned}$$

(二) 拋物線

1. 令拋物線 $y^2 = 4cx$, 其中 $c \neq 0$, 設以 $M(h, g)$ 為極點的 P_u 的

極座標為 $[r_u, \theta_u]$, 且 P_u 的直角座標為 $(r_u \cos \theta_u + h, r_u \sin \theta_u + g)$

$$\therefore (r_u \sin \theta_u + g)^2 = 4c(r_u \cos \theta_u + h) \Rightarrow r_u^2 + \frac{p \sin(\theta_u + \phi)}{\sin^2 \theta_u} \cdot r_u + \frac{q}{\sin^2 \theta_u} = 0$$

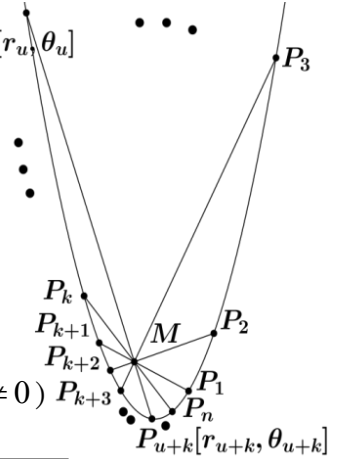
(其中 $\sin \phi = \frac{-2c}{\sqrt{g^2 + 4c^2}}, \cos \phi = \frac{g}{\sqrt{g^2 + 4c^2}}, p = 2\sqrt{g^2 + 4c^2}, q = g^2 - 4ch, \sin^2 \theta_u \neq 0$)

$$\Rightarrow r_u = \sqrt{\left[\frac{p \sin(\theta_u + \phi)}{2 \sin^2 \theta_u} \right]^2 - \frac{q}{\sin^2 \theta_u}} - \frac{p \sin(\theta_u + \phi)}{2 \sin^2 \theta_u} \quad \therefore r_{u+k} = \sqrt{\left[\frac{p \sin(\theta_u + \phi)}{2 \sin^2 \theta_u} \right]^2 - \frac{q}{\sin^2 \theta_u}} + \frac{p \sin(\theta_u + \phi)}{2 \sin^2 \theta_u}$$

2. 欲求 $\frac{1}{r_u^2} + \frac{1}{r_{u+k}^2}$ 及 $\frac{1}{r_u^2 \cdot r_{u+k}^2}$ 的值 (證明 3. 欲求的值)

$$(1) \quad \frac{1}{r_u^2 \cdot r_{u+k}^2} = \left(\frac{-\sin^2 \theta_u}{q} \right)^2 = \frac{(\cos 2\theta_u - 1)^2}{4q^2}$$

$$(2) \quad \frac{1}{r_u^2} + \frac{1}{r_{u+k}^2} = \frac{r_u^2 + r_{u+k}^2}{r_u^2 \cdot r_{u+k}^2} = \left\{ \left[\frac{p \sin(\theta_u + \phi)}{\sin^2 \theta_u} \right]^2 - \frac{2q}{\sin^2 \theta_u} \right\} \cdot \left(\frac{-\sin^2 \theta_u}{q} \right)^2 = R(1 + w \cos 2\theta_u) \quad (\text{其中 } R, w \text{ 為常數})$$



3. 證其為定值 $\sum_{u=1}^n \frac{1}{MP_u^m} = \sum_{u=1}^k \left\{ \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor} (-1)^j \cdot \frac{d}{d-j} \cdot C_j^{d-j} [R(1+w\cos 2\theta_u')]^{d-2j} \left[\frac{1}{2q} (\cos 2\theta_u - 1) \right]^{2j} \right\}$ (由(2))

$$= \sum_{u=1}^k \left\{ \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor} (-1)^j R^{d-2j} \left(\frac{1}{2q} \right)^{2j} \cdot \frac{d \cdot C_j^{d-j}}{d-j} \cdot \left[\sum_{\alpha=0}^{d-2j} C_{\alpha}^{d-2j} \cdot w^{\alpha} \cos^{\alpha} 2\theta_u' \right] \cdot \left[\sum_{\beta=0}^{2j} C_{\beta}^{2j} \cdot (-1)^{2j-\beta} \cos^{\beta} 2\theta_u \right] \right\}$$

$$= \sum_{\alpha=0}^{d-2j} \sum_{\beta=0}^{2j} \left\{ \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor} (-1)^j R^{d-2j} \left(\frac{1}{2q} \right)^{2j} \cdot \frac{d \cdot C_j^{d-j}}{d-j} \cdot C_{\alpha}^{d-2j} C_{\beta}^{2j} \cdot w^{\alpha} \cdot (-1)^{2j-\beta} \cdot \left[\sum_{u=1}^k \cos^{\alpha} 2 \left(\theta' + \frac{2u\pi}{n} \right) \cos^{\beta} 2 \left(\theta + \frac{2u\pi}{n} \right) \right] \right\}$$

$$\therefore \sum_{u=1}^k \cos^{\alpha} 2 \left(\theta' + \frac{2u\pi}{n} \right) \cos^{\beta} 2 \left(\theta + \frac{2u\pi}{n} \right) \text{ 為定值且 } \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor} \left[\sum_{\alpha=0}^{d-2j} \sum_{\beta=0}^{2j} (-1)^j R^{d-2j} \left(\frac{1}{2q} \right)^{2j} \cdot w^{\alpha} \cdot (-1)^{2j-\beta} \cdot \frac{d \cdot C_j^{d-j} \cdot C_{\alpha}^{d-2j} \cdot C_{\beta}^{2j}}{d-j} \right]$$

為一常數 (由 **Lemma6**) $\therefore \sum_{u=1}^n \frac{1}{MP_u^m}$ 為定值, 其中 $n > m$, n, m 為偶數 #

(三)雙曲線

1. 設以 $M(h, g)$ 為極點的 P_u 的極座標為 $[r_u, \theta_u]$,
且 P_u 的直角座標為 $(r_u \cos \theta_u + h, r_u \sin \theta_u + g)$

$$\therefore \frac{(r_u \cos \theta_u + h)^2}{a^2} - \frac{(r_u \sin \theta_u + g)^2}{b^2} = 1$$

$$\Rightarrow t \sin^2 \theta_u \cdot r_u^2 + q \sin(\theta_u + \phi) r_u + s = 0 \quad (\text{其中 } t \sin^2 \theta_u \neq 0)$$

$$(\text{其中 } t = \frac{-c^2}{2}, q = 2\sqrt{a^4 g^2 + b^4 h^2}, s = b^2 h^2 - a^2 g^2 - a^2 b^2, \sin \phi = \frac{b^2 h}{\sqrt{a^4 g^2 + b^4 h^2}}, \cos \phi = \frac{-a^2 g}{\sqrt{a^4 g^2 + b^4 h^2}})$$

$$\Rightarrow r_u = \sqrt{\left[\frac{q \sin(\theta_u + \phi)}{2t(1 - \cos 2\theta_u)} \right]^2 - \frac{s}{t(1 - \cos 2\theta_u)}} - \frac{q \sin(\theta_u + \phi)}{2t(1 - \cos 2\theta_u)} \quad \therefore r_{u+k} = \sqrt{\left[\frac{q \sin(\theta_u + \phi)}{2t(1 - \cos 2\theta_u)} \right]^2 - \frac{s}{t(1 - \cos 2\theta_u)}} + \frac{q \sin(\theta_u + \phi)}{2t(1 - \cos 2\theta_u)}$$

2. 欲求 $\frac{1}{r_u^2} + \frac{1}{r_{u+k}^2}$ 及 $\frac{1}{r_u^2 \cdot r_{u+k}^2}$ 的值 (證明 3. 欲求的值)

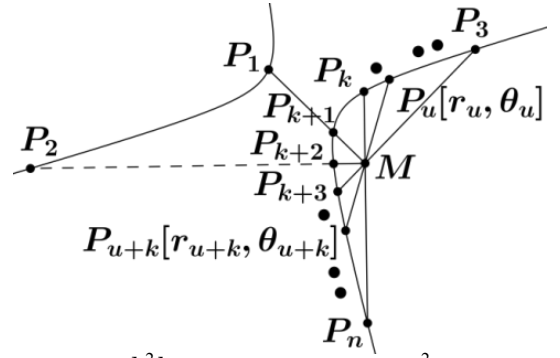
$$(1) \frac{1}{r_u^2 \cdot r_{u+k}^2} = \frac{t^2 \cdot (\cos 2\theta_u - 1)^2}{s^2} \quad (\text{其中 } R, w \text{ 為常數})$$

$$(2) \frac{1}{r_u^2} + \frac{1}{r_{u+k}^2} = \frac{r_u^2 + r_{u+k}^2}{r_u^2 \cdot r_{u+k}^2} = \left\{ \left[\frac{q \sin(\theta_u + \phi)}{t(1 - \cos 2\theta_u)} \right]^2 - \frac{2s}{t(1 - \cos 2\theta_u)} \right\} \cdot \frac{t^2 \cdot (\cos 2\theta_u - 1)^2}{s^2} = R(1 + w \cos 2\theta_u')$$

3. 證其為定值 $\sum_{u=1}^n \frac{1}{MP_u^m} = \sum_{u=1}^k \left\{ \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor} (-1)^j \cdot \frac{d}{d-j} \cdot C_j^{d-j} [R(1+w\cos 2\theta_u')]^{d-2j} \left[\frac{t}{s} (\cos 2\theta_u - 1) \right]^{2j} \right\}$ (由(2))

$$= \sum_{u=1}^k \left\{ \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor} (-1)^j R^{d-2j} \left(\frac{t}{s} \right)^{2j} \cdot \frac{d \cdot C_j^{d-j}}{d-j} \cdot \left[\sum_{\alpha=0}^{d-2j} C_{\alpha}^{d-2j} \cdot w^{\alpha} \cos^{\alpha} 2\theta_u' \right] \cdot \left[\sum_{\beta=0}^{2j} C_{\beta}^{2j} \cdot (-1)^{2j-\beta} \cdot \cos^{\beta} 2\theta_u \right] \right\}$$

$$= \sum_{\alpha=0}^{d-2j} \sum_{\beta=0}^{2j} \left\{ \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor} (-1)^j R^{d-2j} \left(\frac{t}{s} \right)^{2j} \cdot \frac{d \cdot C_j^{d-j}}{d-j} \cdot C_{\alpha}^{d-2j} C_{\beta}^{2j} \cdot w^{\alpha} \cdot (-1)^{2j-\beta} \cdot \left[\sum_{u=1}^k \cos^{\alpha} 2 \left(\theta' + \frac{2u\pi}{n} \right) \cos^{\beta} 2 \left(\theta + \frac{2u\pi}{n} \right) \right] \right\}$$



$\therefore \sum_{u=1}^k \cos^\alpha 2\left(\theta' + \frac{2u\pi}{n}\right) \cos^\beta 2\left(\theta + \frac{2u\pi}{n}\right)$ 為定值且 $\sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor} \left[\sum_{\alpha=0}^{d-2j} \sum_{\beta=0}^{2j} (-1)^j R^{d-2j} \left(\frac{t}{s}\right)^{2j} \cdot w^\alpha \cdot (-1)^{2j-\beta} \cdot \frac{d \cdot C_j^{d-j} \cdot C_\alpha^{d-2j} \cdot C_\beta^{2j}}{d-j} \right]$
 為一常數 (由 **Lemma6**) $\therefore \sum_{u=1}^n \frac{1}{MP_u^m}$ 為定值，其中 $n > m$ ， n, m 為偶數 #

三、以一定圓內的任意點為中心任意旋轉的 n 條相鄰等角割線段，其 m 次方和為定值

Theorem3：設圓方程式 $C: x^2 + y^2 = R^2$ ， M 為圓內任意一點，若 $\overline{MP_u}$ 為 n 條相鄰等角的割線段，則 $\sum_{u=1}^n \overline{MP_u}^m$ 為定值，其中 $n > |m|, \forall n, m$ 為偶數

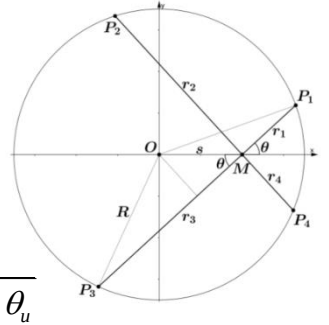
<proof of Thm3>

(1) 不失一般性設 $O(0,0), M(s,0)$ ，令 r_1 與 x 軸正向夾角為 $\theta (0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2})$ ，
 由內幕及畢氏定理，得下列三式：

$$(i) r_u \cdot r_{u+k} = R^2 - s^2, (ii) \frac{r_u + r_{u+k}}{2} - r_u = s \cos \theta_u, (iii) \frac{r_u + r_{u+k}}{2} = \sqrt{R^2 - (s \sin \theta_u)^2}$$

由 (ii), (iii) 得， $r_u = -s \cos \theta_u + \sqrt{R^2 - s^2 \sin^2 \theta_u}, r_{u+k} = s \cos \theta_u + \sqrt{R^2 - s^2 \sin^2 \theta_u}$

$$\text{則 } r_u^2 + r_{u+k}^2 = 2R^2 + 2s^2 \cos 2\theta_u \text{ 且 } r_u \cdot r_{u+k} = R^2 - s^2 \therefore \frac{1}{r_u^2} + \frac{1}{r_{u+k}^2} = \frac{2R^2 + 2s^2 \cos 2\theta_u}{(R^2 - s^2)^2}$$



$$(2) \text{ 求其定值： } \sum_{u=1}^n \overline{MP_u}^m = \sum_{u=1}^k \left(\overline{MP_u}^m + \overline{MP_{u+k}}^m \right) = \sum_{u=1}^k \left[\sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor} (-1)^j \cdot \frac{d}{d-j} \cdot C_j^{d-j} (2R^2 + 2s^2 \cos 2\theta_u)^{d-2j} (R^2 - s^2)^{2j} \right]$$

$$= \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor} \left[(-1)^j \cdot \frac{d}{d-j} \cdot C_j^{d-j} \cdot (2R^2)^{d-2j} \cdot (R^2 - s^2)^{2j} \cdot \sum_{u=1}^k \left(1 + \frac{s^2}{R^2} \cos 2\theta_u \right)^{d-2j} \right] \text{ 為定值 (由 Lemma4)}$$

且當 $m < 0$ 時， $\therefore (R-s)^m$ 為一常數 $\therefore \sum_{u=1}^k (r_u^m + r_{u+k}^m) \cdot (R-s)^m = \sum_{u=1}^k (r_u^{-m} + r_{u+k}^{-m})$ 亦為定值 #

四、以一固定蚶線的基點為中心任意旋轉的 n 條相鄰等角割線段，其 m 次方和為定值

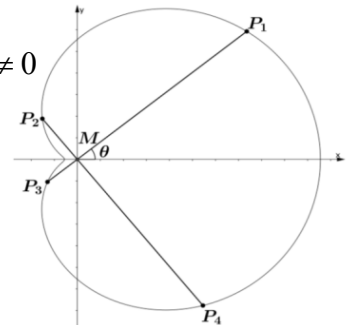
Theorem4：設蚶線方程式 $r = a + b \cos \theta$ 的基點為 M ， $\overline{MP_u}$ 為 n 條相鄰等角的割線段，則 $\sum_{u=1}^n \overline{MP_u}^m$ 為定值，其中 $n > m, \forall n, m \in \mathbb{N}$

<proof of Thm4>

設以基點 M 作為極點的蚶線極座標方程式為 $r = a + b \cos \theta$ ，其中 $a, b \neq 0$

$$\sum_{u=1}^n \overline{MP_u}^m = \sum_{u=1}^n (r_u)^m = a^m \cdot \sum_{u=1}^n \left(1 + \left(\frac{b}{a} \right) \cos \left(\theta + \frac{2u\pi}{n} \right) \right)^m$$

$$= a^m \cdot n \cdot \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor} C_{2j}^m \cdot C_j^{2j} \cdot \left(\frac{b}{2a} \right)^{2j} \text{ (由 Lemma4) } \#$$



五、空間中特殊圓錐曲面相鄰等角割線段不變量探討

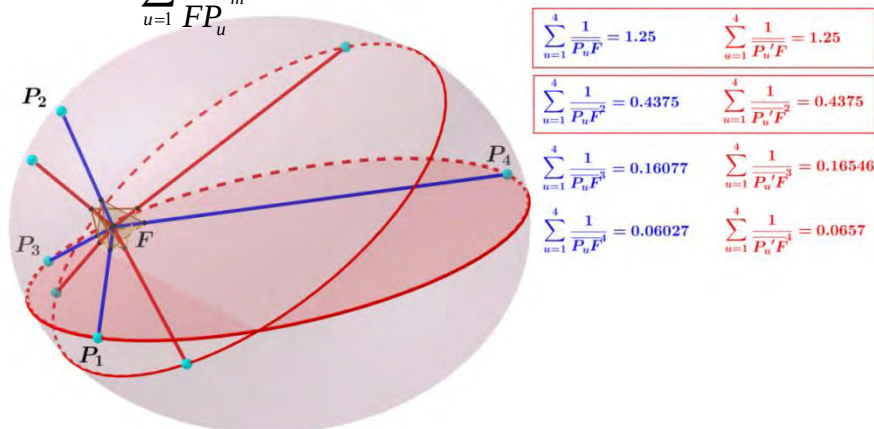
由平面的討論，很自然接著探討空間中的圓錐曲面是否也會有類似不變量的性質，一開始先從橢球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 著手，因其無確切焦點性質，所以我們考慮「特殊圓錐曲面

$$\Omega = \left\{ \Omega_E : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 (a > b), \Omega_H : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{b^2} = -1, \Omega_P : 4cx - y^2 - z^2 = 0 \right\}$$

