

中華民國第 57 屆中小學科學展覽會

作品說明書

高級中等學校組 數學科

第二名

050410

百轉千迴繞曲線

-費氏螺線推廣 k 階數列曲線之探討

學校名稱：臺北市立成淵高級中學

作者： 高二 蔡之捷 高二 許瑜庭 高二 林怡君	指導老師： 林鳳美
---	------------------

關鍵詞：齊次線性遞迴數列、費氏數列、數列螺線

摘要

二階實係數費氏遞迴關係，定義出費氏數列 $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots$ 。它表現了自然界生物的生長現象，並且具有許多有趣的性質：

1. 後前項極限比為黃金分割的比值，也稱為黃金比例。
2. 利用費氏數列的各項為邊作正方形，依序以逆時針排列，由 0 點出發，不斷在正方形內逆時針作出四分之一的圓弧，連結成一條螺線，稱為費氏螺線，這近似於鸚鵡螺的螺線。

本作品中，我們嘗試將上述二階遞迴關係推廣到一般 $k (> 2)$ 階實係數遞迴關係的情形。我們發現上述二個結果有各種變化，但萬變不離其宗，收穫是豐富且多樣的。例如：相應的曲線有螺線與非螺線之分，並且都可以解釋為大自然的各種圖像。

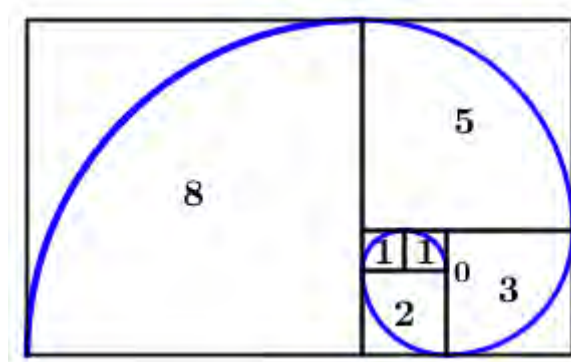


圖 1：費氏螺線

壹、研究動機

在 13 世紀初，義大利數學家**費波那契** (Fibonacci) 所著《**算盤書**》一書中談到兔子的生長問題，可用二階遞迴關係來描述如下

$$\begin{cases} F_0 = 0, & F_1 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, & n \geq 2 \end{cases}$$

後人寫成數列形式為 $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots$ ，稱為**費氏數列**(Fibonacci sequence)，參考資料[5]，此數列也表現了自然界生物的許多生長現象，如：鳳梨、向日葵、松果以及鸚鵡螺。在本研究中，我們從費氏螺線的有趣又完美性質推廣至 k 階齊次線性遞迴數列相應的各種曲線，過程

中我們配合高中數學課程中學過的重要概念「數列與級數」、「多項式函數」、「直線與圓」、「極限與函數」、「多項式函數的微積分」等單元來解決研究的問題。

貳、研究目的

- 一、依照費氏螺線的樣式，建構推廣費氏矩形及費氏螺線。
- 二、探討 k 階遞迴關係中係數在何種條件下，形成推廣費氏螺線或非螺線的性質。
- 三、在 k 階齊次線性遞迴數列中，探討後前項極限比與其特征方程式的實根之性質，再論證出形成螺線以及非螺線的充分條件。
- 四、建構 k 階齊次線性遞迴數列相應的曲線，並且將曲線解釋成大自然的圖像。

參、研究設備及器材

筆、紙、電腦、Geogebra5.0 動態幾何繪圖板、電腦程式 Visual Basic。

肆、研究過程或方法

一、文獻探討

(一) k 階實係數齊次線性遞迴數列

本研究是將費氏數列推廣到 k 階齊次線性遞迴數列，為了方便推廣，將初始條件定義為第 $-(k-2), -(k-1), \dots, 0$ 項值皆為 0，即 $a_0 = a_{-1} = \dots = a_{-(k-2)} = 0$ ，又令 $a_1 = 1$ 。

例如：當 $k=5$ 時，初始條件為 $a_{-3} = a_{-2} = a_{-1} = a_0 = 0$ 以及 $a_1 = 1$ 。

【定義 1】 (k 階實係數齊次線性遞迴數列，參考資料[2]與[3])

給定一數列 $\{a_n\}$ ，若存在 $k (\geq 2)$ 個實數 $c_1, c_2, c_3, \dots, c_k$ ，其中 $c_k \neq 0$ ，滿足兩條件：

(i) (初始條件) $a_1 = 1, a_i = 0$ ，其中 $i = 0, -1, -2, \dots, -(k-2)$

(ii) (遞迴關係) $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + c_3 a_{n-3} + \dots + c_{k-1} a_{n-k+1} + c_k a_{n-k}$ ， $n \geq 2$ (1)

則稱數列 $\{a_n\}$ 為 k 階實係數齊次線性遞迴數列。

對於遞迴關係式(1)，若以 $a_n = x^n$ 的形式代入(1)式就得到 n 次代數方程式

$$x^n - c_1 x^{n-1} - c_2 x^{n-2} - \cdots - c_k x^{n-k} = 0.$$

因為零根不是我們所要的，故可消去 x^{n-k} 的因式而得到以下的 k 次方程式：

$$f(x) = x^k - c_1 x^{k-1} - c_2 x^{k-2} - c_3 x^{k-3} - \cdots - c_{k-1} x - c_k = 0 \quad (2)$$

其中(2)式稱為(1)式的**特徵方程式**，參考資料[1]與[3]。

【預備定理 1】(相異實根的情形，參考資料[1]與[3])

在 k 階遞迴關係(1)式中，若其特徵根 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ 均相異，則

$$a_n = d_1 \alpha_1^n + d_2 \alpha_2^n + d_3 \alpha_3^n + \cdots + d_k \alpha_k^n$$

為此遞迴關係的一般解，其中 d_i ($i=1, 2, \dots, k$) 為常數。

特別是當(1)式為費氏數列時，其特徵方程式為 $f(x) = x^2 - x - 1 = 0$ ，解得 $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ ，其

中正實根為 $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ 。又 $\phi = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1.618$ (**預備定理 2**)，此極限 ϕ 為黃金分割的比值，

也稱為**黃金比例**，參考資料[4]與[5]。簡言之，費氏數列的後前項之極限比等於其特徵方程式的正實根，證明如下。

【預備定理 2】(費氏數列的後前項之極限比，參考資料[4]與[5])

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

【證明】因為 $F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \forall n \geq 1$ ，所以 $F_n < F_{n+1} < 2F_n$ 。又 $F_n > 0$ ，則

對於所有 $n \geq 1$ ，由 $F_n < F_{n+1} < 2F_n$ 得到 $1 < \frac{F_{n+1}}{F_n} < 2$ 。

費氏數列滿足 $F_{n+3}F_n - F_{n+2}F_{n+1} = (-1)^{n+1}$ ，可由數學歸納法證明。

同除以 $F_{n+2}F_n$ ，於是

$$\frac{F_{n+3}}{F_{n+2}} - \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{(-1)^{n+1}}{F_{n+2}F_n}. \quad (3)$$

令 $G_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}$ ，並考慮 $\{G_n\}$ 的奇數項與偶數項所成的子數列，分別為

$$\{O_n\} = \{G_{2n-1}\} = \left\{ \frac{F_{2n}}{F_{2n-1}} \right\} \text{ 與 } \{E_n\} = \{G_{2n}\} = \left\{ \frac{F_{2n+1}}{F_{2n}} \right\}。$$

則由(3)式得知數列 $\{O_n\}$ 為遞增數列，數列 $\{E_n\}$ 為遞減數列，所以數列 $\{O_n\}$ 遞增有上界，故 $\lim_{n \rightarrow \infty} O_n$ 存在。同樣地數列 $\{E_n\}$ 遞減有下界，故 $\lim_{n \rightarrow \infty} E_n$ 存在。

所以，可令 $\lim_{n \rightarrow \infty} O_n = \alpha$ ，由於費氏數列滿足 $F_{2n} = F_{2n-1} + F_{2n-2}$ 表示成 $\frac{F_{2n}}{F_{2n-1}} = 1 + \frac{F_{2n-2}}{F_{2n-1}}$ ，則

$$O_n = 1 + \frac{1}{O_{n-1}}，\text{兩邊取極限得到}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} O_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{O_{n-1}} \right) = 1 + \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} O_{n-1}}；$$

即 $\alpha = 1 + \frac{1}{\alpha}$ 或 $\alpha^2 - \alpha - 1 = 0$ 。求解得到 $\alpha = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ ，取“+”，故 $\lim_{n \rightarrow \infty} O_n = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ 。

同理，可得 $\lim_{n \rightarrow \infty} E_n = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ ，因此， $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ 。 ■

數學家笛卡兒提出實係數多項式 $f(x) = 0$ 的正實根或負實根的個數之法則：

【笛卡兒符號法則 (Descartes's Rule of Signs)】(參考資料[7])

設 $f(x)$ 為實係數多項式，按降冪方式排列後，相鄰的非零係數符號的變化次數為 N ，若 $f(x) = 0$ 之正實根的個數為 N^+ ，則 $N \geq N^+$ ，並且 $N - N^+$ 為非負偶數。
其次，若 $f(-x)$ 中的相鄰的非零係數符號的變化次數為 N' ，而 $f(-x) = 0$ 之負實根的個數為 N^- ，則 $N' \geq N^-$ ，並且 $N' - N^-$ 為非負偶數。

