中華民國第 57 屆中小學科學展覽會

作品說明書

高級中等學校組　數學科

050412

星星知我心--多邊形面積與重心多邊形、星形多邊形面積的關係

學校名稱：國立金門高級中學

作者：	指導老師：
高二 陳沛儒 高二 陳乙霆 高二 何儼存	楊玉星

關鍵詞：多邊形面積、重心、星形面積

摘要

N(N ≥ 3)多邊形滿足「**N 多邊形$A_1A_2A_3\cdots A_{N-1}A_N$中，K 為不在多邊形上的一點，將 K 點分別連接 N 個頂點，得到 N 塊三角形，設G_1、G_2、$\cdots G_{N-1}$、G_N依序為其重心，則** $\frac{S_{G_1G_2\cdots G_{N-1}G_N}}{S_{A_1A_2\cdots A_{N-1}A_N}}=\frac{2}{9}+\frac{1}{9}(\frac{S_{A_1A_3\cdots}}{S_{A_1A_2\cdots A_{N-1}A_N}})$」。

無獨有偶，N(N ≥ 4)多邊形滿足「**依序找 N 邊形$A_1A_2\cdots A_N$中連續三點，得到 N 塊三角形，設H_1、H_2、$\cdots H_{N-1}$、H_N依序為其重心，**

則 $\frac{S_{H_1H_2\cdots H_{N-1}H_N}}{S_{A_1A_2\cdots A_{N-1}A_N}}=\frac{2}{9}+\frac{2}{9}(\frac{S_{A_1A_3\cdots}}{S_{A_1A_2\cdots A_{N-1}A_N}})+\frac{1}{9}(\frac{S_{A_1A_4\cdots}}{S_{A_1A_2\cdots A_{N-1}A_N}})$」。

壹、研究動機

在數學傳播第 28 卷第 3 期的文章「梯形內一塊四邊形面積的探討」中，作者將此問題延伸至「**梯形對角線上一點連接到另一底角頂，將此梯形分割成三塊三角形，再分別取其重心，則此重心三角形的面積為梯形面積的$\frac{1}{9}$**」。而數學傳播第 40 卷第 4 期的文章「**回響: 兩個幾何問題的另解**」中，再將此問題延伸至「**任意四邊形對角線上一點連接到一角頂，將此四邊形分割成三塊三角形，再分別取其重心，則此重心三角形的面積也是四邊形面積的$\frac{1}{9}$**」。

這讓我們想到此定理在其它邊數的多邊形時，是否也有類似的性質？因此決定以此當作研究題材。

貳、研究目的

本研究的目的在討論其它 N 多邊形時，如果也試著找 N 塊三角形，再分別取其重心，則此重心 N 多邊形和原 N 多邊形面積之間的關係為何？我們試著利用重心的性質和向量外積的方法將兩者的面積表示出來，並證明這些關係為真。

參、研究設備及器材

本研究主要利用 **GSP** 動態幾何軟體進行研究問題的幾何實驗，透過實驗觀察、猜測與驗證，然後提出研究結果並加以證明。

肆、研究過程或方法

一、文獻探討

本研究範圍涉及多邊形的面積問題，將引用下述的定義、引理來探討：

對一般的平面多邊形(不論凸的、凹的，甚至是邊與邊有交點的多邊形)，我們作如下的定義。

定義一：對平面多邊形$\mathbf{A_1A_2\cdots A_n}$，由下式定義的$\mathbf{S_{A_1A_2\cdots A_n}}$稱為多邊形$\mathbf{A_1A_2\cdots A_n}$的面積。

$$\mathbf{S_{A_1A_2A_3\cdots A_n} = S_{\Delta A_1A_2A_3} + S_{\Delta A_1A_3A_4} + S_{\Delta A_1A_4A_5} + \cdots + S_{\Delta A_1A_{n-1}A_n}}$$

引理一：對平面多邊形$\mathbf{A_1A_2\cdots A_n}$所在平面內任一點 O，下式恆成立。

$$\mathbf{S_{A_1A_2A_3\cdots A_n} = S_{\Delta OA_1A_2} + S_{\Delta OA_2A_3} + S_{\Delta OA_3A_4} + \cdots + S_{\Delta OA_{n-1}A_n} + S_{\Delta OA_nA_1}}$$

設 **O** 為給定的點，下面我們約定 **P** 表向量$\overrightarrow{\boldsymbol{OP}}$。我們知道，三角形面積與向量外積「×」(或稱向量積)有關，由此我們不妨作如下定義：

定義二：$\mathbf{S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} = \frac{1}{2}A \times B}$。

當 O、A、B 輪換時，$S_{\Delta OAB}$的值不變；當 O、A、B 中有兩者重合時，$S_{\Delta OAB}$的值為 0；當 O、A、B 逆時針排列時，$S_{\Delta OAB}$的值為正；當 O、A、B 順時針排列時，$S_{\Delta OAB}$的值為負。定義二結合引理一可得：

引理二：$\mathbf{2S_{A_1A_2\cdots A_n} = A_1 \times A_2 + A_2 \times A_3 + A_3 \times A_4 + \cdots + A_{n-1} \times A_n + A_n \times A_1}$。

二、探索過程

(一)原定理的證明

定理一： **梯形 ABCD 中，上底$\overline{BC}$和下底$\overline{AD}$，K 為對角線$\overline{AC}$上一點，L 為$\overleftrightarrow{DK}$和$\overline{AB}$的交點，且ΔABC、ΔAKD、 ΔCKD的重心所圍成的三角形為$\Delta G_1G_2G_3$，則 $\Delta G_1G_2G_3$的面積=梯形 ABCD 面積的 $\frac{1}{9}$。**

【證明】(1)如圖 1，先作出 ΔABC、ΔAKD、ΔCKD的中線$\overline{BE}$、$\overline{DF}$、$\overline{DH}$，根據重心的定義，G_1、G_2、G_3會分別落在$\overline{BE}$、$\overline{DF}$、$\overline{DH}$上，此時，作$\overline{G_1P} \perp \overline{G_2G_3}$於 P 點，並設$\overline{G_1P}$交$\overline{AC}$於 T，再作$\overline{BQ} \perp \overline{AC}$於 Q， $\overline{G_3R} \perp \overline{AC}$於 R，$\overline{DS} \perp \overline{AC}$於 S。

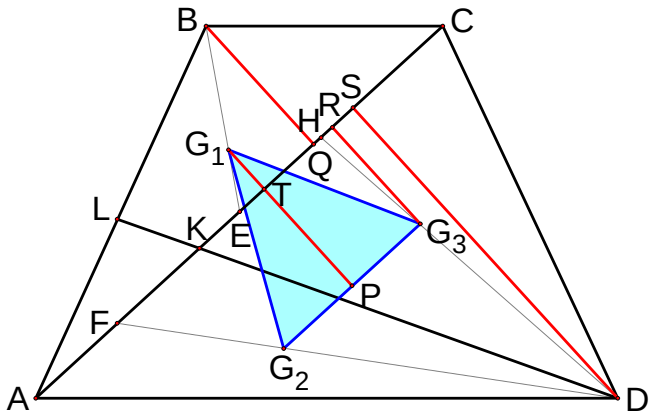


圖 1

(2)在ΔDFH中，因為$\overline{DG_2}:\overline{DF}=\overline{DG_3}:\overline{DH}=2:3$，可知$\overline{G_2G_3}\,//\,\overline{FH}$且$\overline{G_2G_3}=\frac{2}{3}\overline{FH}$，

又$\overline{FH}=\overline{FK}+\overline{KH}=\frac{1}{2}\overline{AK}+\frac{1}{2}\overline{CK}=\frac{1}{2}\overline{AC}$，可知$\overline{G_2G_3}=\frac{1}{3}\overline{AC}$。

而$\overline{G_2G_3}\,//\,\overline{AC}$與$\overline{G_1P}\perp\overline{G_2G_3}$，可知$\overline{G_1P}\perp\overline{AC}$於 T。

在ΔBEQ中，因為$\overline{G_1T}\,//\,\overline{BQ}$且$\overline{EG_1}:\overline{EB}=1:3$，可知$\overline{G_1T}:\overline{BQ}=1:3$，

因此$\overline{G_1T}=\frac{1}{3}\overline{BQ}$；同理可知$\overline{G_3R}=\frac{1}{3}\overline{DS}$。

又TPG_3R是矩形，因此$\overline{TP}=\overline{G_3R}=\frac{1}{3}\overline{DS}$，

這樣就有$\overline{G_1P}=\overline{G_1T}+\overline{TP}=\frac{1}{3}(\overline{BQ}+\overline{DS})$。由此可以計算出

$\Delta G_1G_2G_3$面積$=\frac{1}{2}\overline{G_1P}\times\overline{G_2G_3}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}(\overline{BQ}+\overline{DS})\times\frac{1}{3}\overline{AC}$

$=\frac{1}{9}(\frac{1}{2}\overline{BQ}\times\overline{AC}+\frac{1}{2}\overline{DS}\times\overline{AC})$

$=\frac{1}{9}(\Delta ABC\text{面積}+\Delta ACD\text{面積})$

$=\frac{1}{9}\text{梯形}ABCD\text{面積}$

其實，在上述的證明過程中，完全沒有用到圖 1 中 ABCD 為梯形的條件。作者對其它類型的四邊形 ABCD 做了一些觀察與檢驗後，發現定理一的結果依然成立，甚至在 ABCD 為凹四邊形時也不例外，而有以下的定理：

定理二： 四邊形 **ABCD** 中，**K** 為對角線$\overline{AC}$上一點，**L** 為$\overleftrightarrow{DK}$和 $\overline{AB}$的交點，且Δ**ABC**、Δ**AKD**、Δ**CKD**的重心所圍成的三角形為$\Delta G_1G_2G_3$，

則$\Delta G_1G_2G_3$的面積=四邊形 **ABCD** 面積的 $\frac{1}{9}$。

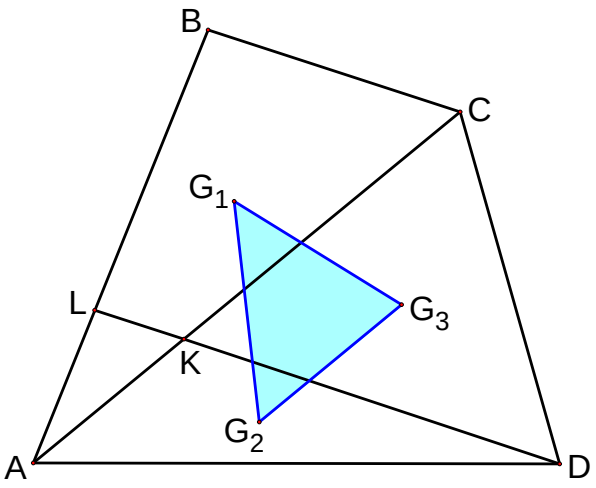


圖 2

【證明】(1) ABCD 面積 $=\Delta ABC$面積 $+\Delta$ACD 面積

$$=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\times\overrightarrow{AC})$$

$$=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD})$$

$$=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\times(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD})$$

$$=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{DB}$$

(2)由於G_1、G_2、G_3分別為ΔABC、ΔAKD、ΔCKD的重心，因此由圖 2 知

$\overrightarrow{DG_2}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DK})$，$\overrightarrow{DG_3}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DK})$，$\overrightarrow{AG_1}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，

$\overrightarrow{AG_2}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{AD})$，由上述四式可得

$$\overrightarrow{G_2G_3}=\overrightarrow{DG_3}-\overrightarrow{DG_2}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DA}\right)=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{G_2G_1}=\overrightarrow{AG_1}-\overrightarrow{AG_2}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AK}\right)=\frac{1}{3}(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{KC})$$

利用上述二式可知

$$\Delta G_1G_2G_3\text{面積} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{G_2G_3} \times \overrightarrow{G_2G_1})$$

$$= \frac{1}{2}[\frac{1}{9}\overrightarrow{AC} \times (\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{KC})]$$

$$= \frac{1}{9} \times \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{KC})$$

$$= \frac{1}{9} \times \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{DB})$$

$$= \frac{1}{9}\text{四邊形}ABCD\text{面積}$$

(二)原定理的推廣

在上述的證明過程中，利用到$\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{KC}$同向，故其外積為零向量。如果 K 點不在對角線上，也不在四邊形上，將 K 點分別連接四頂點，得到四塊三角形 ΔAKB、ΔAKD、ΔCKD、ΔBKC，設G_1、G_2、G_3、G_4依序為其重心，我們發現四邊形$G_1G_2G_3G_4$的面積和四邊形 ABCD 的面積也有固定的比值，而有如下的定理：

定理三：四邊形 ABCD 中，K 為不在四邊形上的一點，將 K 點分別連接四頂點，得到四塊三角形ΔAKB、ΔAKD、ΔCKD、ΔBKC，設G_1、G_2、G_3、G_4依序為其重心，則四邊形$G_1G_2G_3G_4$的面積=四邊形 ABCD 面積的$\frac{2}{9}$。

【證明】以下為了方便計算，我們約定 **P** 表向量$\overrightarrow{KP}$。

如圖 3，$\overrightarrow{KG_1} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB}) = \frac{1}{3}(A + B)$，$\overrightarrow{KG_2} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KD}) = \frac{1}{3}(A + D)$，

$\overrightarrow{KG_3} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{KC} + \overrightarrow{KD}) = \frac{1}{3}(C + D)$， $\overrightarrow{KG_4} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC}) = \frac{1}{3}(B + C)$，

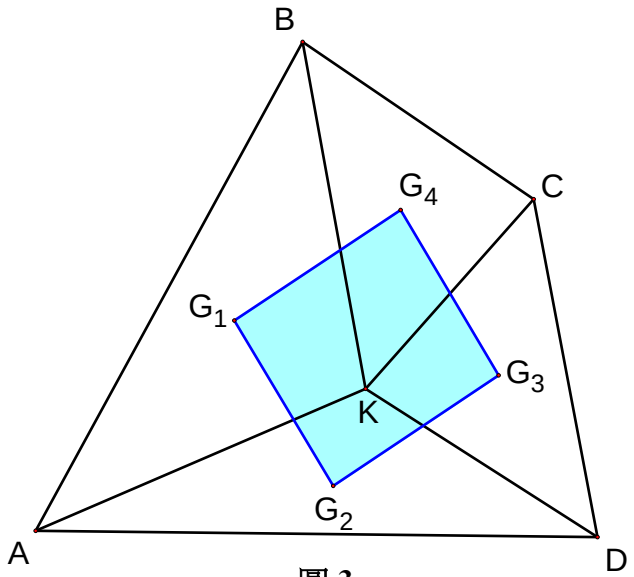


圖 3

可得

$$2S_{G_1G_2G_3G_4} = \overrightarrow{KG_1} \times \overrightarrow{KG_2} + \overrightarrow{KG_2} \times \overrightarrow{KG_3} + \overrightarrow{KG_3} \times \overrightarrow{KG_4} + \overrightarrow{KG_4} \times \overrightarrow{KG_1}$$

$$= G_1 \times G_2 + G_2 \times G_3 + G_3 \times G_4 + G_4 \times G_1$$

$$= \frac{1}{9}[(A+B)\times(A+D)+(A+D)\times(C+D)+(C+D)\times(B+C)+$$

$$(B+C)\times(A+B)]$$

$$= \frac{1}{9}[(A\times D+B\times A+B\times D)+(A\times C+A\times D+D\times C)+$$

$$(C\times B+D\times B+D\times C)+(B\times A+C\times A+C\times B)]$$

$$= \frac{1}{9}[2(A\times D+D\times C+C\times B+B\times A)]$$

$$= \frac{2}{9}(2S_{ADCB})$$

故$S_{G_1G_2G_3G_4} = \frac{2}{9}S_{ADCB}$。

如果將上述的四邊形改為三角形，我們發現也有相對應的定理如下：

定理四： ΔABC中，K 為不在三角形上的一點，將 K 點分別連接三頂點，得到三塊三角形ΔAKB、ΔAKC、ΔBKC，設G_1、G_2、G_3依序為其重心，則Δ$G_1G_2G_3$的面積= ΔABC面積的 $\frac{1}{9}$。

【證明】如圖 4，$\overrightarrow{KG_1} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}) = \frac{1}{3}(A+B)$，$\overrightarrow{KG_2} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KC}) = \frac{1}{3}(A+C)$，

$\overrightarrow{KG_3} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KC}) = \frac{1}{3}(B+C)$。

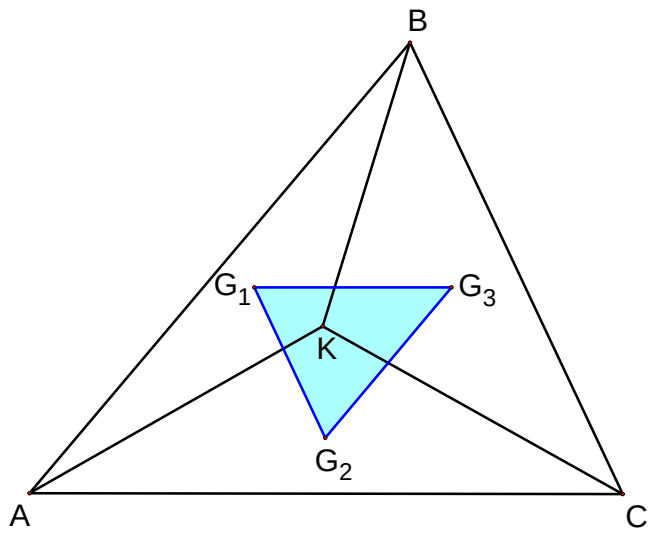


圖 4

可得

$$2S_{\Delta G_1G_2G_3} = \overrightarrow{KG_1} \times \overrightarrow{KG_2} + \overrightarrow{KG_2} \times \overrightarrow{KG_3} + \overrightarrow{KG_3} \times \overrightarrow{KG_1}$$

$$= G_1 \times G_2 + G_2 \times G_3 + G_3 \times G_1$$

$$= \frac{1}{9}[(A+B)\times(A+C)+(A+C)\times(B+C)+(B+C)\times(A+B)]$$

$$= \frac{1}{9}[(A\times C + B\times A + B\times C) + (A\times B + A\times C + C\times B) + (B\times A + C\times A + C\times B)]$$

$$= \frac{1}{9}(A\times C + C\times B + B\times A)$$

$$= \frac{1}{9}(2S_{\Delta ACB})$$

故$S_{\Delta G_1G_2G_3} = \frac{1}{9}S_{\Delta ACB}$。

如果將上述的三角形改為其它奇數邊的多邊形，我們發現如下的定理：

定理五：奇數邊多邊形$A_1A_2A_3\cdots A_{N-1}A_N$中，K 為不在多邊形上的一點，將 K 點分別連接 N 個頂點，得到 N 塊三角形ΔA_1KA_2、ΔA_2KA_3、⋯、$\Delta A_{N-1}KA_N$、ΔA_NKA_1，設G_1、G_2、⋯G_{N-1}、G_N依序為其重心，