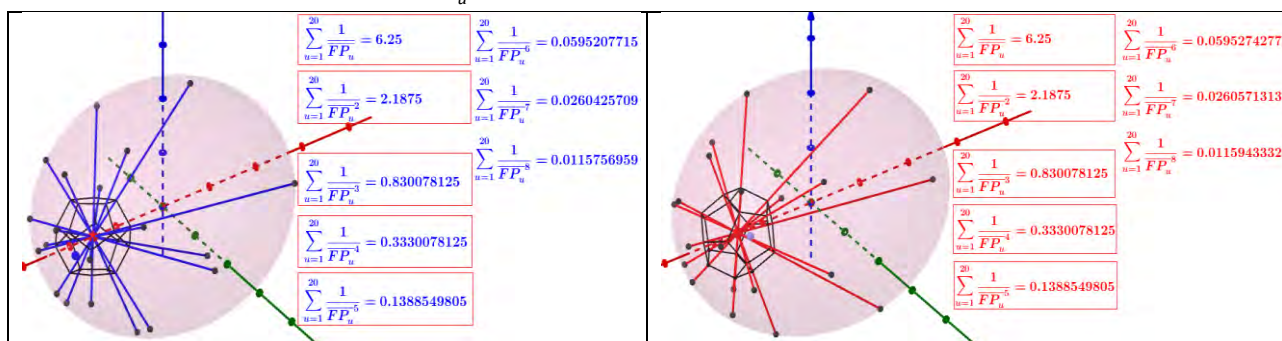
，即 Ω 為 xy 平面上、且焦點在 x 軸上的圓錐曲線 Γ_0 繞 x 軸旋轉而得，令 Ω 其一焦點為 F 。為了製造空間中相鄰等角的割線段，我們想到利用正多面體的重心到各頂點的射線皆相鄰等角的性質，將正 N 面體 V_N 之重心 G 與 F 重合，使得 V_N 以 F 旋轉中心任意旋轉，此時由 F 對 V_N 之各頂點做射線交圓錐曲面於 P_u ，我們要探討 $\overline{FP_u}$ 之倒數 m 次方和的不變量，其中 $u = 1, \dots, n$ ，

$N = 4, 6, 8, 12, 20$ 。以下圖三~七是用 GeoGebra 測試的結果的一部分：

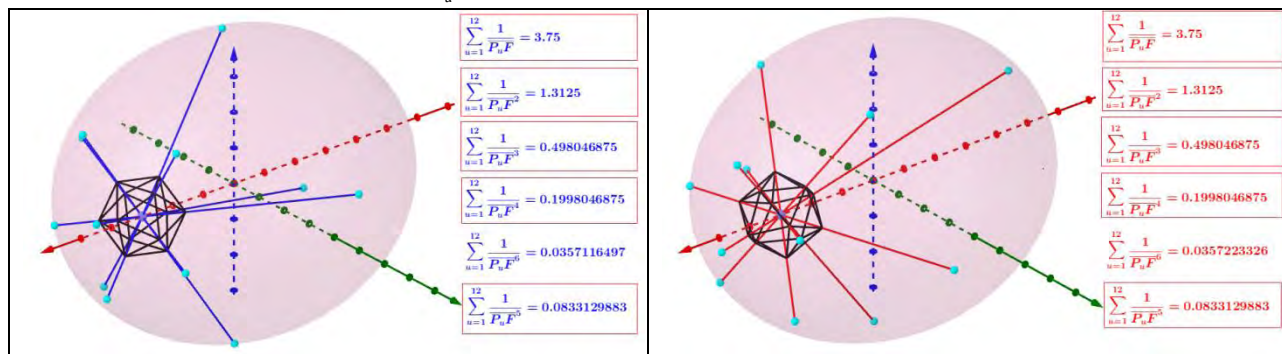
圖三 橢球面正四面體： $\sum_{u=1}^4 \frac{1}{\overline{FP_u}^m}$ 為定值，其中 $m = 1, 2$ 。



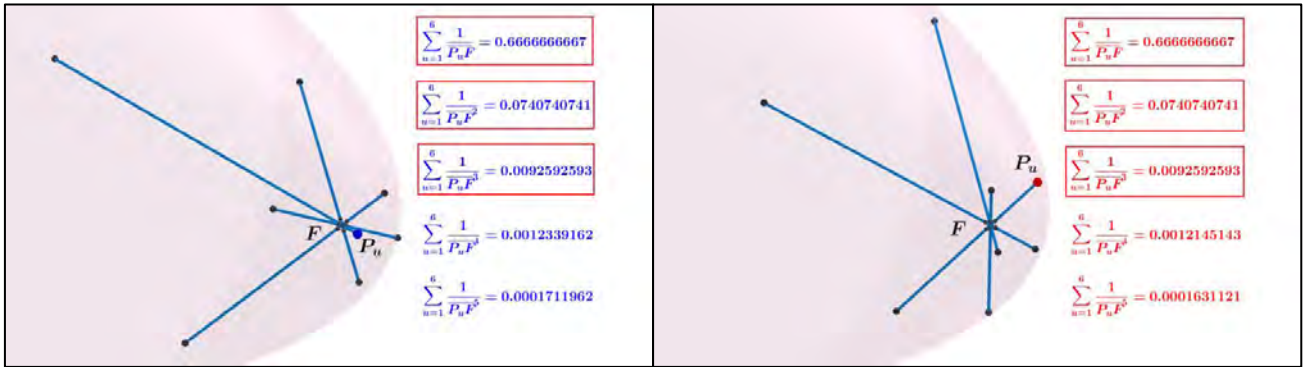
圖四 橢球面正十二面體： $\sum_{u=1}^{20} \frac{1}{\overline{FP_u}^m}$ 為定值，其中 $m = 1, 2, 3, 4, 5$ 。



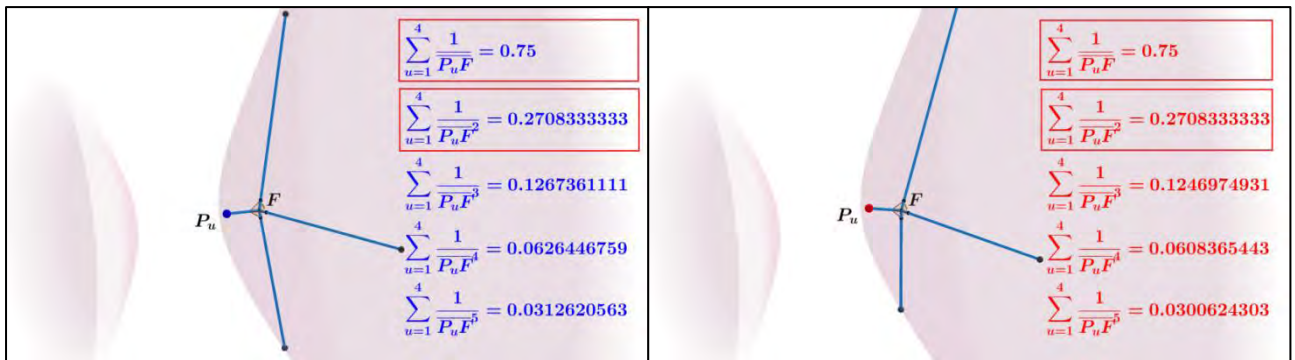
圖五 橢球面正二十面體： $\sum_{u=1}^{12} \frac{1}{\overline{FP_u}^m}$ 為定值，其中 $m = 1, 2, 3, 4, 5$ 。



圖六 拋物球面正六面體： $\sum_{u=1}^8 \frac{1}{FP_u^m}$ 為定值，其中 $m=1,2,3$ 。



圖七 雙曲球面正四面體： $\sum_{u=1}^4 \frac{1}{FP_u^m}$ 為定值，其中 $m=1,2$ 。



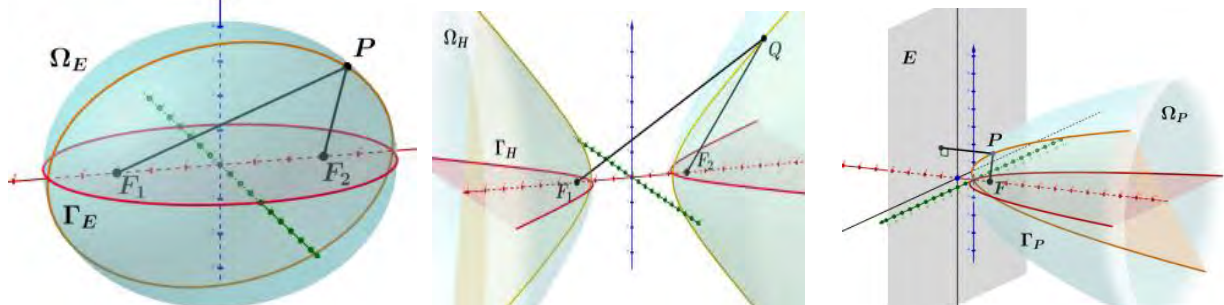
經過諸多測試，我們發現 $\Omega_E, \Omega_H, \Omega_P$ 竟會有相同的結果，將它整理在下表：

	$\overline{FP_u}$ 的倒數 m 次方和為定值				
	正四面體($n=4$)	正六面體($n=8$)	正八面體($n=6$)	正十二面體($n=20$)	正二十面體($n=12$)
Ω	$m=1,2$	$m=1,2,3$	$m=1,2,3$	$m=1,2,3,4,5$	$m=1,2,3,4,5$

觀察表中結果，可見隨著正多面體頂點數增加，定值成立的最大倒數次方數也上升。一番思考後，我們看出頂點數與次方數的關係，以圖三為例，正四面體最多 3 點共面，我們以「最大共面點數」代稱，在正六、八面體中為 4，正十二、二十面體中則為 5，除了最後二者，最大倒數次方皆小於最大共面點數。此外，正六、八面體，正十二、二十面體分別具有相同的結果，我們猜測其與對偶多面體有關聯。接著是嚴謹證明。

Lemma7: Ω 與 Γ_0 共焦點。

任取曲面任意點 P ， P 必落在與 Γ_0 全等且共焦點的曲線上，所以顯然成立。



Lemma8：任意平面 $E: Ax + By + z + k = 0$ 與 Ω 之截痕 Γ 為圓形、圓錐曲線、點或 $\emptyset$ 。

- (1) $\Omega = \Omega_E$ ， Γ 為圓、橢圓、點或 $\emptyset$
- (2) $\Omega = \Omega_H$ ， Γ 為任意圓錐曲線、點或 $\emptyset$
- (3) $\Omega = \Omega_p$ ， Γ 為橢圓、圓、拋物線、點或 $\emptyset$

(一)正八面體：

由於正八面體有四條射線共平面，即會有四條割線段共平面，我們猜測其能利用平面部分的定理輔助證明，先對正八面體作討論：

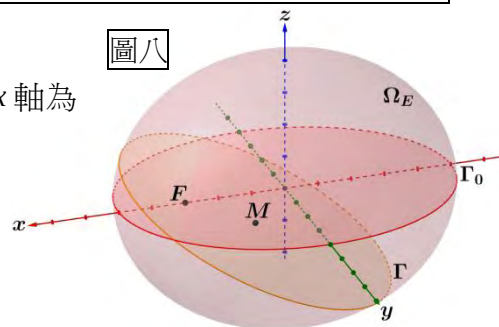
Lemma9： $F(c, 0, 0)$ 必為任意通過 F 的平面與特殊圓錐曲面 Ω 之截痕 Γ 的其中一焦點或圓心

<proof> 先考慮橢圓球面 Ω_E ：

(1) 因為旋轉保長，且 Ω_E 以 x 軸為對稱軸，為方便討論，以 x 軸為軸旋轉 Γ 直到 Γ 長軸在 xz 平面上(如圖九)。

(2) (i) 當截面垂直 xy 平面時，顯然 F 為圓心 #

(ii) 當截面不垂直 xy 平面，證明 $F(c, 0, 0)$ 為 Γ 焦點

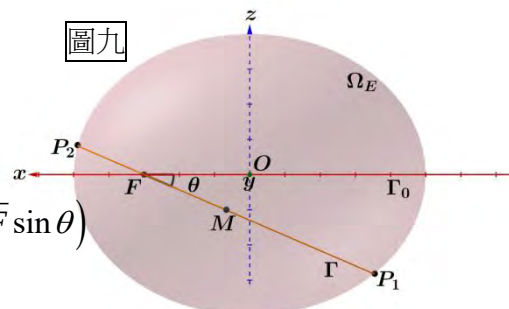


設 M 為 Γ 的中心點， P_1, P_2 為 Γ 的長軸兩端點，且令 $\angle MFO = \theta$

$$\overline{P_1 P_2} = \overline{FP_1} + \overline{FP_2} = \frac{ep}{1 - e \cos \theta} + \frac{ep}{1 - e \cos(\theta + \pi)} = \frac{2ep}{1 - e^2 \cos^2 \theta}$$

$$\Rightarrow \overline{MF} = \overline{FP_1} - \overline{MP_1} = \frac{ep}{1 - e \cos \theta} - \frac{ep}{1 - e^2 \cos^2 \theta} = \frac{e^2 p \cos \theta}{1 - e^2 \cos^2 \theta}$$

過 M 做平行 y 軸之直線 L ，由圖十可得知 $M(c - \overline{MF} \cos \theta, 0, \overline{MF} \sin \theta)$



$$\therefore L: \begin{cases} x = c - \overline{MF} \cdot \cos \theta \\ y = t \\ z = \overline{MF} \cdot \sin \theta \end{cases}, t \in \mathbb{R}, L \text{ 與 } \Omega_E \text{ 交點的 } y \text{ 座標為 } y_1, -y_1$$

將 Ω 與 L 取交集，解其聯立 $\Rightarrow \frac{(c - \overline{MF} \cdot \cos \theta)^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} + \frac{(\overline{MF} \cdot \sin \theta)^2}{b^2} = 1$

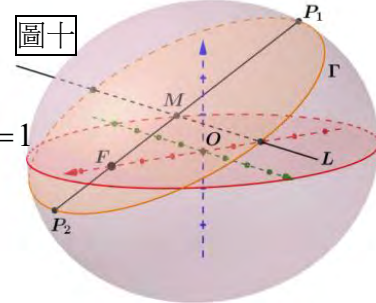
$$\Rightarrow \frac{(c^2 + \overline{MF}^2 \cos^2 \theta - 2c \cdot \overline{MF} \cos \theta) \cdot b^2 + a^2 \cdot \overline{MF}^2 \sin^2 \theta}{a^2 b^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1$$

$$\Rightarrow y_1^2 = (-1) \cdot \left[\overline{FM}^2 (1 - e^2 \cos^2 \theta) - 2e^2 p \cdot \overline{FM} \cos \theta - e^2 p^2 \right] = (-1) \cdot \left[\frac{(e^2 p \cos \theta)^2}{1 - e^2 \cos^2 \theta} - \frac{2(e^2 p \cos \theta)^2}{1 - e^2 \cos^2 \theta} - e^2 p^2 \right] = \frac{e^2 p^2}{1 - e^2 \cos^2 \theta}$$

將半長軸的平方減去半短軸的平方，

$$\text{即 } \overline{MP_1}^2 - y_1^2 = \frac{e^2 p^2}{(1 - e^2 \cos^2 \theta)^2} - \frac{e^2 p^2}{1 - e^2 \cos^2 \theta} = \frac{e^2 p^2}{1 - e^2 \cos^2 \theta} \cdot \frac{e^2 \cos^2 \theta}{1 - e^2 \cos^2 \theta} = \frac{(e^2 p \cos \theta)^2}{(1 - e^2 \cos^2 \theta)^2} = \overline{MF}^2$$

$\therefore F$ 為橢圓 Γ 的其中一個焦點，拋物球面、雙曲球面同理可證 #



Theorem5：以特殊圓錐曲面 Ω 之焦點 F 向正八面體各頂點做射線交 Ω 於 P_u ，各線段之倒數

$$m \text{ 次方和為定值，即 } \sum_{u=1}^6 \frac{1}{P_u F^m} \text{ 為定值，其中 } m=1,2,3$$

<proof of Thm5>

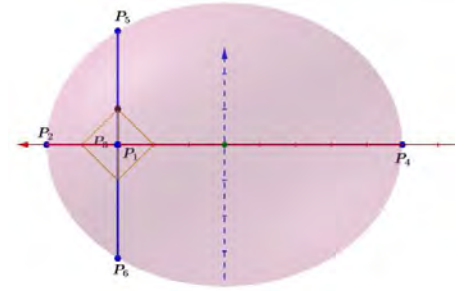
1. 將任意的正八面體經適當旋轉，使得 $\overrightarrow{P_1 P_3}, \overrightarrow{P_2 P_4}, \overrightarrow{P_5 P_6}$ 平行於三軸，我們經由下列四個步驟旋轉得到新的 $P'_1 P'_2 P'_3 P'_4 P'_5 P'_6$ ：