(二) 費氏螺線

費氏數列 $\{F_n\}$ 滿足一個性質：

$$\sum_{i=1}^n F_i^2 = F_n F_{n+1}, \quad \forall n \in N. \quad (4)$$

(4)式改用幾何的面積描述，就是以相鄰費氏數為邊長的矩形，可以被分割成若干個以費氏數為邊長的正方形，參見圖 1。

【定義 2】(費氏螺線，參考資料[4]與[5])

利用費氏數列 $\{F_n\}: F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ 的各項為邊作正方形，依序以逆時針排列，由 0 點出發，不斷在正方形內逆時針作出四分之一的圓弧，連結成一條螺線，稱為**費氏螺線**，參見圖 1，這近似於鸚鵡螺的螺線。

二、探討數列曲線的性質

本研究提出的第一個有趣的問題是：「若依照費氏螺線的樣式(逆時針旋轉)，推廣 k 階齊次線性遞迴數列時產生的曲線均為螺線嗎？」

(一) 建構數列曲線

【定義 3】(數列方形)

在**定義 1**的數列 $\{a_n\}$ 中，若是 $0 < a_1 < a_2 < a_3 < \dots$ 的情形(數列嚴格遞增)，我們給定一個以頂點為 V_1, V_2, V_3, V_4 且邊長 a_1 的正方形，記作**數列方形** $a_1(V_1, V_2, V_3, V_4)$ 。接著要給定邊長 a_2 的**數列方形**，其建構方式是後一個數列方形的第一個頂點為前一個數列方形的倒數第二個頂點，記作**數列方形** $a_2(V_3, V_5, V_6, V_7)$ 。依照同樣建構方式，得到**數列方形** $a_3(V_6, V_8, V_9, V_{10})$ 、**數列方形** $a_4(V_9, V_{11}, V_{12}, V_{13})$ ，參見圖 2。於是得到第 h 步驟所產生 k 階齊次線性遞迴數列 $\{a_n\}$ 的**數列方形** $a_h(V_{3h-3}, V_{3h-1}, V_{3h}, V_{3h+1})$ ，其中 h 為正整數。

其次，若 $a_i = 0$ ($i = 2, 3, \dots, n$) 時，則不會產生邊長 a_i 的數列方形，但若 $a_i < 0$ 時，數列方形的邊長則為 $|a_i|$ 。另外 a_i 負號是與產生數列曲線的方向有關，詳見**定義 5**。注意，**定義 3** 中數列方形有可能出現重疊，參見圖 3 中數列 $\{a_n\}: a_n = \frac{1}{3}a_{n-1} + \frac{1}{3}a_{n-2} + \frac{1}{3}a_{n-3}$ 的數列方形。

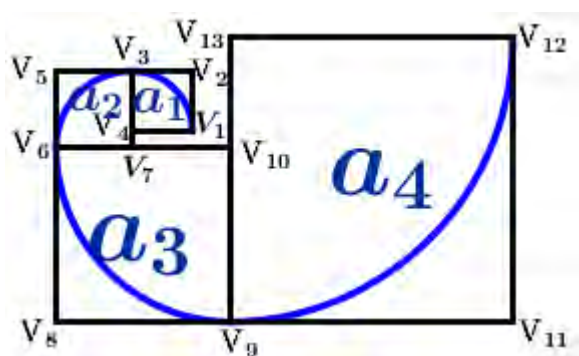


圖 2： a_1 至 a_4 所產生數列方形與數列螺線

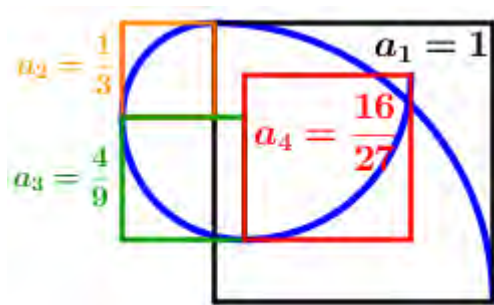


圖 3：數列方形是可重疊的

【定義 4】(數列螺線)

在**定義 3**的數列方形，參見圖 2。若 $0 < a_1 < a_2 < a_3 < \dots$ 的情形(數列嚴格遞增)，先給定以起點 V_4 為圓心 $(0,0)$ 且 a_1 為半徑畫 $\frac{1}{4}$ 個圓弧 $\widehat{V_1V_3}$ ，接著以 V_7 為圓心且 a_2 為半徑畫 $\frac{1}{4}$ 個圓弧 $\widehat{V_3V_6}$ ，接著以 V_{10} 為圓心且 a_3 為半徑畫 $\frac{1}{4}$ 個圓弧 $\widehat{V_6V_9}$ ，接著以 V_{13} 為圓心且 a_4 為半徑畫 $\frac{1}{4}$ 個圓弧 $\widehat{V_9V_{12}}$ 。依照同樣方式，再以 a_k 為半徑畫 $\frac{1}{4}$ 個圓弧 $\widehat{V_{3k-3}V_{3k}}$ ，其中 k 為大於 1 的正整數，我們將此所形成曲線稱為 k 階數列螺線，簡稱數列螺線，參見圖 2 中藍色的曲線。

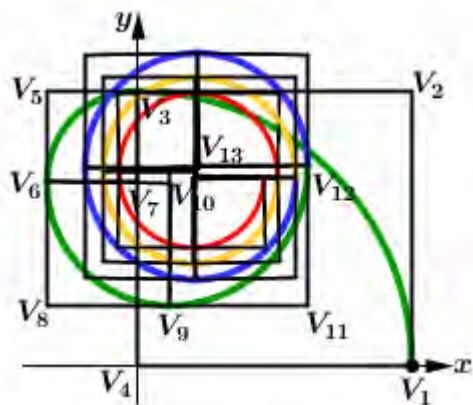
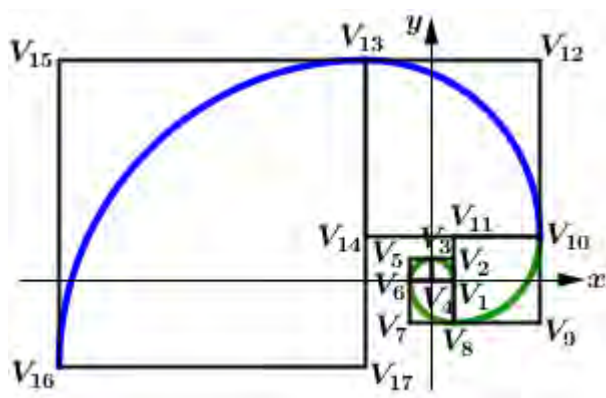


圖 4：數列 $\{a_n\}: a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} + a_{n-4}$ 圖 5：數列 $\{a_n\}: a_n = \frac{1}{3}a_{n-1} + \frac{1}{3}a_{n-2} + \frac{1}{4}a_{n-3}$

注意，若考慮 $0 < a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots$ (數列遞增)，由於有“等號”，所得到有前後項相同的情形，會與**定義 4**中頂點標號有所不同，但仍可依照費氏螺線的樣式前進的螺線，而不致影響數列螺線的建構，參見圖 4 中數列 $\{a_n\}: a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} + a_{n-4}$ 。又如：在圖 5 中數列 $\{a_n\}: a_n = \frac{1}{3}a_{n-1} + \frac{1}{3}a_{n-2} + \frac{1}{4}a_{n-3}$ ，從第 6 項後才形成螺線的情形。特別地，**本研究中也將數列 $\{a_n\}$ 在某項後才形成螺線的情形，列入數列螺線的範疇**。同樣地，以下**定義 5**中數列曲線在某項後才形成曲線的情形，本研究中也列入數列曲線的範疇。

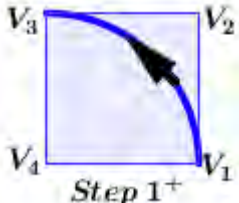
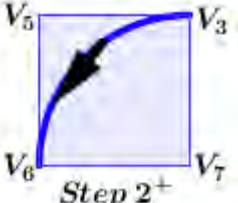
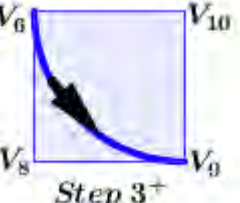
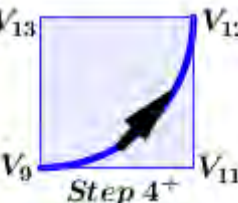
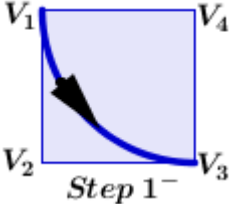
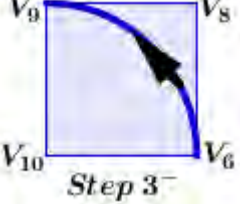
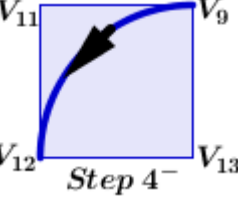
【定義 5】(數列曲線)

在**定義 3**的數列方形，參見圖 2。若除了 $a_1 = 1$ 外，其餘每一項 a_i ($i = 2, 3, \dots, n$) 均為實數，則數列 $\{a_n\}$ 所產生的曲線稱為 k 階數列曲線，簡稱為數列曲線。注意，當 a_i ($i = 2, 3, \dots, n$) 為負實數或 0，此時不一定會產生數列螺線，我們稱此非螺線的曲線為數列非螺線。因此，本研