則 $\frac{S_{G_1G_2\cdots G_{N-1}G_N}}{S_{A_1A_2\cdots A_{N-1}A_N}} = \frac{2}{9} + \frac{1}{9}[\frac{S_{A_1A_3\cdots A_{N-2}A_NA_2A_4\cdots A_{N-3}A_{N-1}}}{S_{A_1A_2\cdots A_{N-1}A_N}}]$。

【證明】

(1) $N=3$ 時，如圖 5，

$\overrightarrow{KG_1} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{KA_1} + \overrightarrow{KA_2}) = \frac{1}{3}(A_1 + A_2)$， $\overrightarrow{KG_2} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{KA_2} + \overrightarrow{KA_3}) = \frac{1}{3}(A_2 + A_3)$，

$\overrightarrow{KG_3} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{KA_3} + \overrightarrow{KA_1}) = \frac{1}{3}(A_3 + A_1)$。

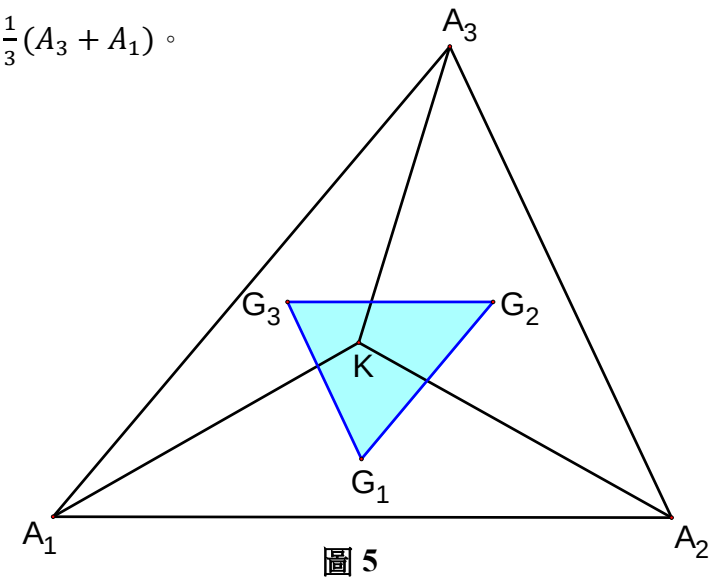


圖 5

可得

$$2S_{G_1G_2G_3}$$

$$= \overrightarrow{KG_1} \times \overrightarrow{KG_2} + \overrightarrow{KG_2} \times \overrightarrow{KG_3} + \overrightarrow{KG_3} \times \overrightarrow{KG_1}$$

$$= \mathrm{G}_1 \times G_2 + \mathrm{G}_2 \times G_3 + \mathrm{G}_3 \times G_1$$

$$= \frac{1}{9}[(A_1 + A_2) \times (A_2 + A_3) + (A_2 + A_3) \times (A_3 + A_1) + (A_3 + A_1) \times (A_1 + A_2)]$$

$$= \frac{1}{9}[(A_1 \times A_2 + A_1 \times A_3 + A_2 \times A_3) + (A_2 \times A_3 + A_2 \times A_1 + A_3 \times A_1) + (A_3 \times A_1 + A_3 \times A_2 + A_1 \times A_2)]$$

$$= \frac{1}{9}[4S_{A_1A_2A_3} + 2S_{A_1A_3A_2}]$$

故 $\dfrac{S_{G_1G_2G_3}}{S_{A_1A_2A_3}} = \dfrac{2}{9} + \dfrac{1}{9}\left[\dfrac{S_{A_1A_3A_2}}{S_{A_1A_2A_3}}\right] = \dfrac{2}{9} + \left(-\dfrac{1}{9}\right) = \dfrac{1}{9}$。

(2) $N = 5$ 時，如圖 6，

$\overrightarrow{KG_1} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{KA_1} + \overrightarrow{KA_2}\right) = \frac{1}{3}(A_1 + A_2)$，$\overrightarrow{KG_2} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{KA_2} + \overrightarrow{KA_3}\right) = \frac{1}{3}(A_2 + A_3)$，

$\overrightarrow{KG_3} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{KA_3} + \overrightarrow{KA_4}\right) = \frac{1}{3}(A_3 + A_4)$，$\overrightarrow{KG_4} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{KA_4} + \overrightarrow{KA_5}\right) = \frac{1}{3}(A_4 + A_5)$，

$\overrightarrow{KG_5} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{KA_5} + \overrightarrow{KA_1}\right) = \frac{1}{3}(A_5 + A_1)$。

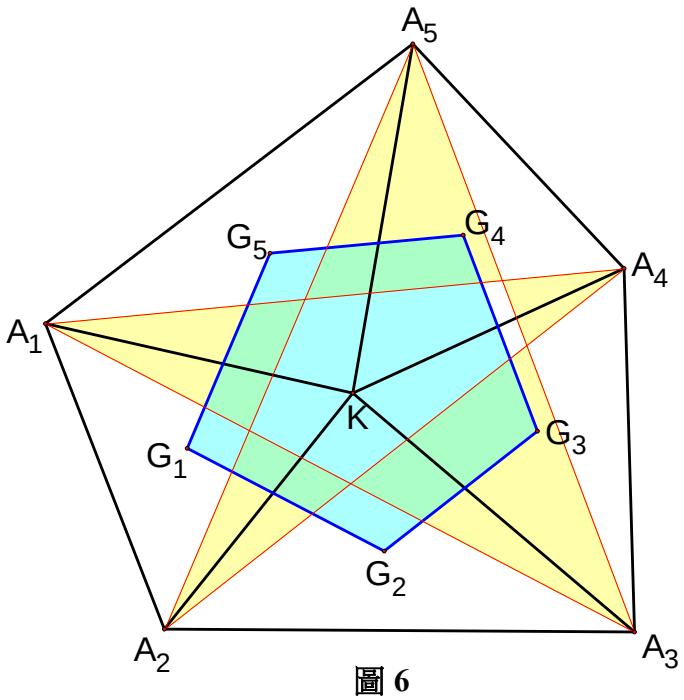


圖 6

可得

$$2S_{G_1G_2G_3G_4G_5}$$

$$= \overrightarrow{KG_1} \times \overrightarrow{KG_2} + \overrightarrow{KG_2} \times \overrightarrow{KG_3} + \overrightarrow{KG_3} \times \overrightarrow{KG_4} + \overrightarrow{KG_4} \times \overrightarrow{KG_5} + \overrightarrow{KG_5} \times \overrightarrow{KG_1}$$

$$= G_1 \times G_2 + G_2 \times G_3 + G_3 \times G_4 + G_4 \times G_5 + G_5 \times G_1$$

$$= \frac{1}{9}[(A_1 + A_2) \times (A_2 + A_3) + (A_2 + A_3) \times (A_3 + A_4) + (A_3 + A_4) \times (A_4 + A_5) + (A_4 + A_5) \times (A_5 + A_1) + (A_5 + A_1) \times (A_1 + A_2)]$$

$$= \frac{1}{9}[(A_1 \times A_2 + A_1 \times A_3 + A_2 \times A_3) + (A_2 \times A_3 + A_2 \times A_4 + A_3 \times A_4) + (A_3 \times A_4 + A_3 \times A_5 + A_4 \times A_5) + (A_4 \times A_5 + A_4 \times A_1 + A_5 \times A_1) + (A_5 \times A_1 + A_5 \times A_2 + A_1 \times A_2)]$$

$$= \frac{1}{9}[4S_{A_1A_2A_3A_4A_5} + 2S_{A_1A_3A_5A_2A_4}]$$

故 $\frac{S_{G_1G_2G_3G_4G_5}}{S_{A_1A_2A_3A_4A_5}} = \frac{2}{9} + \frac{1}{9}[\frac{S_{A_1A_3A_5A_2A_4}}{S_{A_1A_2A_3A_4A_5}}]$。

(3) $N = 2n + 1 (n \geq 3)$ 時，如圖 7，

$\overrightarrow{KG_1} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{KA_1} + \overrightarrow{KA_2}) = \frac{1}{3}(A_1 + A_2)$，$\overrightarrow{KG_2} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{KA_2} + \overrightarrow{KA_3}) = \frac{1}{3}(A_2 + A_3)$，

$\overrightarrow{KG_3} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{KA_3} + \overrightarrow{KA_4}) = \frac{1}{3}(A_3 + A_4)$，…，

$\overrightarrow{KG_{2n-1}} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{KA_{2n-1}} + \overrightarrow{KA_{2n}}) = \frac{1}{3}(A_{2n-1} + A_{2n})$，

$\overrightarrow{KG_{2n}} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{KA_{2n}} + \overrightarrow{KA_{2n+1}}) = \frac{1}{3}(A_{2n} + A_{2n+1})$，

$\overrightarrow{KG_{2n+1}} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{KA_{2n+1}} + \overrightarrow{KA_1}) = \frac{1}{3}(A_{2n+1} + A_1)$。

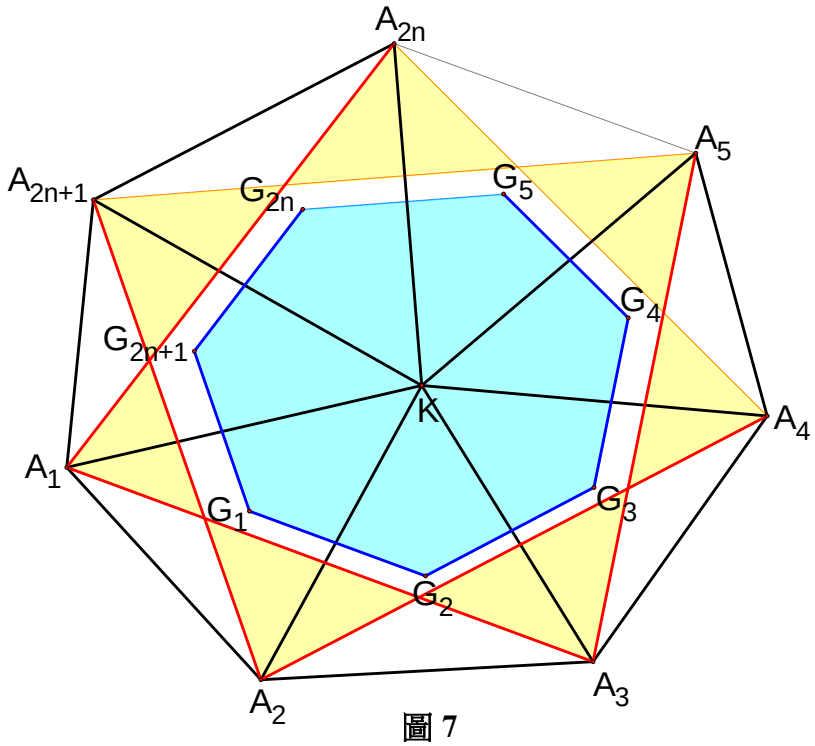


圖 7

可得

$$2S_{G_1G_2\cdots G_{2n}G_{2n+1}}$$

$$=\overrightarrow{KG_1}\times\overrightarrow{KG_2}+\overrightarrow{KG_2}\times\overrightarrow{KG_3}+\overrightarrow{KG_3}\times\overrightarrow{KG_4}+\cdots+\overrightarrow{KG_{2n-1}}\times\overrightarrow{KG_{2n}}+\overrightarrow{KG_{2n}}\times\overrightarrow{KG_{2n+1}}+\overrightarrow{KG_{2n+1}}\times\overrightarrow{KG_1}$$

$$=\mathrm{G}_1\times G_2+\mathrm{G}_2\times G_3+\mathrm{G}_3\times G_4+\cdots+\mathrm{G}_{2n-1}\times G_{2n}+\mathrm{G}_{2n}\times G_{2n+1}+\mathrm{G}_{2n+1}\times G_1$$

$$=\frac{1}{9}[(A_1+A_2)\times(A_2+A_3)+(A_2+A_3)\times(A_3+A_4)+(A_3+A_4)\times(A_4+A_5)+\cdots+$$

$$(A_{2n-1}+A_{2n})\times(A_{2n}+A_{2n+1})+(A_{2n}+A_{2n+1})\times(A_{2n+1}+A_1)+$$
$$(A_{2n+1}+A_1)\times(A_1+A_2)]$$

$$=\frac{1}{9}[(A_1\times A_2+A_1\times A_3+A_2\times A_3)+(A_2\times A_3+A_2\times A_4+A_3\times A_4)+$$

$$(A_3\times A_4+A_3\times A_5+A_4\times A_5)+\cdots+$$
$$(A_{2n-1}\times A_{2n}+A_{2n-1}\times A_{2n+1}+A_{2n}\times A_{2n+1})+$$
$$(A_{2n}\times A_{2n+1}+A_{2n}\times A_1+A_{2n+1}\times A_1)+(A_{2n+1}\times A_1+A_{2n+1}\times A_2+A_1\times A_2)]$$

$$=\frac{1}{9}[4S_{A_1A_2\cdots A_{2n}A_{2n+1}}+2S_{A_1A_3\cdots A_{2n-2}A_{2n}}]$$

故 $\frac{S_{G_1G_2\cdots G_{2n}G_{2n+1}}}{S_{A_1A_2\cdots A_{2n}A_{2n+1}}}=\frac{2}{9}+\frac{1}{9}[\frac{S_{A_1A_3\cdots A_{2n-1}A_{2n+1}A_2A_4\cdots A_{2n-2}A_{2n}}}{S_{A_1A_2\cdots A_{2n}A_{2n+1}}}]$。

即 $\frac{S_{G_1G_2\cdots G_{N-1}G_N}}{S_{A_1A_2\cdots A_{N-1}A_N}}=\frac{2}{9}+\frac{1}{9}[\frac{S_{A_1A_3\cdots A_{N-2}A_NA_2A_4\cdots A_{N-3}A_{N-1}}}{S_{A_1A_2\cdots A_{N-1}A_N}}]$。

如果將之前的四邊形改為其它偶數邊的多邊形，我們發現如下的定理：

定理六：偶數邊多邊形$A_1A_2A_3\cdots A_{N-1}A_N$中，K 為不在多邊形上的一點，將 K 點分別連接 N個頂點，得到 N 塊三角形ΔA_1KA_2、ΔA_2KA_3、⋯、$\Delta A_{N-1}KA_N$、ΔA_NKA_1，設G_1、G_2、⋯G_{N-1}、G_N依序為其重心，

則 $\frac{S_{G_1G_2\cdots G_{N-1}G_N}}{S_{A_1A_2\cdots A_{N-1}A_N}}=\frac{2}{9}+\frac{1}{9}[\frac{S_{A_1A_3\cdots A_{N-3}A_{N-1}}+S_{A_2A_4\cdots A_{N-2}A_N}}{S_{A_1A_2\cdots A_{N-1}A_N}}]$。

【證明】

(1) $N=4$ 時，如圖 8，

$\overrightarrow{KG_1}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{KA_1}+\overrightarrow{KA_2})=\frac{1}{3}(A_1+A_2)$，$\overrightarrow{KG_2}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{KA_2}+\overrightarrow{KA_3})=\frac{1}{3}(A_2+A_3)$，

$\overrightarrow{KG_3}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{KA_3}+\overrightarrow{KA_4})=\frac{1}{3}(A_3+A_4)$，$\overrightarrow{KG_4}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{KA_4}+\overrightarrow{KA_1})=\frac{1}{3}(A_4+A_1)$。

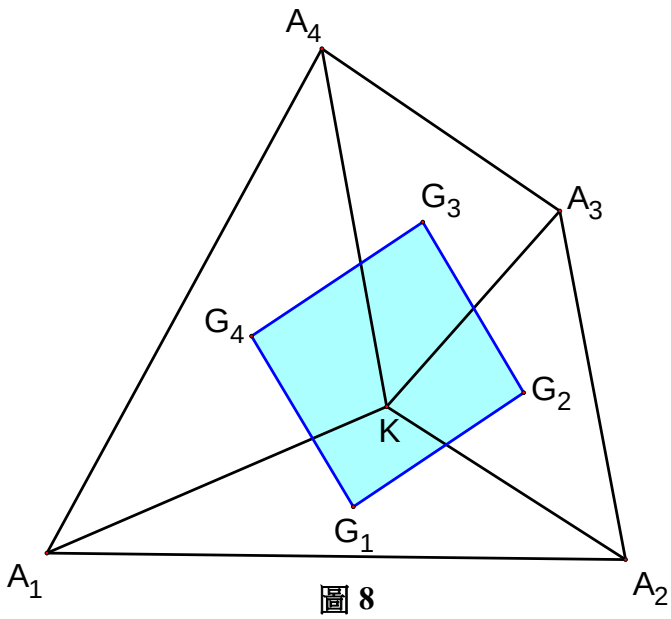


圖 8

可得

$2S_{G_1G_2G_3G_4}$

$=\overrightarrow{KG_1}\times\overrightarrow{KG_2}+\overrightarrow{KG_2}\times\overrightarrow{KG_3}+\overrightarrow{KG_3}\times\overrightarrow{KG_4}+\overrightarrow{KG_4}\times\overrightarrow{KG_1}$

$=G_1\times G_2+G_2\times G_3+G_3\times G_4+G_4\times G_1$

$=\frac{1}{9}[(A_1+A_2)\times(A_2+A_3)+(A_2+A_3)\times(A_3+A_4)+(A_3+A_4)\times(A_4+A_1)+$

$(A_4+A_1)\times(A_1+A_2)]$

$=\frac{1}{9}[(A_1\times A_2+A_1\times A_3+A_2\times A_3)+(A_2\times A_3+A_2\times A_4+A_3\times A_4)+$

$(A_3\times A_4+A_3\times A_1+A_4\times A_1)+(A_4\times A_1+A_4\times A_2+A_1\times A_2)]$

$= \frac{1}{9}[4S_{A_1A_2A_3A_4} + 2(S_{A_1A_3} + S_{A_2A_4})]$

故 $\frac{S_{G_1G_2G_3G_4}}{S_{A_1A_2A_3A_4}} = \frac{2}{9} + \frac{1}{9}\left[\frac{S_{A_1A_3}+S_{A_2A_4}}{S_{A_1A_2A_3A_4}}\right] = \frac{2}{9} + \frac{1}{9} \times 0 = \frac{2}{9}$。

(2) $N = 6$ 時，如圖 9，

$\overrightarrow{KG_1} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{KA_1} + \overrightarrow{KA_2}) = \frac{1}{3}(A_1 + A_2)$，$\overrightarrow{KG_2} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{KA_2} + \overrightarrow{KA_3}) = \frac{1}{3}(A_2 + A_3)$，

$\overrightarrow{KG_3} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{KA_3} + \overrightarrow{KA_4}) = \frac{1}{3}(A_3 + A_4)$，$\overrightarrow{KG_4} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{KA_4} + \overrightarrow{KA_5}) = \frac{1}{3}(A_4 + A_5)$，

$\overrightarrow{KG_5} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{KA_5} + \overrightarrow{KA_6}) = \frac{1}{3}(A_5 + A_6)$，$\overrightarrow{KG_6} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{KA_6} + \overrightarrow{KA_1}) = \frac{1}{3}(A_6 + A_1)$。