步驟一	步驟二	步驟三	步驟四
首先將正八面體的重心移至焦點 F ，並將其任意擺放	將左圖 $\overrightarrow{P_5 P_6}$ 作為旋轉軸將 $\overrightarrow{P_2 P_4}$ 旋轉至 xz 平面上。	同理步驟二，以 $\overrightarrow{P_2 P_4}$ 為轉軸將 $\overrightarrow{P_5 P_6}$ 旋至 xz 平面上。	接著以 $\overrightarrow{P_1 P_3}$ 為轉軸把 $\overrightarrow{P_5 P_6}$ 、 $\overrightarrow{P_2 P_4}$ 旋轉至平行於 z 軸、 x 軸。

2. 說明「任意正八面體對應的 $\sum_{u=1}^6 \frac{1}{FP_u^m}$ 與旋轉後的正八面體對應的 $\sum_{u=1}^6 \frac{1}{FP'_u^m}$ 相等」：

- (1) 由 **Lemma9** 可以得知 Γ 的焦點就是 Ω 的焦點 F ，因為正八面體中必有四條射線為共平面(如步驟一的圖中 $\overrightarrow{FP_1}, \overrightarrow{FP_2}, \overrightarrow{FP_3}, \overrightarrow{FP_4}$ 共平面)，且這四條射線兩兩相鄰等角，再由 **Theorem1**「圓錐曲線內 n 條焦半徑的倒數 m 次方和為定值」可推得在 Γ 固定的前提底下，分別以 $\overrightarrow{P_5 P_6}$ 或 $\overrightarrow{P_1 P_3}$ 或 $\overrightarrow{P_2 P_4}$ 做旋轉軸時，則其餘四條割線段經任意旋轉時的倒數 m 次方和為定值。因此正八面體對應的六條焦半徑的倒數 m 次方和為定值。
- (2) 證其為定值：計算其上述步驟四的定值

橢圓球 $\because P_2, P_4, P_5, P_6 \in \Gamma': \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 \\ y = 0 \end{cases}$ ，如圖十一 圖十一 (xz 平面視角)



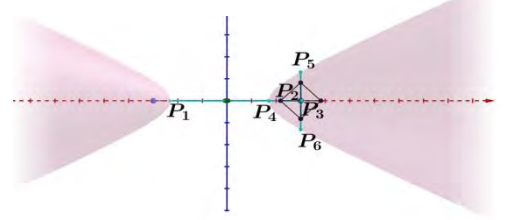
$$\therefore \frac{1}{\overline{FP_2}^m} + \frac{1}{\overline{FP_4}^m} + \frac{1}{\overline{FP_5}^m} + \frac{1}{\overline{FP_6}^m} = \frac{4}{l^m} \cdot \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} C_{2j}^m \cdot C_j^{2j} \cdot \left(\frac{e}{2}\right)^{2j}$$

又 $\overline{FP_1}, \overline{FP_3}$ 為 Γ_{xy} 之半正焦弦長，即 $\overline{FP_1} = \overline{FP_3} = l$ ，

$$\therefore \sum_{u=1}^6 \frac{1}{\overline{FP_u}^m} = \frac{4}{l^m} \cdot \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} C_{2j}^m \cdot C_j^{2j} \cdot \left(\frac{e}{2}\right)^{2j} + \frac{2}{l^m}, m=1,2,3 \text{ (由 Theorem1)}$$

雙曲面 $\because P_2, P_4, P_5, P_6 \in \Gamma': \begin{cases} y^2 + z^2 = \frac{b^4}{a^2} \\ x = c \end{cases}$ ，如圖十二

圖十二 (xz 平面視角)



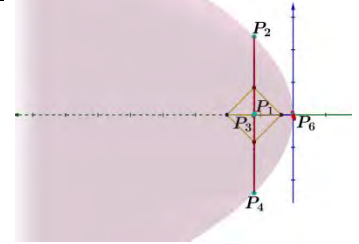
$$\therefore \frac{1}{\overline{FP_2}^m} + \frac{1}{\overline{FP_4}^m} + \frac{1}{\overline{FP_5}^m} + \frac{1}{\overline{FP_6}^m} = \frac{4b^{2m}}{a^m}$$

$$\text{又 } \overline{FP_1} = c - a, \overline{FP_3} = c + a \quad \therefore \sum_{u=1}^6 \frac{1}{\overline{FP_u}^m} = \frac{4b^{2m}}{a^m} + \frac{1}{(c-a)^m} + \frac{1}{(c+a)^m}, m=1,2,3$$

拋物面 $\because P_2, P_4, P_5, P_6 \in \Gamma': \begin{cases} y^2 + z^2 = 4c^2 \\ x = c \end{cases}$ ，如圖十三 圖十三 (xz 平面視角)

$$\therefore \frac{1}{\overline{FP_2}^m} + \frac{1}{\overline{FP_4}^m} + \frac{1}{\overline{FP_5}^m} + \frac{1}{\overline{FP_6}^m} = \frac{4}{2^m c^m} = \frac{1}{2^{m-2} c^m}$$

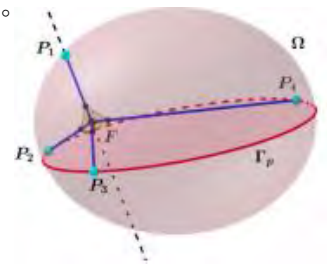
$$\text{又 } \overline{FP_1} = c, \frac{1}{\overline{FP_3}} = 0 \quad \therefore \sum_{u=1}^6 \frac{1}{\overline{FP_u}^m} = \frac{1}{2^{m-2} c^m} + \frac{1}{c^m}, m=1,2,3 \quad \#$$



(二)正四面體：

由於 $\overline{FP_2}, \overline{FP_3}, \overline{FP_4}$ 相鄰等角，便猜想能否利用平面的定理去證明。

一開始嘗試將 $\overline{FP_2}, \overline{FP_3}, \overline{FP_4}$ 三線段投影至紅色截橢圓上，然而被投影線段並非相鄰等角，甚至利用空間直線方程式爆出四交點，或以三維旋轉矩陣求直線參數式，卻都不能簡化證明，最後我們想到 **Lemma10** 及特殊的旋轉法來證明其餘正多面體的定理。



Lemma10：在空間中任意平面 E 取平面外任意一點 O ，向 E 做 n 條相鄰等角割線段，若其與平面的交點在相同橢圓上，則 $\sum_{u=1}^n \frac{1}{\overline{OP_u}^m}$ 為定值，其中 $n > m, \forall n, m \in \mathbb{N}$ 。

<proof>

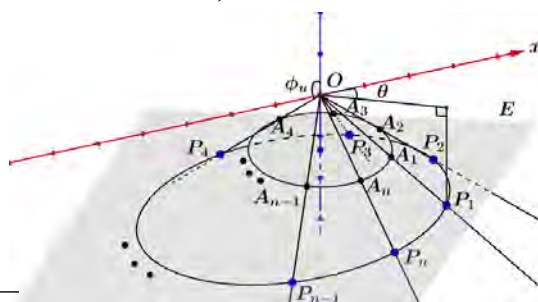
為了方便討論，設點 O 為 $(0,0,0)$ ，而作一圓平行於 xy 平面且圓心在 z 軸上，將此圓 n 等分，以點 A_u 表示，其中 $u=1,2,\dots,n$ ，且 $\overline{OA_u}=1$ 。設 $\overline{OA_u}$ 交平面 E 於點 P_u ，其中 $u=1,2,\dots,n$ 。令 θ 為 $\overrightarrow{OP_u}$ 在 xy 面的投影線段與 x 軸正向夾角，且令 $\overrightarrow{OP_u}$ 與 z 軸正向夾角為 ϕ_u ，其中 $0 \leq \phi_u < \frac{\pi}{2}$ 。

$\therefore \overrightarrow{OA_u} = t_u \cdot \overrightarrow{OP_u} \therefore$ 設 $A_u \left(\sin \phi_u \cos \left(\theta + \frac{2u\pi}{n} \right), \sin \phi_u \sin \left(\theta + \frac{2u\pi}{n} \right), \cos \phi_u \right)$ ， $E: ax + by + z = k$ ，其中

$k \neq 0, \forall a, b, k \in \mathbb{R}$ 。則 $\overrightarrow{OA_u} = \left(\sin \phi_u \cos \left(\theta + \frac{2u\pi}{n} \right), \sin \phi_u \sin \left(\theta + \frac{2u\pi}{n} \right), \cos \phi_u \right)$ ($\because \overline{OA_u} = 1$)

$$\therefore P_u : \begin{cases} E : ax + by + z = k \\ \overrightarrow{OA_u} : \begin{cases} x = \sin \phi_u \cos \left(\theta + \frac{2u\pi}{n} \right) \cdot t_u \\ y = \sin \phi_u \sin \left(\theta + \frac{2u\pi}{n} \right) \cdot t_u \\ z = \cos \phi_u \cdot t_u \end{cases}, \forall t_u \in \mathbb{R}, u = 1, 2, 3, \dots, n \end{cases}$$

$$\Rightarrow t_u = k \cdot \frac{1}{a \sin \phi_u \cos \left(\theta + \frac{2u\pi}{n} \right) + b \sin \phi_u \sin \left(\theta + \frac{2u\pi}{n} \right) + \cos \phi_u}$$



$$\text{則 } \frac{1}{OP_u} = \frac{1}{t_u \cdot \overline{OA_u}} = \frac{1}{k} \cdot \left[\sqrt{a^2 + b^2} \sin \phi_u \cdot \cos \left(\theta + \frac{2u\pi}{n} + \alpha \right) + \cos \phi_u \right] \left(\sin \alpha = \frac{-b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$$

$$\sum_{u=1}^n \frac{1}{OP_u^m} = \sum_{u=1}^n \left[\frac{1}{k} \cdot \left(\sqrt{a^2 + b^2} \sin \phi_u \cdot \cos \left(\theta + \frac{2u\pi}{n} + \alpha \right) + \cos \phi_u \right) \right]^m = \frac{\cos^m \phi_u}{k^m} \sum_{u=1}^n \left[\sqrt{a^2 + b^2} \tan \phi_u \cdot \cos \left(\theta + \frac{2u\pi}{n} + \alpha \right) + 1 \right]^m$$

$$= n \cdot \frac{\cos^m \phi_u}{k^m} \cdot \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} C_{2j}^m \cdot C_j^{2j} \cdot \left(\frac{\sqrt{a^2 + b^2} \tan \phi_u}{2} \right)^{2j}, \text{ 其中 } n > m, \forall n, m \in \mathbb{N} \text{ 且 } 0 \leq \phi_u < \frac{\pi}{2} \text{ (由 Lemma4) } \#$$

Theorem6：以特殊圓錐曲面 Ω 之焦點 F 向正四面體各頂點做射線交 Ω 於 P_u ，各線段之倒數

m 次和為定值，即 $\sum_{u=1}^4 \frac{1}{FP_u^m}$ 為定值，其中 $m = 1, 2$ 。

<proof of Thm6>

1. 將任意的正四面體經適當旋轉，使 $\overrightarrow{FP_1}$ 重合 x 軸，經下列四步驟得新的 P_1', P_2', P_3', P_4' ：

步驟一	步驟二	步驟三
過 B, C, D 以 $\overline{AF}$ 為轉軸得藍圓軌跡且過 A, C, D 以 $\overline{BF}$ 為轉軸得綠圓軌跡， x 軸(紅直線)貫穿綠圓但沒貫穿藍圓。	而以 $\overline{BF}$ 為轉軸做旋轉可將 x 軸穿過藍圓。	因此我們斷言 x 軸與藍圓有相交過，於是在以 $\overline{AF}$ 為轉軸即可將點 B 移至 x 軸上。
步驟四		
正四面體之特例為截平面之截痕為圓形的情況。		

2. 說明「任意正四面體對應的 $\sum_{u=1}^4 \frac{1}{\overline{FP_u}^m}$ 與旋轉後的正四面體對應的 $\sum_{u=1}^4 \frac{1}{\overline{FP_u}'^m}$ 相等」：

(1) 由 **Lemma10**，在軌跡橢圓固定的前提下，以 $\overline{FP_1}, \overline{FP_2}, \overline{FP_3}, \overline{FP_4}$ 為軸旋轉時，其餘三割線段之倒數 m 次和為定值，因此皆不改變 $\sum_{u=1}^4 \frac{1}{\overline{FP_u}^m}$ 之值。

(2) 如步驟四圖，以橢圓為例，令截圓半徑長為 r ，焦半徑間夾角為 θ ， $\sum_{u=2}^4 \frac{1}{\overline{FP_u}'^m} = \frac{3\sin^m(\pi-\theta)}{r^m}$

$$\text{又 } \overline{FP_1} = a-b \quad \therefore \sum_{u=1}^4 \frac{1}{\overline{FP_u}^m} = \sum_{u=1}^4 \frac{1}{\overline{FP_u}'^m} = \frac{1}{(a-b)^m} + \frac{3\sin^m \theta}{r^m}, m=1,2 \#$$

(三)正六面體：

Theorem7：以特殊圓錐曲面 Ω 之焦點 F 向正六面體各頂點做射線交 Ω 於 P_u ，各線段之倒數

m 次和為定值，即 $\sum_{u=1}^8 \frac{1}{\overline{FP_u}^m}$ 為定值，其中 $m=1,2,3$ 。

<proof of Thm7>

1. 將任意的正六面體經適當旋轉，使一面中心在 x 軸上，經下列四步驟得新的 P_u ：

步驟一	步驟二	步驟三
$\overline{BD}$ 作為轉軸時，面中心 A, E, C, G 軌跡為藍圓，而 $\overline{EG}$ 為轉軸時，面中心 A, B, C, D 軌跡為綠圓，紅線為 x 軸。	將左圖 $\overline{BD}$ 作為旋轉軸將綠圓與 x 軸交於兩點。	以 $\overline{EG}$ 為轉軸，將 B, D 兩點旋至 x 軸上。
步驟四		
正六面體之特例為截平面之截痕為圓形的情况。		

2. 說明「任意正六面體對應的 $\sum_{u=1}^8 \frac{1}{\overline{FP_u}^m}$ 與旋轉後的正六面體對應的 $\sum_{u=1}^8 \frac{1}{\overline{FP_u}'^m}$ 相等」：

(1) 由 **Lemma10**，在軌跡橢圓固定的前提下，以任一面中心與 F 連線為軸旋轉時，其餘割線段之倒數 m 次和為定值，因此皆不改變 $\sum_{u=1}^8 \frac{1}{\overline{FP_u}^m}$ 之值。

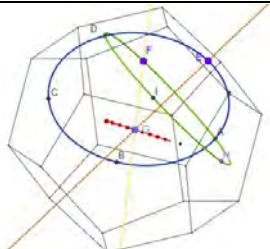
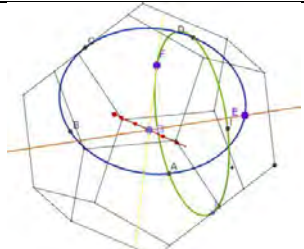
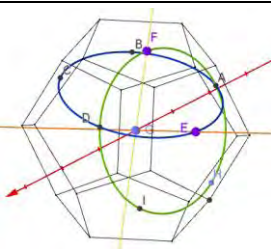
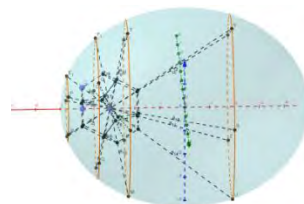
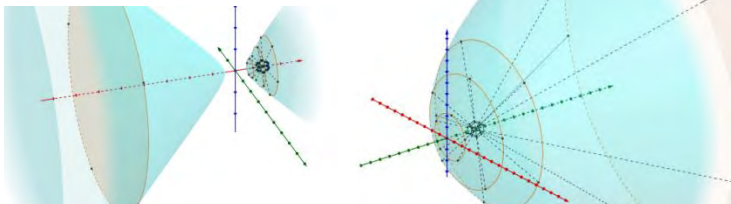
(2) 步驟四圖中二截圓半徑皆為定值，令其為 r_1, r_2 ， x 軸與焦半徑 $\overline{FP_k}$ 夾角為 θ_1 ，與焦半徑 $\overline{FP_j}$ 夾角為 θ_2 ，其中 $k=1\sim 4, j=5\sim 8$ ，則 $\sum_{u=1}^8 \frac{1}{\overline{FP_u}^m} = \frac{5\sin^m \theta_1}{r_1^m} + \frac{5\sin^m \theta_2}{r_2^m}$ 為定值， $m=1,2,3 \#$

(四)正十二面體：

Theorem8：以特殊圓錐曲面 Ω 之焦點 F 向正十二面體各頂點做射線交 Ω 於 P_u ，各線段之倒數 m 次和為定值，即為 $\sum_{u=1}^{20} \frac{1}{FP_u^m}$ 定值，其中 $m=1,2,3,4,5$ 。