究的數列曲線包含數列螺線與數列非螺線。

當各項 a_i 均為正實數時(例如費氏螺線)，數列曲線是採四個循環步驟 $Step\ 1^+$ 、 $Step\ 2^+$ 、 $Step\ 3^+$ 、 $Step\ 4^+$ 等四個步驟。但當 a_i 為負實數時，數列曲線就會產生另外四個循環步驟 $Step\ 1^-$ 、 $Step\ 2^-$ 、 $Step\ 3^-$ 、 $Step\ 4^-$ 的情形。簡言之，「 a_i 的負號」代表曲線方向與「 a_i 的正號」相反，並且凹性是相反的。然而，若 a_i 為零的情形，是代表曲線沒有移動。

表 1： $a_i > 0$ 或 $a_i < 0$ 各四個循環步驟

a_i	$a_1(V_1, V_2, V_3, V_4)$	$a_2(V_3, V_5, V_6, V_7)$	$a_3(V_6, V_8, V_9, V_{10})$	$a_4(V_9, V_{11}, V_{12}, V_{13})$
$a_i > 0$				
$a_i < 0$				

注意， a_i 的值有正有負的情形，仍保持四個循環步驟建構，例如：數列 $\{a_n\}$ ： $a_n = -a_{n-1} + a_{n-2}$ ，則有 $a_1 = 1, a_2 = -1, a_3 = 2, a_4 = -3, a_5 = 5, \dots$ 。此數列符合的循環步驟依序為 $Step\ 1^+, Step\ 2^-$ ， $Step\ 3^+, Step\ 4^-$ 之後仍保持這四個循環步驟建構，注意數列方形的邊長為 $|a_n|$ ，我們得到以下圖 6 的數列非螺線。

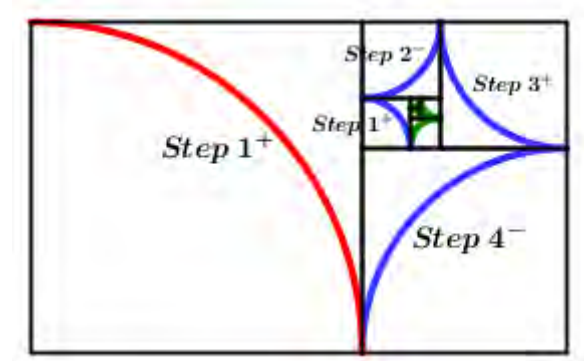


圖 6：數列 $\{a_n\}$ ： $a_n = -a_{n-1} + a_{n-2}$

□

若不考慮數列方形的放大比例，當 a_i ($i = 2, 3, \dots, n$) 皆為正實數時，給定某連續四項的曲線，即是表 2 中 (a) 的圖形。但考慮 a_i (不為零) 至少有一個為負實數時，由於 $a_1 = 1 > 0$ ，給定某連續四項的曲線，即是表 2 中 (b) ~ (h) 的圖形。

表 2： a_i 至少有一個為負實數可能產生某連續四項的曲線是 (b) ~ (h) 的圖形

$(+, +, +, +)$ Step 2 ⁺ Step 1 ⁺ Step 3 ⁺ Step 4 ⁺ (a)	$(+, +, +, -)$ Step 2 ⁺ Step 1 ⁺ Step 3 ⁺ Step 4 ⁻ (b)	$(+, +, -, +)$ Step 4 ⁺ Step 3 ⁻ Step 2 ⁺ Step 1 ⁺ (c)	$(+, -, -, +)$ Step 4 ⁺ Step 3 ⁻ Step 2 ⁻ Step 1 ⁺ (g) 起點
$(+, -, +, +)$ Step 2 ⁻ Step 4 ⁺ Step 3 ⁺ Step 1 ⁺ 起點 (d)	$(+, +, -, -)$ Step 3 ⁻ Step 1 ⁺ Step 4 ⁻ Step 2 ⁻ 起點 (e)	$(+, -, +, -)$ Step 2 ⁻ Step 3 ⁺ Step 1 ⁺ Step 4 ⁻ 起點 (f)	$(+, -, -, -)$ Step 4 ⁻ Step 3 ⁻ Step 2 ⁻ Step 1 ⁺ (h) 起點

(二) 判定數列非螺線

數列曲線要判斷是否為數列非螺線，我們可以採取**尖點判定法**：當前後步驟有正負交錯的情形，即交接處就會有尖點產生，因此，此曲線就是數列非螺線。例如：

(i) $a_0 = 0, a_1 = 1, a_n = 3a_{n-1} - 5a_{n-2}$ ，此數列為

$\underbrace{1, 3, 4, -3}_{\text{Step } 1^+, \text{Step } 2^+, \text{Step } 3^+, \text{Step } 4^-}, -29, -72, -71, 147, \dots$ ，即是表 2 中 (b) 的情形。

(ii) $a_0 = 0, a_1 = 1, a_n = -2a_{n-1} - 3a_{n-2}$ ，此數列為

$\underbrace{1, -2, 1, 4}_{\text{Step } 1^+, \text{Step } 2^-, \text{Step } 3^+, \text{Step } 4^+}, -11, 10, 13, -56, 73, \dots$ ，即是表 2 中 (d) 的情形。

$1, -2, \underbrace{1, 4, -11, 10}_{\text{Step } 1^+, \text{Step } 2^+, \text{Step } 3^-, \text{Step } 4^+}, 13, -56, 73, \dots$ ，即是表 2 中 (c) 的情形。

(iii) $a_0 = 0, a_1 = 1, a_n = a_{n-1} - 2a_{n-2}$ ，此數列為

$\underbrace{1, 1, -1, -3}_{\text{Step } 1^+, \text{Step } 2^+, \text{Step } 3^-, \text{Step } 4^-}, -1, 5, 7, -3, \dots$ ，即是表 2 中 (e) 的情形。

(iv) $a_0 = 0, a_1 = 1, a_n = -2a_{n-1} + a_{n-2}$ ，此數列為

$\underbrace{1, -2, 5, -12}_{\text{Step } 1^+, \text{Step } 2^-, \text{Step } 3^+, \text{Step } 4^-}, 29, -7, 10, 169, -408, \dots$ ，即是表 2 中 (f) 的情形。

(v) $a_0 = 0, a_1 = 1, a_n = -2a_{n-1} - 5a_{n-2}$ ，此數列為

$\underbrace{1, -2, -1, 12}_{\text{Step } 1^+, \text{Step } 2^-, \text{Step } 3^-, \text{Step } 4^+}, -19, -22, 139, -168, \dots$ ，即是表 2 中 (g) 的情形。

(vi) $a_0 = 0, a_1 = 1, a_n = 2a_{n-1} - 5a_{n-2}$ ，此數列為

$1, \underbrace{2, -1, -12, -19}_{\text{Step } 1^+, \text{Step } 2^-, \text{Step } 3^-, \text{Step } 4^-}, 22, 139, 168, -359, \dots$ ，即是表 2 中 (h) 的情形。

因此，(i) ~ (vi) 中的數列皆為數列非螺線。

(三) 數列曲線方程式

【性質 1】考慮 k 階正實係數齊次線性遞迴數列 $\{a_n\}$ ，若數列曲線為螺線，則

(i) 當 $\{a_n\}$ 為遞增數列時，則數列曲線為由內而外逆時鐘旋出的螺線。

(ii) 當 $\{a_n\}$ 為遞減數列時，則數列曲線為由外而內逆時鐘旋入的螺線。

【證明】當每一項 $a_i > 0$ 時，則是遵循四個循環步驟為 $\text{Step } 1^+$ 、 $\text{Step } 2^+$ 、 $\text{Step } 3^+$ 、 $\text{Step } 4^+$ 來

建構，即表 2 中 (a) 的情形，是數列螺線。例如：圖 4 中遞增數列 $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} + a_{n-4}$

則是由內而外逆時鐘旋出的螺線。同理，當 $\{a_n\}$ 為遞減數列時，如以下圖 7 中遞減數列

$a_n = 0.5a_{n-1} + 0.2a_{n-2}$ ，則是外而內逆時鐘旋入的螺線。 ■

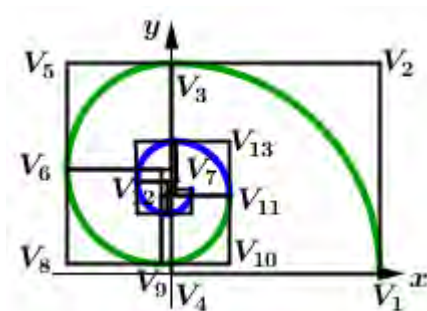


圖 7：數列 $\{a_n\} : a_n = 0.5a_{n-1} + 0.2a_{n-2}$

不論是數列螺線還是數列非螺線，我們都可以統整於一個數列曲線的方程式來表示。

【定理 1】設 $\{a_n\}$ 為費氏數列，則費氏螺線方程式為

$$X(t) = 1 + \sum_{i=1}^{\lfloor t \rfloor} \frac{1+(-1)^{i+1}}{2} \times (-1)^{\lfloor \frac{i+1}{2} \rfloor} \times (a_i - a_{i-1}) + a_{\lfloor t \rfloor} \cdot \cos\left(\frac{t-1}{2}\pi\right) \quad (5)$$

$$Y(t) = \sum_{i=1}^{\lfloor t \rfloor} \frac{1+(-1)^i}{2} \times (-1)^{\lfloor \frac{i}{2} \rfloor} \times (a_i - a_{i-1}) + a_{\lfloor t \rfloor} \cdot \sin\left(\frac{t-1}{2}\pi\right), \text{ 其中實數 } t \geq 1.$$