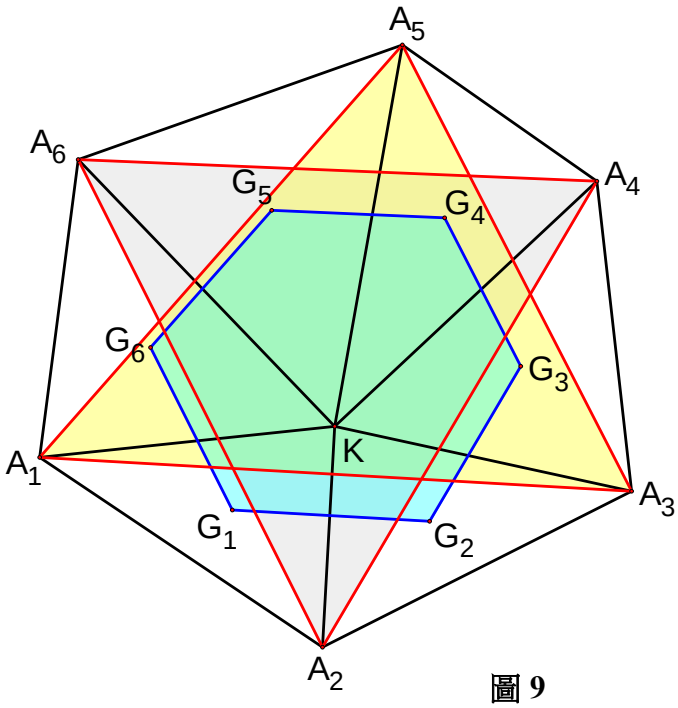


圖 9

可得

$2S_{G_1G_2G_3G_4G_5G_6}$

$= \overrightarrow{KG_1} \times \overrightarrow{KG_2} + \overrightarrow{KG_2} \times \overrightarrow{KG_3} + \overrightarrow{KG_3} \times \overrightarrow{KG_4} + \overrightarrow{KG_4} \times \overrightarrow{KG_5} + \overrightarrow{KG_5} \times \overrightarrow{KG_6} + \overrightarrow{KG_6} \times \overrightarrow{KG_1}$

$= \mathrm{G}_1 \times G_2 + \mathrm{G}_2 \times G_3 + \mathrm{G}_3 \times G_4 + \mathrm{G}_4 \times G_5 + \mathrm{G}_5 \times G_6 + \mathrm{G}_6 \times G_1$

$= \frac{1}{9}[(A_1 + A_2) \times (A_2 + A_3) + (A_2 + A_3) \times (A_3 + A_4) + (A_3 + A_4) \times (A_4 + A_5) +$

$(A_4 + A_5) \times (A_5 + A_6) + (A_5 + A_6) \times (A_6 + A_1) + (A_6 + A_1) \times (A_1 + A_2)]$

$= \frac{1}{9}[(A_1 \times A_2 + A_1 \times A_3 + A_2 \times A_3) + (A_2 \times A_3 + A_2 \times A_4 + A_3 \times A_4) +$

$(A_3 \times A_4 + A_3 \times A_5 + A_4 \times A_5) + (A_4 \times A_5 + A_4 \times A_6 + A_5 \times A_6) +$

$$(A_5 \times A_6 + A_5 \times A_1 + A_6 \times A_1) + (A_6 \times A_1 + A_6 \times A_2 + A_1 \times A_2)$$

$$= \frac{1}{9}[4S_{A_1A_2A_3A_4} + 2(S_{A_1A_3A_5} + S_{A_2A_4A_6})]$$

故 $\frac{S_{G_1G_2G_3G_4G_5G_6}}{S_{A_1A_2A_3A_4A_5A_6}} = \frac{2}{9} + \frac{1}{9}\left[\frac{S_{A_1A_3A_5}+S_{A_2A_4A_6}}{S_{A_1A_2A_3A_4A_5A_6}}\right]$。

(3)$N = 2n + 2(n \geq 2)$時，如圖 10，

$\overrightarrow{KG_1} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{KA_1} + \overrightarrow{KA_2}) = \frac{1}{3}(A_1 + A_2)$，$\overrightarrow{KG_2} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{KA_2} + \overrightarrow{KA_3}) = \frac{1}{3}(A_2 + A_3)$，

$\overrightarrow{KG_3} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{KA_3} + \overrightarrow{KA_4}) = \frac{1}{3}(A_3 + A_4)$，⋯，

$\overrightarrow{KG_{2n}} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{KA_{2n}} + \overrightarrow{KA_{2n+1}}) = \frac{1}{3}(A_{2n} + A_{2n+1})$，

$\overrightarrow{KG_{2n+1}} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{KA_{2n+1}} + \overrightarrow{KA_{2n+2}}) = \frac{1}{3}(A_{2n+1} + A_{2n+2})$，

$\overrightarrow{KG_{2n+2}} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{KA_{2n+2}} + \overrightarrow{KA_1}) = \frac{1}{3}(A_{2n+2} + A_1)$。

可得

$$2S_{G_1G_2\cdots G_{2n+1}G_{2n+2}}$$

$$= \overrightarrow{KG_1} \times \overrightarrow{KG_2} + \overrightarrow{KG_2} \times \overrightarrow{KG_3} + \overrightarrow{KG_3} \times \overrightarrow{KG_4} + \cdots + \overrightarrow{KG_{2n}} \times \overrightarrow{KG_{2n+1}} + \overrightarrow{KG_{2n+1}} \times \overrightarrow{KG_{2n+2}} + \overrightarrow{KG_{2n+2}} \times \overrightarrow{KG_1}$$

$$= G_1 \times G_2 + G_2 \times G_3 + G_3 \times G_4 + \cdots + G_{2n} \times G_{2n+1} + G_{2n+1} \times G_{2n+2} + G_{2n+2} \times G_1$$

$$= \frac{1}{9}[(A_1 + A_2) \times (A_2 + A_3) + (A_2 + A_3) \times (A_3 + A_4) + (A_3 + A_4) \times (A_4 + A_5) + \cdots + (A_{2n} + A_{2n+1}) \times (A_{2n+1} + A_{2n+2}) + (A_{2n+1} + A_{2n+2}) \times (A_{2n+2} + A_1) + (A_{2n+2} + A_1) \times (A_1 + A_2)]$$

$$= \frac{1}{9}[(A_1 \times A_2 + A_1 \times A_3 + A_2 \times A_3) + (A_2 \times A_3 + A_2 \times A_4 + A_3 \times A_4) + (A_3 \times A_4 + A_3 \times A_5 + A_4 \times A_5) + \cdots + (A_{2n} \times A_{2n+1} + A_{2n} \times A_{2n+2} + A_{2n+1} \times A_{2n+2}) + (A_{2n+1} \times A_{2n+2} + A_{2n+1} \times A_1 + A_{2n+2} \times A_1) + (A_{2n+2} \times A_1 + A_{2n+2} \times A_2 + A_1 \times A_2)]$$

$$= \frac{1}{9}[4S_{A_1A_2\cdots A_{2n+1}A_{2n+2}} + 2(S_{A_1A_3\cdots A_{2n-1}A_{2n+1}} + S_{A_2A_4\cdots A_{2n}A_{2n+2}})]$$

故 $\frac{S_{G_1G_2\cdots G_{2n+1}G_{2n+2}}}{S_{A_1A_2\cdots A_{2n+1}A_{2n+2}}} = \frac{2}{9} + \frac{1}{9}\left[\frac{S_{A_1A_3\cdots A_{2n-1}A_{2n+1}}+S_{A_2A_4\cdots A_{2n}A_{2n+2}}}{S_{A_1A_2\cdots A_{2n+1}A_{2n+2}}}\right]$。

即 $\frac{S_{G_1G_2\cdots G_{N-1}G_N}}{S_{A_1A_2\cdots A_{N-1}A_N}}=\frac{2}{9}+\frac{1}{9}[\frac{S_{A_1A_3\cdots A_{N-3}A_{N-1}}+S_{A_2A_4\cdots A_{N-2}A_N}}{S_{A_1A_2\cdots A_{N-1}A_N}}]$。

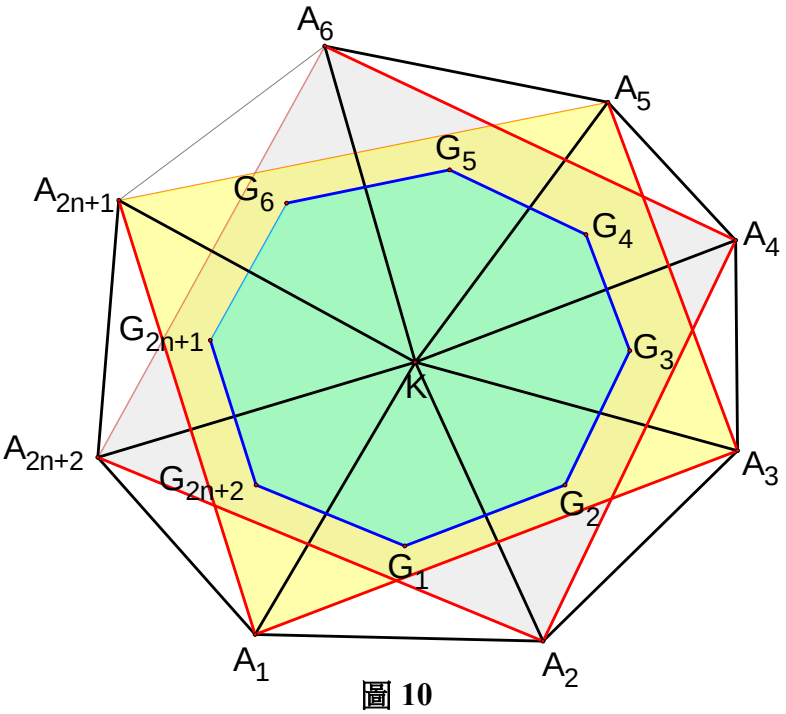


圖 10

伍、討論

一、 依序找四邊形$\mathbf{A_1A_2A_3A_4}$中連續三點，得到四塊三角形$\Delta\mathbf{A_1A_2A_3}$、$\Delta\mathbf{A_2A_3A_4}$、$\Delta\mathbf{A_3A_4A_1}$、$\Delta\mathbf{A_4A_1A_2}$，設$\mathbf{H_1}$、$\mathbf{H_2}$、$\mathbf{H_3}$、$\mathbf{H_4}$依序為其重心，則 $\frac{S_{H_1H_2H_3H_4}}{S_{A_1A_2A_3A_4}}=\frac{1}{9}$。

【證明】

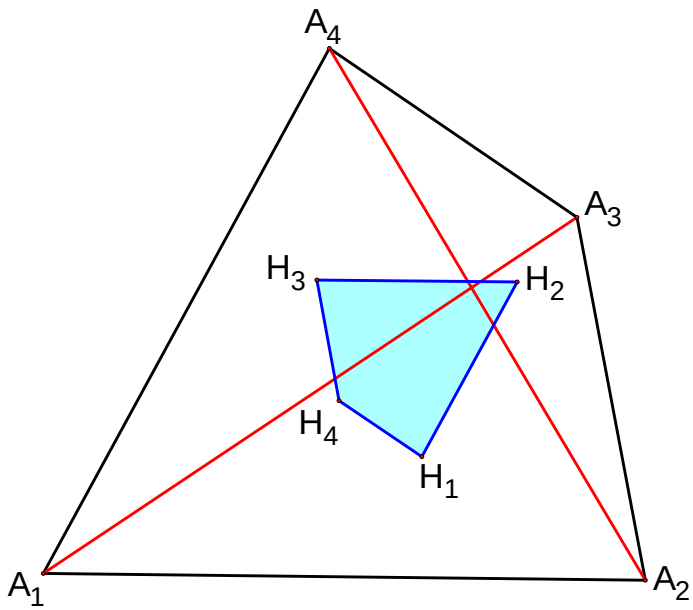


圖 11

如圖 11， $\overrightarrow{KH_1}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{KA_1}+\overrightarrow{KA_2}+\overrightarrow{KA_3}\right)=\frac{1}{3}(A_1+A_2+A_3)$，

$\overrightarrow{KH_2}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{KA_2}+\overrightarrow{KA_3}+\overrightarrow{KA_4}\right)=\frac{1}{3}(A_2+A_3+A_4)$，

$\overrightarrow{KH_3}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{KA_3}+\overrightarrow{KA_4}+\overrightarrow{KA_1}\right)=\frac{1}{3}(A_3+A_4+A_1)$，

$\overrightarrow{KH_4}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{KA_4}+\overrightarrow{KA_1}+\overrightarrow{KA_2}\right)=\frac{1}{3}(A_4+A_1+A_2)$。

可得

$$
\begin{aligned}
&2S_{H_1H_2H_3H_4}\\
&=\overrightarrow{KH_1}\times\overrightarrow{KH_2}+\overrightarrow{KH_2}\times\overrightarrow{KH_3}+\overrightarrow{KH_3}\times\overrightarrow{KH_4}+\overrightarrow{KH_4}\times\overrightarrow{KH_1}\\
&=\mathrm{H}_1\times H_2+\mathrm{H}_2\times H_3+\mathrm{H}_3\times H_4+\mathrm{H}_4\times H_1\\
&=\frac{1}{9}[(A_1+A_2+A_3)\times(A_2+A_3+A_4)+(A_2+A_3+A_4)\times(A_3+A_4+A_1)+\\
&\qquad(A_3+A_4+A_1)\times(A_4+A_1+A_2)+(A_4+A_1+A_2)\times(A_1+A_2+A_3)]\\
&=\frac{1}{9}[(A_1\times A_2+A_1\times A_3+A_1\times A_4+A_2\times A_3+A_2\times A_4+A_3\times A_2+A_3\times A_4)+\\
&\qquad(A_2\times A_3+A_2\times A_4+A_2\times A_1+A_3\times A_4+A_3\times A_1+A_4\times A_3+A_4\times A_1)+\\
&\qquad(A_3\times A_4+A_3\times A_1+A_3\times A_2+A_4\times A_1+A_4\times A_2+A_1\times A_4+A_1\times A_2)+\\
&\qquad(A_4\times A_1+A_4\times A_2+A_4\times A_3+A_1\times A_2+A_1\times A_3+A_2\times A_1+A_2\times A_3)]\\
&=\frac{1}{9}[6S_{A_1A_2A_3A_4}+4(S_{A_1A_3}+S_{A_2A_4})+4S_{A_1A_4A_3A_2}]\\
&=\frac{1}{9}[2S_{A_1A_2A_3A_4}+4(S_{A_1A_3}+S_{A_2A_4})]
\end{aligned}
$$

故 $\frac{S_{H_1H_2H_3H_4}}{S_{A_1A_2A_3A_4}}=\frac{1}{9}+\frac{2}{9}\left[\frac{S_{A_1A_3}+S_{A_2A_4}}{S_{A_1A_2A_3A_4}}\right]=\frac{1}{9}+\frac{2}{9}\times 0=\frac{1}{9}$。

二、依序找奇數邊N(N ≥ 5)邊形$A_1A_2\cdots A_N$中連續三點，得到 N 塊三角形$\Delta A_1A_2A_3$、$\Delta A_2A_3A_4$、⋯、$\Delta A_{N-1}A_NA_1$、$\Delta A_NA_1A_2$，設H_1、H_2、⋯H_{N-1}、H_N依序為其重心，

則 $\frac{S_{H_1H_2\cdots H_{N-1}H_N}}{S_{A_1A_2\cdots A_{N-1}A_N}}=\frac{2}{9}+\frac{2}{9}\left[\frac{S_{A_1A_3\cdots}}{S_{A_1A_2\cdots A_{N-1}A_N}}\right]+\frac{1}{9}\left[\frac{S_{A_1A_4\cdots}}{S_{A_1A_2\cdots A_{N-1}A_N}}\right]$

或 $\frac{S_{H_1H_2\cdots H_{N-1}H_N}}{S_{A_1A_2\cdots A_{N-1}A_N}}=\frac{2}{9}+\frac{2}{9}\left[\frac{S_{A_1A_3\cdots}}{S_{A_1A_2\cdots A_{N-1}A_N}}\right]+\frac{1}{9}\left[\frac{S_{A_1A_4\cdots}+S_{A_2A_5\cdots}+S_{A_3A_6\cdots}}{S_{A_1A_2\cdots A_{N-1}A_N}}\right]$。

【證明】

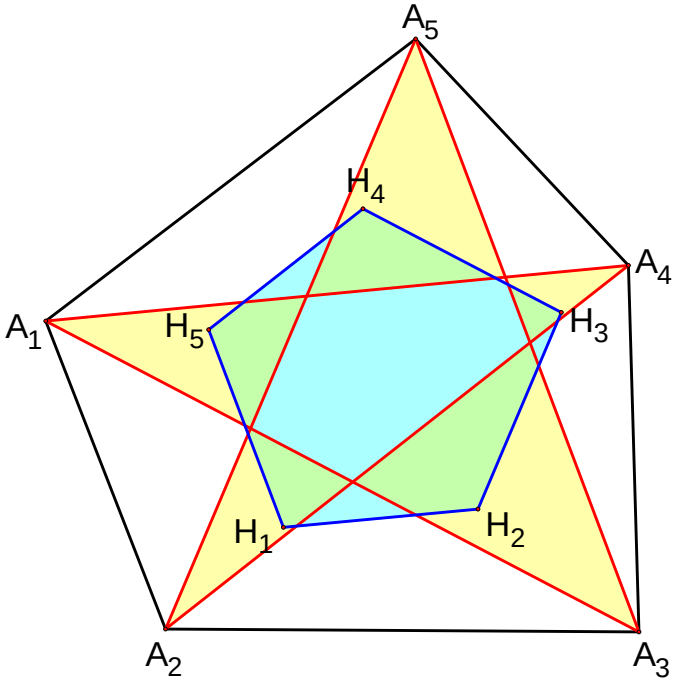


圖 12

(1) N = 5 時，如圖 12，

$$\overrightarrow{KH_1} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{KA_1} + \overrightarrow{KA_2} + \overrightarrow{KA_3}\right) = \frac{1}{3}(A_1 + A_2 + A_3)，$$

$$\overrightarrow{KH_2} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{KA_2} + \overrightarrow{KA_3} + \overrightarrow{KA_4}\right) = \frac{1}{3}(A_2 + A_3 + A_4)，$$

$$\overrightarrow{KH_3} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{KA_3} + \overrightarrow{KA_4} + \overrightarrow{KA_5}\right) = \frac{1}{3}(A_3 + A_4 + A_5)，$$

$$\overrightarrow{KH_4} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{KA_4} + \overrightarrow{KA_5} + \overrightarrow{KA_1}\right) = \frac{1}{3}(A_4 + A_5 + A_1)，$$

$$\overrightarrow{KH_5} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{KA_5} + \overrightarrow{KA_1} + \overrightarrow{KA_2}\right) = \frac{1}{3}(A_5 + A_1 + A_2)。$$