<proof of Thm8>

1. 將任意的正十二面體經適當旋轉，使一面中心在 x 軸上，經下列四步驟得新的 P_u' ：

步驟一	步驟二	步驟三
		
過 A, B, C, D, E 以 $\overline{FG}$ 為軸得藍圓軌跡且過 F, A, H, I, J 以 $\overline{KL}$ 為軸得綠圓軌跡， x 軸 (紅線) 貫穿藍圓，綠圓則否	而以 $\overline{FG}$ 為轉軸做旋轉可將 x 軸穿過綠圓。	因此我們斷言 x 軸與綠圓有相交過，於是在以 $\overline{KL}$ 為轉軸即可將點 A 移至 x 軸上。
步驟四		
		
正十二面體之特例為截平面之截痕為四圓形的情況。		

2. 說明「任意正四面體對應的 $\sum_{u=1}^{20} \frac{1}{FP_u^m}$ 與旋轉後的正四面體對應的 $\sum_{u=1}^{20} \frac{1}{FP_u'^m}$ 相等」：

(1) 由 **Lemma10**，在軌跡橢圓固定的前提下，以任一面中心與 F 連線為軸旋轉時，其餘割線段之倒數 m 次和為定值，因此皆不改變 $\sum_{u=1}^{20} \frac{1}{FP_u^m}$ 之值。

(2) 步驟四圖中四截圓半徑皆為定值，令其為 r_1, r_2, r_3, r_4 ， x 軸與焦半徑 $\overline{FP_k}$ 夾角為 θ_1 ，與焦半徑 $\overline{FP_j}$ 夾角為 θ_2 ，其中 $k=1\sim 5, 16\sim 20, j=6\sim 15$ ，則

$$\sum_{u=1}^{20} \frac{1}{FP_u^m} = \frac{5 \sin^m \theta_1}{r_1^m} + \frac{5 \sin^m \theta_2}{r_2^m} + \frac{5 \sin^m \theta_2}{r_3^m} + \frac{5 \sin^m \theta_1}{r_4^m} \text{ 為定值， } m=1,2,3,4,5 \#$$

(五)正二十面體：

Theorem9：以特殊圓錐曲面 Ω 之焦點 F 向正二十面體各頂點做射線交 Ω 於 P_u ，各線段之倒數 m 次和為定值，即為 $\sum_{u=1}^{12} \frac{1}{FP_u^m}$ 定值，其中 $m=1,2,3,4,5$ 。

<proof of Thm9>

1. 將任意的正二十面體經適當旋轉，使 $\overline{FP_1}$ 重合 x 軸，經下列四步驟得新的 P_u' ：

步驟一	步驟二	步驟三
過 A, B, C, D, E 做一圓得一綠圓軌跡且過 D, E, G, H, I 得藍圓軌跡，紅線為 x 軸	而以綠圓為軌跡旋轉可將 x 軸穿過藍圓。	因此我們斷言 x 軸與藍圓有相交過，於是在以藍圓為軌跡旋轉即可將點 I 移至 x 軸上。
步驟四		
正二十面體之特例為截平面之截痕為二圓形的情况。		

(1) 由 **Lemma10**，在軌跡橢圓固定的前提下，以 $\overline{FP_u}$ 為軸旋轉時，其餘割線段之倒數 m 次和為定值，因此皆不改變 $\sum_{u=1}^{12} \frac{1}{\overline{FP_u}^m}$ 之值。

(2) 如步驟四圖，以橢圓為例，令二截圓半徑長分別為 r_1, r_2 ， x 軸與焦半徑 $\overline{P_k F}$ 夾角為 θ ，其中 $k=2 \sim 6$ ，則 $\sum_{u=2}^{11} \frac{1}{\overline{FP_u}^m} = \frac{5 \sin^m \theta}{r_1^m} + \frac{5 \sin^m (\pi - \theta)}{r_2^m}$ ，又 $\overline{P_1 F} = a - b, \overline{P_{12} F} = a + b$ ，
 $\therefore \sum_{u=1}^{12} \frac{1}{\overline{FP_u}^m} = \sum_{u=1}^{12} \frac{1}{\overline{FP_u}^m} = \frac{1}{(a-b)^m} + \frac{1}{(a+b)^m} + \frac{5 \sin^m \theta}{r_1^m} + \frac{5 \sin^m \theta}{r_2^m}, m=1, 2, 3, 4, 5 \#$

六、 固定圓錐曲線方程式，以焦點/中心點為旋轉中心，其任意 n 條相鄰等角的焦弦 / 中心弦經任意旋轉時的 m 次方和為定值

Theorem10：在圓錐曲線方程式固定的情況下，以焦點 F 為旋轉中心，若 $\overline{P_u P_{u+n}}$ 為相鄰等角的焦弦，則 $\sum_{u=1}^n \left(\frac{1}{\overline{P_u P_{u+n}}} \right)^m$ 為定值，其中 $n > m, \forall n, m \in \mathbb{N}$

<proof of Thm10> (圖示以橢圓為例)

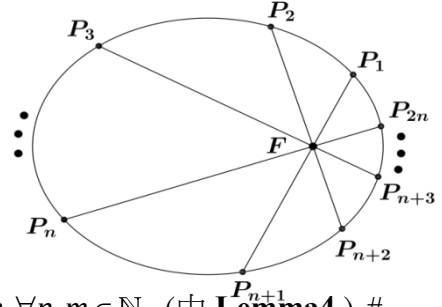
(1) 求其弦長的倒數值：已知圓錐曲線極座標 $r = \frac{ep}{1 - e \cos \theta}$

則 $\overline{P_u P_{u+n}} = \frac{ep}{1 - e \cos(\theta_u + \pi)} + \frac{ep}{1 - e \cos \theta_u} = ep \left(\frac{2}{1 - e^2 \cos^2 \theta_u} \right) = \frac{4ep}{2 - e^2 - e^2 \cos 2\theta_u}$

令 $\frac{1}{\overline{P_u P_{u+n}}} = \frac{(2 - e^2)(1 + w \cos 2\theta_u)}{4ep} = \frac{1 + w \cos 2\theta_u}{K}$ ，其中 $K = \frac{4ep}{2 - e^2}$ ， $w = \frac{e^2}{e^2 - 2}$

$$(2) \text{ 求其定值: } \sum_{u=1}^n \frac{1}{P_u P_{u+n}} = \sum_{u=1}^n \left(\frac{1 + w \cos 2(\theta + \frac{2u\pi}{2n})}{K} \right)^m$$

$$= \sum_{u=1}^n \left(\frac{1 + w \cos(2\theta + \frac{2u\pi}{n})}{K} \right)^m = \frac{n}{K^m} \cdot \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} C_{2j}^m \cdot C_j^{2j} \cdot \left(\frac{w}{2} \right)^{2j}, n > m, \forall n, m \in \mathbb{N} \text{ (由 Lemma4) } \#$$



***雙曲線之特例**：焦弦的兩端點需在雙曲線圖形的同一側，因若至少有一點在異側的話，則此線段不為過焦點的弦。

Theorem11：在圓錐曲線方程式固定的情況下，以中心點為旋轉中心， $\overline{P_u P_{u+n}}$ 為相鄰等角的中心弦，則 $\sum_{u=1}^n \frac{1}{P_u P_{u+n}}$ 為定值，其中 $2n > m, \forall n \in \mathbb{N}, m$ 為偶數。

<proof of Thm11> (因拋物線無中心點，所以在此所說的圓錐曲線並非包含拋物線)

(1) **橢圓**： (i) 令橢圓方程式 $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ，其中 $a, b \neq 0$ 。

設以中心點 $O(0,0)$ 為極點的 P_u 極座標為 $[r_u, \theta_u]$ ， P_u 的直角坐標為 $(r_u \cos \theta_u, r_u \sin \theta_u)$

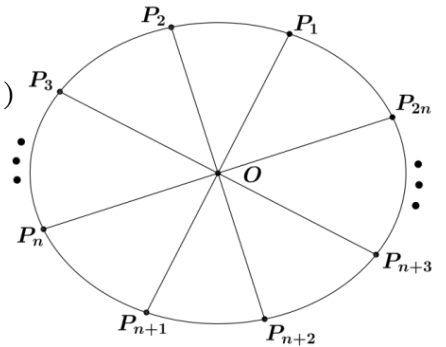
$$\therefore \frac{(r_u \cos \theta_u)^2}{a^2} + \frac{(r_u \sin \theta_u)^2}{b^2} = 1 \Rightarrow r_u^2 = \frac{1}{\frac{\cos^2 \theta_u}{a^2} + \frac{\sin^2 \theta_u}{b^2}} = \frac{b^2}{1 - e^2 \cos^2 \theta_u}$$

$$\therefore \frac{1}{r_u^2} = \frac{(2 - e^2)(1 + w \cos 2\theta_u)}{2b^2} = \frac{1 + w \cos 2\theta_u}{K} \quad (K = \frac{2b^2}{2 - e^2}, w = \frac{e^2}{e^2 - 2})$$

$$\therefore r_u = r_{u+n} \quad \therefore \left(\frac{1}{r_u + r_{u+n}} \right)^2 = \left(\frac{1}{2r_u} \right)^2 = \frac{1 + w \cos 2\theta_u}{4K}$$

(2) 求其定值

$$\sum_{u=1}^n \frac{1}{P_u P_{u+n}} = \sum_{u=1}^n \left(\frac{1 + w \cos 2(\theta + \frac{2u\pi}{2n})}{4K} \right)^{\frac{m}{2}} = \frac{n}{(4K)^d} \cdot \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor} C_{2j}^m \cdot C_j^{2j} \cdot \left(\frac{w}{2} \right)^{2j}, 2n > m, \forall n \in \mathbb{N}, m \text{ 為偶數}$$



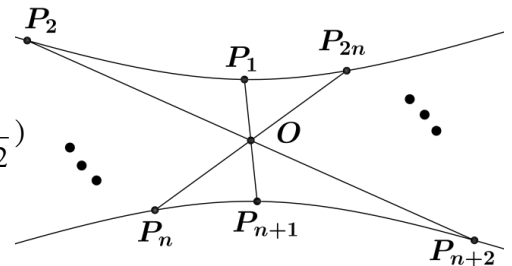
(2) **雙曲線**： (i) 令雙曲線方程式 $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ，其中 $a, b \neq 0$ 。

設以中心點 $O(0,0)$ 為極點的 P_u 極座標為 $[r_u, \theta_u]$ ， P_u 的直角坐標為 $(r_u \cos \theta_u, r_u \sin \theta_u)$

$$\therefore \frac{(r_u \cos \theta_u)^2}{a^2} - \frac{(r_u \sin \theta_u)^2}{b^2} = 1 \Rightarrow r_u^2 = \frac{1}{\frac{\cos^2 \theta_u}{a^2} - \frac{\sin^2 \theta_u}{b^2}} = \frac{b^2}{e^2 \cos^2 \theta_u - 1}$$

$$\therefore \frac{1}{r_u^2} = \frac{(e^2 - 2)(1 + w \cos 2\theta_u)}{2b^2} = \frac{1 + w \cos 2\theta_u}{K} \quad (K = \frac{2b^2}{e^2 - 2}, w = \frac{e^2}{e^2 - 2})$$

$$\therefore r_u = r_{u+n} \quad \therefore \left(\frac{1}{r_u + r_{u+n}} \right)^2 = \frac{1 + w \cos 2\theta_u}{4K}$$



同理橢圓(ii)得， $\sum_{u=1}^n \frac{1}{P_u P_{u+n}} = \frac{n}{(4K)^d} \cdot \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor} C_{2j}^m \cdot C_j^{2j} \cdot \left(\frac{w}{2}\right)^{2j}$ ，其中 $2n > m, \forall n \in \mathbb{N}, m$ 為偶數

由上述證明，可得在圓錐曲線的中心點 O 所延伸相鄰等角 n 條弦的倒數 m 次方和會是一

定值，即 $\sum_{u=1}^n \left(\frac{1}{P_u P_{u+n}}\right)^m = \frac{n}{(4K)^d} \cdot \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor} C_{2j}^m \cdot C_j^{2j} \cdot \left(\frac{w}{2}\right)^{2j}, 2n > m, \forall n \in \mathbb{N}, m$ 為偶數 (由 **Lemma4**) #

，其中當 $K = \frac{2b^2}{2-e^2}$ 時為橢圓； $K = \frac{2b^2}{e^2-2}$ 時為雙曲線。

七、 固定圓/直線 方程式，以 圓上/直線外 任意一點為旋轉中心，其 n 條相鄰等角的割線段經任意旋轉時的 m 次方和為定值

Theorem12：在圓方程式固定的情況下，以圓上任意一點 M 為旋轉中心， $\overline{P_u M}$ 為相鄰等角的割線段，則 $\sum_{u=1}^n \overline{MP_u}^m = n \cdot R^m \cdot C_{\frac{m}{2}}^m$ ，其中 $2n > m, \forall n \in \mathbb{N}, m$ 為偶數。

<proof of Thm12>

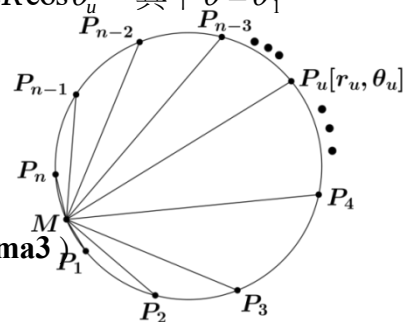
設以點 M 為極點的 P_u 的極座標為 $[r_u, \theta_u]$ ，圓的極座標方程式為 $r = 2R \cos \theta_u$ ，其中 $\theta = \theta_1$ ，

R 為半徑， $\sum_{u=1}^n \overline{P_u M}^m = \sum_{u=1}^n \left(2R \cos\left(\theta + \frac{u\pi}{n}\right)\right)^m$

$$= (2R)^m \cdot \sum_{u=1}^n \frac{C_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}^m \cdot \frac{(-1)^m + 1}{4} + \sum_{v=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} C_v^n \cdot \cos(m-2v) \left(\theta + \frac{u\pi}{n}\right)}{2^{m-1}} \quad (\text{由 Lemma3})$$

$$= (2R)^m \cdot \frac{1}{2^{m-1}} \cdot \left[n \cdot C_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}^m \cdot \frac{1+1}{4} + \sum_{v=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} \left[\sum_{u=1}^n C_v^n \cdot \cos(d-v) \left(2\theta + \frac{2u\pi}{n}\right) \right] \right] \quad (\text{其中 } m = 2d)$$

$$= 2R^m \cdot n \cdot C_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}^m \cdot \frac{(-1)^m + 1}{4} = n \cdot R^m \cdot C_{\frac{m}{2}}^m, \text{ 其中 } 2n > m, \forall n \in \mathbb{N}, m \text{ 為偶數 (由 Lemma2) } \#$$



Theorem13：在直線方程式固定的情況下，以直線外任意一點 M 為旋轉中心， $\overline{P_u M}$ 為相鄰等角割線段，則 $\sum_{u=1}^n \frac{1}{\overline{MP_u'}^m} = R^{-m} \cdot C_{\frac{m}{2}}^m$ ，其中 $2n > m, \forall n \in \mathbb{N}, m$ 為偶數。

<proof of Thm13>

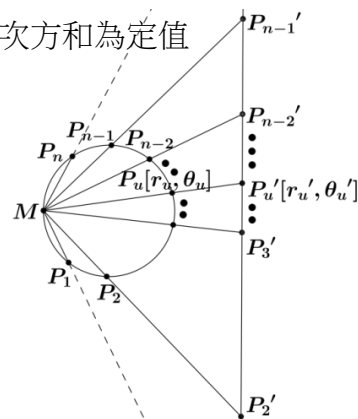
由 **Theorem13** 我們可以得知在圓上點 M 所延伸相鄰等角 n 條割線段偶次方和為定值

即 $\sum_{u=1}^n \overline{P_u M}^m = n \cdot R^m \cdot C_{\frac{m}{2}}^m$ ，其中 $2n > m, \forall n \in \mathbb{N}, m$ 為偶數，且 R 為半徑

而以 M 為反演中心， R^2 為反演幂，即設 $P_u \mapsto P_u'$ ，其中 $u = 1, 2, \dots, n$

$$\text{且 } \overline{MP_u} \cdot \overline{MP_u'} = R^2 \Rightarrow \sum_{u=1}^n \overline{MP_u}^m = n \cdot R^{2m} \cdot \sum_{u=1}^n \overline{MP_u'}^{-m} = n \cdot R^m \cdot C_{\frac{m}{2}}^m$$

$$\therefore \sum_{u=1}^n \frac{1}{\overline{MP_u'}^m} = R^{-m} \cdot C_{\frac{m}{2}}^m \text{ 為定值，其中 } 2n > m, \forall n \in \mathbb{N}, m \text{ 為偶數 } \#$$



伍、討論

在研究的過程中，不經意發現，我們的定理可以很快的論證「2015 年臺灣國際科展——一刀兩斷」和「第十四屆旺宏科學獎——各類曲線等角分割下線段長定值 之研究」中的結論，而且還得出不變量的表示法，反之一刀兩段的結論，卻無法得出我們的定理(附錄三)，以下當作我們的系理：「一刀兩斷」中的切 n 刀，相當於我們定義的角度 $2n$ 等分；且前者的作品討論分組取的和的關係，而我們著重在不變量的探討。