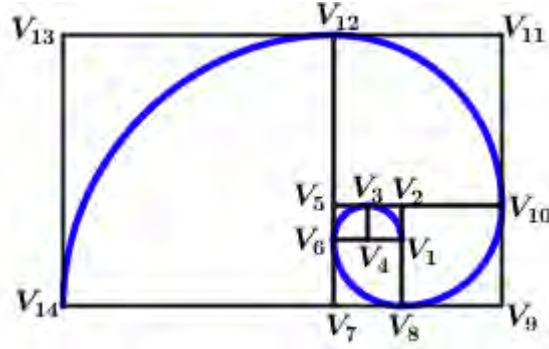


圖 8： a_1 至 a_6 所產生費氏矩形與費氏螺線

【證明】費氏螺線參見圖 8，令 V_4 為 $(0,0)$ ，我們可觀察出圓心的軌跡為

$$\begin{aligned} & V_4 \xrightarrow{\text{不動}} V_4 \xrightarrow{\text{右}} V_1 \xrightarrow{\text{上}} V_2 \\ & \xrightarrow{\text{左}} V_5 \xrightarrow{\text{下}} V_7 \xrightarrow{\text{右}} V_9 \xrightarrow{\text{上}} V_{11} \xrightarrow{\text{左}} V_{13} \xrightarrow{\text{下}} V_{15} \xrightarrow{\text{右}} V_{17} \xrightarrow{\text{上}} V_{19} \rightarrow \dots \end{aligned}$$

除了前四個圓心外，之後圓心軌跡就遵循「向左、向下、向右與向上」等四個循環方向移動。可分解成 x 軸和 y 軸方向，分析如下：

圓心移動軌跡	向左	向下	向右	向上
x 軸方向	-1	0	+1	0
y 軸方向	0	-1	0	+1

所以建構(i)與(ii)來決定 x 軸和 y 軸是否移動以及方向，如下：

(i) 由 $\frac{1+(-1)^{i+1}}{2}$ 或 $\frac{1+(-1)^i}{2}$ 分別決定是否影響 x, y 坐標的移動量。

(ii) 由 $(-1)^{\lfloor \frac{i+1}{2} \rfloor}$ 或 $(-1)^{\lfloor \frac{i}{2} \rfloor}$ 決定正負。

於是當向右或向左(x 軸方向)時，則由 $\frac{1+(-1)^{i+1}}{2} \times (-1)^{\lfloor \frac{i+1}{2} \rfloor}$ 來決定。

當向上或向下(y 軸方向)時，則由 $\frac{1+(-1)^i}{2} \times (-1)^{\lfloor \frac{i}{2} \rfloor}$ 來決定。

再者，因為參數 t 為實數，但是 $\{a_n\}$ 中 $n \in \mathbb{N}$ ，所以才引進高斯符號 $\lfloor \cdot \rfloor$ ，以確保 a_n 的值

存在。費氏螺線是從 $V_1(1,0)$ 開始，而以每個圓心移動了 $a_n - a_{n-1}$ 單位，並且半徑為 a_n 逆時

鐘轉四分之一圓，每四個步驟完成一個循環，所以旋轉角度 $\theta = \frac{t-1}{2}\pi$ ，利用圓方程式的

參數式得到，當 $t \geq 1$ 時，費氏螺線方程式為

$$\begin{aligned} X(t) &= 1 + \sum_{i=1}^{[t]} \frac{1+(-1)^{i+1}}{2} \times (-1)^{\lfloor \frac{i+1}{2} \rfloor} \times (a_i - a_{i-1}) + a_{[t]} \cdot \cos\left(\frac{t-1}{2}\pi\right) \\ Y(t) &= \sum_{i=1}^{[t]} \frac{1+(-1)^i}{2} \times (-1)^{\lfloor \frac{i}{2} \rfloor} \times (a_i - a_{i-1}) + a_{[t]} \cdot \sin\left(\frac{t-1}{2}\pi\right), \text{ 其中實數 } t \geq 1. \end{aligned}$$

由**定理 1**中給了一個猜測，(5)式是否適用於數列曲線呢？我們發現當係數 $c_1, c_2, \dots, c_k \geq 0$ 的情形，與(5)式是完全相同的，但係數 $c_1, c_2, c_3, \dots, c_k$ 至少有一個負實數時，也幾乎相同的。

【定理 2】 設 $\{a_n\}$ 為 k 階齊次線性遞迴數列，則數列曲線方程式為

$$\begin{aligned} X(t) &= 1 + \sum_{i=1}^{[t]} \frac{1+(-1)^{i+1}}{2} \times (-1)^{\lfloor \frac{i+1}{2} \rfloor} \times (a_i - a_{i-1}) + |a_{[t]}| \cdot \cos \theta \\ Y(t) &= \sum_{i=1}^{[t]} \frac{1+(-1)^i}{2} \times (-1)^{\lfloor \frac{i}{2} \rfloor} \times (a_i - a_{i-1}) + |a_{[t]}| \cdot \sin \theta \end{aligned} \quad (6)$$

其中實數 $t \geq 1$ ，同時若 $a_{[t]} > 0$ ，則 $\theta = \frac{t-1}{2}\pi$ ；若 $a_{[t]} < 0$ ，則 $\theta = \frac{t+1}{2}\pi$ 。

【證明】 (i) 我們先考慮 $c_1, c_2, c_3, \dots, c_k \geq 0$ 的情形如圖 4，根據數列螺線的定義，

令 V_4 為 $(0,0)$ ，我們可觀察出圓心的軌跡為

$$V_4 \xrightarrow{\text{不動}} V_4 \xrightarrow{\text{右}} V_1 \xrightarrow{\text{上}} V_{11} \xrightarrow{\text{左}} V_{14} \xrightarrow{\text{下}} V_{17} \xrightarrow{\text{右}} V_{20} \xrightarrow{\text{上}} V_{23} \xrightarrow{\text{左}} V_{26} \rightarrow \dots$$

除了前四個圓心外，之後圓心軌跡就遵循「向左、向下、向右與向上」等四個循環方向移動。仿照**定理 1**的方式，採用

當向右或向左(x軸方向)時，則由 $\frac{1+(-1)^{i+1}}{2} \times (-1)^{\lfloor \frac{i+1}{2} \rfloor}$ 來決定。

當向上或向下(y軸方向)時，則由 $\frac{1+(-1)^i}{2} \times (-1)^{\lfloor \frac{i}{2} \rfloor}$ 來決定。

數列螺線從 $V_1(1,0)$ 開始，以每個圓心移動了 $a_n - a_{n-1}$ 單位，並且半徑為 a_n 逆時轉四分之一

圓，每四個步驟完成一個循環，所以旋轉角度 $\theta = \frac{t-1}{2}\pi$ ，則數列螺線方程式為

$$\begin{aligned} X(t) &= 1 + \sum_{i=1}^{[t]} \frac{1+(-1)^{i+1}}{2} \times (-1)^{\lfloor \frac{i+1}{2} \rfloor} \times (a_i - a_{i-1}) + a_{[t]} \cdot \cos \theta \\ Y(t) &= \sum_{i=1}^{[t]} \frac{1+(-1)^i}{2} \times (-1)^{\lfloor \frac{i}{2} \rfloor} \times (a_i - a_{i-1}) + a_{[t]} \cdot \sin \theta, \text{ 其中實數 } t \geq 1. \end{aligned}$$

(ii) 考慮當係數 $c_1, c_2, c_3, \dots, c_k$ 至少有一個負實數時，若 a_i ($i = 2, 3, 4, \dots$) 可能產生零或負值項，所以圓心半徑更改為 $|a_i|$ 且圓心移動 $a_n - a_{n-1}$ 單位，與(i)均相同，但注意到考慮第 h 步驟，當 $h \equiv i \pmod{4}$ 時， $\text{Step } h^+$ 與 $\text{Step } h^-$ 的四分之一圓弧的旋轉角度相差了 π 度，所以旋轉角度 $\theta = \frac{t-1}{2}\pi + \pi = \frac{t+1}{2}\pi$ (針對旋轉角度，底下有舉一個例子說明)，因此，數列曲線方程式改為

$$X(t) = 1 + \sum_{i=1}^{[t]} \frac{1+(-1)^{i+1}}{2} \times (-1)^{\lfloor \frac{i+1}{2} \rfloor} \times (a_i - a_{i-1}) + |a_{[t]}| \cdot \cos \theta$$

$$Y(t) = \sum_{i=1}^{[t]} \frac{1+(-1)^i}{2} \times (-1)^{\lfloor \frac{i}{2} \rfloor} \times (a_i - a_{i-1}) + |a_{[t]}| \cdot \sin \theta$$

其中實數 $t \geq 1$ ；同時，若 $a_{[t]} > 0$ ，則 $\theta = \frac{t-1}{2}\pi$ ；若 $a_{[t]} < 0$ ，則 $\theta = \frac{t+1}{2}\pi$ 。 ■

例如：圖 6 中的數列 $\{a_n\}$ ： $a_n = -a_{n-1} + a_{n-2}$ ，則有 $a_1 = 1, a_2 = -1, a_3 = 2, a_4 = -3, a_5 = 5, \dots$ 。
為了方便將圖 6 標上頂點，參見圖 9。現在來說明圖 9 的數列曲線方程式為(6)式。