可得

$$2S_{H_1H_2H_3H_4H_5}$$

$$= \overrightarrow{KH_1} \times \overrightarrow{KH_2} + \overrightarrow{KH_2} \times \overrightarrow{KH_3} + \overrightarrow{KH_3} \times \overrightarrow{KH_4} + \overrightarrow{KH_4} \times \overrightarrow{KH_5} + \overrightarrow{KH_5} \times \overrightarrow{KH_1}$$
$$= \mathrm{H}_1 \times H_2 + \mathrm{H}_2 \times H_3 + \mathrm{H}_3 \times H_4 + \mathrm{H}_4 \times H_5 + \mathrm{H}_5 \times H_1$$

$$= \frac{1}{9}[(A_1 + A_2 + A_3) \times (A_2 + A_3 + A_4) + (A_2 + A_3 + A_4) \times (A_3 + A_4 + A_5) +$$
$$(A_3 + A_4 + A_5) \times (A_4 + A_5 + A_1) + (A_4 + A_5 + A_1) \times (A_5 + A_1 + A_2) +$$
$$(A_5 + A_1 + A_2) \times (A_1 + A_2 + A_3)]$$

$$=\frac{1}{9}[(A_1\times A_2+A_1\times A_3+A_1\times A_4+A_2\times A_3+A_2\times A_4+A_3\times A_2+A_3\times A_4)+$$

$$(A_2\times A_3+A_2\times A_4+A_2\times A_5+A_3\times A_4+A_3\times A_5+A_4\times A_3+A_4\times A_5)+$$
$$(A_3\times A_4+A_3\times A_5+A_3\times A_1+A_4\times A_5+A_4\times A_1+A_5\times A_4+A_5\times A_1)+$$
$$(A_4\times A_5+A_4\times A_1+A_4\times A_2+A_5\times A_1+A_5\times A_2+A_1\times A_5+A_1\times A_2)+$$
$$(A_5\times A_1+A_5\times A_2+A_5\times A_3+A_1\times A_2+A_1\times A_3+A_2\times A_1+A_2\times A_3)]$$

$$=\frac{1}{9}[6S_{A_1A_2A_3A_4A_5}+4S_{A_1A_3A_5A_2A_4}+2S_{A_1A_4A_2A_5A_3}+2S_{A_1A_5A_4A_3A_2}]$$

$$=\frac{1}{9}[4S_{A_1A_2A_3A_4A_5}+4S_{A_1A_3A_5A_2A_4}+2S_{A_1A_4A_2A_5A_3}]$$

故 $\frac{S_{H_1H_2H_3H_4H_5}}{S_{A_1A_2A_3A_4A_5}}=\frac{2}{9}+\frac{2}{9}\left[\frac{S_{A_1A_3A_5A_2A_4}}{S_{A_1A_2A_3A_4A_5}}\right]+\frac{1}{9}\left[\frac{S_{A_1A_4A_2A_5A_3}}{S_{A_1A_2A_3A_4A_5}}\right]$

$$=\frac{2}{9}+\frac{1}{9}\left[\frac{S_{A_1A_3A_5A_2A_4}}{S_{A_1A_2A_3A_4A_5}}\right]。$$

(2) N = 9 時，如圖 13，

$\overrightarrow{KH_1}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{KA_1}+\overrightarrow{KA_2}+\overrightarrow{KA_3})=\frac{1}{3}(A_1+A_2+A_3)$，

$\overrightarrow{KH_2}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{KA_2}+\overrightarrow{KA_3}+\overrightarrow{KA_4})=\frac{1}{3}(A_2+A_3+A_4)$，

$\overrightarrow{KH_3}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{KA_3}+\overrightarrow{KA_4}+\overrightarrow{KA_5})=\frac{1}{3}(A_3+A_4+A_5)$，

$\overrightarrow{KH_4}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{KA_4}+\overrightarrow{KA_5}+\overrightarrow{KA_6})=\frac{1}{3}(A_4+A_5+A_6)$，

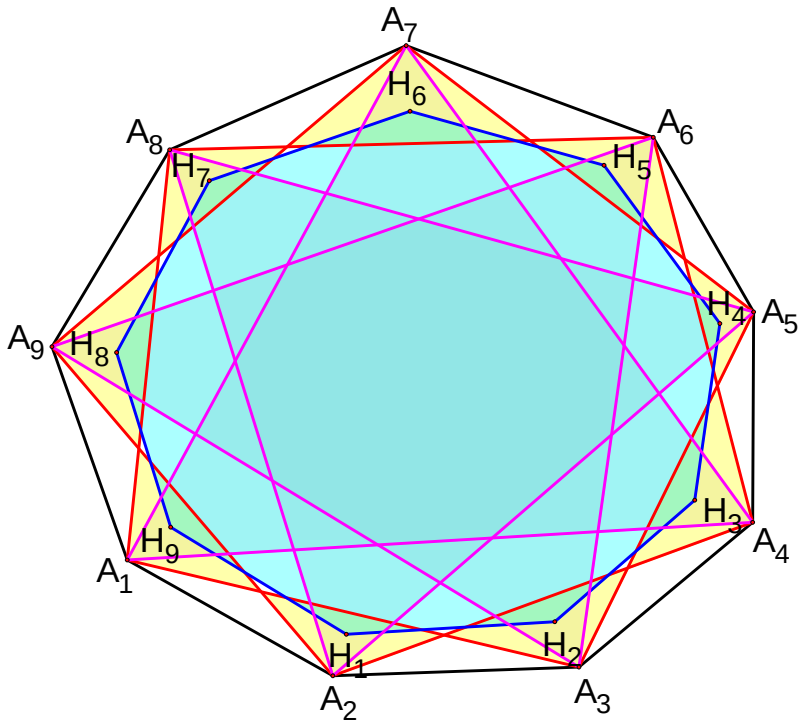
$\overrightarrow{KH_5}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{KA_5}+\overrightarrow{KA_6}+\overrightarrow{KA_7})=\frac{1}{3}(A_5+A_6+A_7)$，

$\overrightarrow{KH_6}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{KA_6}+\overrightarrow{KA_7}+\overrightarrow{KA_8})=\frac{1}{3}(A_6+A_7+A_8)$，

$\overrightarrow{KH_7}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{KA_7}+\overrightarrow{KA_8}+\overrightarrow{KA_9})=\frac{1}{3}(A_7+A_8+A_9)$，

$\overrightarrow{KH_8}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{KA_8}+\overrightarrow{KA_9}+\overrightarrow{KA_1})=\frac{1}{3}(A_8+A_9+A_1)$，

$\overrightarrow{KH_9}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{KA_9}+\overrightarrow{KA_1}+\overrightarrow{KA_2})=\frac{1}{3}(A_9+A_1+A_2)$。



可得

圖 13

$$2S_{H_1H_2H_3H_4H_5H_6H_7H_8H_9}$$

$$= \overrightarrow{KH_1} \times \overrightarrow{KH_2} + \overrightarrow{KH_2} \times \overrightarrow{KH_3} + \overrightarrow{KH_3} \times \overrightarrow{KH_4} + \overrightarrow{KH_4} \times \overrightarrow{KH_5} + \overrightarrow{KH_5} \times \overrightarrow{KH_6} + \overrightarrow{KH_6} \times \overrightarrow{KH_7} + \overrightarrow{KH_7} \times \overrightarrow{KH_8} + \overrightarrow{KH_8} \times \overrightarrow{KH_9} + \overrightarrow{KH_9} \times \overrightarrow{KH_1}$$

$$= \mathrm{H}_1 \times H_2 + \mathrm{H}_2 \times H_3 + \mathrm{H}_3 \times H_4 + \mathrm{H}_4 \times H_5 + \mathrm{H}_5 \times H_6 + \mathrm{H}_6 \times H_7 + \mathrm{H}_7 \times H_8 + \mathrm{H}_8 \times H_9 + \mathrm{H}_9 \times H_1$$

$$= \frac{1}{9}[(A_1 + A_2 + A_3) \times (A_2 + A_3 + A_4) + (A_2 + A_3 + A_4) \times (A_3 + A_4 + A_5) + (A_3 + A_4 + A_5) \times (A_4 + A_5 + A_6) + (A_4 + A_5 + A_6) \times (A_5 + A_6 + A_7) + (A_5 + A_6 + A_7) \times (A_6 + A_7 + A_8) + (A_6 + A_7 + A_8) \times (A_7 + A_8 + A_9) + (A_7 + A_8 + A_9) \times (A_8 + A_9 + A_1) + (A_8 + A_9 + A_1) \times (A_9 + A_1 + A_2) + (A_9 + A_1 + A_2) \times (A_1 + A_2 + A_3)]$$

$$= \frac{1}{9}[(A_1 \times A_2 + A_1 \times A_3 + A_1 \times A_4 + A_2 \times A_3 + A_2 \times A_4 + A_3 \times A_2 + A_3 \times A_4) + (A_2 \times A_3 + A_2 \times A_4 + A_2 \times A_5 + A_3 \times A_4 + A_3 \times A_5 + A_4 \times A_3 + A_4 \times A_5) + (A_3 \times A_4 + A_3 \times A_5 + A_3 \times A_6 + A_4 \times A_5 + A_4 \times A_6 + A_5 \times A_4 + A_5 \times A_6) + (A_4 \times A_5 + A_4 \times A_6 + A_4 \times A_7 + A_5 \times A_6 + A_5 \times A_7 + A_6 \times A_5 + A_6 \times A_7) + (A_5 \times A_6 + A_5 \times A_7 + A_5 \times A_8 + A_6 \times A_7 + A_6 \times A_8 + A_7 \times A_6 + A_7 \times A_8) + (A_6 \times A_7 + A_6 \times A_8 + A_6 \times A_9 + A_7 \times A_8 + A_7 \times A_9 + A_8 \times A_7 + A_8 \times A_9) + (A_7 \times A_8 + A_7 \times A_9 + A_7 \times A_1 + A_8 \times A_9 + A_8 \times A_1 + A_9 \times A_8 + A_9 \times A_1) + (A_8 \times A_9 + A_8 \times A_1 + A_8 \times A_2 + A_9 \times A_1 + A_9 \times A_2 + A_1 \times A_9 + A_1 \times A_2) + (A_9 \times A_1 + A_9 \times A_2 + A_9 \times A_3 + A_1 \times A_2 + A_1 \times A_3 + A_2 \times A_1 + A_2 \times A_3)]$$

$$= \frac{1}{9}[6S_{A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8A_9} + 4S_{A_1A_3A_5A_7A_9A_2A_4A_6A_8} + 2(S_{A_1A_4A_7} + S_{A_2A_5A_8} + S_{A_3A_6A_9}) + 2S_{A_1A_9A_8A_7A_6A_5A_4A_3A_2}]$$

$$= \frac{1}{9}[4S_{A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8A_9} + 4S_{A_1A_3A_5A_7A_9A_2A_4A_6A_8} + 2(S_{A_1A_4A_7} + S_{A_2A_5A_8} + S_{A_3A_6A_9})]$$

故

$$\frac{S_{H_1H_2H_3H_4H_5H_6H_7H_8H_9}}{S_{A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8A_9}} = \frac{2}{9} + \frac{2}{9}\left[\frac{S_{A_1A_3A_5A_7A_9A_2A_4A_6A_8}}{S_{A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8A_9}}\right] + \frac{1}{9}\left[\frac{S_{A_1A_4A_7}+S_{A_2A_5A_8}+S_{A_3A_6A_9}}{S_{A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8A_9}}\right]。$$

(3) **N** 為奇數且 $N \geq 7$ 時，如圖 14，

$\overrightarrow{KH_1} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{KA_1} + \overrightarrow{KA_2} + \overrightarrow{KA_3}) = \frac{1}{3}(A_1 + A_2 + A_3)$，

$\overrightarrow{KH_2} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{KA_2} + \overrightarrow{KA_3} + \overrightarrow{KA_4}) = \frac{1}{3}(A_2 + A_3 + A_4)$，

$\overrightarrow{KH_3} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{KA_3} + \overrightarrow{KA_4} + \overrightarrow{KA_5}) = \frac{1}{3}(A_3 + A_4 + A_5)$，…，

$\overrightarrow{KH_{N-2}} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{KA_{N-2}} + \overrightarrow{KA_{N-1}} + \overrightarrow{KA_N}) = \frac{1}{3}(A_{N-2} + A_{N-1} + A_N)$，

$\overrightarrow{KH_{N-1}} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{KA_{N-1}} + \overrightarrow{KA_N} + \overrightarrow{KA_1}) = \frac{1}{3}(A_{N-1} + A_N + A_1)$，

$\overrightarrow{KH_N} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{KA_N} + \overrightarrow{KA_1} + \overrightarrow{KA_2}) = \frac{1}{3}(A_N + A_1 + A_2)$。

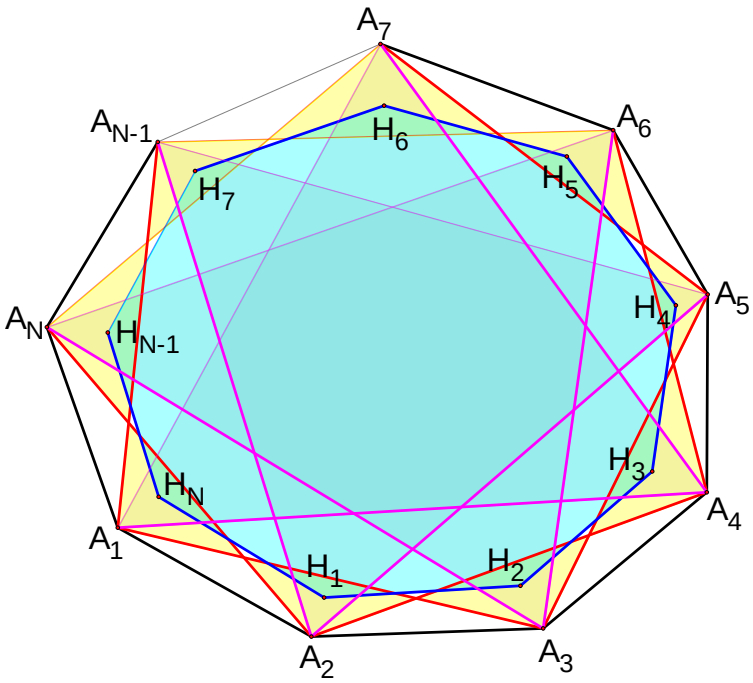


圖 14

可得

$$
\begin{aligned}
&2S_{H_1H_2\cdots H_{N-1}H_N}\\
&=\overrightarrow{KH_1}\times\overrightarrow{KH_2}+\overrightarrow{KH_2}\times\overrightarrow{KH_3}+\overrightarrow{KH_3}\times\overrightarrow{KH_4}+\cdots+\overrightarrow{KH_{N-2}}\times\overrightarrow{KH_{N-1}}+\overrightarrow{KH_{N-1}}\times\overrightarrow{KH_N}\\
&\quad+\overrightarrow{KH_N}\times\overrightarrow{KH_1}\\
&=\mathrm{H}_1\times H_2+\mathrm{H}_2\times H_3+\mathrm{H}_3\times H_4+\cdots+\mathrm{H}_{N-2}\times H_{N-1}+\mathrm{H}_{N-1}\times H_N+\mathrm{H}_N\times H_1\\
&=\frac{1}{9}[(A_1+A_2+A_3)\times(A_2+A_3+A_4)+(A_2+A_3+A_4)\times(A_3+A_4+A_5)+\\
&\quad(A_3+A_4+A_5)\times(A_4+A_5+A_6)+\cdots+(A_{N-2}+A_{N-1}+A_N)\times(A_{N-1}+A_N+A_1)\\
&\qquad+(A_{N-1}+A_N+A_1)\times(A_N+A_1+A_2)+(A_N+A_1+A_2)\times(A_1+A_2+A_3)]\\
&=\frac{1}{9}[(A_1\times A_2+\boldsymbol{A_1}\times\boldsymbol{A_3}+A_1\times A_4+A_2\times A_3+A_2\times A_4+A_3\times A_2+A_3\times A_4)+\\
&\quad(A_2\times A_3+A_2\times A_4+A_2\times A_5+A_3\times A_4+\boldsymbol{A_3}\times\boldsymbol{A_5}+A_4\times A_3+A_4\times A_5)+\\
&\quad(A_3\times A_4+\boldsymbol{A_3}\times\boldsymbol{A_5}+A_3\times A_6+A_4\times A_5+A_4\times A_6+A_5\times A_4+A_5\times A_6)+\\
&\quad\cdots+\\
&\quad(A_{N-2}\times A_{N-1}+\boldsymbol{A_{N-2}}\times\boldsymbol{A_N}+A_{N-2}\times A_1+A_{N-1}\times A_N+A_{N-1}\times A_1\\
&\qquad+A_N\times A_{N-1}+A_N\times A_1)+\\
&\quad(A_{N-1}\times A_N+A_{N-1}\times A_1+A_{N-1}\times A_2+A_N\times A_1+\boldsymbol{A_N}\times\boldsymbol{A_2}\\
&\qquad+A_1\times A_N+A_1\times A_2)+\\
&\quad(A_N\times A_1+\boldsymbol{A_N}\times\boldsymbol{A_2}+A_N\times A_3+A_1\times A_2+\boldsymbol{A_1}\times\boldsymbol{A_3}\\
&\qquad+A_2\times A_1+A_2\times A_3)]
\end{aligned}
$$

$$=\frac{1}{9}[6S_{A_1A_2\cdots A_{N-1}A_N}+4S_{A_1A_3\cdots}+2S_{A_1A_4\cdots}+2S_{A_1A_NA_{N-1}\cdots A_3A_2}]$$

或 $\frac{1}{9}[6S_{A_1A_2\cdots A_{N-1}A_N}+4S_{A_1A_3\cdots}+2(S_{A_1A_4\cdots}+S_{A_2A_5\cdots}+S_{A_3A_6\cdots})+$

$2S_{A_1A_NA_{N-1}\cdots A_3A_2}]$

$$=\frac{1}{9}[4S_{A_1A_2\cdots A_{N-1}A_N}+4S_{A_1A_3\cdots}+2S_{A_1A_4\cdots}]$$

或 $\frac{1}{9}[4S_{A_1A_2\cdots A_{N-1}A_N}+4S_{A_1A_3\cdots}+2(S_{A_1A_4\cdots}+S_{A_2A_5\cdots}+S_{A_3A_6\cdots})]$

故 $\frac{S_{H_1H_2\cdots H_{N-1}H_N}}{S_{A_1A_2\cdots A_{N-1}A_N}}=\frac{2}{9}+\frac{2}{9}\left[\frac{S_{A_1A_3\cdots}}{S_{A_1A_2\cdots A_{N-1}A_N}}\right]+\frac{1}{9}\left[\frac{S_{A_1A_4\cdots}}{S_{A_1A_2\cdots A_{N-1}A_N}}\right]$