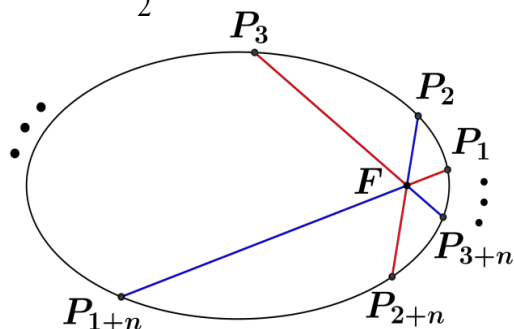
(*Corollary[3][4]和我們的 Theorem 兩者所敘述的 k 和 m 不同)

Corollary2 (曾靖國 [3] , Theorem6): 過圓錐曲線焦點切 n 刀，將焦點到圓錐曲線的所有線段以逆時針依序取一段，則兩人取到的相鄰等角線段長 k 次方和相同，其中 $1-n \leq 2k \leq 0$ 。

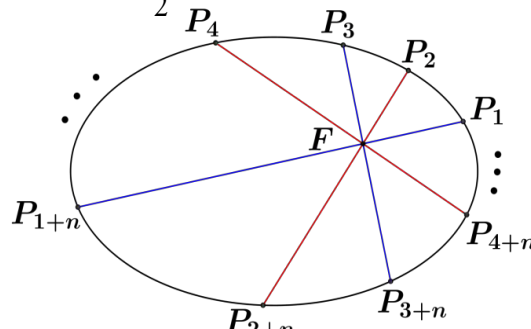
<proof>

原命題之“奇數刀各組取出的線段”等價於我們探討的“周角奇數等份時，任意旋轉”的其一特例，而偶數刀同理。則下圖以橢圓為例：

(i) 奇數刀 ($\frac{n}{2}$ 為奇數)



(ii) 偶數刀 ($\frac{n}{2}$ 為偶數)



從圖(i)或(ii)，顯而易見 $\overline{FP_1}, \overline{FP_3}, \dots, \overline{FP_{2n-1}}$ 中，相鄰的角度皆為 $\frac{2\pi}{n}$ ，且 $\overline{FP_2}, \overline{FP_4}, \dots, \overline{FP_{2n}}$ 相鄰的角度亦為 $\frac{2\pi}{n}$ ，由我們的 Theorem1，圓錐曲線任意相鄰等角的 n 條焦半徑的倒數 m 次方和必為定值， $-n < m \leq 0, \forall m \in \mathbb{Z}$ ，故得證 #

Corollary3 (曾靖國 [3][4] , 未來展望): 過圓錐曲線(非退化)任一點 P 切 n ($n \geq 2, n \in \mathbb{N}$) 刀，使每一組相鄰割線夾角相同， P 點到圓錐曲線的所有切割線段由兩人以逆時針(或順時針)依序取一段，則若 $n = 2m$ ($m \in \mathbb{N}$) 時，則各組取出的線段長 $2k$ 次方和相等，其中 $1-m \leq k \leq 0$ 。

<proof>

由 Theorem2 「在圓錐曲線內任一點延伸相鄰等角的 n 條線段倒數 m 次方和為定值，其中 $n > m, \forall n, m$ 為偶數」可知當其 n 等分線段經旋轉後仍為定值，且其[3][4][未來展望]中敘述為點 P 切 n 刀而依序取的線段長 $2k$ 次方和相等，等價於我們定理二中的其一特例，即 n 等分與其線段經 $\frac{\pi}{n}$ 旋轉後的 m 次方和相同，則由 Theorem2 可直接得到 $n = 2m$ 時，則各組取出的線段長 $2k$ 次方和相等，其中 $1-m \leq k \leq 0$ 的結論。 #

陸、研究結果

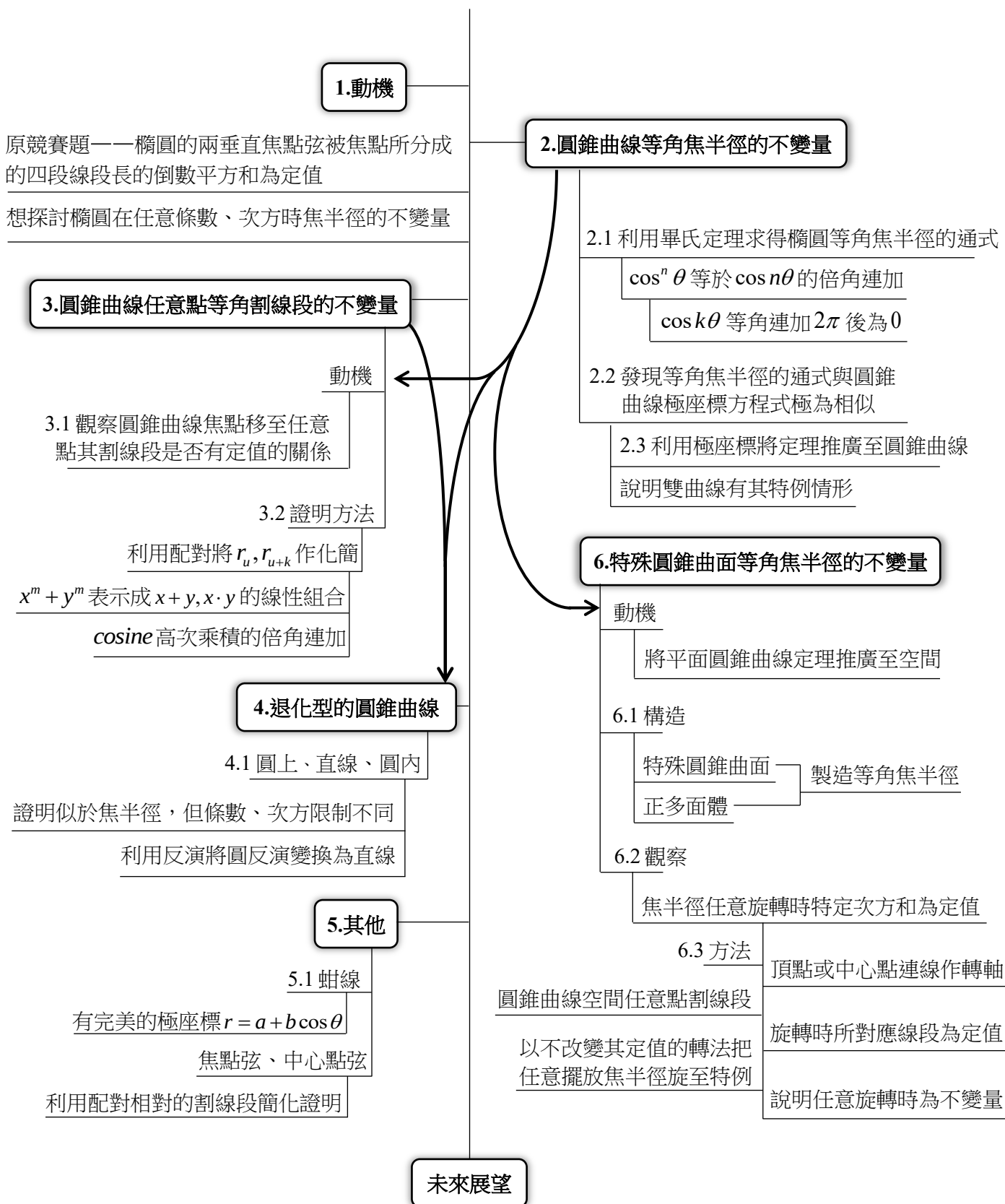
一、重點結論整理

重點結論	內容
Lemma3	$\cos^n \theta = \frac{C_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^n \cdot \frac{(-1)^n + 1}{4} + \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} C_j^n \cdot \cos(n-2j)\theta}{2^{n-1}}, \forall n \in \mathbb{N}$
Lemma4	$\sum_{u=1}^n \left[w \cos \left(\theta + \frac{2u\pi}{n} \right) + 1 \right]^m = n \cdot \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} C_{2j}^m \cdot C_j^{2j} \cdot w^{2j}, n > m, \forall n, m \in \mathbb{N}, w \in \mathbb{R}$
Lemma5[1]	$x^m + y^m = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} (-1)^j \cdot \frac{m}{m-j} \cdot C_j^{m-j} (x+y)^{m-2j} (xy)^j, \forall m \in \mathbb{N}, x, y \in \mathbb{R}$
Lemma6	$\sum_{u=1}^k \cos^i 2 \left(\theta + \frac{2u\pi}{n} \right) \cos^j 2 \left(\theta' + \frac{2u\pi}{n} \right) = \begin{cases} 0, i, j \text{ is odd} \\ C_i^i C_j^j, n > i+j, n=2k, \forall k \in \mathbb{N} \\ k \cdot \frac{1}{2^{i+j}}, i, j \text{ is even} \end{cases}$
Theorem1	圓錐曲線相鄰等角的 n 條焦半徑的倒數 m 次和為定值， $\sum_{u=1}^n \frac{1}{FP_u^m} = \frac{n}{(ep)^m} \cdot \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} C_{2j}^m \cdot C_j^{2j} \cdot \left(\frac{e}{2} \right)^{2j}, \text{ 其中 } m < n, \forall m, n \in \mathbb{N}$
Theorem2	過圓錐曲線任意點延伸相鄰等角的 n 條割線段之倒數 m 次方和為定值，其中 $m < n, \forall n, m$ 為偶數。
Theorem3	圓內任意點延伸相鄰等角的 n 條割線段的 m 次方和為定值，其中 $ m < n, \forall n$ 為偶數， m 正負偶數。
Theorem4	蚘線基點所延伸相鄰等角的 n 條割線段之 m 次方和為定值， $m < n, \forall m, n \in \mathbb{N}$ 。
Theorem 5~9	空間中，以特殊圓錐曲面 Ω 之焦點 F 向五個正多面體各頂點做射線交 Ω 於 P_u ，各線段之倒數 m 次方和為定值，即 $\sum_{u=1}^n \frac{1}{FP_u^m}$ 為定值。
Theorem10	圓錐曲線中任意 n 條焦弦的倒數 m 方和是定值，其中 $m < n, \forall m, n \in \mathbb{N}$ 。
Theorem11	圓錐曲線中任意 n 條中心弦的倒數 m 方和是定值，其中 $m < 2n, \forall n \in \mathbb{N}, m$ 為偶數。
Theorem12	過圓上一點相鄰等角 n 條割線段的 m 次方和為定值，其中 $m < 2n, \forall n \in \mathbb{N}, m$ 為偶數
Theorem13	平面中一點所延伸相鄰等角的射線交任意直線的 n 條割線段倒數 m 次方和為定值，其中 $m < 2n, \forall n \in \mathbb{N}, m$ 為偶數。
Corollary1	雙曲線中，若存在 k 條焦半徑與其餘 $n-k$ 條不在同側，其倒數 m 次方和仍為定值，即 $\sum_{u=1}^n \frac{1}{FP_u^m}$ 為定值，其中 $1 \leq k < n, \forall n, k \in \mathbb{N}, m$ 為偶數。
Corollary2	過圓錐曲線焦點切 n 刀，使相鄰割線角度均相同，以逆時針依序取一段割線，則兩人取到的線段長 k 次方和相同，其中 $1-n \leq 2k \leq 0$ 。

Corollary3	過圓錐曲線任意點 P 切 $n = 2m (m \in \mathbb{N})$ 刀，每組相鄰割線夾角相同，則各組依序取一段，取出的線段長 $2k$ 次方和相等，其中 $1 - m \leq k \leq 0$ 。
-------------------	---

二、研究流程圖：

—永恆的旋轉木馬—



柒、延伸思考與推廣

一、特殊圓錐曲面 Ω 以焦點為極點的極座標表示法

在二維的部份我們曾用圓錐曲線的極座標統一簡化證明，我們希望推導出對於特殊圓錐曲面的極座標表示法，我們想嘗試看看能否有一樣的解析證明，目前我們到以下結果：

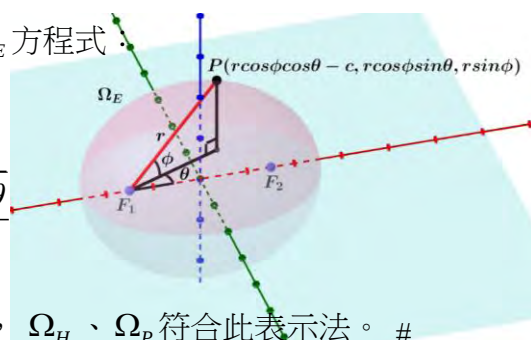
特殊圓錐曲面 Ω 的極座標表示法 $r = \frac{ep}{1 - e \cos \phi \cos \theta}$ ，其中 θ 為其與 x 軸正向於 xy 平面上的夾角， ϕ 則為其與 x 軸正向於 xz 平面上的夾角。

<proof> 以橢球 $\Omega_E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$ 為例，以其左焦點 $F'(-c, 0, 0)$ 為極點，可得 Ω_E 上任意點 $P(r \cos \phi \cos \theta - c, r \cos \phi \sin \theta, r \sin \phi)$ 。將 P 帶回原 Ω_E 方程式：

$$\Rightarrow \frac{(r \cos \phi \cos \theta - c)^2}{a^2} + \frac{(r \cos \phi \sin \theta)^2}{b^2} + \frac{(r \sin \phi)^2}{b^2} = 1$$

$$r = \frac{e^2 p \cos \phi \cos \theta \pm \sqrt{e^4 p^2 \cos^2 \phi \cos^2 \theta + e^2 p^2 - e^4 p^2 \cos^2 \phi \cos^2 \theta}}{2(1 - e \cos^2 \phi \cos^2 \theta)}$$

$$= \frac{e^2 p \cos \phi \cos \theta \pm ep}{2(1 - e \cos^2 \phi \cos^2 \theta)} = \frac{ep}{1 - e \cos \phi \cos \theta} (\because r > 0) \quad \text{同理，} \Omega_H、\Omega_P \text{符合此表示法。} \#$$

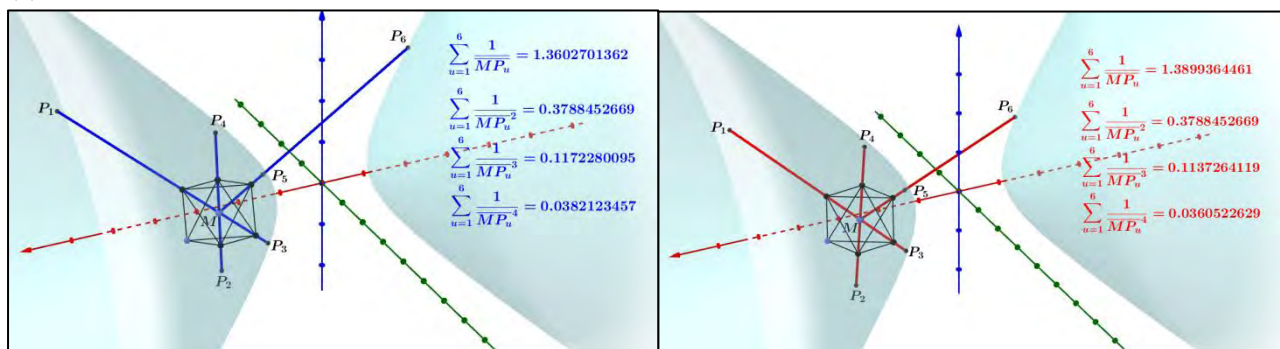


二、目前空間中的定理皆將正 N 面體的重心移至特殊圓錐曲面焦點旋轉，我們猜想是否以

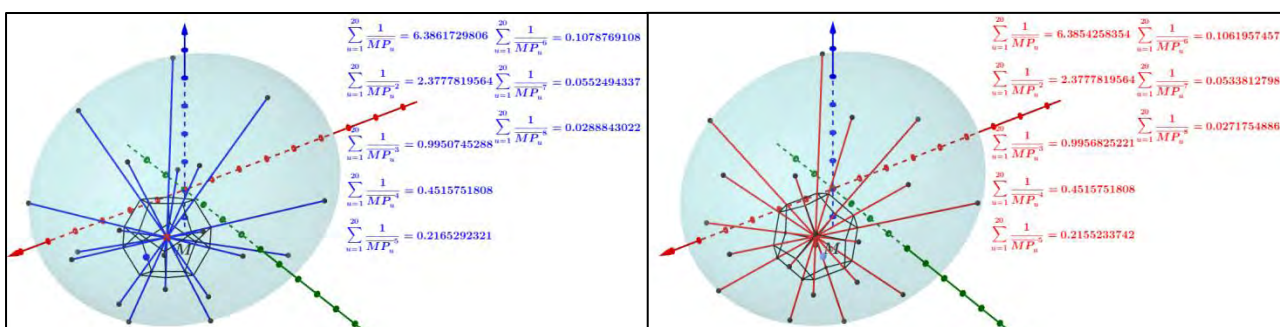
空間中任意一點做為旋轉中心時也有不變量的性質，我們想先從交點在圓錐曲面中心點的狀況開始做起，以下是透過 GGB 測試的結果：