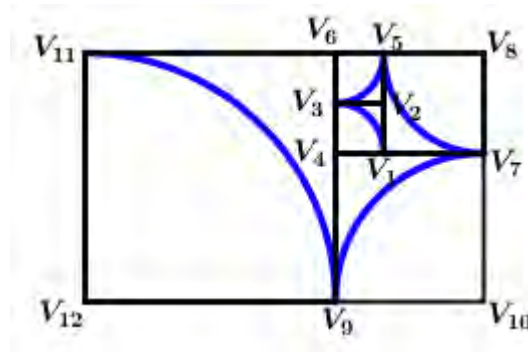


圖 9：數列 $\{a_n\}$ ： $a_n = -a_{n-1} + a_{n-2}$ 的數列曲線

【解答】圖 9 中的圓心軌跡為從 $V_4(0,0)$ 開始，接著由 $\frac{1+(-1)^{i+1}}{2} \cdot (-1)^{\lfloor \frac{i+1}{2} \rfloor}$ 決定 x 軸的移動方向，

由 $\frac{1+(-1)^i}{2} \cdot (-1)^{\lfloor \frac{i}{2} \rfloor}$ 決定 y 軸的移動方向，由 $(a_i - a_{i-1})$ 決定移動量，於是得到圓心軌跡為

$V_4(0,0) \xrightarrow{\text{向上}} V_6(0,2) \xrightarrow{\text{向右}} V_8(3,2) \xrightarrow{\text{向下}} V_{10}(3,-3) \xrightarrow{\text{向左}} V_{12}(-5,-3)$ 。我們也可觀察到數列曲線是隨著

圓心軌跡移動四分之一圓，旋轉角度我們設為若 $a_{[t]} > 0$ ，則 $\theta = \frac{t-1}{2}\pi$ ；若 $a_{[t]} < 0$ ，則

$\theta = \frac{t+1}{2}\pi$ 。所以曲線移動四分之一圓軌跡為

$$V_1(1,0) \xrightarrow{\theta=\frac{3\pi}{2}} V_3(0,1) \xrightarrow{\theta=\pi} V_5(1,2) \xrightarrow{\theta=\frac{5\pi}{2}} V_7(3,0) \xrightarrow{\theta=2\pi} V_9(0,-3) \xrightarrow{\theta=\frac{7\pi}{2}} V_{11}(-5,2) \rightarrow \dots$$

因此，數列曲線方程式為(6)式。



三、探討特徵方程式的實根性質

(一) 笛卡兒符號法則

本小節針對 k 階實係數齊次線性遞迴數列 $\{a_n\}$ 中特徵方程式來探討，考慮兩種係數的情形： $c_1, c_2, \dots, c_k > 0$ 與 $c_1 < 0, c_2 > 0, c_3 < 0, c_4 > 0, \dots$ (保持正負相間)，我們利用**笛卡兒符號法則**來判定特徵方程式 $f(x)=0$ 中正負實根的個數，得到以下的**性質 2**與**性質 3**。

【性質 2】設 $c_1, c_2, \dots, c_k > 0$ ，且特徵方程式為

$$f(x) = x^k - c_1 x^{k-1} - c_2 x^{k-2} - \dots - c_{k-1} x - c_k = 0$$

- (i) 當 k 為奇數時，則 $f(x)=0$ 的實根為恰有一正實根及偶數個負實根，而負實根的個數可能為 $0, 2, 4, \dots, (k-1)$ 。
- (ii) 當 k 為偶數時，則 $f(x)=0$ 的實根為恰有一正實根及奇數個負實根，而負實根的個數可能為 $1, 3, 5, \dots, (k-1)$ 。

【證明】由於 $c_1, c_2, \dots, c_k > 0$ ，所以得到 $f(x)$ 相鄰的非零係數符號的變化次數 $N=1$ 。

利用**笛卡兒符號法則**，則 $f(x)=0$ 的正實根之個數僅有1個。

其次，設 $f(-x)=0$ 的負實根之個數為 N^- ，這時要分 k 為奇數或偶數來討論：

- (i) 當 k 為奇數時，得到 $f(-x)$ 相鄰的非零係數符號的變化次數 $N'=k-1$ 為偶數。

利用**笛卡兒符號法則**，則 $N'-N^-(k-1)-N^-$ 為非負偶數，所以，

$$N^- = 0, 2, 4, \dots, (k-1)$$

因此， $f(x)=0$ 的實根為恰有一正實根及負實根可能個數為 $0, 2, 4, \dots, (k-1)$ 。

- (ii) 當 k 為偶數時，得到 $f(-x)$ 相鄰的非零係數符號的變化次數 $N'=k-1$ 為奇數。

利用**笛卡兒符號法則**，則 $N'-N^-(k-1)-N^-$ 為非負偶數，所以，

$$N^- = 1, 3, 5, \dots, (k-1)$$

因此，負實根的個數為 $1, 3, 5, \dots, (k-1)$ 。



【性質 3】設 $c_1 < 0, c_2 > 0, c_3 < 0, c_4 > 0, \dots$ (保持正負相間)，且特徵方程式為

$$f(x) = x^k - c_1 x^{k-1} - c_2 x^{k-2} - \dots - c_{k-1} x - c_k = 0$$

- (i) 當 k 為奇數時，則 $f(x) = 0$ 的實根為恰有一負實根及偶數個正實根，而正實根的個數可能為 $0, 2, 4, \dots, (k-1)$ 。
- (ii) 當 k 為偶數時，則 $f(x) = 0$ 的實根為恰有一負實根及奇數個正實根，而正實根的個數可能為 $1, 3, 5, \dots, (k-1)$ 。

【證明】(i) 當 k 為奇數時，由於 $c_1 < 0, c_2 > 0, c_3 < 0, c_4 > 0, \dots$ ，可得知 $f(x)$ 相鄰的非零係數符號的變化次數 $N = k - 1$ 。利用笛卡兒符號法則，則 $f(x) = 0$ 的正實根之個數僅可能有 $0, 2, 4, \dots, (k-1)$ 個。另一方面，若 $f(-x) = 0$ 的負實根之個數為 N^- ，則得到相鄰的非零係數符號的變化次數 $N' = 1$ 。利用笛卡兒符號法則，則 $f(x) = 0$ 的負實根之個數僅有 1 個。因此， $f(x) = 0$ 的實根為恰有一負實根及正實根可能個數為 $0, 2, 4, \dots, (k-1)$ 。

(ii) 當 k 為偶數時，由於 $c_1 < 0, c_2 > 0, c_3 < 0, c_4 > 0, \dots$ ，可得知 $f(x)$ 相鄰的非零係數符號的變化次數 $N = k - 1$ 。利用笛卡兒符號法則，則 $f(x) = 0$ 的正實根之個數僅可能有 $1, 3, 5, \dots, (k-1)$ 個。另一方面，若 $f(-x) = 0$ 的負實根之個數為 N^- ，則得到相鄰的非零係數符號的變化次數 $N' = 1$ 。利用笛卡兒符號法則，則 $f(x) = 0$ 的負實根之個數僅有 1 個。



(二) 正實根性質

預備定理 2 得到費氏數列的後前項之極限比等於其特徵方程式之正實根，於是猜測：

若 $\{a_n\}$ 為 k 階正實係數齊次線性遞迴數列，則其後前項之極限比等於特徵方程式之正實根。

【定理 3】設 $\{a_n\}$ 為 k 階正實係數齊次線性遞迴數列，則數列 $\left\{ \frac{a_{n+1}}{a_n} \right\}$ 為收斂數列。

【證明】令 $H_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ ，並令 $O_n = H_{2n-1} = \frac{a_{2n}}{a_{2n-1}}$ 與 $E_n = H_{2n} = \frac{a_{2n+1}}{a_{2n}}$ 。為了符號方便起見，我們以下

僅證明二階遞迴數列 ($k=2$) 的情形： $\{a_n\} : a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$ ，其中 $c_1 > 0, c_2 > 0$ 。

首先，由迭代過程可得：

$$\begin{aligned}
a_{n+2}a_n - a_{n+1}^2 &= (c_1a_{n+1} + c_2a_n)a_n - (c_1a_n + c_2a_{n-1})a_{n+1} = c_2(a_n^2 - a_{n+1}a_{n-1}) \\
&= (-c_2)(a_{n+1}a_{n-1} - a_n^2) = (-c_2)^2(a_na_{n-2} - a_{n-1}^2) \\
&= \cdots = (-c_2)^n(a_2a_0 - a_1^2) = (-1)^{n+1}c_2^n
\end{aligned}$$

於是可知：

$$a_{n+3}a_n - a_{n+2}a_{n+1} = (c_1a_{n+2} + c_2a_{n+1})a_n - (c_1a_{n+1} + c_2a_n)a_{n+1} = c_1(a_{n+2}a_n - a_{n+1}^2) = (-1)^{n+1}c_1c_2^n$$

同除以 $a_{n+2}a_n$ ，於是

$$\frac{a_{n+3}}{a_{n+2}} - \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(-1)^{n+1}c_1c_2^n}{a_{n+2}a_n}. \quad (7)$$

則由 (7) 式得知數列 $\{O_n\}$ 為遞增數列，數列 $\{E_n\}$ 為遞減數列。

我們考慮 $c_i = \max\{c_1, c_2, \dots, c_k\}$ ， $a_{n-j} = \max\{a_n, a_{n-1}, \dots, a_{n-k+1}\}$ ， $1 \leq i, j \leq k-1$

$$c_s = \min\{c_1, c_2, \dots, c_k\}, \quad a_{n-t} = \min\{a_n, a_{n-1}, \dots, a_{n-k+1}\}, \quad 1 \leq s, t \leq k-1$$