或 $\frac{S_{H_1H_2\cdots H_{N-1}H_N}}{S_{A_1A_2\cdots A_{N-1}A_N}}=\frac{2}{9}+\frac{2}{9}\left[\frac{S_{A_1A_3\cdots}}{S_{A_1A_2\cdots A_{N-1}A_N}}\right]+\frac{1}{9}\left[\frac{S_{A_1A_4\cdots}+S_{A_2A_5\cdots}+S_{A_3A_6\cdots}}{S_{A_1A_2\cdots A_{N-1}A_N}}\right]$。

三、依序找偶數邊$\mathbf{N(N \geq 4)}$邊形$\mathbf{A_1A_2 \cdots A_N}$中連續三點，得到 N 塊三角形$\Delta\mathbf{A_1A_2A_3}$、$\Delta\mathbf{A_2A_3A_4}$、⋯、$\Delta\mathbf{A_{N-1}A_NA_1}$、$\Delta\mathbf{A_NA_1A_2}$，設$\mathbf{H_1}$、$\mathbf{H_2}$、⋯$\mathbf{H_{N-1}}$、$\mathbf{H_N}$依序為其重心，

則 $\frac{S_{H_1H_2\cdots H_{N-1}H_N}}{S_{A_1A_2\cdots A_{N-1}A_N}} = \frac{2}{9} + \frac{2}{9}\left[\frac{S_{A_1A_3\cdots}+S_{A_2A_4\cdots}}{S_{A_1A_2\cdots A_{N-1}A_N}}\right] + \frac{1}{9}\left[\frac{S_{A_1A_4\cdots}}{S_{A_1A_2\cdots A_{N-1}A_N}}\right]$

或 $\frac{S_{H_1H_2\cdots H_{N-1}H_N}}{S_{A_1A_2\cdots A_{N-1}A_N}} = \frac{2}{9} + \frac{2}{9}\left[\frac{S_{A_1A_3\cdots}+S_{A_2A_4\cdots}}{S_{A_1A_2\cdots A_{N-1}A_N}}\right] + \frac{1}{9}\left[\frac{S_{A_1A_4\cdots}+S_{A_2A_5\cdots}+S_{A_3A_6\cdots}}{S_{A_1A_2\cdots A_{N-1}A_N}}\right]$。

【證明】

(1) N = 4 時，如圖 11，由之前討論一知

$$\frac{S_{H_1H_2H_3H_4}}{S_{A_1A_2A_3A_4}} = \frac{2}{9} + \frac{2}{9}\left[\frac{S_{A_1A_3}+S_{A_2A_4}}{S_{A_1A_2A_3A_4}}\right] + \frac{1}{9}\left[\frac{S_{A_1A_4A_3A_2}}{S_{A_1A_2A_3A_4}}\right] = \frac{2}{9} + \frac{2}{9} \times 0 - \frac{1}{9} = \frac{1}{9}。$$

(2) N = 6 時，如圖 15，

$\overrightarrow{KH_1} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{KA_1} + \overrightarrow{KA_2} + \overrightarrow{KA_3}\right) = \frac{1}{3}(A_1 + A_2 + A_3)$，

$\overrightarrow{KH_2} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{KA_2} + \overrightarrow{KA_3} + \overrightarrow{KA_4}\right) = \frac{1}{3}(A_2 + A_3 + A_4)$，

$\overrightarrow{KH_3} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{KA_3} + \overrightarrow{KA_4} + \overrightarrow{KA_5}\right) = \frac{1}{3}(A_3 + A_4 + A_5)$，

$\overrightarrow{KH_4} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{KA_4} + \overrightarrow{KA_5} + \overrightarrow{KA_6}\right) = \frac{1}{3}(A_4 + A_5 + A_6)$，

$\overrightarrow{KH_5} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{KA_5} + \overrightarrow{KA_6} + \overrightarrow{KA_1}\right) = \frac{1}{3}(A_5 + A_6 + A_1)$，

$\overrightarrow{KH_6} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{KA_6} + \overrightarrow{KA_1} + \overrightarrow{KA_2}\right) = \frac{1}{3}(A_6 + A_1 + A_2)$。

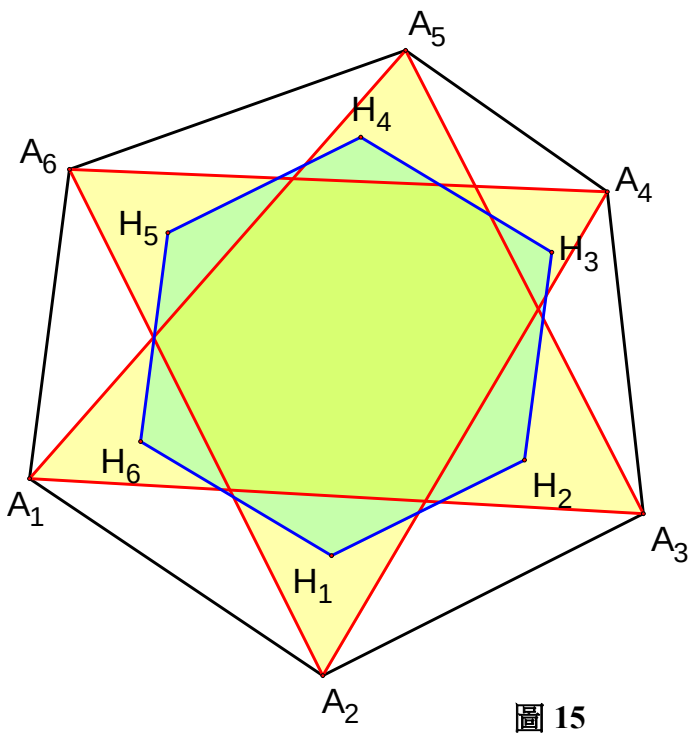


圖 15

可得

$$2S_{H_1H_2H_3H_4H_5H_6}$$

$$= \overrightarrow{KH_1} \times \overrightarrow{KH_2} + \overrightarrow{KH_2} \times \overrightarrow{KH_3} + \overrightarrow{KH_3} \times \overrightarrow{KH_4} + \overrightarrow{KH_4} \times \overrightarrow{KH_5} + \overrightarrow{KH_5} \times \overrightarrow{KH_6} + \overrightarrow{KH_6} \times \overrightarrow{KH_1}$$

$$= \mathrm{H}_1 \times H_2 + \mathrm{H}_2 \times H_3 + \mathrm{H}_3 \times H_4 + \mathrm{H}_4 \times H_5 + \mathrm{H}_5 \times H_6 + \mathrm{H}_6 \times H_1$$

$$= \frac{1}{9}[(A_1 + A_2 + A_3) \times (A_2 + A_3 + A_4) + (A_2 + A_3 + A_4) \times (A_3 + A_4 + A_5) +$$

$$(A_3 + A_4 + A_5) \times (A_4 + A_5 + A_6) + (A_4 + A_5 + A_6) \times (A_5 + A_6 + A_1) +$$
$$(A_5 + A_6 + A_1) \times (A_6 + A_1 + A_2) + (A_6 + A_1 + A_2) \times (A_1 + A_2 + A_3)]$$

$$= \frac{1}{9}[(A_1 \times A_2 + A_1 \times A_3 + A_1 \times A_4 + A_2 \times A_3 + A_2 \times A_4 + A_3 \times A_2 + A_3 \times A_4) +$$

$$(A_2 \times A_3 + A_2 \times A_4 + A_2 \times A_5 + A_3 \times A_4 + A_3 \times A_5 + A_4 \times A_3 + A_4 \times A_5) +$$
$$(A_3 \times A_4 + A_3 \times A_5 + A_3 \times A_6 + A_4 \times A_5 + A_4 \times A_6 + A_5 \times A_4 + A_5 \times A_6) +$$
$$(A_4 \times A_5 + A_4 \times A_6 + A_4 \times A_1 + A_5 \times A_6 + A_5 \times A_1 + A_6 \times A_5 + A_6 \times A_1) +$$
$$(A_5 \times A_6 + A_5 \times A_1 + A_5 \times A_2 + A_6 \times A_1 + A_6 \times A_2 + A_1 \times A_6 + A_1 \times A_2) +$$
$$(A_6 \times A_1 + A_6 \times A_2 + A_6 \times A_3 + A_1 \times A_2 + A_1 \times A_3 + A_2 \times A_1 + A_2 \times A_3)]$$

$$= \frac{1}{9}\left[6S_{A_1A_2A_3A_4A_5A_6} + 4(S_{A_1A_3A_5} + S_{A_2A_4A_6}) + 2(S_{A_1A_4} + S_{A_2A_5} + S_{A_3A_6}) +\right.$$

$$\left. 2S_{A_1A_6A_5A_4A_3A_2}\right]$$

$$= \frac{1}{9}[4S_{A_1A_2A_3A_4A_5A_6} + 4(S_{A_1A_3A_5} + S_{A_2A_4A_6}) + 2(S_{A_1A_4} + S_{A_2A_5} + S_{A_3A_6})]$$

故 $\frac{S_{H_1H_2H_3H_4H_5H_6}}{S_{A_1A_2A_3A_4A_5A_6}} = \frac{2}{9} + \frac{2}{9}\left[\frac{S_{A_1A_3A_5}+S_{A_2A_4A_6}}{S_{A_1A_2A_3A_4A_5A_6}}\right] + \frac{1}{9}\left[\frac{S_{A_1A_4}+S_{A_2A_5}+S_{A_3A_6}}{S_{A_1A_2A_3A_4A_5A_6}}\right]$

$$= \frac{2}{9} + \frac{2}{9}\left[\frac{S_{A_1A_3A_5}+S_{A_2A_4A_6}}{S_{A_1A_2A_3A_4A_5A_6}}\right]。$$

(3) N = 8 時，如圖 16，

$$\overrightarrow{KH_1} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{KA_1} + \overrightarrow{KA_2} + \overrightarrow{KA_3}\right) = \frac{1}{3}(A_1 + A_2 + A_3)，$$

$$\overrightarrow{KH_2} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{KA_2} + \overrightarrow{KA_3} + \overrightarrow{KA_4}\right) = \frac{1}{3}(A_2 + A_3 + A_4)，$$

$$\overrightarrow{KH_3} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{KA_3} + \overrightarrow{KA_4} + \overrightarrow{KA_5}\right) = \frac{1}{3}(A_3 + A_4 + A_5)，$$

$$\overrightarrow{KH_4} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{KA_4} + \overrightarrow{KA_5} + \overrightarrow{KA_6}\right) = \frac{1}{3}(A_4 + A_5 + A_6)，$$

$$\overrightarrow{KH_5} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{KA_5} + \overrightarrow{KA_6} + \overrightarrow{KA_7}\right) = \frac{1}{3}(A_5 + A_6 + A_7)，$$

$$\overrightarrow{KH_6}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{KA_6}+\overrightarrow{KA_7}+\overrightarrow{KA_8}\right)=\frac{1}{3}(A_6+A_7+A_8)，$$

$$\overrightarrow{KH_7}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{KA_7}+\overrightarrow{KA_8}+\overrightarrow{KA_1}\right)=\frac{1}{3}(A_7+A_8+A_1)，$$

$$\overrightarrow{KH_8}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{KA_8}+\overrightarrow{KA_1}+\overrightarrow{KA_2}\right)=\frac{1}{3}(A_8+A_1+A_2)。$$

可得

$$\begin{aligned}
&2S_{H_1H_2H_3H_4H_5H_6H_7H_8}\\
&=\overrightarrow{KH_1}\times\overrightarrow{KH_2}+\overrightarrow{KH_2}\times\overrightarrow{KH_3}+\overrightarrow{KH_3}\times\overrightarrow{KH_4}+\overrightarrow{KH_4}\times\overrightarrow{KH_5}+\overrightarrow{KH_5}\times\overrightarrow{KH_6}+\overrightarrow{KH_6}\times\overrightarrow{KH_7}\\
&\quad+\overrightarrow{KH_7}\times\overrightarrow{KH_8}+\overrightarrow{KH_8}\times\overrightarrow{KH_1}\\
&=\mathrm{H}_1\times H_2+\mathrm{H}_2\times H_3+\mathrm{H}_3\times H_4+\mathrm{H}_4\times H_5+\mathrm{H}_5\times H_6+\mathrm{H}_6\times H_7+\mathrm{H}_7\times H_8+\\
&\quad\mathrm{H}_8\times H_1\\
&=\frac{1}{9}[(A_1+A_2+A_3)\times(A_2+A_3+A_4)+(A_2+A_3+A_4)\times(A_3+A_4+A_5)+\\
&\qquad(A_3+A_4+A_5)\times(A_4+A_5+A_6)+(A_4+A_5+A_6)\times(A_5+A_6+A_7)+\\
&\qquad(A_5+A_6+A_7)\times(A_6+A_7+A_8)+(A_6+A_7+A_8)\times(A_7+A_8+A_1)+\\
&\qquad(A_7+A_8+A_1)\times(A_8+A_1+A_2)+(A_8+A_1+A_2)\times(A_1+A_2+A_3)]\\
&=\frac{1}{9}[(A_1\times A_2+A_1\times A_3+A_1\times A_4+A_2\times A_3+A_2\times A_4+A_3\times A_2+A_3\times A_4)+\\
&\qquad(A_2\times A_3+A_2\times A_4+A_2\times A_5+A_3\times A_4+A_3\times A_5+A_4\times A_3+A_4\times A_5)+\\
&\qquad(A_3\times A_4+A_3\times A_5+A_3\times A_6+A_4\times A_5+A_4\times A_6+A_5\times A_4+A_5\times A_6)+\\
&\qquad(A_4\times A_5+A_4\times A_6+A_4\times A_7+A_5\times A_6+A_5\times A_7+A_6\times A_5+A_6\times A_7)+\\
&\qquad(A_5\times A_6+A_5\times A_7+A_5\times A_8+A_6\times A_7+A_6\times A_8+A_7\times A_6+A_7\times A_8)+\\
&\qquad(A_6\times A_7+A_6\times A_8+A_6\times A_1+A_7\times A_8+A_7\times A_1+A_8\times A_7+A_8\times A_1)+\\
&\qquad(A_7\times A_8+A_7\times A_1+A_7\times A_2+A_8\times A_1+A_8\times A_2+A_1\times A_8+A_1\times A_2)+\\
&\qquad(A_8\times A_1+A_8\times A_2+A_8\times A_3+A_1\times A_2+A_1\times A_3+A_2\times A_1+A_2\times A_3)]\\
&=\frac{1}{9}[6S_{A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8}+4(S_{A_1A_3A_5A_7}+S_{A_2A_4A_6A_8})+2S_{A_1A_4A_7A_2A_5A_8A_3A_6}+\\
&\qquad2S_{A_1A_8A_7A_6A_5A_4A_3A_2}]\\
&=\frac{1}{9}[4S_{A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8}+4(S_{A_1A_3A_5A_7}+S_{A_2A_4A_6A_8})+2S_{A_1A_4A_7A_2A_5A_8A_3A_6}]
\end{aligned}$$

故 $\frac{S_{H_1H_2H_3H_4H_5H_6H_7H_8}}{S_{A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8}}=\frac{2}{9}+\frac{2}{9}\left[\frac{S_{A_1A_3A_5A_7}+S_{A_2A_4A_6A_8}}{S_{A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8}}\right]+\frac{1}{9}\left[\frac{S_{A_1A_4A_7A_2A_5A_8A_3A_6}}{S_{A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8}}\right]$。

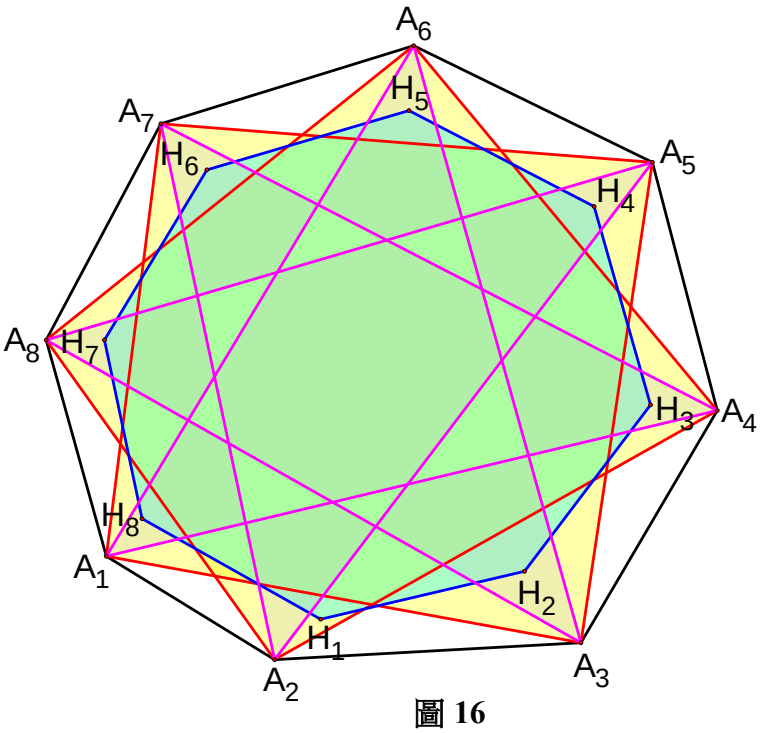


圖 16

(4) **N** 為偶數且 $N \geq 6$ 時，如圖 17，

$\overrightarrow{KH_1} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{KA_1} + \overrightarrow{KA_2} + \overrightarrow{KA_3}\right) = \frac{1}{3}(A_1 + A_2 + A_3)$，

$\overrightarrow{KH_2} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{KA_2} + \overrightarrow{KA_3} + \overrightarrow{KA_4}\right) = \frac{1}{3}(A_2 + A_3 + A_4)$，

$\overrightarrow{KH_3} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{KA_3} + \overrightarrow{KA_4} + \overrightarrow{KA_5}\right) = \frac{1}{3}(A_3 + A_4 + A_5)$ ，…，

$\overrightarrow{KH_{N-2}} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{KA_{N-2}} + \overrightarrow{KA_{N-1}} + \overrightarrow{KA_N}\right) = \frac{1}{3}(A_{N-2} + A_{N-1} + A_N)$，

$\overrightarrow{KH_{N-1}} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{KA_{N-1}} + \overrightarrow{KA_N} + \overrightarrow{KA_1}\right) = \frac{1}{3}(A_{N-1} + A_N + A_1)$，

$\overrightarrow{KH_N} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{KA_N} + \overrightarrow{KA_1} + \overrightarrow{KA_2}\right) = \frac{1}{3}(A_N + A_1 + A_2)$。