特殊圓錐曲面 $\overline{MP_u}$ 的倒數 m 次方和為定值				
正四面體($n=4$)	正六面體($n=8$)	正八面體($n=6$)	正十二面體($n=20$)	正二十面體($n=12$)
無	$m=2$	$m=2$	$m=2, 4$	$m=2, 4$

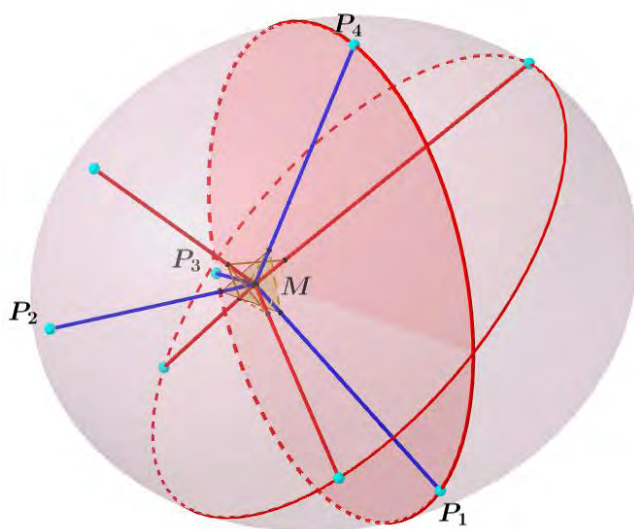
(1) 雙曲面正六面體任意點



(2) 橢球正十二面體任意點



(3) 橢球正四面體任意點



$$\sum_{n=1}^4 \frac{1}{P_n M} = 0.9796913373$$

$$\sum_{n=1}^4 \frac{1}{P_n M^2} = 0.2411200861$$

$$\sum_{n=1}^4 \frac{1}{P_n M^3} = 0.0596374454$$

$$\sum_{n=1}^4 \frac{1}{P_n M^4} = 0.0148237254$$

$$\sum_{n=1}^4 \frac{1}{P_n' M} = 0.980463542$$

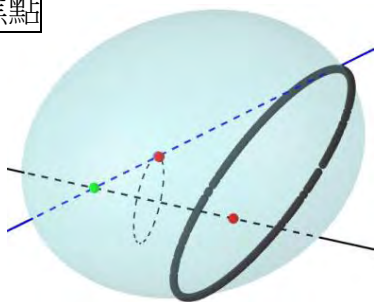
$$\sum_{n=1}^4 \frac{1}{P_n' M^2} = 0.2468612219$$

$$\sum_{n=1}^4 \frac{1}{P_n' M^3} = 0.063465399$$

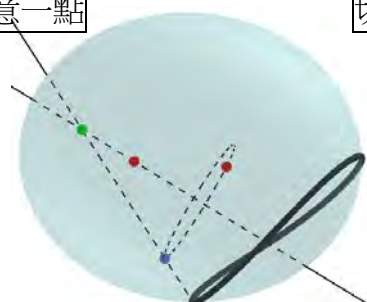
$$\sum_{n=1}^4 \frac{1}{P_n' M^4} = 0.0165749955$$

三、以焦點延伸出相鄰等角 n 條射線與圓錐曲面的交點為共平面性質：我們發現當以焦點為頂點所延伸的圓錐與圓錐曲面的交點會是共平面；若圓錐頂點不在圓錐曲面的焦點，即在圓錐曲面內任意一點時，則其與圓錐曲面的交點會落在一曲線上。若交點落在相同橢圓上，過焦點對圓錐曲面做切平面，則切平面必交於一點。

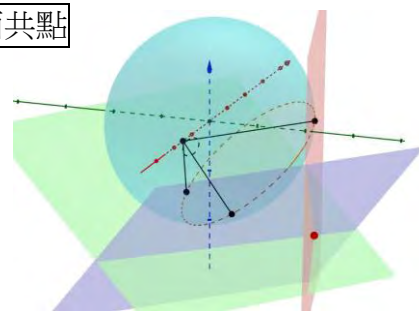
焦點



任意一點



切面共點



四、面積和、體積和之不變量

對於圓內任意一點有披薩定理的結論，因此我們想推廣到圓錐曲線，甚至是三維體積，由於部分面積和用 GGB 很難去估算，因此無法猜測結果，更何況是體積和，以致於我們無從著手。目前我們仍在尋找切入點來解決這部分的問題。

五、研究整理空間中三種圓錐曲面的特性

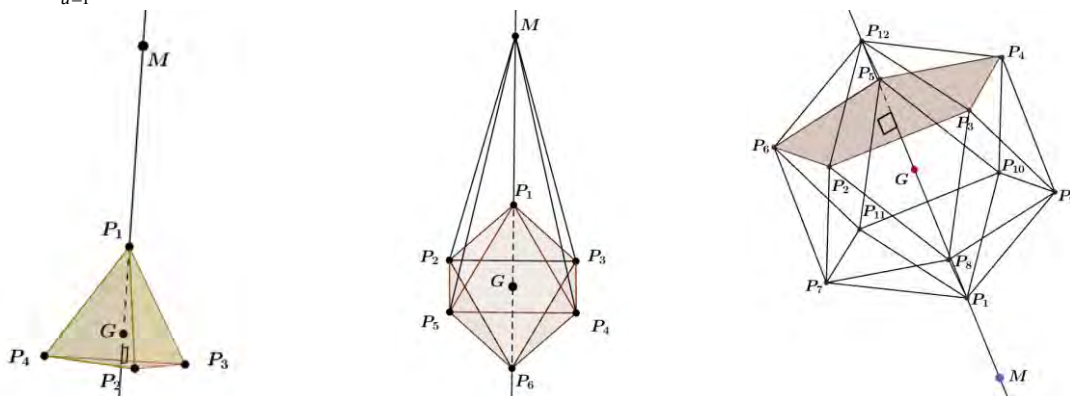
在我們研究的空間中二次曲面的相關資料中，並無詳細說明其特性，導致我們的研究必須從零開始。在研究的過程中，我們發現了三種圓錐曲面彼此之間也有著相似之處，把它整理好，分享給有在做相關研究的人，成為了我們的目標之一。

六、正多面體頂點至退化型圓錐曲面距離 m 次和為定值：

在平面部分除圓錐曲線外，在圓形或直線等退化型圓錐曲線的圖形上，也能找到不變量，目前我們證完以下結論，還想找到其他不變量的結論。

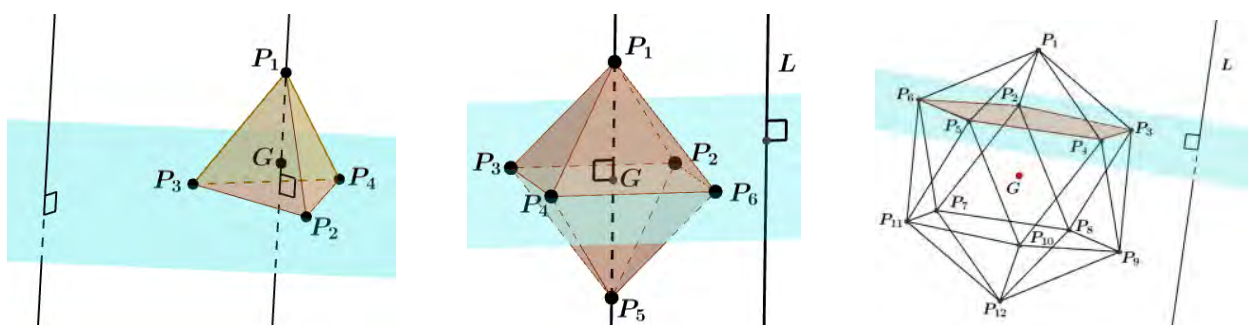
Property1：正多面體最多 k 點共平面，其頂點 P_u 至其外任意點 M 距離 m 次和為定值，

$$\sum_{u=1}^n \overline{MP_u}^m \text{ 為定值，其中 } k > \frac{m}{2}, \forall n, k \in \mathbb{N}, m \text{ 為偶數。}$$



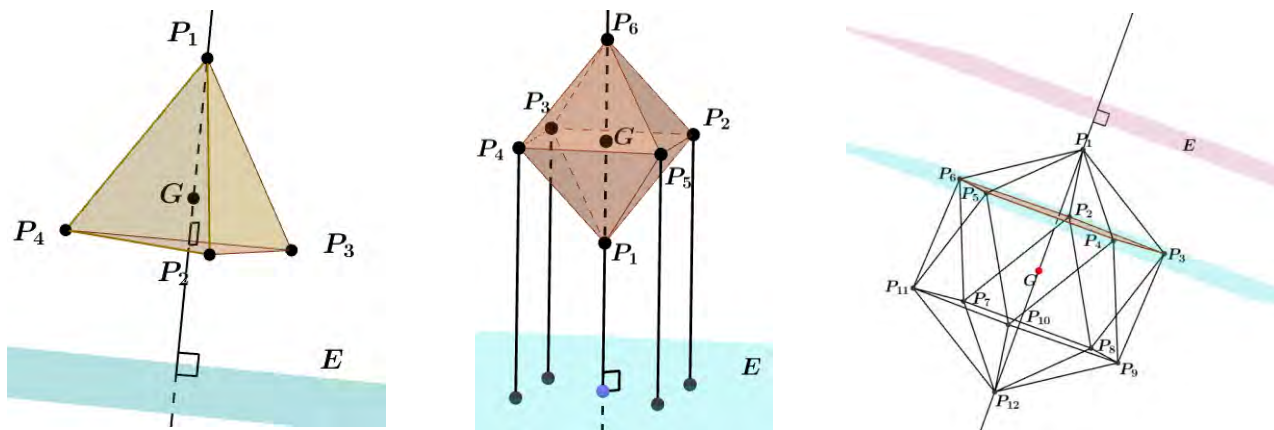
Property2：正多面體最多 k 點共平面，其頂點 P_u 至其外任意直線 L 距離 m 次和為定值，

$$\sum_{u=1}^n [d(P_u, L)]^m \text{ 為定值，其中 } k > m, \forall n, k \in \mathbb{N}, m \text{ 為偶數。}$$



Property3：正多面體最多 k 點共平面，其頂點 P_u 至其外任意平面 E 距離 m 次和為定值，

$$\sum_{u=1}^n [d(P_u, E)]^m \text{ 為定值，其中 } k > m, \forall n, m \in \mathbb{N}。$$



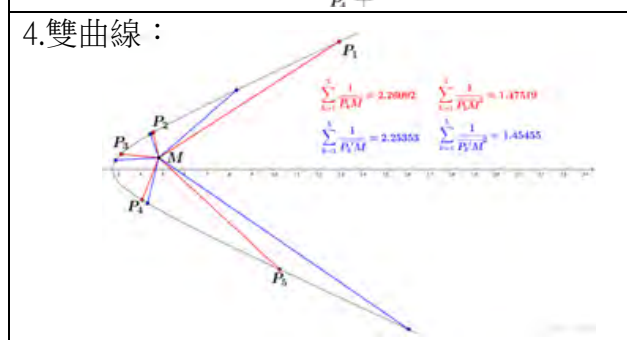
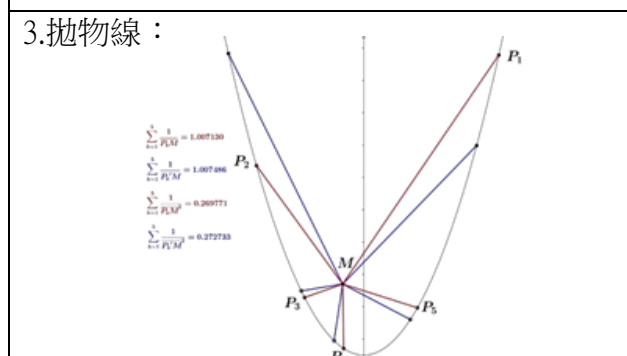
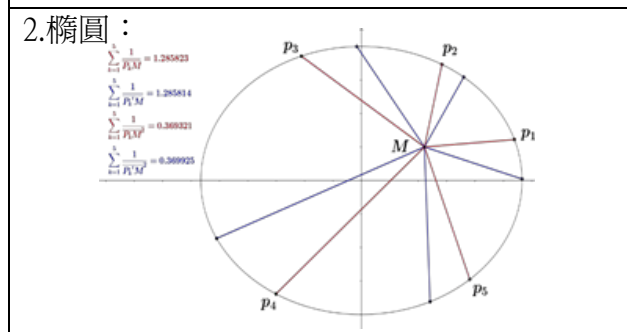
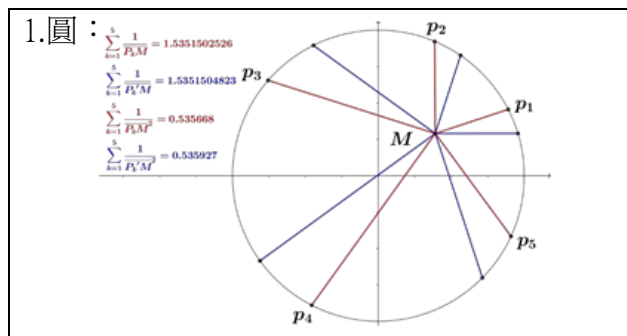
捌、參考資料

- [1] A. Waterson, An expansion for $x^n + y^n$. Edinburgh Math. Notes 1944,(1944). no.34,14-15
- [2] 許志農。高中數學課本第三、四冊，99 課綱。出版社：龍騰文化
- [3] 曾靖國、吳泓寬、黃唯洋，2015 年，臺灣國際科學展覽會說明書——一刀兩斷
- [4] 曾靖國，2016 第 14 屆旺宏科學獎說明書——各類曲線等角分割下線段長定值之研究

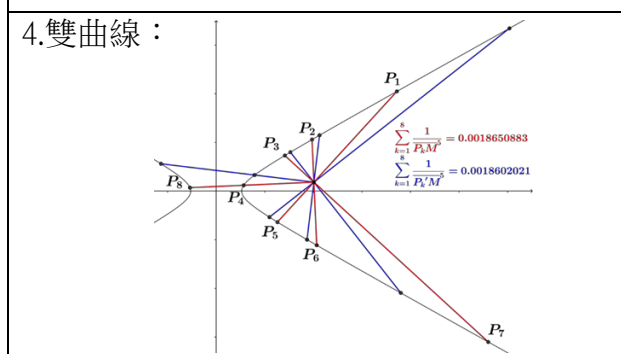
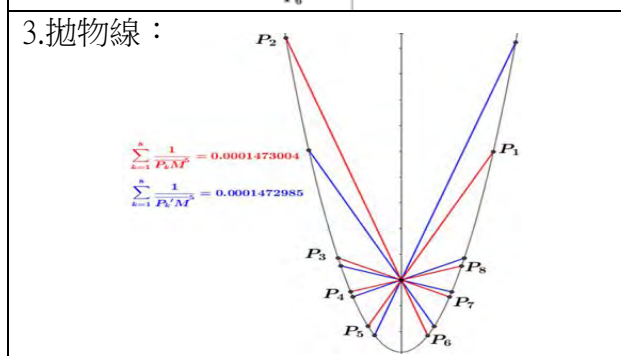
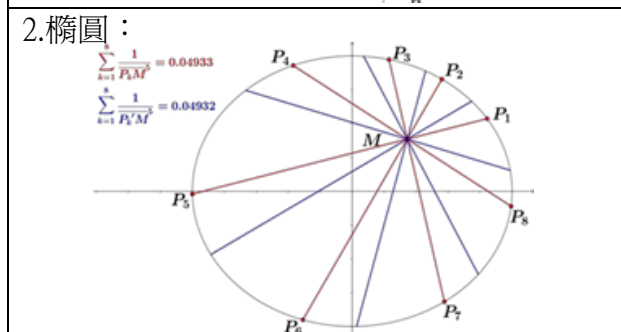
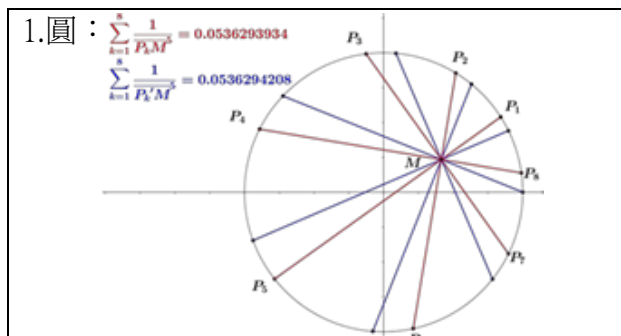
玖、附錄

以下我們整理利用 GGB 得到的一些非不變量的幾種情況：

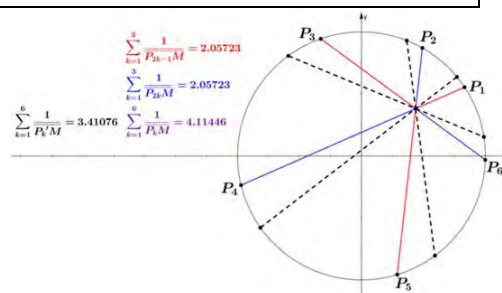
一、過圓錐曲線內任意一點延伸出的奇數條相鄰等角線段，其長度倒數的偶數、奇數次方和皆不為定值。