由於 $a_{n+1} = c_1a_n + c_2a_{n-1} + c_3a_{n-2} + \cdots + c_ka_{n-k+1}$ ，所以 $k(c_s a_{n-t}) \leq a_{n+1} \leq k(c_i a_{n-j})$ ，

則由實數稠密性得知必存在正實數 $\gamma_1, \gamma_2 \in [kc_s a_{n-t}, kc_i a_{n-j}]$ ，使得

$$kc_s a_{n-t} \leq \gamma_1 a_n \leq a_{n+1} \leq \gamma_2 a_n \leq kc_i a_{n-j}.$$

所以， $\gamma_1 < \frac{a_{n+1}}{a_n} < \gamma_2$ 。因此，數列 $\{O_n\}$ 遞增有上界與數列 $\{E_n\}$ 遞減有下界，

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} O_n$ 與 $\lim_{n \rightarrow \infty} E_n$ 存在，可令 $\lim_{n \rightarrow \infty} O_n = \alpha$ ，由於數列滿足

$$a_{2n+1} = c_1a_{2n} + c_2a_{2n-1} + c_3a_{2n-2} + \cdots + c_ka_{2n-k+1}$$

得到

$$\begin{aligned}
\frac{a_{2n+1}}{a_{2n}} &= \frac{c_1a_{2n} + c_2a_{2n-1} + c_3a_{2n-2} + \cdots + c_{k-1}a_{2n-k+2} + c_ka_{2n-k+1}}{a_{2n}} \\
&= c_1 + \frac{c_2a_{2n-1} + c_3a_{2n-2} + \cdots + c_{k-1}a_{2n-1} + c_ka_{2n-1} + \varepsilon_{2n}}{a_{2n}} \\
&= c_1 + (c_2 + c_3 + c_4 + \cdots + c_k) \frac{a_{2n-1}}{a_{2n}} + \frac{\varepsilon_{2n}}{a_{2n}}
\end{aligned} \quad (8)$$

其中 $\varepsilon_{2n} = c_3(a_{2n-2} - a_{2n-1}) + c_4(a_{2n-3} - a_{2n-1}) + \cdots + c_k(a_{2n-k+1} - a_{2n-1})$ (當 $k=2$ 時， $\varepsilon_{2n}=0$)。

當 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon_{2n}}{a_{2n}} = \varepsilon$ 存在時，(8)式兩邊取極限得知： $\alpha = c_1 + (c_2 + c_3 + \cdots + c_k) \frac{1}{\alpha} + \varepsilon$ ，整

理可得 α 為一元二次方程式 $x^2 - (c_1 + \varepsilon)x - (c_2 + c_3 + \cdots + c_k) = 0$ 的正根。又判別式

$D = (c_1 + \varepsilon)^2 + 4(c_2 + c_3 + \cdots + c_k) > 0$ ，且兩根乘積 $-(c_2 + c_3 + \cdots + c_k) < 0$ ，故方程式

$x^2 - (c_1 + \varepsilon)x - (c_2 + c_3 + \cdots + c_k) = 0$ 恰有一正根及一負根，此正根就是 α ，即 $\lim_{n \rightarrow \infty} O_n = \alpha$ 。

同理，可得 $\lim_{n \rightarrow \infty} E_n = \alpha$ ，因此，數列 $\left\{ \frac{a_{n+1}}{a_n} \right\}$ 收斂於 $\alpha = \frac{c_1 + \varepsilon + \sqrt{D}}{2}$ 。特別地，當 $\{a_n\}$ 是二

階遞迴數列 ($k = 2$) 時， $\varepsilon = 0$ ，此時極限值為 $\alpha = \frac{c_1 + \sqrt{c_1^2 + 4c_2}}{2}$ 。 ■

【定理 4】 設 $\{a_n\}$ 為 k 階正實係數齊次線性遞迴數列，若特徵方程式 $f(x) = 0$ 有 k 個實數根

α_i ($1 \leq i \leq k$)，其中 $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \cdots \geq \alpha_k$ ，則 α_1 為數列 $\{a_n\}$ 的唯一特徵正實根，且實根 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$

均相異(沒有重根的情形)。

【證明】 利用性質 2 與笛卡兒符號法則，可以得到 α_1 為徵方程式 $f(x) = 0$ 的唯一正實根，即 α_1

為數列 $\{a_n\}$ 的唯一特徵正實根。另一方面，若實數 α 為數列的特徵根，則

$f(\alpha) = f'(\alpha) = 0$ ，故

$$f(\alpha) = \alpha^k - c_1 \alpha^{k-1} - \cdots - c_k = 0.$$

但 $f'(\alpha) = k\alpha^{k-1} - c_1(k-1)\alpha^{k-2} - \cdots - c_{k-1} > k[\alpha^{k-1} - c_1\alpha^{k-2} - \cdots - c_{k-1}] = k \cdot \left(\frac{f(\alpha)}{\alpha} \right) = 0$ ，

所以， $f(x) = 0$ 的實根沒有重根的情形，即其特徵實根 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$ 均相異。 ■

【定理 5】 設 $\{a_n\}$ 為 k 階正實係數齊次線性遞迴數列，若特徵方程式 $f(x) = 0$ 有 k 個實數根

α_i ($1 \leq i \leq k$)，其中 $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \cdots \geq \alpha_k$ ，則 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \alpha_1$ 且 α_1 為 $f(x) = 0$ 的唯一正實根。

【證明】 由定理 4 得知特徵實根 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$ 均相異，又由性質 2， α_1 為特徵方程式

$f(x) = x^k - c_1 x^{k-1} - c_2 x^{k-2} - \cdots - c_k = 0$ 的唯一正實根，故可令 $\alpha_1 > 0 > \alpha_2 > \alpha_3 > \cdots > \alpha_k$ 。

由 $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_k = c_1$ ，可得

$$\alpha_1 = c_1 - (\alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_k) = c_1 + |\alpha_2| + |\alpha_3| + \cdots + |\alpha_k| > \max\{|\alpha_2|, |\alpha_3|, \cdots, |\alpha_k|\}。$$

因此， $|\alpha_1| = \alpha_1 > \max\{|\alpha_2|, |\alpha_3|, \cdots, |\alpha_k|\}$ 。由**預備定理 1**，我們知道 $\{a_n\}$ 的一般式：

$a_n = d_1\alpha_1^n + d_2\alpha_2^n + d_3\alpha_3^n + \cdots + d_k\alpha_k^n$ ，其中 d_i ($i=1, 2, 3, \cdots, k$) 為常數。又由**定理 3** 得到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \text{ 必存在，因此， } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_1\alpha_1^{n+1} + d_2\alpha_2^{n+1} + d_3\alpha_3^{n+1} + \cdots + d_k\alpha_k^{n+1}}{d_1\alpha_1^n + d_2\alpha_2^n + d_3\alpha_3^n + \cdots + d_k\alpha_k^n} = \alpha_1 \text{ 且 } \alpha_1 \text{ 為}$$

$f(x)=0$ 的唯一正實根。 ■

我們發現：當係數 $c_1, c_2, c_3, \cdots, c_k \geq 1$ (允許某些係數 $c_i = 0$) 時，若 k 階正實係數齊次線性遞迴數列為嚴格遞增，則必形成數列螺線，但係數 $c_1, c_2, c_3, \cdots, c_k < 1$ (允許某些係數 $c_i = 0$) 時， k 階正實係數齊次線性遞迴數列有遞增也有遞減，此時由係數 $c_1, c_2, c_3, \cdots, c_k$ 無法判斷數列螺線，以下**定理 6** 提供最佳的充分條件就是由 $c_1 + c_2 + c_3 + \cdots + c_k$ 的值來決定。

【定理 6】 設 $\{a_n\}$ 為 k 階正實係數齊次線性遞迴數列，則數列 $\{a_n\}$ 在某項後，有以下三種數列曲線：

(i) 若 $c_1 + c_2 + c_3 + \cdots + c_k > 1$ ，則 $\{a_n\}$ 為遞增數列，且數列曲線是由內而外逆時鐘旋出的**螺線**。

(ii) 若 $c_1 + c_2 + c_3 + \cdots + c_k = 1$ ，則 $\{a_n\}$ 趨近常數數列，且數列曲線是由內而外逆時鐘旋轉的螺線，並且當 $n \rightarrow \infty$ 時，數列螺線會收斂於一圓(**極限圓**)。

(iii) 若 $0 < c_1 + c_2 + c_3 + \cdots + c_k < 1$ ，則 $\{a_n\}$ 為遞減數列，且數列曲線是由外而內逆時鐘旋入的螺線。當 $n \rightarrow \infty$ 時，數列螺線會旋入至一點(**點圓**)。

【證明】 由特徵方程式為

$$f(x) = x^k - c_1x^{k-1} - c_2x^{k-2} - c_3x^{k-3} - \cdots - c_{k-1}x - c_k = 0 \quad (9)$$

令 $x=1$ 代入(9) 式，得到 $f(1) = 1 - (c_1 + c_2 + \cdots + c_k)$ 。

(i) 當 $c_1 + c_2 + c_3 + \cdots + c_k > 1$ 時，則

$$f(1) = 1 - (c_1 + c_2 + \cdots + c_k) < 0.$$

另一方面，因為(9) 式的領導係數為 1，所以正實根 $\alpha_1 > 1$ ，參見圖10 (a)，再由**定理 5**

可得到 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \alpha_1 > 1$ 。因此，數列 $\{a_n\}$ 在某項後會是遞增的，數列曲線是由內而外逆時鐘旋出的螺線。