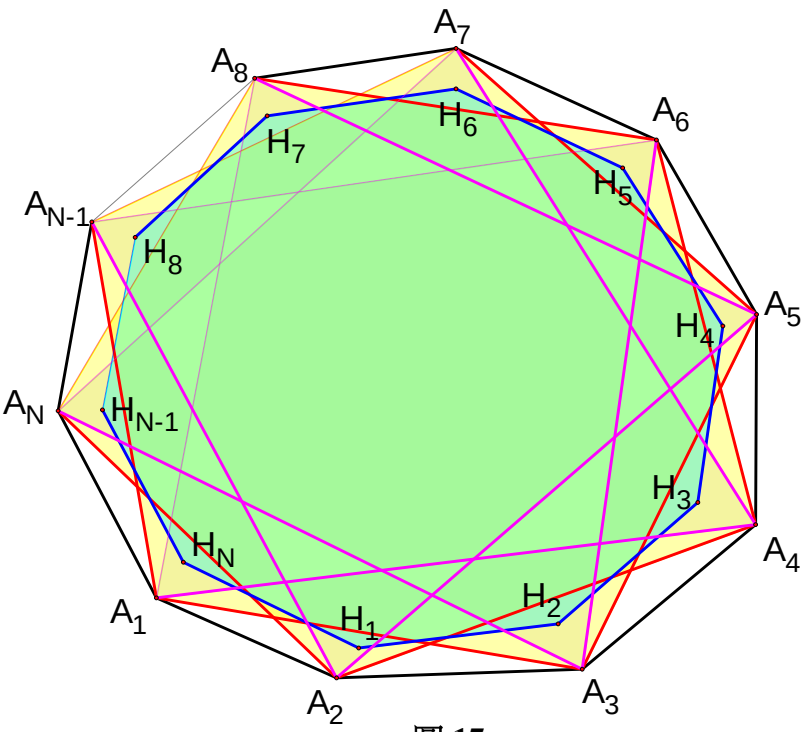


圖 17

可得

$$2S_{H_1H_2\cdots H_{N-1}H_N}$$

$$= \overrightarrow{KH_1}\times\overrightarrow{KH_2}+\overrightarrow{KH_2}\times\overrightarrow{KH_3}+\overrightarrow{KH_3}\times\overrightarrow{KH_4}+\cdots+\overrightarrow{KH_{N-2}}\times\overrightarrow{KH_{N-1}}+\overrightarrow{KH_{N-1}}\times\overrightarrow{KH_N}$$
$$+\overrightarrow{KH_N}\times\overrightarrow{KH_1}$$

$$= \mathrm{H}_1\times H_2+\mathrm{H}_2\times H_3+\mathrm{H}_3\times H_4+\cdots+\mathrm{H}_{N-2}\times H_{N-1}+\mathrm{H}_{N-1}\times H_N+\mathrm{H}_N\times H_1$$

$$= \frac{1}{9}[(A_1+A_2+A_3)\times(A_2+A_3+A_4)+(A_2+A_3+A_4)\times(A_3+A_4+A_5)+$$
$$(A_3+A_4+A_5)\times(A_4+A_5+A_6)+\cdots+(A_{N-2}+A_{N-1}+A_N)\times(A_{N-1}+A_N+A_1)$$
$$+(A_{N-1}+A_N+A_1)\times(A_N+A_1+A_2)+(A_N+A_1+A_2)\times(A_1+A_2+A_3)]$$

$$= \frac{1}{9}[(A_1\times A_2+A_1\times A_3+A_1\times A_4+A_2\times A_3+A_2\times A_4+A_3\times A_2+A_3\times A_4)+$$
$$(A_2\times A_3+A_2\times A_4+A_2\times A_5+A_3\times A_4+A_3\times A_5+A_4\times A_3+A_4\times A_5)+$$
$$(A_3\times A_4+A_3\times A_5+A_3\times A_6+A_4\times A_5+A_4\times A_6+A_5\times A_4+A_5\times A_6)+$$
$$\cdots+$$
$$(A_{N-2}\times A_{N-1}+A_{N-2}\times A_N+A_{N-2}\times A_1+A_{N-1}\times A_N+A_{N-1}\times A_1$$
$$+A_N\times A_{N-1}+A_N\times A_1)+$$
$$(A_{N-1}\times A_N+A_{N-1}\times A_1+A_{N-1}\times A_2+A_N\times A_1+A_N\times A_2$$
$$+A_1\times A_N+A_1\times A_2)+$$
$$(A_N\times A_1+A_N\times A_2+A_N\times A_3+A_1\times A_2+A_1\times A_3$$
$$+A_2\times A_1+A_2\times A_3)]$$

$$= \frac{1}{9}[6S_{A_1A_2\cdots A_{N-1}A_N}+4(S_{A_1A_3\cdots}+S_{A_2A_4\cdots})+2S_{A_1A_4\cdots}+2S_{A_1A_NA_{N-1}\cdots A_3A_2}]$$

或 $\frac{1}{9}[6S_{A_1A_2\cdots A_{N-1}A_N}+4(S_{A_1A_3\cdots}+S_{A_2A_4\cdots})+2(S_{A_1A_4\cdots}+S_{A_2A_5\cdots}+$

$S_{A_3A_6\cdots})+2S_{A_1A_NA_{N-1}\cdots A_3A_2}]$

$=\frac{1}{9}[4S_{A_1A_2\cdots A_{N-1}A_N}+4(S_{A_1A_3\cdots}+S_{A_2A_4\cdots})+2S_{A_1A_4\cdots}]$

或$\frac{1}{9}[4S_{A_1A_2\cdots A_{N-1}A_N}+4(S_{A_1A_3\cdots}+S_{A_2A_4\cdots})+2(S_{A_1A_4\cdots}+S_{A_2A_5\cdots}+S_{A_3A_6\cdots})]$

故 $\frac{S_{H_1H_2\cdots H_{N-1}H_N}}{S_{A_1A_2\cdots A_{N-1}A_N}}=\frac{2}{9}+\frac{2}{9}\left[\frac{S_{A_1A_3\cdots}+S_{A_2A_4\cdots}}{S_{A_1A_2\cdots A_{N-1}A_N}}\right]+\frac{1}{9}\left[\frac{S_{A_1A_4\cdots}}{S_{A_1A_2\cdots A_{N-1}A_N}}\right]$

或 $\frac{S_{H_1H_2\cdots H_{N-1}H_N}}{S_{A_1A_2\cdots A_{N-1}A_N}}=\frac{2}{9}+\frac{2}{9}\left[\frac{S_{A_1A_3\cdots}+S_{A_2A_4\cdots}}{S_{A_1A_2\cdots A_{N-1}A_N}}\right]+\frac{1}{9}\left[\frac{S_{A_1A_4\cdots}+S_{A_2A_5\cdots}+S_{A_3A_6\cdots}}{S_{A_1A_2\cdots A_{N-1}A_N}}\right]$。

陸、結論

1. 奇數邊N(N ≥ 3)邊形$A_1A_2A_3\cdots A_{N-1}A_N$中，K 為不在多邊形上的一點，將 K 點分別連接 N 個頂點，得到 N 塊三角形ΔA_1KA_2、ΔA_2KA_3、⋯、$\Delta A_{N-1}KA_N$、ΔA_NKA_1，設G_1、G_2、⋯G_{N-1}、G_N依序為其重心，

   則 $\frac{S_{G_1G_2\cdots G_{N-1}G_N}}{S_{A_1A_2\cdots A_{N-1}A_N}}=\frac{2}{9}+\frac{1}{9}[\frac{S_{A_1A_3\cdots A_{N-2}A_NA_2A_4\cdots A_{N-3}A_{N-1}}}{S_{A_1A_2\cdots A_{N-1}A_N}}]$。

   而 $N=3$時，$\frac{S_{G_1G_2G_3}}{S_{A_1A_2A_3}}=\frac{2}{9}+\frac{1}{9}\left[\frac{S_{A_1A_3A_2}}{S_{A_1A_2A_3}}\right]=\frac{2}{9}+\left(-\frac{1}{9}\right)=\frac{1}{9}$。

2. 偶數邊N(N ≥ 4)邊形$A_1A_2A_3\cdots A_{N-1}A_N$中，K 為不在多邊形上的一點，將 K 點分別連接 N個頂點，得到 N 塊三角形ΔA_1KA_2、ΔA_2KA_3、⋯、$\Delta A_{N-1}KA_N$、ΔA_NKA_1，設G_1、G_2、⋯G_{N-1}、G_N依序為其重心，

   則 $\frac{S_{G_1G_2\cdots G_{N-1}G_N}}{S_{A_1A_2\cdots A_{N-1}A_N}}=\frac{2}{9}+\frac{1}{9}[\frac{S_{A_1A_3\cdots A_{N-3}A_{N-1}}+S_{A_2A_4\cdots A_{N-2}A_N}}{S_{A_1A_2\cdots A_{N-1}A_N}}]$。。

   而 $N=5$時，$\frac{S_{G_1G_2G_3G_4}}{S_{A_1A_2A_3A_4}}=\frac{2}{9}+\frac{1}{9}\left[\frac{S_{A_1A_3}+S_{A_2A_4}}{S_{A_1A_2A_3A_4}}\right]=\frac{2}{9}+\frac{1}{9}\times\mathbf{0}=\frac{2}{9}$。

3. 依序找奇數邊N(N ≥ 5)邊形$A_1A_2\cdots A_N$中連續三點，得到 **N** 塊三角形$\Delta A_1A_2A_3$、$\Delta A_2A_3A_4$、⋯、$\Delta A_{N-1}A_NA_1$、$\Delta A_NA_1A_2$，設H_1、H_2、⋯H_{N-1}、H_N依序為其重心，

   則 $\frac{S_{H_1H_2\cdots H_{N-1}H_N}}{S_{A_1A_2\cdots A_{N-1}A_N}}=\frac{2}{9}+\frac{2}{9}\left[\frac{S_{A_1A_3\cdots}}{S_{A_1A_2\cdots A_{N-1}A_N}}\right]+\frac{1}{9}\left[\frac{S_{A_1A_4\cdots}}{S_{A_1A_2\cdots A_{N-1}A_N}}\right]$

   或 $\frac{S_{H_1H_2\cdots H_{N-1}H_N}}{S_{A_1A_2\cdots A_{N-1}A_N}}=\frac{2}{9}+\frac{2}{9}\left[\frac{S_{A_1A_3\cdots}}{S_{A_1A_2\cdots A_{N-1}A_N}}\right]+\frac{1}{9}\left[\frac{S_{A_1A_4\cdots}+S_{A_2A_5\cdots}+S_{A_3A_6\cdots}}{S_{A_1A_2\cdots A_{N-1}A_N}}\right]$。

而 N = 5時，$\frac{S_{H_1H_2H_3H_4H_5}}{S_{A_1A_2A_3A_4A_5}}=\frac{2}{9}+\frac{2}{9}\left[\frac{S_{A_1A_3A_5A_2A_4}}{S_{A_1A_2A_3A_4A_5}}\right]+\frac{1}{9}\left[\frac{S_{A_1A_4A_2A_5A_3}}{S_{A_1A_2A_3A_4A_5}}\right]$

$=\frac{2}{9}+\frac{1}{9}\left[\frac{S_{A_1A_3A_5A_2A_4}}{S_{A_1A_2A_3A_4A_5}}\right]=\frac{S_{G_1G_2G_3G_4G_5}}{S_{A_1A_2A_3A_4A_5}}$。

可推得$S_{H_1H_2H_3H_4H_5}=S_{G_1G_2G_3G_4G_5}$。

4. 依序找偶數邊N(N ≥ 4)邊形$A_1A_2\cdots A_N$中連續三點，得到 **N** 塊三角形$\Delta A_1A_2A_3$、$\Delta A_2A_3A_4$、⋯、$\Delta A_{N-1}A_NA_1$、$\Delta A_NA_1A_2$，設H_1、H_2、⋯H_{N-1}、H_N依序為其重心，

則 $\frac{S_{H_1H_2\cdots H_{N-1}H_N}}{S_{A_1A_2\cdots A_{N-1}A_N}}=\frac{2}{9}+\frac{2}{9}\left[\frac{S_{A_1A_3\cdots}+S_{A_2A_4\cdots}}{S_{A_1A_2\cdots A_{N-1}A_N}}\right]+\frac{1}{9}\left[\frac{S_{A_1A_4\cdots}}{S_{A_1A_2\cdots A_{N-1}A_N}}\right]$

或 $\frac{S_{H_1H_2\cdots H_{N-1}H_N}}{S_{A_1A_2\cdots A_{N-1}A_N}}=\frac{2}{9}+\frac{2}{9}\left[\frac{S_{A_1A_3\cdots}+S_{A_2A_4\cdots}}{S_{A_1A_2\cdots A_{N-1}A_N}}\right]+\frac{1}{9}\left[\frac{S_{A_1A_4\cdots}+S_{A_2A_5\cdots}+S_{A_3A_6\cdots}}{S_{A_1A_2\cdots A_{N-1}A_N}}\right]$。

而 N = 4時，$\frac{S_{H_1H_2H_3H_4}}{S_{A_1A_2A_3A_4}}=\frac{2}{9}+\frac{2}{9}\left[\frac{S_{A_1A_3}+S_{A_2A_4}}{S_{A_1A_2A_3A_4}}\right]+\frac{1}{9}\left[\frac{S_{A_1A_4A_3A_2}}{S_{A_1A_2A_3A_4}}\right]=\frac{2}{9}+\frac{2}{9}\times 0-\frac{1}{9}=\frac{1}{9}$。

N = 6時，$\frac{S_{H_1H_2H_3H_4H_5H_6}}{S_{A_1A_2A_3A_4A_5A_6}}=\frac{2}{9}+\frac{2}{9}\left[\frac{S_{A_1A_3A_5}+S_{A_2A_4A_6}}{S_{A_1A_2A_3A_4A_5A_6}}\right]$。

柒、參考資料

1. 許志農。高中數學第三冊第三章與第四冊第一章。103 課綱。新北市：龍騰文化。
2. 梁勇能(93 年 9 月)。梯形內一塊四邊形面積的探討。數學傳播 28 卷 3 期，中央研究院數學研究所，P38~45。
3. 吳波(104 年 6 月)。N 對平行線猜想的證明。數學傳播 39 卷 2 期，中央研究院數學研究所，P94~96。
4. 連威翔(105 年 12 月)。回響:兩個幾何問題的另解。數學傳播 40 卷 4 期，中央研究院數學研究所，P63~70。

【評語】050412

本文在三角形及四邊形的研究相對完整，其面積比值為定值。

用向量方式推導面積，其面積比無特殊幾何意義。

參考文獻的探討可再加強。

作品海報

摘要

N(N ≥ 3)多邊形滿足「**N多邊形$A_1A_2\cdots A_{N-1}A_N$中，K為不在多邊形上的一點，將K點分別連接N個頂點，得到N塊三角形，設G_1、G_2、$\cdots G_{N-1}$、G_N依序為其重心，**

則 $\frac{S_{G_1G_2\cdots G_{N-1}G_N}}{S_{A_1A_2\cdots A_{N-1}A_N}}=\frac{2}{9}+\frac{1}{9}\left(\frac{S_{A_1A_3\cdots}}{S_{A_1A_2\cdots A_{N-1}A_N}}\right)$ 」。

無獨有偶，N(N ≥ 4)多邊形滿足「**依序找N邊形$A_1A_2\cdots A_N$中連續三點，得到N塊三角形，設H_1、H_2、$\cdots H_{N-1}$、H_N依序為其重心，則**$\frac{S_{H_1H_2\cdots H_{N-1}H_N}}{S_{A_1A_2\cdots A_{N-1}A_N}}=\frac{2}{9}+\frac{2}{9}\left(\frac{S_{A_1A_3\cdots}}{S_{A_1A_2\cdots A_{N-1}A_N}}\right)+\frac{1}{9}\left(\frac{S_{A_1A_4\cdots}}{S_{A_1A_2\cdots A_{N-1}A_N}}\right)$ 」。

壹、研究動機

數學傳播第40卷第4期的文章「**回響:兩個幾何問題的另解**」中，提到「**任意四邊形對角線上一點連接到一角頂，將此四邊形分割成三塊三角形，再分別取其重心，則此重心三角形的面積也是四邊形面積的$\frac{1}{9}$**」。這讓我們想到此定理在其它邊數的多邊形時，是否也有類似的性質？因此決定以此當作研究題材。

貳、研究目的

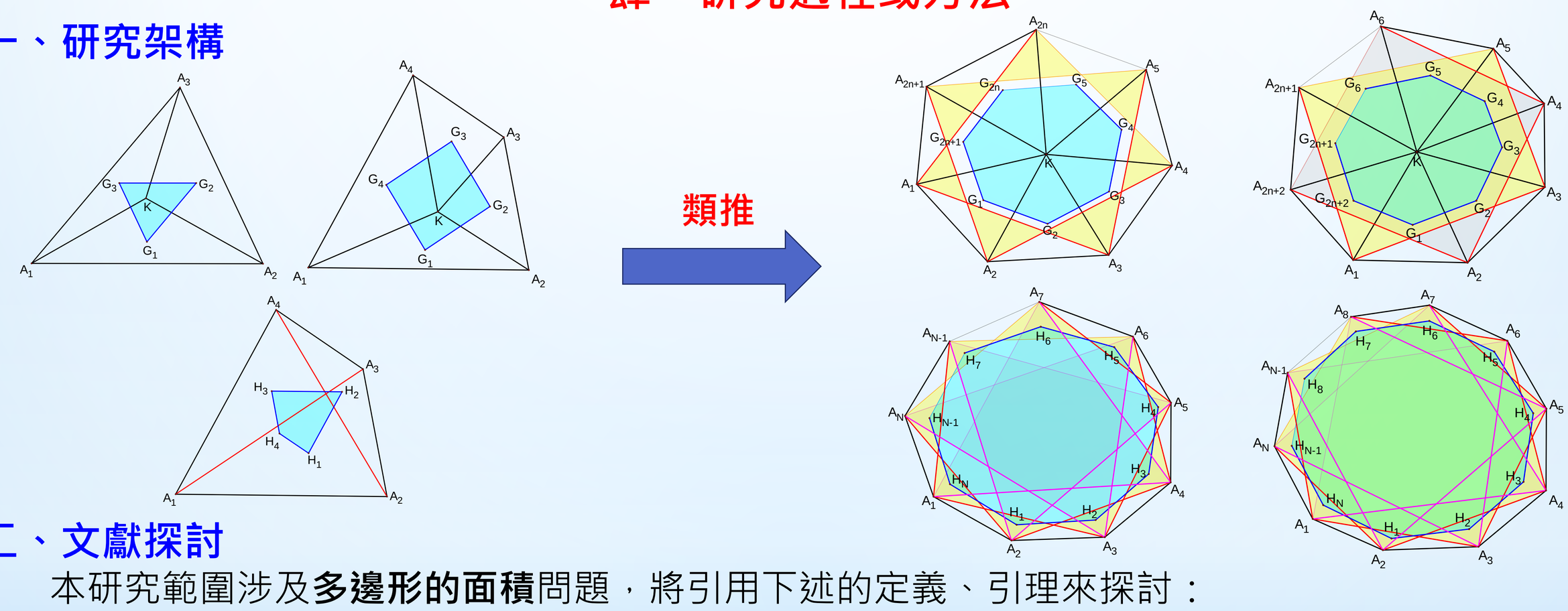
討論**其它N多邊形**時，如果試著找**N塊三角形**，再分別**取其重心**，則此**重心N多邊形**和**原N多邊形面積**之間的關係為何？我們試著利用**重心的性質**和**向量外積**的方法將兩者的面積表示出來，並證明這些關係為真。