二、過圓錐曲線內任意一點延伸出的偶數條相鄰等角線段，其倒數奇次和不為定值，但偶次和為定值。



三、過圓內任一點切 $2n+1$ 刀，使每組相鄰割線夾角相同， P 點到圓周的所有切割線段由兩人以逆時針（或順時針）依序取一段，則兩人輪流取的線段長的倒數 $2k+1$ 次方和相等，然而，其總和不為定值， $1-n \leq k \leq n-1, \forall k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$ 。



【評語】 050414

本科展作品探討「平面上各種曲線內關於相鄰等角割線段的新的不變量」與「空間中特殊圓錐曲面的特殊等角割線段的新的不變量」。其研究課題，從原來問題，延伸至圓錐曲線與特殊曲線去探討，並推廣至三維特殊圓錐面與部分正多面體。本作品敘述此類問題之間的研究途徑，作法值得鼓勵。建議可考慮聚焦在平面上曲線作完整的討論與延伸。

作品海報

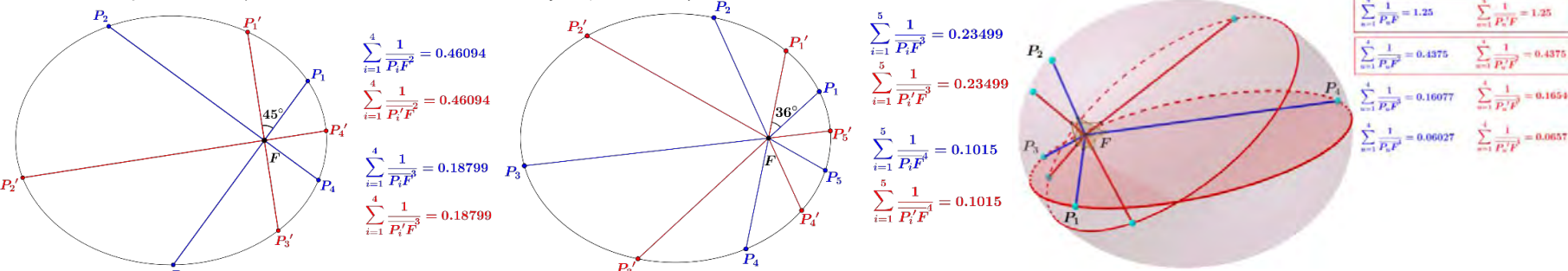
摘要

本研究作品主要在探討「平面上各種曲線內關於相鄰等角割線段的新的不變量」與「空間中特殊圓錐曲面的特殊等角割線段的新的不變量」。若圓錐曲線、蚘線等曲線中有相鄰等角的 n 條割線段，則這 n 條割線段之 m 次方和為定值。在圓錐曲線中這些割線段的交點可以是焦點、曲線內任意點，在蚘線中則為基點。甚至經由反演，還能將此性質推廣至直線上。

研究最後擴及至空間，先考慮圓錐曲線以 x 軸旋轉而得的橢圓、拋物、雙曲球面，其一焦點為 F ，將正 N 面體 V_N 之重心 G 與 F 重合，使得 V_N 以 F 為旋轉中心任意旋轉，此時由 F 對 V_N 之各頂點做射線交圓錐曲面於 P_u ，則 $\overline{FP_u}$ 之倒數 m 次方和為定值，其中 $u=1,\cdots,n$ ， $N=4,6,8,12,20$ 。

引言

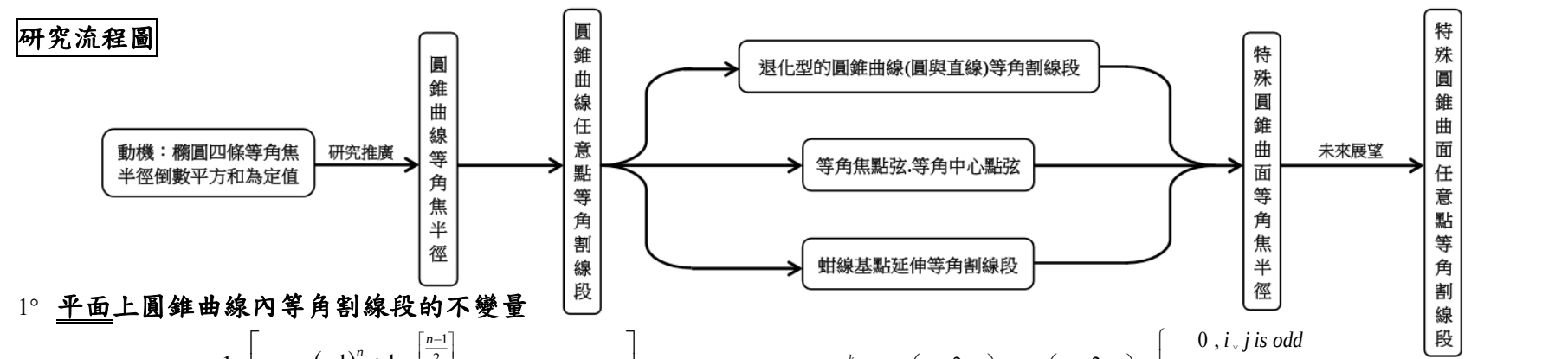
起初是在練習競賽題：「橢圓的兩垂直焦點弦被焦點所分成的四段線段長的倒數平方和為定值。」我們在解題過程中感受到了很大的興趣，便開始思考這題目的各種變化，從三條線到 n 條，甚至到倒數 m 次方和。此外我們利用極座標認識了更多有趣的曲線，更利用GeoGebra 畫出令人驚豔的3D模擬圖，激發進一步研究的好奇心。



首先我們主要以較初等的高中數學方法來證明以下定理，後來更進一步發現能用極座標來簡化證明。過程中我們所遇到的困難有 $\cos^n \theta$ 與 (A. Waterson [1]，Theorem) 的 x^m+y^m 對稱式化簡。在查到所有文獻裡，皆由 $\cos n\theta$ 推到 $\cos^n \theta$ ，且 **Thm2** 一定要利用 (A. Waterson [1]，Theorem) 才能證出，而文獻上未詳述的圓錐曲面，也能利用平面的圓錐曲線性質加以證明。以下為主定理：

- Theorem1** 圓錐曲線內 n 條相鄰等角焦半徑的倒數 m 次方和為定值，其中 $n>m, \forall n,m \in \mathbb{N}$ 。
- Theorem2** 過圓錐曲線內任意點的 n 條相鄰等角割線段的倒數 m 次方和為定值，其中 $n>m, n,m$ 為偶數。
- Theorem3** 空間中以特殊橢球、拋物面、雙曲面焦點向正 N 面體的各頂點做射線交曲面的各線段之倒數 m 次方和為定值。
- Corollary** (曾靖國[3]，Theorem6) 過圓錐曲線內任意點切 n 刀，其相鄰割線夾角相同，則依序取的割線段 $2m$ 次方和相等， $1-k \leq m \leq 0, n=2k, \forall k, m \in \mathbb{N}$

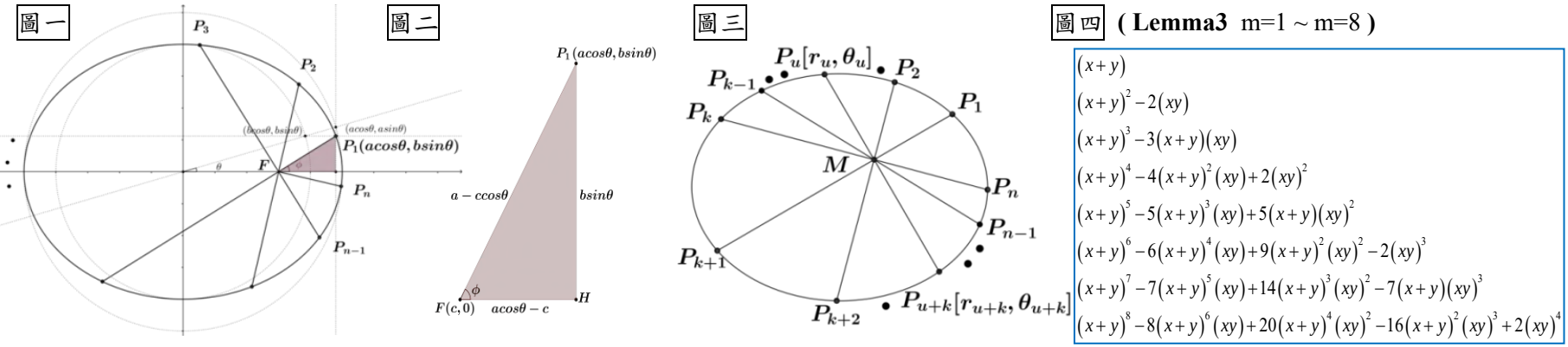
研究方法與過程



1° 平面上圓錐曲線內等角割線段的不變量

Lemma1: $\cos^n \theta = \frac{1}{2^{n-1}} \left[C_{\left[\frac{n}{2}\right]}^n \cdot \frac{(-1)^n + 1}{4} + \sum_{j=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} C_j^n \cdot \cos(n-2j)\theta \right], \forall n \in \mathbb{N}$ **Lemma2:** $\sum_{u=1}^k \cos^i 2\left(\theta + \frac{2u\pi}{n}\right) \cos^j 2\left(\theta' + \frac{2u\pi}{n}\right) = \begin{cases} 0, i, j \text{ is odd} \\ C_i^i C_j^j, n > i+j, n=2k, \forall k \in \mathbb{N} \\ k \cdot \frac{2}{2^{i+j}}, i, j \text{ is even} \end{cases}$

Lemma3 (A. Waterson [1]，Theorem): $x^m + y^m = \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor} (-1)^j \cdot \frac{m}{m-j} \cdot C_j^{m-j} (x+y)^{m-2j} (xy)^j, \forall m \in \mathbb{N}$



< proof of Thm1> 如圖一、二

法1 (畢氏定理) $\frac{1}{FP_u} = \frac{1}{l} \cdot \left[e \cos\left(\phi + \frac{2(u-1)\pi}{n}\right) + 1 \right]$ **法2** (圓錐曲線極座標) $r = \overline{FP_u} = \frac{ep}{e \cos \theta_u - 1}$

由**法二**得 $\sum_{u=1}^n \frac{1}{FP_u^m} = \frac{1}{(ep)^m} \cdot \sum_{u=1}^n \left[e \cos\left(\theta + \frac{2u\pi}{n}\right) - 1 \right]^m = \frac{n}{(ep)^m} \cdot \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor} C_{2j}^m \cdot C_j^{2j} \cdot \left(\frac{e}{2}\right)^{2j}$ 為定值，其中 $n>m, \forall n,m \in \mathbb{N}$ (由 **Lemma2**) #

< proof of Thm2> 橢圓部分，如圖三

(1) 令橢圓 $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a, b \neq 0$ 。設以 $M(h, k)$ 為極點的 P_u 的極座標為 $[r_u, \theta_u]$ ， P_u 的直角座標為 $(r_u \cos \theta_u + h, r_u \sin \theta_u + k)$ ，其中 $\theta = \theta_1$

$\therefore \frac{(r_u \cos \theta_u + h)^2}{a^2} + \frac{(r_u \sin \theta_u + k)^2}{b^2} = 1$ ，令 $\sin \phi = \frac{b^2 h}{\sqrt{a^4 k^2 + b^4 h^2}}, \cos \phi = \frac{a^2 k}{\sqrt{a^4 k^2 + b^4 h^2}}, t = \frac{a^2 + b^2}{2}, p = \frac{c^2}{a^2 + b^2}, q = 2\sqrt{a^4 k^2 + b^4 h^2}, s = a^2 k^2 + b^2 h^2 - a^2 b^2$

$\therefore r_u = \sqrt{\left[\frac{q \sin(\theta_u + \phi)}{2t(1-p \cos 2\theta_u)} \right]^2 - \frac{s}{t(1-p \cos 2\theta_u)}} - \frac{q \sin(\theta_u + \phi)}{2t(1-p \cos 2\theta_u)}$ 同理， $r_{u+k} = \sqrt{\left[\frac{q \sin(\theta_u + \phi)}{2t(1-p \cos 2\theta_u)} \right]^2 - \frac{s}{t(1-p \cos 2\theta_u)}} + \frac{q \sin(\theta_u + \phi)}{2t(1-p \cos 2\theta_u)}$

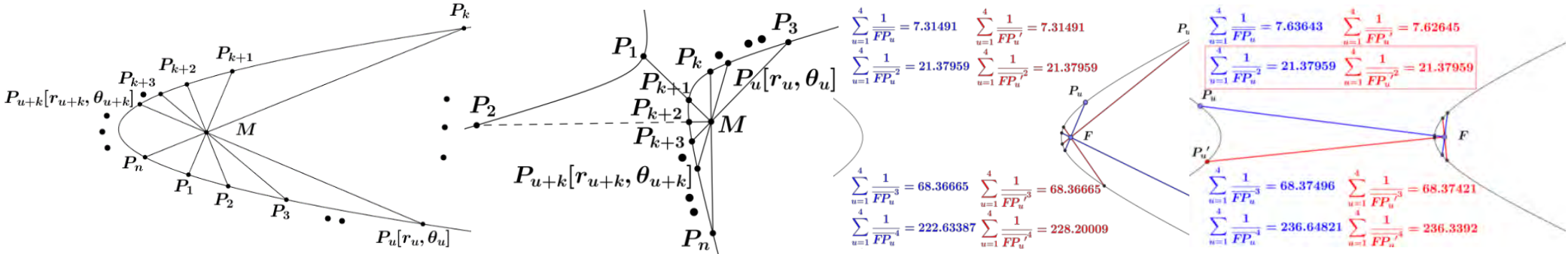
(2) 欲求： $\frac{1}{r_u^2 \cdot r_{u+k}^2}$ 及 $\frac{1}{r_u^2} + \frac{1}{r_{u+k}^2}$ 的值 (i) $\frac{1}{r_u^2 \cdot r_{u+k}^2} = \frac{t^2}{s^2} (1-p \cos 2\theta_u)^2$ (ii) $\frac{1}{r_u^2} + \frac{1}{r_{u+k}^2} = R(1+w \cos 2\theta_u)$ ，其中 $R = \frac{q^2 - 8s^2}{2s^2}, w = \frac{q^2}{8s^2 - q^2}$

(3) 證其為定值

$\sum_{u=1}^n \frac{1}{MP_u^{2m}} = \sum_{u=1}^k \left(\frac{1}{MP_u^{2m}} + \frac{1}{MP_{u+k}^{2m}} \right) = \sum_{u=1}^k \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor} (-1)^j \cdot \frac{m}{m-j} \cdot C_j^{m-j} \left(\frac{1}{r_u^2} + \frac{1}{r_{u+k}^2} \right)^{m-2j} \left(\frac{1}{r_u^2 \cdot r_{u+k}^2} \right)^j = \sum_{u=1}^k \left\{ \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor} (-1)^j R^{m-2j} \left(\frac{t}{s} \right)^{2j} \cdot \frac{m \cdot C_j^{m-j}}{m-j} \cdot \left[\sum_{\alpha=0}^{m-2j} C_{\alpha}^{m-2j} \cdot w^{\alpha} \cos^{\alpha} 2\theta_u \right] \cdot \left[\sum_{\beta=0}^{2j} C_{\beta}^{2j} \cdot (-p)^{\beta} \cos^{\beta} 2\theta_u \right] \right\}$