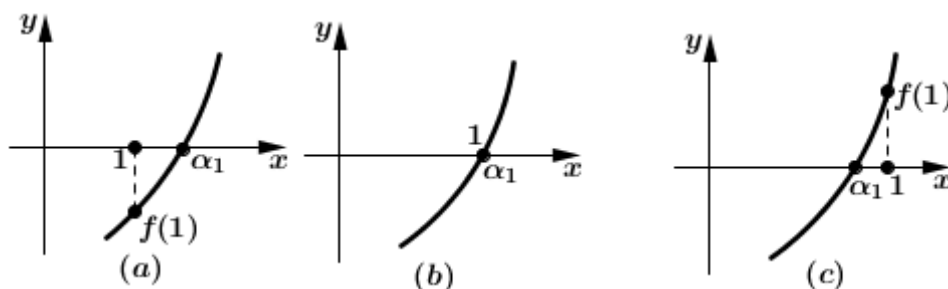


圖 10：數列的特徵方程式的增減情形

(ii) 當 $c_1 + c_2 + \cdots + c_k = 1$ 時，則由**定理 5**的證明過程可知：

$$f(1) = 1 - (c_1 + c_2 + \cdots + c_k) = 0，並且正實根 $\alpha_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ ，參見圖 10 (b)。$$

因此，數列在某項後會是趨近常數，數列曲線是由內而外逆時鐘旋轉的螺線。

當 $n \rightarrow \infty$ 時，數列螺線會收斂於**極限圓**(參見圖 11 中藍色與紅色螺線趨近於同一圓)。

(iii) 當 $c_1 + c_2 + \cdots + c_k < 1$ 時，則由**定理 5**的證明過程可知：

$$f(1) = 1 - (c_1 + c_2 + \cdots + c_k) > 0，並且正實根 $\alpha_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ ，參見圖 10 (c)。$$

因此，數列在某項後會是遞減的，數列曲線是由外而內逆時鐘旋入的螺線。

當 $n \rightarrow \infty$ 時，數列螺線會旋入至**一點圓**。以圖 12 中數列為例，由電腦程式得到圓心坐標：

第 998 個圓心坐標為 (0.206591936613196, 0.700739202002509)

第 999 個圓心坐標為 (0.205891100272399, 0.700739202002509)

第 1000 個圓心坐標為 (0.205891100272399, 0.700069365098268)

此數列是遞減的，當 $n \rightarrow \infty$ 時，數列螺線會旋入至**一點圓**，即趨近於第 1000 個圓心。■

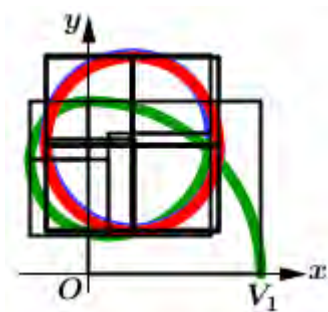


圖 11：數列 $a_n = \frac{1}{3}a_{n-1} + \frac{1}{3}a_{n-2} + \frac{1}{3}a_{n-3}$

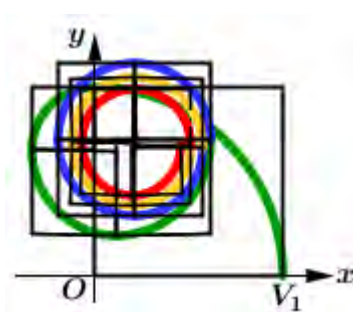


圖 12：數列 $a_n = \frac{1}{3}a_{n-1} + \frac{1}{3}a_{n-2} + \frac{1}{4}a_{n-3}$

(三) 負實根性質

我們已證明 k 階正實係數齊次線性遞迴數列的後前項之極限比等於其特徵方程式的正實根。於是我們再追問：

怎樣的 k 階實係數齊次線性遞迴數列的後前項之極限比等於其特徵方程式的負實根呢？

我們知道極限比要存在，則數列的呈現方式必須正負相間，那要問

數列呈現正負相間條件為何？同時也要考慮其特徵方程式的負實根也要存在。

於是我們得到以下的性質：

【性質 4】 考慮定義 1 中數列 $\{a_n\}$ ，若 $c_1 < 0, c_2 > 0, c_3 < 0, c_4 > 0, \dots$ (保持正負相間)，則每項數列 $\{a_n\}$ 的值為正負相間。

【證明】 考慮 $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + c_3 a_{n-3} + \dots + c_{k-1} a_{n-k+1} + c_k a_{n-k}$ ， $n \geq 2$ ，則

由於 $a_1 = 1$ ，所以 $a_2 = c_1 a_1 = c_1 < 0$ 。

因為 $a_3 = c_1 a_2 + c_2 a_1 = \underbrace{c_1 c_1}_{+} + \underbrace{c_2 \cdot 1}_{+}$ ，所以 $a_3 > 0$ 。

因為 $a_4 = c_1 a_3 + c_2 a_2 + c_3 a_1 = \underbrace{c_1 a_3}_{-} + \underbrace{c_2 c_1}_{-} + \underbrace{c_3 \cdot 1}_{-}$ ，所以 $a_4 < 0$ 。

因為 $a_5 = c_1 a_4 + c_2 a_3 + c_3 a_2 + c_4 a_1 = \underbrace{c_1 a_4}_{+} + \underbrace{c_2 (c_1 c_1 + c_2 \cdot 1)}_{+} + \underbrace{c_3 c_1}_{+} + \underbrace{c_4 \cdot 1}_{+} > 0$ ，所以 $a_5 > 0$ 。

以此規律，利用數學歸納法，我們可以得證：當 n 為奇數時， $a_n > 0$ ；當 n 為偶數時， $a_n < 0$ 。

即每項數列 $\{a_n\}$ 的值為正負相間。 ■

【定理 7】 設 $\{a_n\}$ 為滿足性質 4 的 k 階齊次線性遞迴數列，若特徵方程式 $f(x) = 0$ 有 k 個實數根 α_i ($1 \leq i \leq k$)，其中 $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_k$ ，則 α_k 為數列 $\{a_n\}$ 的唯一特徵負實根，且實根 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ 均相異(沒有重根的情形)。

【證明】 由性質 3 與笛卡兒符號法則，得到 α_i 為數列 $\{a_n\}$ 的唯一特徵負實根。若 α 為數列的

特徵實根，則 $f(\alpha) = \alpha^k - c_1 \alpha^{k-1} + \dots - c_k = 0$ 。因為

$$f'(\alpha) = k\alpha^{k-1} - c_1(k-1)\alpha^{k-2} - \dots - c_{k-1} > k[\alpha^{k-1} - c_1\alpha^{k-2} - \dots - c_{k-1}] = k \cdot \left(\frac{f(\alpha)}{\alpha} \right) = 0,$$

所以， $f(x) = 0$ 的實根沒有重根的情形，即其特徵實根 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i$ 均相異。 ■

【定理 8】設 $\{a_n\}$ 為滿足性質 4 的 k 階齊次線性遞迴數列，若特徵方程式 $f(x)=0$ 有 k 個實數根 $\alpha_i (1 \leq i \leq k)$ ，其中 $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_k$ ，則 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \alpha_k$ 且 α_k 為 $f(x)=0$ 的唯一負實根。

【證明】仿照定理 5 即得證。 ■

對於每項數列為正負相間的圖形為何呢？由表 2 中符合循環步驟 $(+, -, +, -)$ 即 (f) 圖，我們觀察數列 $a_n = -a_{n-1} + a_{n-2}$ ，則有 $a_1 = 1, a_2 = -1, a_3 = 2, a_4 = -3, a_5 = 5, \dots$ 。若此數列都取正號，即費氏數列，有正負相間代表圖形偶數段曲線凹性與費氏螺線相反，參見圖 6 或圖 9，顯然是非螺線。為了方便我們稱此曲線為反費氏螺線，推廣到 k 階時，就稱為反費氏曲線。例如：兩數列 $\{a_n\}$ ： $a_n = -a_{n-1} + a_{n-2} - a_{n-3}$ 、 $a_n = -\frac{1}{2}a_{n-1} + \frac{1}{2}a_{n-2}$ 所成數列均是反費氏曲線，參見圖 13 或圖 14。