參、研究設備及器材

本研究主要利用 **GSP**進行研究問題的**幾何實驗**，透過**實驗觀察**、**猜測**與**驗證**，然後提出**研究結果**並**加以證明**。

肆、研究過程或方法

一、研究架構



二、文獻探討

本研究範圍涉及**多邊形的面積**問題，將引用下述的定義、引理來探討：

對一般的平面多邊形(不論凸的、凹的，甚至是邊與邊有交點的多邊形)，我們作如下的定義。

定義一：對平面多邊形$A_1A_2\cdots A_n$，由下式定義的$S_{A_1A_2\cdots A_n}$稱為多邊形$A_1A_2\cdots A_n$的面積。

$$S_{A_1A_2A_3\cdots A_n}=S_{\Delta A_1A_2A_3}+S_{\Delta A_1A_3A_4}+S_{\Delta A_1A_4A_5}+\cdots+S_{\Delta A_1A_{n-1}A_n}$$

引理一：對平面多邊形$A_1A_2\cdots A_n$所在平面上任一點O，下式恆成立。

$$S_{A_1A_2A_3\cdots A_n}=S_{\Delta OA_1A_2}+S_{\Delta OA_2A_3}+S_{\Delta OA_3A_4}+\cdots+S_{\Delta OA_{n-1}A_n}+S_{\Delta OA_nA_1}$$

設**O**為給定的點，下面我們約定**P**表向量$\overrightarrow{OP}$。我們知道，三角形面積與向量外積「×」有關，由此我們不妨作如下定義。**定義二：**$S_{\Delta OAB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}=\frac{1}{2}\mathbf{A}\times\mathbf{B}$。

當O、A、B輪換時，$S_{\Delta OAB}$的值不變；當O、A、B中有兩者重合時，$S_{\Delta OAB}$的值為0；當O、A、B逆時針排列時，$S_{\Delta OAB}$的值為正；當O、A、B順時針排列時，$S_{\Delta OAB}$的值為負。**定義二**結合**引理一**立得：

引理二：$2S_{A_1A_2\cdots A_n}=A_1\times A_2+A_2\times A_3+A_3\times A_4+\cdots+A_{n-1}\times A_n+A_n\times A_1$。

三、探索過程

(一)原定理的證明

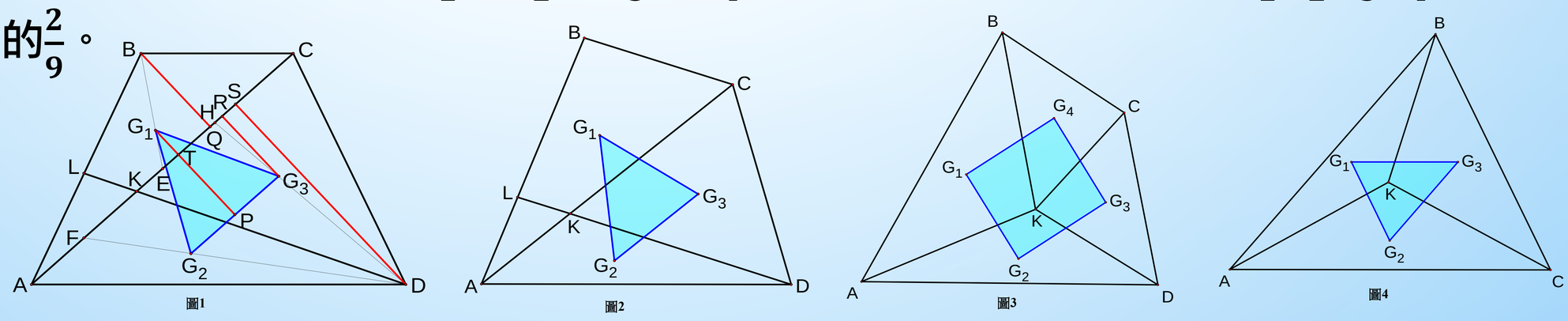
定理一：如圖1，梯形ABCD中，上底$\overline{BC}$和下底$\overline{AD}$，K為對角線$\overline{AC}$上一點，L為$\overleftrightarrow{DK}$和$\overline{AB}$的交點，且ΔABC、ΔAKD、ΔCKD的重心所圍成的三角形為$\Delta G_1G_2G_3$，則 $\Delta G_1G_2G_3$的面積＝梯形ABCD面積的 $\frac{1}{9}$。

其實，在上述的證明過程中，完全沒有用到圖1中ABCD為梯形的條件。作者對其它類型的四邊形ABCD做了一些觀察與檢驗後，發現定理一的結果依然成立，甚至在ABCD為凹四邊形時也不例外，而有以下的定理：

定理二：如圖2，四邊形ABCD中，K為對角線$\overline{AC}$上一點，L為$\overleftrightarrow{DK}$和$\overline{AB}$的交點，且ΔABC、ΔAKD、ΔCKD的重心所圍成的三角形為 $\Delta G_1G_2G_3$，則$\Delta G_1G_2G_3$的面積＝四邊形ABCD面積的 $\frac{1}{9}$。

(二)原定理的推廣

定理三：如圖3，四邊形ABCD中，K為不在四邊形上的一點，將K點分別連接四頂點，得到四塊三角形ΔAKB、ΔAKD、ΔCKD、ΔBKC，設G_1、G_2、G_3、G_4依序為其重心，則四邊形$G_1G_2G_3G_4$的面積＝四邊形ABCD面積的$\frac{2}{9}$。



【證明】以下為了方便計算，我們約定P表向量$\overrightarrow{KP}$。$\overrightarrow{KG_1}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB})=\frac{1}{3}(A+B)$，

$\overrightarrow{KG_2}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KD})=\frac{1}{3}(A+D)$，$\overrightarrow{KG_3}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{KC}+\overrightarrow{KD})=\frac{1}{3}(C+D)$，$\overrightarrow{KG_4}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KC})=\frac{1}{3}(B+C)$，

可得 $2S_{G_1G_2G_3G_4}=\overrightarrow{KG_1}\times\overrightarrow{KG_2}+\overrightarrow{KG_2}\times\overrightarrow{KG_3}+\overrightarrow{KG_3}\times\overrightarrow{KG_4}+\overrightarrow{KG_4}\times\overrightarrow{KG_1}=G_1\times G_2+G_2\times G_3+G_3\times G_4+G_4\times G_1$

$=\frac{1}{9}[(A+B)\times(A+D)+(A+D)\times(C+D)+(C+D)\times(B+C)+(B+C)\times(A+B)]$

$=\frac{1}{9}[(A\times D+B\times A+B\times D)+(A\times C+A\times D+D\times C)+(C\times B+D\times B+D\times C)+(B\times A+C\times A+C\times B)]$

$=\frac{1}{9}[2(A\times D+D\times C+C\times B+B\times A)]=\frac{2}{9}(2S_{ADCB})$，故$S_{G_1G_2G_3G_4}=\frac{2}{9}S_{ADCB}$。

定理四：如圖4，ΔABC中，K為不在三角形上的一點，將K點分別連接三頂點，得到三塊三角形ΔAKB、ΔAKC、ΔBKC，設G_1、G_2、G_3依序為其重心，則Δ$G_1G_2G_3$的面積= ΔABC面積的$\frac{1}{9}$。

【證明】$\overrightarrow{KG_1}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB})=\frac{1}{3}(A+B)$，$\overrightarrow{KG_2}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KC})=\frac{1}{3}(A+C)$，$\overrightarrow{KG_3}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KC})=\frac{1}{3}(B+C)$。

可得 $2S_{\Delta G_1G_2G_3}=\overrightarrow{KG_1}\times\overrightarrow{KG_2}+\overrightarrow{KG_2}\times\overrightarrow{KG_3}+\overrightarrow{KG_3}\times\overrightarrow{KG_1}=G_1\times G_2+G_2\times G_3+G_3\times G_1$

$=\frac{1}{9}[(A+B)\times(A+C)+(A+C)\times(B+C)+(B+C)\times(A+B)]$

$=\frac{1}{9}[(A\times C+B\times A+B\times C)+(A\times B+A\times C+C\times B)+(B\times A+C\times A+C\times B)]$

$=\frac{1}{9}(A\times C+C\times B+B\times A)=\frac{1}{9}(2S_{\Delta ACB})$，故$S_{\Delta G_1G_2G_3}=\frac{1}{9}S_{\Delta ACB}$。

定理五：如圖5，奇數邊多邊形 $A_1A_2A_3\cdots A_{2n}A_{2n+1}$ 中，K為不在多邊形上的一點，將K點分別連接2n+1個頂點，得到2n+1塊三角形 ΔA_1KA_2、ΔA_2KA_3、⋯、$\Delta A_{2n}KA_{2n+1}$、$\Delta A_{2n+1}KA_1$，設G_1、G_2、⋯G_{2n}、G_{2n+1}依序為其重心，則 $\frac{S_{G_1G_2\cdots G_{2n}G_{2n+1}}}{S_{A_1A_2\cdots A_{2n}A_{2n+1}}}=\frac{2}{9}+\frac{1}{9}[\frac{S_{A_1A_3\cdots A_{2n-1}A_{2n+1}A_2A_4\cdots A_{2n-2}A_{2n}}}{S_{A_1A_2\cdots A_{2n}A_{2n+1}}}]$。

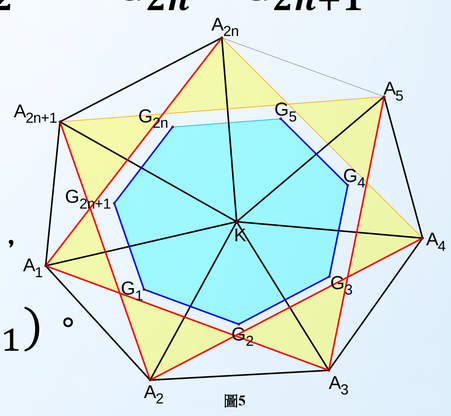


圖5

【證明】$\overrightarrow{KG_1}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{KA_1}+\overrightarrow{KA_2})=\frac{1}{3}(A_1+A_2)$，$\overrightarrow{KG_2}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{KA_2}+\overrightarrow{KA_3})=\frac{1}{3}(A_2+A_3)$，

$\overrightarrow{KG_3}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{KA_3}+\overrightarrow{KA_4})=\frac{1}{3}(A_3+A_4)$，⋯，$\overrightarrow{KG_{2n-1}}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{KA_{2n-1}}+\overrightarrow{KA_{2n}})=\frac{1}{3}(A_{2n-1}+A_{2n})$，

$\overrightarrow{KG_{2n}}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{KA_{2n}}+\overrightarrow{KA_{2n+1}})=\frac{1}{3}(A_{2n}+A_{2n+1})$，$\overrightarrow{KG_{2n+1}}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{KA_{2n+1}}+\overrightarrow{KA_1})=\frac{1}{3}(A_{2n+1}+A_1)$。

可得 $2S_{G_1G_2\cdots G_{2n}G_{2n+1}}$

$=\overrightarrow{KG_1}\times\overrightarrow{KG_2}+\overrightarrow{KG_2}\times\overrightarrow{KG_3}+\overrightarrow{KG_3}\times\overrightarrow{KG_4}+\cdots+\overrightarrow{KG_{2n-1}}\times\overrightarrow{KG_{2n}}+\overrightarrow{KG_{2n}}\times\overrightarrow{KG_{2n+1}}+\overrightarrow{KG_{2n+1}}\times\overrightarrow{KG_1}$

$=G_1\times G_2+G_2\times G_3+G_3\times G_4+\cdots+G_{2n-1}\times G_{2n}+G_{2n}\times G_{2n+1}+G_{2n+1}\times G_1$

$=\frac{1}{9}[(A_1+A_2)\times(A_2+A_3)+(A_2+A_3)\times(A_3+A_4)+(A_3+A_4)\times(A_4+A_5)+\cdots+$
$(A_{2n-1}+A_{2n})\times(A_{2n}+A_{2n+1})+(A_{2n}+A_{2n+1})\times(A_{2n+1}+A_1)+(A_{2n+1}+A_1)\times(A_1+A_2)]$

$=\frac{1}{9}[(A_1\times A_2+A_1\times A_3+A_2\times A_3)+(A_2\times A_3+A_2\times A_4+A_3\times A_4)+(A_3\times A_4+A_3\times A_5+A_4\times A_5)+\cdots+$
$(A_{2n-1}\times A_{2n}+A_{2n-1}\times A_{2n+1}+A_{2n}\times A_{2n+1})+(A_{2n}\times A_{2n+1}+A_{2n}\times A_1+A_{2n+1}\times A_1)+$
$(A_{2n+1}\times A_1+A_{2n+1}\times A_2+A_1\times A_2)]$

$=\frac{1}{9}[4S_{A_1A_2\cdots A_{2n}A_{2n+1}}+2S_{A_1A_3\cdots A_{2n-1}A_{2n+1}A_2A_4\cdots A_{2n-2}A_{2n}}]$，故 $\frac{S_{G_1G_2\cdots G_{2n}G_{2n+1}}}{S_{A_1A_2\cdots A_{2n}A_{2n+1}}}=\frac{2}{9}+\frac{1}{9}[\frac{S_{A_1A_3\cdots A_{2n-1}A_{2n+1}A_2A_4\cdots A_{2n-2}A_{2n}}}{S_{A_1A_2\cdots A_{2n}A_{2n+1}}}]$。

定理六：如圖6，偶數邊多邊形$A_1A_2A_3\cdots A_{2n+1}A_{2n+2}$中，K為不在多邊形上的一點，將K點分別連接2n+2個頂點，得到2n+2塊三角形ΔA_1KA_2、ΔA_2KA_3、⋯、Δ$A_{2n+1}KA_{2n+2}$、Δ$A_{2n+2}KA_1$，設G_1、G_2、⋯G_{2n+1}、G_{2n+2}依序為其重心，則 $\frac{S_{G_1G_2\cdots G_{2n+1}G_{2n+2}}}{S_{A_1A_2\cdots A_{2n+1}A_{2n+2}}}=\frac{2}{9}+\frac{1}{9}[\frac{S_{A_1A_3\cdots A_{2n-1}A_{2n+1}}+S_{A_2A_4\cdots A_{2n}A_{2n+2}}}{S_{A_1A_2\cdots A_{2n+1}A_{2n+2}}}]$。

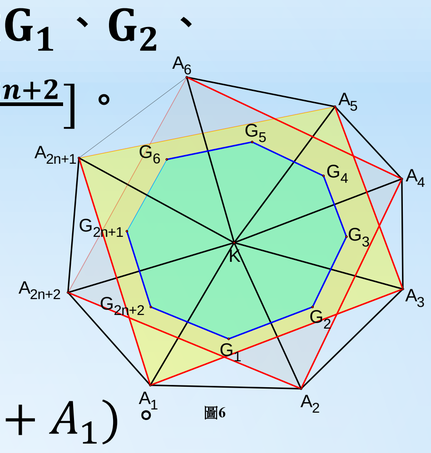


圖6

【證明】$\overrightarrow{KG_1}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{KA_1}+\overrightarrow{KA_2})=\frac{1}{3}(A_1+A_2)$，$\overrightarrow{KG_2}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{KA_2}+\overrightarrow{KA_3})=\frac{1}{3}(A_2+A_3)$，

$\overrightarrow{KG_3}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{KA_3}+\overrightarrow{KA_4})=\frac{1}{3}(A_3+A_4)$，⋯，$\overrightarrow{KG_{2n}}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{KA_{2n}}+\overrightarrow{KA_{2n+1}})=\frac{1}{3}(A_{2n}+A_{2n+1})$，

$\overrightarrow{KG_{2n+1}}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{KA_{2n+1}}+\overrightarrow{KA_{2n+2}})=\frac{1}{3}(A_{2n+1}+A_{2n+2})$，$\overrightarrow{KG_{2n+2}}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{KA_{2n+2}}+\overrightarrow{KA_1})=\frac{1}{3}(A_{2n+2}+A_1)$。

可得 $2S_{G_1G_2\cdots G_{2n+1}G_{2n+2}}$

$=\overrightarrow{KG_1}\times\overrightarrow{KG_2}+\overrightarrow{KG_2}\times\overrightarrow{KG_3}+\overrightarrow{KG_3}\times\overrightarrow{KG_4}+\cdots+\overrightarrow{KG_{2n}}\times\overrightarrow{KG_{2n+1}}+\overrightarrow{KG_{2n+1}}\times\overrightarrow{KG_{2n+2}}+\overrightarrow{KG_{2n+2}}\times\overrightarrow{KG_1}$

$=G_1\times G_2+G_2\times G_3+G_3\times G_4+\cdots+G_{2n}\times G_{2n+1}+G_{2n+1}\times G_{2n+2}+G_{2n+2}\times G_1$

$=\frac{1}{9}[(A_1+A_2)\times(A_2+A_3)+(A_2+A_3)\times(A_3+A_4)+(A_3+A_4)\times(A_4+A_5)+\cdots+$
$(A_{2n}+A_{2n+1})\times(A_{2n+1}+A_{2n+2})+(A_{2n+1}+A_{2n+2})\times(A_{2n+2}+A_1)+(A_{2n+2}+A_1)\times(A_1+A_2)]$

$=\frac{1}{9}[(A_1\times A_2+A_1\times A_3+A_2\times A_3)+(A_2\times A_3+A_2\times A_4+A_3\times A_4)+(A_3\times A_4+A_3\times A_5+A_4\times A_5)+\cdots+$
$(A_{2n}\times A_{2n+1}+A_{2n}\times A_{2n+2}+A_{2n+1}\times A_{2n+2})+(A_{2n+1}\times A_{2n+2}+A_{2n+1}\times A_1+A_{2n+2}\times A_1)+$
$(A_{2n+2}\times A_1+A_{2n+2}\times A_2+A_1\times A_2)]$

$=\frac{1}{9}[4S_{A_1A_2\cdots A_{2n+1}A_{2n+2}}+2(S_{A_1A_3\cdots A_{2n-1}A_{2n+1}}+S_{A_2A_4\cdots A_{2n}A_{2n+2}})]$

故 $\frac{S_{G_1G_2\cdots G_{2n+1}G_{2n+2}}}{S_{A_1A_2\cdots A_{2n+1}A_{2n+2}}}=\frac{2}{9}+\frac{1}{9}[\frac{S_{A_1A_3\cdots A_{2n-1}A_{2n+1}}+S_{A_2A_4\cdots A_{2n}A_{2n+2}}}{S_{A_1A_2\cdots A_{2n+1}A_{2n+2}}}]$。