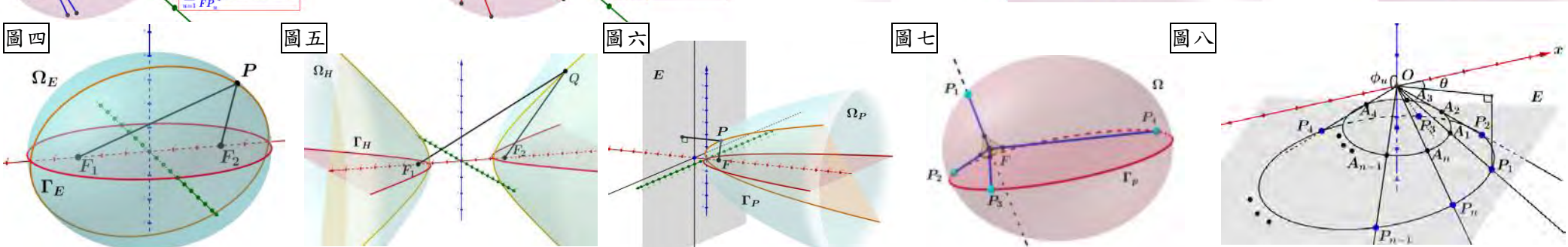
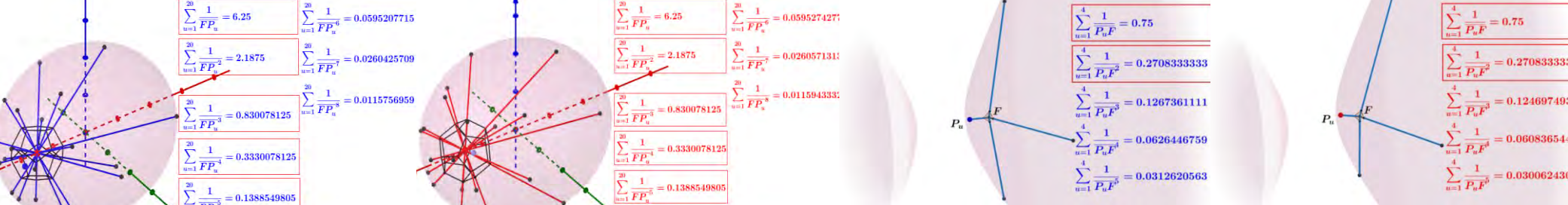
$= \sum_{u=1}^k \left\{ \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor} (-1)^j R^{m-2j} \left(\frac{t}{s} \right)^{2j} \cdot \frac{m \cdot C_j^{m-j}}{m-j} \cdot \left[\sum_{\alpha=0}^{m-2j} \sum_{\beta=0}^{2j} C_{\alpha}^{m-2j} C_{\beta}^{2j} \cdot w^{\alpha} \cdot (-p)^{\beta} \cos^{\alpha} 2\theta_u \cdot \cos^{\beta} 2\theta_u \right] \right\} = \sum_{\alpha=0}^{m-2j} \sum_{\beta=0}^{2j} \left\{ \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor} (-1)^j R^{m-2j} \cdot C_{\alpha}^{m-2j} C_{\beta}^{2j} \cdot w^{\alpha} \cdot (-p)^{\beta} \cdot \left(\frac{t}{s} \right)^{2j} \cdot \frac{m \cdot C_j^{m-j}}{m-j} \left[\sum_{u=1}^k \cos^{\alpha} 2\left(\theta' + \frac{2u\pi}{n}\right) \cos^{\beta} 2\left(\theta + \frac{2u\pi}{n}\right) \right] \right\}$

$= \frac{n}{2} \cdot \sum_{\alpha=0}^{\left\lfloor \frac{m-j}{2} \right\rfloor} \sum_{\beta=0}^j \left\{ \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor} (-1)^j R^{m-2j} \cdot C_{\alpha}^{m-2j} \cdot C_{\beta}^{2\beta} \cdot C_{2\alpha}^{m-2j} C_{2\beta}^{2j} \cdot \frac{m \cdot C_j^{m-j}}{m-j} \cdot \left(\frac{w}{2} \right)^{2\alpha} \cdot \left(\frac{-p}{2} \right)^{2\beta} \cdot \left(\frac{t}{s} \right)^{2j} \right\}$ 為定值 (由 **Lemma2** 和 **Lemma3**)



2° 空間中圓錐面內特殊等角割線段的不變量

考慮「特殊圓錐曲面 $\Omega=\left\{\Omega_E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{b^2}=1(a>b),\Omega_H:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{b^2}=-1,\Omega_P:4cx-y^2-z^2=0\right\}$ 」，即 Ω 為 xy 平面上、且焦點在 X 軸上的圓錐曲線 Γ_0 繞 X 軸旋轉而得(如圖四、五、六)，令 Ω 其一焦點為 F 。



Lemma4： $F(c,0,0)$ 必為任意通過 F 的平面與特殊圓錐曲面 Ω 之截痕 Γ 的其中一焦點或圓心。

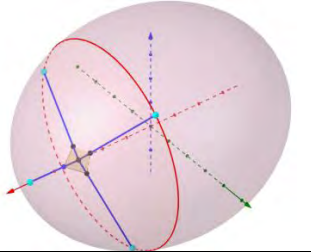
Lemma5：空間中任意平面 E 外任取一點 O ，向 E 做 n 條相鄰等角割線段，若其與平面的交點在相同圓錐曲線上，則 $\sum_{u=1}^n\frac{1}{OP_u^m}$ 為定值，其中 $n>m,\forall n,m\in\mathbb{N}$ 。

<proof of Thm3> 一、正四面體：1. 將任意的正四面體經過適當旋轉，使得 $\overline{FP_1}$ 重合 x 軸，我們經由下列三個步驟旋轉得到新的 $P_1'P_2'P_3'P_4'$ ：

步驟一	步驟二	步驟三	特例情形說明
過 P_1, P_2, P_4 以 $\overline{FP_3}$ 為轉軸得藍圓軌跡且過 P_1, P_2, P_3 以 $\overline{FP_4}$ 為轉軸得綠圓軌跡， x 軸(紅直線)貫穿藍圓但沒貫穿綠圓。	而以 $\overline{FP_2}$ 為轉軸做旋轉可將 x 軸穿過綠圓，因此我們斷言 x 軸與綠圓有相交過	於是在以 $\overline{FP_4}$ 為轉軸即可將點 P_1 移至 x 軸上。	上三圖為正四面體之特例情形，圖中藍色節痕過 P_2, P_3, P_4 且為圓形。 由 Lemma5 ，在軌跡橢圓固定的前提下，以 $\overline{FP_1}, \overline{FP_2}, \overline{FP_3}, \overline{FP_4}$ 為軸旋轉時，其餘三割線段之倒數 m 次和為定值，因此皆不改變 $\sum_{u=1}^4\frac{1}{FP_u^m}$ 之值。 其中 m 限制同 Lemma5 ，小於最大共面點數。

2. 證其為定值(以橢圓球為例)：如圖九，令焦半徑間夾角為 θ ， $\sum_{u=2}^4\frac{1}{FP_u^m}=\frac{3(a+\cos\theta)^m}{b^{2m}}$ ，又 $\overline{FP_1}=a-c$

圖九



$$\therefore \sum_{u=1}^4\frac{1}{FP_u^m}=\sum_{u=1}^4\frac{1}{FP_u^m}=\frac{1}{(a-c)^m}+\frac{3(a+\cos\theta)^m}{b^{2m}}$$

，其中 m 的限制由 **Lemma5** 需小於最大共面頂點數(此時的共面頂點數為3)，即 $m=1,2$

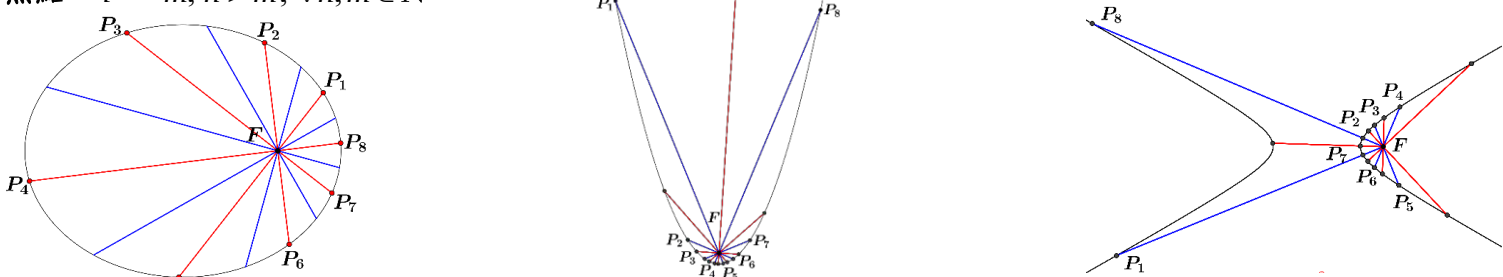
二、其他正多面體轉法及轉後特例情形(以正八、十二面體為例)

正八面體	
正十二面體	

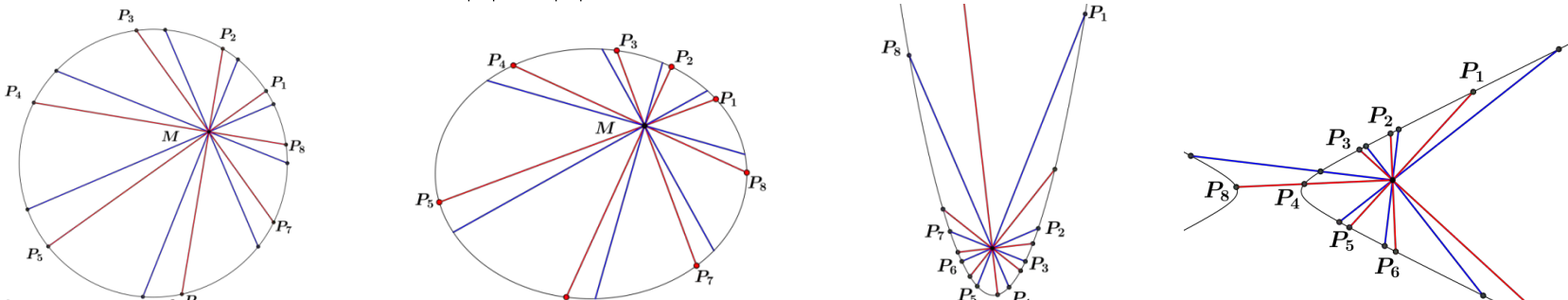
研究結果

結論：若有相鄰等角的 n 條割線段，則這些割線段的 i 次方和為定值。

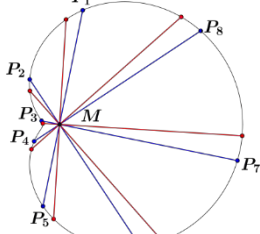
1. F 為焦點， $i=-m, n>m, \forall n,m \in \mathbb{N}$



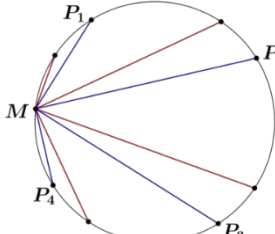
2. M 為圓錐曲線內任一點，圓 $i=m, n>|m|, \forall n, |m|$ 為偶數，橢圓、拋物線、雙曲線 $i=-m, n>m, \forall n, m$ 為偶數



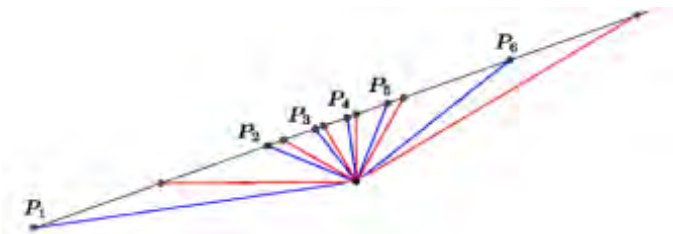
3. M 為蚘線之基點
 $i=m, n>m, \forall n, m \in \mathbb{N}$



4. M 為圓上之一點
 $i=m, n>m, \forall n \in \mathbb{N}, m$ 為偶數



5. M 為直線外任一點
 $i=-m, n>m, \forall n \in \mathbb{N}, m$ 為偶數



6. P_u 為正 N 面體延伸的射線與橢圓、拋物、雙曲球面之焦點

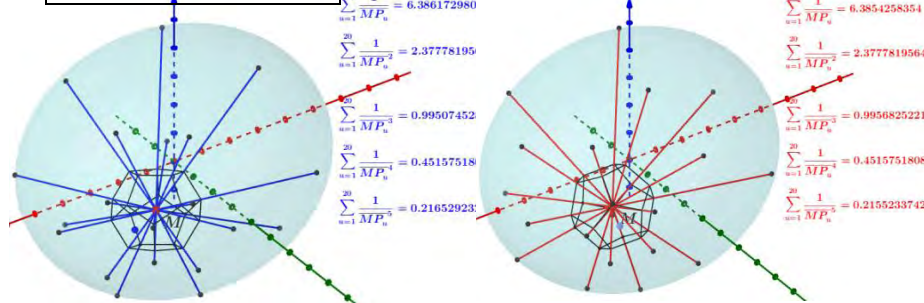
$\overline{FP_u}$ 之倒數 m 次方和為定值				
正四面體($n=4$)	正六面體($n=8$)	正八面體($n=6$)	正十二面體($n=20$)	正二十面體($n=12$)
$m=1,2$	$m=1,2,3$	$m=1,2,3$	$m=1,2,3,4,5$	$m=1,2,3,4,5$

延伸思考與推廣

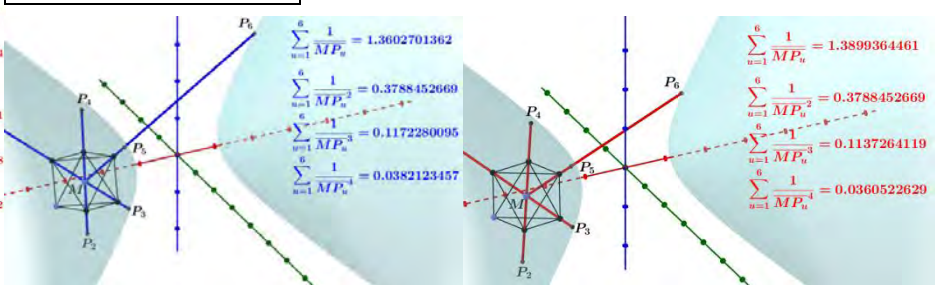
一、以任意點為旋轉中心：

目前空間中的定理皆將正 N 面體的重心移至特殊圓錐曲面焦點旋轉，我們猜想是否以空間中任意一點做為旋轉中心時也有不變量的性質，我們想先從交點在圓錐曲面中心點的狀況開始做起，以下是透過 GGB 測試的結果：

橢球正十二面體任意點



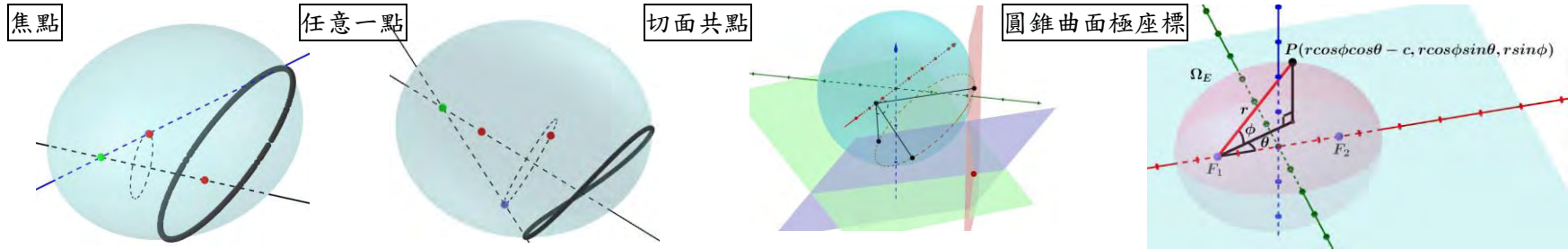
雙曲面正八面體任意點



$\overline{MP_u}$ 的倒數 m 次方和為定值				
正四面體($n=4$)	正六面體($n=8$)	正八面體($n=6$)	正十二面體($n=20$)	正二十面體($n=12$)
無	$m=2$	$m=2$	$m=2,4$	$m=2,4$

二、以焦點延伸出相鄰等角 n 條射線與圓錐曲面的交點為共平面性質：

我們發現當以焦點為頂點所延伸的圓錐與圓錐曲面的交點會是共平面；若圓錐頂點不在圓錐曲面的焦點，即在圓錐曲面內任意一點時，則其與圓錐曲面的交點會落在一曲線上。若交點落在相同橢圓上，過焦點對圓錐曲面做切平面，則切平面必交於一點。



三、研究整理空間中三種圓錐曲面的特性：

我們希望推導出對於特殊圓錐曲面的極座標表示法，我們想嘗試看看能否有一樣的解析證明，目前我們到以下結果：特殊圓錐曲面 Ω 的極

座標表示法 $r = \frac{ep}{1 - e \cos \phi \cos \theta}$ ，其中 θ 為其與 X 軸正向於 XY 平面上的夾角， ϕ 則為其與 X 軸正向於 XZ 平面上的夾角。

四、正多面體頂點至退化型圓錐曲面距離 m 次和為定值：

平面部分除圓錐曲線外，在圓形或直線等退化型圓錐曲線的圖形也能找到不變量，目前我們得到以下結論：

正多面體最多 k 點共平面，其頂點 P_u 至其外	示意圖
<u>任意點</u> M 距離 m 次和為定值 $\sum_{u=1}^n \overline{MP_u}^m$ 為定值，其中 $2k>m, \forall n, k \in \mathbb{N}, m$ 為偶數。	
<u>任意直線</u> L 距離 m 次和為定值， $\sum_{u=1}^n [d(P_u, L)]^m$ 為定值，其中 $k>m, \forall n, k \in \mathbb{N}, m$ 為偶數。	
<u>任意平面</u> E 距離 m 次和為定值， $\sum_{u=1}^n [d(P_u, E)]^m$ 為定值，其中 $k>m, \forall n, m \in \mathbb{N}$ 。	

參考資料

[1]Waterson, A. An expansion for $x^n + y^n$. Edinburgh Math. Notes 1944, (1944). no. 34, 14-15
[2]許志農，高中數學課本第四冊。龍騰出版。
[3]曾靖國、吳泓寬、黃唯洋，2015 年，臺灣國際科學展覽會說明書——一刀兩斷
[4]曾靖國，2016 第 14 屆旺宏科學獎說明書——各類曲線等角分割下線段長定值之研究