伍、討論

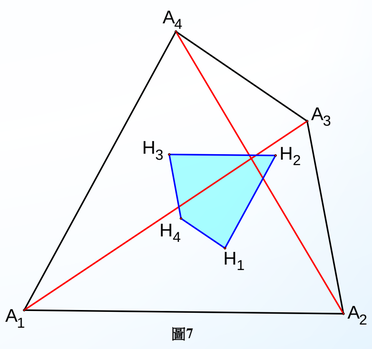


圖7

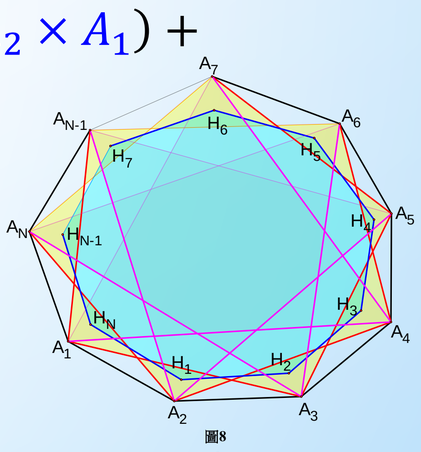


圖8

一、如圖7，依序找四邊形$A_1A_2A_3A_4$中連續三點，得到四塊三角形Δ$A_1A_2A_3$、Δ$A_2A_3A_4$、Δ$A_3A_4A_1$、Δ$A_4A_1A_2$，設H_1、H_2、H_3、H_4依序為其重心，則 $\frac{S_{H_1H_2H_3H_4}}{S_{A_1A_2A_3A_4}}=\frac{1}{9}$。

二、如圖8，依序找奇數邊N(N ≥ 5)邊形$A_1A_2\cdots A_N$中連續三點，得到N塊三角形Δ$A_1A_2A_3$、Δ$A_2A_3A_4$、⋯、Δ$A_{N-1}A_NA_1$、Δ$A_NA_1A_2$，設H_1、H_2、⋯H_{N-1}、H_N依序為其重心，

則 $\frac{S_{H_1H_2\cdots H_{N-1}H_N}}{S_{A_1A_2\cdots A_{N-1}A_N}}=\frac{2}{9}+\frac{2}{9}\left[\frac{S_{A_1A_3\cdots}}{S_{A_1A_2\cdots A_{N-1}A_N}}\right]+\frac{1}{9}\left[\frac{S_{A_1A_4\cdots}}{S_{A_1A_2\cdots A_{N-1}A_N}}\right]$或 $\frac{S_{H_1H_2\cdots H_{N-1}H_N}}{S_{A_1A_2\cdots A_{N-1}A_N}}=\frac{2}{9}+\frac{2}{9}\left[\frac{S_{A_1A_3\cdots}}{S_{A_1A_2\cdots A_{N-1}A_N}}\right]+\frac{1}{9}\left[\frac{S_{A_1A_4\cdots}+S_{A_2A_5\cdots}+S_{A_3A_6\cdots}}{S_{A_1A_2\cdots A_{N-1}A_N}}\right]$。

三、如圖9，依序找偶數邊N(N ≥ 4)邊形$A_1A_2\cdots A_N$中連續三點，得到N塊三角形$\Delta A_1A_2A_3$、$\Delta A_2A_3A_4$、⋯、$\Delta A_{N-1}A_NA_1$、$\Delta A_NA_1A_2$，設H_1、H_2、⋯H_{N-1}、H_N依序為其重心，

則 $\frac{S_{H_1H_2\cdots H_{N-1}H_N}}{S_{A_1A_2\cdots A_{N-1}A_N}}=\frac{2}{9}+\frac{2}{9}\left[\frac{S_{A_1A_3\cdots}+S_{A_2A_4\cdots}}{S_{A_1A_2\cdots A_{N-1}A_N}}\right]+\frac{1}{9}\left[\frac{S_{A_1A_4\cdots}}{S_{A_1A_2\cdots A_{N-1}A_N}}\right]$

或 $\frac{S_{H_1H_2\cdots H_{N-1}H_N}}{S_{A_1A_2\cdots A_{N-1}A_N}}=\frac{2}{9}+\frac{2}{9}\left[\frac{S_{A_1A_3\cdots}+S_{A_2A_4\cdots}}{S_{A_1A_2\cdots A_{N-1}A_N}}\right]+\frac{1}{9}\left[\frac{S_{A_1A_4\cdots}+S_{A_2A_5\cdots}+S_{A_3A_6\cdots}}{S_{A_1A_2\cdots A_{N-1}A_N}}\right]$。

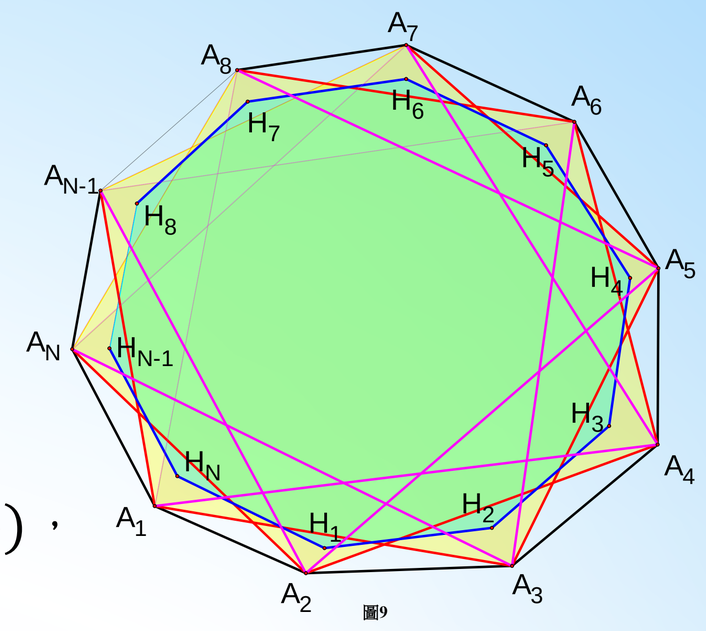


圖9

【證明】 $\overrightarrow{KH_1}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{KA_1}+\overrightarrow{KA_2}+\overrightarrow{KA_3}\right)=\frac{1}{3}(A_1+A_2+A_3)$，

$\overrightarrow{KH_2}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{KA_2}+\overrightarrow{KA_3}+\overrightarrow{KA_4}\right)=\frac{1}{3}(A_2+A_3+A_4)$，

$\overrightarrow{KH_3}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{KA_3}+\overrightarrow{KA_4}+\overrightarrow{KA_5}\right)=\frac{1}{3}(A_3+A_4+A_5)$，⋯，

$\overrightarrow{KH_{N-2}}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{KA_{N-2}}+\overrightarrow{KA_{N-1}}+\overrightarrow{KA_N}\right)=\frac{1}{3}(A_{N-2}+A_{N-1}+A_N)$，

$\overrightarrow{KH_{N-1}}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{KA_{N-1}}+\overrightarrow{KA_N}+\overrightarrow{KA_1}\right)=\frac{1}{3}(A_{N-1}+A_N+A_1)$，

$\overrightarrow{KH_N}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{KA_N}+\overrightarrow{KA_1}+\overrightarrow{KA_2}\right)=\frac{1}{3}(A_N+A_1+A_2)$。

可得 $2S_{H_1H_2\cdots H_{N-1}H_N}$

$=\overrightarrow{KH_1}\times\overrightarrow{KH_2}+\overrightarrow{KH_2}\times\overrightarrow{KH_3}+\overrightarrow{KH_3}\times\overrightarrow{KH_4}+\cdots+\overrightarrow{KH_{N-2}}\times\overrightarrow{KH_{N-1}}+\overrightarrow{KH_{N-1}}\times\overrightarrow{KH_N}+\overrightarrow{KH_N}\times\overrightarrow{KH_1}$

$=H_1\times H_2+H_2\times H_3+H_3\times H_4+\cdots+H_{N-2}\times H_{N-1}+H_{N-1}\times H_N+H_N\times H_1$

$=\frac{1}{9}[(A_1+A_2+A_3)\times(A_2+A_3+A_4)+(A_2+A_3+A_4)\times(A_3+A_4+A_5)+$
$(A_3+A_4+A_5)\times(A_4+A_5+A_6)+\cdots+(A_{N-2}+A_{N-1}+A_N)\times(A_{N-1}+A_N+A_1)+$
$(A_{N-1}+A_N+A_1)\times(A_N+A_1+A_2)+(A_N+A_1+A_2)\times(A_1+A_2+A_3)]$

$=\frac{1}{9}[(A_1\times A_2+A_1\times A_3+A_1\times A_4+A_2\times A_3+A_2\times A_4+A_3\times A_2+A_3\times A_4)+$
$(A_2\times A_3+A_2\times A_4+A_2\times A_5+A_3\times A_4+A_3\times A_5+A_4\times A_3+A_4\times A_5)+$
$(A_3\times A_4+A_3\times A_5+A_3\times A_6+A_4\times A_5+A_4\times A_6+A_5\times A_4+A_5\times A_6)+\cdots+$
$(A_{N-2}\times A_{N-1}+A_{N-2}\times A_N+A_{N-2}\times A_1+A_{N-1}\times A_N+A_{N-1}\times A_1+A_N\times A_{N-1}+A_N\times A_1)+$
$(A_{N-1}\times A_N+A_{N-1}\times A_1+A_{N-1}\times A_2+A_N\times A_1+A_N\times A_2+A_1\times A_N+A_1\times A_2)+$
$(A_N\times A_1+A_N\times A_2+A_N\times A_3+A_1\times A_2+A_1\times A_3+A_2\times A_1+A_2\times A_3)]$

$=\frac{1}{9}[6S_{A_1A_2\cdots A_{N-1}A_N}+4(S_{A_1A_3\cdots}+S_{A_2A_4\cdots})+2S_{A_1A_4\cdots}+2S_{A_1A_NA_{N-1}\cdots A_3A_2}]$

或 $\frac{1}{9}[6S_{A_1A_2\cdots A_{N-1}A_N}+4(S_{A_1A_3\cdots}+S_{A_2A_4\cdots})+2(S_{A_1A_4\cdots}+S_{A_2A_5\cdots}+S_{A_3A_6\cdots})+2S_{A_1A_NA_{N-1}\cdots A_3A_2}]$

$=\frac{1}{9}[4S_{A_1A_2\cdots A_{N-1}A_N}+4(S_{A_1A_3\cdots}+S_{A_2A_4\cdots})+2S_{A_1A_4\cdots}]$

或$\frac{1}{9}[4S_{A_1A_2\cdots A_{N-1}A_N}+4(S_{A_1A_3\cdots}+S_{A_2A_4\cdots})+2(S_{A_1A_4\cdots}+S_{A_2A_5\cdots}+S_{A_3A_6\cdots})]$

故 $\frac{S_{H_1H_2\cdots H_{N-1}H_N}}{S_{A_1A_2\cdots A_{N-1}A_N}}=\frac{2}{9}+\frac{2}{9}\left[\frac{S_{A_1A_3\cdots}+S_{A_2A_4\cdots}}{S_{A_1A_2\cdots A_{N-1}A_N}}\right]+\frac{1}{9}\left[\frac{S_{A_1A_4\cdots}}{S_{A_1A_2\cdots A_{N-1}A_N}}\right]$

或 $\frac{S_{H_1H_2\cdots H_{N-1}H_N}}{S_{A_1A_2\cdots A_{N-1}A_N}}=\frac{2}{9}+\frac{2}{9}\left[\frac{S_{A_1A_3\cdots}+S_{A_2A_4\cdots}}{S_{A_1A_2\cdots A_{N-1}A_N}}\right]+\frac{1}{9}\left[\frac{S_{A_1A_4\cdots}+S_{A_2A_5\cdots}+S_{A_3A_6\cdots}}{S_{A_1A_2\cdots A_{N-1}A_N}}\right]$。

陸、結論

一、奇數邊N(N ≥ 3)邊形$A_1A_2A_3\cdots A_{N-1}A_N$中，K為不在多邊形上的一點，將K點分別連接N個頂點，得到N塊三角形ΔA_1KA_2、ΔA_2KA_3、⋯、$\Delta A_{N-1}KA_N$、ΔA_NKA_1，設G_1、G_2、⋯G_{N-1}、G_N依序為其重心，

則$\frac{S_{G_1G_2\cdots G_{N-1}G_N}}{S_{A_1A_2\cdots A_{N-1}A_N}}=\frac{2}{9}+\frac{1}{9}[\frac{S_{A_1A_3\cdots A_{N-2}A_NA_2A_4\cdots A_{N-3}A_{N-1}}}{S_{A_1A_2\cdots A_{N-1}A_N}}]$。而N = 3時，$\frac{S_{G_1G_2G_3}}{S_{A_1A_2A_3}}=\frac{2}{9}+\frac{1}{9}\left[\frac{S_{A_1A_3A_2}}{S_{A_1A_2A_3}}\right]=\frac{2}{9}+\left(-\frac{1}{9}\right)=\frac{1}{9}$。

二、偶數邊N(N ≥ 4)邊形$A_1A_2A_3\cdots A_{N-1}A_N$中，K為不在多邊形上的一點，將K點分別連接N個頂點，得到N塊三角形ΔA_1KA_2、ΔA_2KA_3、⋯、$\Delta A_{N-1}KA_N$、ΔA_NKA_1，設G_1、G_2、⋯G_{N-1}、G_N依序為其重心，

則$\frac{S_{G_1G_2\cdots G_{N-1}G_N}}{S_{A_1A_2\cdots A_{N-1}A_N}}=\frac{2}{9}+\frac{1}{9}[\frac{S_{A_1A_3\cdots A_{N-3}A_{N-1}}+S_{A_2A_4\cdots A_{N-2}A_N}}{S_{A_1A_2\cdots A_{N-1}A_N}}]$。而N = 4時，$\frac{S_{G_1G_2G_3G_4}}{S_{A_1A_2A_3A_4}}=\frac{2}{9}+\frac{1}{9}\left[\frac{S_{A_1A_3}+S_{A_2A_4}}{S_{A_1A_2A_3A_4}}\right]=\frac{2}{9}$。

三、依序找奇數邊N(N ≥ 5)邊形$A_1A_2\cdots A_N$中連續三點，得到**N**塊三角形$\Delta A_1A_2A_3$、$\Delta A_2A_3A_4$、⋯、$\Delta A_{N-1}A_NA_1$、$A_NA_1A_2$，設H_1、H_2、⋯H_{N-1}、H_N依序為其重心，

則$\frac{S_{H_1H_2\cdots H_{N-1}H_N}}{S_{A_1A_2\cdots A_{N-1}A_N}}=\frac{2}{9}+\frac{2}{9}\left[\frac{S_{A_1A_3\cdots}}{S_{A_1A_2\cdots A_{N-1}A_N}}\right]+\frac{1}{9}\left[\frac{S_{A_1A_4\cdots}}{S_{A_1A_2\cdots A_{N-1}A_N}}\right]$

或 $\frac{S_{H_1H_2\cdots H_{N-1}H_N}}{S_{A_1A_2\cdots A_{N-1}A_N}}=\frac{2}{9}+\frac{2}{9}\left[\frac{S_{A_1A_3\cdots}}{S_{A_1A_2\cdots A_{N-1}A_N}}\right]+\frac{1}{9}\left[\frac{S_{A_1A_4\cdots}+S_{A_2A_5\cdots}+S_{A_3A_6\cdots}}{S_{A_1A_2\cdots A_{N-1}A_N}}\right]$。

而N = 5時，$\frac{S_{H_1H_2H_3H_4H_5}}{S_{A_1A_2A_3A_4A_5}}=\frac{2}{9}+\frac{2}{9}\left[\frac{S_{A_1A_3A_5A_2A_4}}{S_{A_1A_2A_3A_4A_5}}\right]+\frac{1}{9}\left[\frac{S_{A_1A_4A_2A_5A_3}}{S_{A_1A_2A_3A_4A_5}}\right]=\frac{2}{9}+\frac{1}{9}\left[\frac{S_{A_1A_3A_5A_2A_4}}{S_{A_1A_2A_3A_4A_5}}\right]=\frac{S_{G_1G_2G_3G_4G_5}}{S_{A_1A_2A_3A_4A_5}}$。

可推得$S_{H_1H_2H_3H_4H_5}=S_{G_1G_2G_3G_4G_5}$。

四、依序找偶數邊N(N ≥ 4)邊形$A_1A_2\cdots A_N$中連續三點，得到**N**塊三角形$\Delta A_1A_2A_3$、$\Delta A_2A_3A_4$、⋯、$\Delta A_{N-1}A_NA_1$、$\Delta A_NA_1A_2$，設H_1、H_2、⋯H_{N-1}、H_N依序為其重心，

則$\frac{S_{H_1H_2\cdots H_{N-1}H_N}}{S_{A_1A_2\cdots A_{N-1}A_N}}=\frac{2}{9}+\frac{2}{9}\left[\frac{S_{A_1A_3\cdots}+S_{A_2A_4\cdots}}{S_{A_1A_2\cdots A_{N-1}A_N}}\right]+\frac{1}{9}\left[\frac{S_{A_1A_4\cdots}}{S_{A_1A_2\cdots A_{N-1}A_N}}\right]$

或 $\frac{S_{H_1H_2\cdots H_{N-1}H_N}}{S_{A_1A_2\cdots A_{N-1}A_N}}=\frac{2}{9}+\frac{2}{9}\left[\frac{S_{A_1A_3\cdots}+S_{A_2A_4\cdots}}{S_{A_1A_2\cdots A_{N-1}A_N}}\right]+\frac{1}{9}\left[\frac{S_{A_1A_4\cdots}+S_{A_2A_5\cdots}+S_{A_3A_6\cdots}}{S_{A_1A_2\cdots A_{N-1}A_N}}\right]$。

而N = 4時，$\frac{S_{H_1H_2H_3H_4}}{S_{A_1A_2A_3A_4}}=\frac{2}{9}+\frac{2}{9}\left[\frac{S_{A_1A_3}+S_{A_2A_4}}{S_{A_1A_2A_3A_4}}\right]+\frac{1}{9}\left[\frac{S_{A_1A_4A_3A_2}}{S_{A_1A_2A_3A_4}}\right]=\frac{2}{9}+\frac{2}{9}\times 0-\frac{1}{9}=\frac{1}{9}$。

N = 6時，$\frac{S_{H_1H_2H_3H_4H_5H_6}}{S_{A_1A_2A_3A_4A_5A_6}}=\frac{2}{9}+\frac{2}{9}\left[\frac{S_{A_1A_3A_5}+S_{A_2A_4A_6}}{S_{A_1A_2A_3A_4A_5A_6}}\right]$。

柒、參考資料及其他

1. 許志農。高中數學第三冊第三章與第四冊第一章。103課綱。新北市：龍騰文化。
2. 梁勇能(93年9月)。梯形內一塊四邊形面積的探討。數學傳播28卷3期，中央研究院數學研究所，P38~45。
3. 吳波(104年6月)。N對平行線猜想的證明。數學傳播39卷2期，中央研究院數學研究所，P94~96。
4. 連威翔(105年12月)。回響:兩個幾何問題的另解。數學傳播40卷4期，中央研究院數學研究所，P63~70。