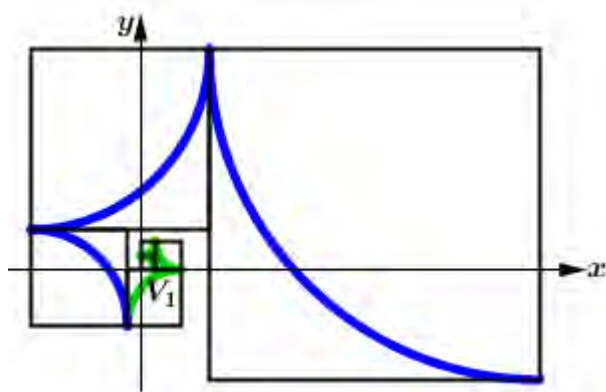


圖 13：數列 $\{a_n\}$ ： $a_n = -a_{n-1} + a_{n-2} - a_{n-3}$

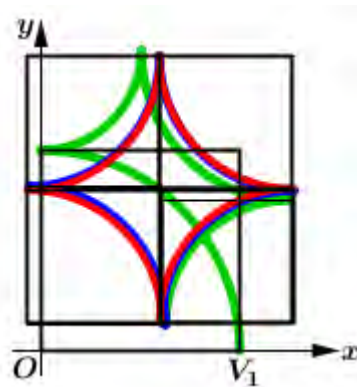


圖 14：數列 $\{a_n\}$ ： $a_n = -\frac{1}{2}a_{n-1} + \frac{1}{2}a_{n-2}$

【定理 9】設 $\{a_n\}$ 為滿足性質 4 的 k 階實係數齊次線性遞迴數列，則

- (i) 若 $|c_1| + |c_2| + |c_3| + \dots + |c_k| > 1$ ，則數列曲線是由內而外逆時鐘旋出的反費氏曲線。
- (ii) 若 $|c_1| + |c_2| + |c_3| + \dots + |c_k| = 1$ 時，則數列曲線是由內而外逆時鐘旋轉的反費氏曲線。且當 $n \rightarrow \infty$ 時，數列曲線會收斂於極限反費氏曲線。
- (iii) 若 $0 < |c_1| + |c_2| + |c_3| + \dots + |c_k| < 1$ ，則數列曲線是由外而內逆時鐘旋入的反費氏曲線。且當 $n \rightarrow \infty$ 時，數列曲線會旋入至一點。

【證明】首先，我們定義數列 $\{b_n\}$ 如下：

$$\begin{cases} b_1 = 1, b_i = 0, \text{ 其中 } -(k-2) \leq i \leq 0 \\ b_n = |c_1|b_{n-1} + |c_2|b_{n-2} + |c_3|b_{n-3} + \cdots + |c_{k-1}|b_{n-k+1} + |c_k|b_{n-k}, n \geq 2 \end{cases}$$

於是，數列 $\{b_n\}$ 的特徵方程式為

$$f(x) = x^k - |c_1|x^{k-1} - |c_2|x^{k-2} - |c_3|x^{k-3} - \cdots - |c_{k-1}|x - |c_k| = 0 \quad (10)$$

則 $x=1$ 代入(10)式，得到 $f(1) = 1 - (|c_1| + |c_2| + \cdots + |c_k|)$ 。

(i) 當 $|c_1| + |c_2| + |c_3| + \cdots + |c_k| > 1$ 時， $f(1) < 0$ ，仿照**定理 6**得到 $\{b_n\}$ 為遞增數列，且 $\{b_n\}$ 的

數列曲線為由內而外逆時鐘旋出的螺線。但由於數列 $\{a_n\}$ 的值為正負相間，因此，

$\{a_n\}$ 的數列曲線是由內而外逆時鐘旋出的反費氏曲線，參見圖 13。

(ii) 當 $|c_1| + |c_2| + |c_3| + \cdots + |c_k| = 1$ 時， $f(1) = 0$ ，仿照**定理 6**得到 $\{b_n\}$ 趨近常數數列，且 $\{b_n\}$

的數列曲線是由內而外逆時鐘旋轉的螺線。但由於數列 $\{a_n\}$ 的值為正負相間，因此，

$\{a_n\}$ 的數列曲線是由內而外逆時鐘旋轉的反費氏曲線。當 $n \rightarrow \infty$ 時，數列曲線會收

斂於極限反費氏曲線，參見圖 14 中藍色與紅色曲線趨近於同一曲線。

(iii) 當 $0 < |c_1| + |c_2| + |c_3| + \cdots + |c_k| < 1$ 時， $f(1) > 0$ ，仿照**定理 6**得到 $\{b_n\}$ 為遞減數列，且數

列軌跡是由外而內逆時鐘旋入的螺線。當 $n \rightarrow \infty$ 時， $\{b_n\}$ 的數列螺線會旋入至一點。

但由數列 $\{a_n\}$ 的值為正負相間，因此， $\{a_n\}$ 的數列曲線是由外而內逆時鐘旋入的反費

氏曲線；且當 $n \rightarrow \infty$ 時，數列曲線會旋入至一點。 ■

四、解釋成大自然的各種圖像

當我們考慮 k 階齊次線性遞迴數列 $\{a_n\}$ 出現負實數或零的所有情形時，是複雜的；所以，

本研究僅探討係數 $c_1, c_2, c_3, \dots, c_k \in \{-1, 1\}$ ，且數列 $\{a_n\}$ 至少有一項是零。

【性質 5】給定一 k 階實係數齊次線性遞迴數列 $\{a_n\}$ ，其中 $k \geq 2$ 。若 $c_1, c_2, c_3, \dots, c_k \in \{-1, 1\}$ ，則當 $c_1 = 1, c_2 = -1$ 或 $c_1 = -1, c_2 = -1$ 時，數列 $\{a_n\}$ 至少有一項是零。

【證明】(i) 我們考慮數列 $\{a_n\}$ ： $a_n = a_{n-1} - a_{n-2} + c_3 a_{n-3} + \dots + c_{k-1} a_{n-k+1} + c_k a_{n-k}$ ， $n \geq 2$ ，由於

$a_1 = 1, a_i = 0$ ，其中 $-(k-2) \leq i \leq 0$ ，所以 $a_2 = 1, a_3 = 0$ ，得到第三項 a_3 為零，因此，數列 $\{a_n\}$ 至少有一項是零。

(ii) 同(i)的證法， $a_2 = -1, a_3 = 0$ ，得到 a_3 為零，因此，數列 $\{a_n\}$ 至少有一項是零。 ■

其次，除了考慮數列 $\{a_n\}$ 至少有一項是零外，要求數列曲線具有封閉性或對稱性，這時 $c_1, c_2, c_3, \dots, c_k$ 的組合為何呢？為達曲線具封閉性或對稱性，我們訂立三個以下的判別法則：

(a) $k (\geq 2)$ 階齊次線性遞迴數列 $\{a_n\}$ 必須至少有一項是零。

(b) 數列方形的邊長為 1。 (c) 要固定的循環步驟。

注意，為了方便描述，數列曲線所呈現圖像解釋成與大自然之名相互應，這也是本研究有趣的應用範疇。

【性質 6】給定 k 階齊次線性遞迴數列 $\{a_n\}$ ，若 $c_1, c_2, c_3, \dots, c_k \in \{-1, 1\}$ ，且數列曲線具有封閉性或對稱性，則在判別法則下的數列曲線如下：

(i) 當 $k=1$ 時，則數列 $\{a_n\}$ ： $a_n = a_{n-1}$ (月亮數列) 或 $a_n = -a_{n-1}$ (星星數列)。

(ii) 當 $k=2$ 時，則數列 $\{a_n\}$ ： $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ (花數列) 或 $a_n = -a_{n-1} - a_{n-2}$ (蜘蛛網數列)。

(iii) 當 $k=3$ 時，則

數列 $\{a_n\}$ ： $a_n = a_{n-1} - a_{n-2} + a_{n-3}$ (小山數列) 或 $a_n = -a_{n-1} - a_{n-2} - a_{n-3}$ (蟲蟲數列)。

(iv) 當 $k=4$ 時，則

數列 $\{a_n\}$ ： $a_n = a_{n-1} - a_{n-2} + a_{n-3} - a_{n-4}$ 或 $a_n = -a_{n-1} - a_{n-2} - a_{n-3} - a_{n-4}$ (葉數列)。

【證明】(i) 當 $k=1$ 時，要滿足判別法則(b)，所以 $c_1 = \pm 1$ ，即 $a_n = a_{n-1}$ 或 $a_n = -a_{n-1}$ 。

當 $a_n = a_{n-1} : 1, 1, 1, 1, \dots$ 時，符合 4 個循環步驟，即

$Step\ 1^+, Step\ 2^+, Step\ 3^+, Step\ 4^+$

則得到圓的形狀，因此，我們將此數列叫做**月亮數列**，參見圖 15。

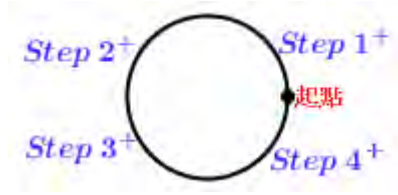


圖 15：月亮數列 $\{a_n\}$ ： $a_n = a_{n-1}$

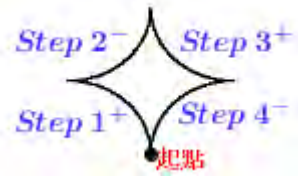


圖 16：星星數列 $\{a_n\}$ ： $a_n = -a_{n-1}$

當 $a_n = -a_{n-1} : 1, -1, 1, -1, \dots$ 時，符合 4 個循環步驟，即

$Step\ 1^+, Step\ 2^-, Step\ 3^+, Step\ 4^-$

則得到如星星般的形狀，因此，我們稱此數列為**星星數列**，參見圖 16。

(ii) 當 $k = 2$ 時，因為要滿足**判別法則**(a)，由**性質 6** 得到 $(c_1, c_2) = (1, -1)$ 或 $(-1, -1)$ 。

其次，檢測滿足**判別法則**(b)與(c)得 $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ 或 $a_n = -a_{n-1} - a_{n-2}$ 。

當 $a_n = a_{n-1} - a_{n-2} : 1, 1, 0, -1, -1, 0, 1, 1, \dots$ 時，符合 12 個循環步驟，即

$Step\ 1^+, Step\ 2^+, 0, Step\ 4^-, Step\ 1^-, 0, Step\ 3^+, Step\ 4^+, 0, Step\ 2^-, Step\ 3^-, 0$

則得到四片花瓣的形狀，因此，我們稱此數列為**花數列**，參見圖 17 與圖 18。

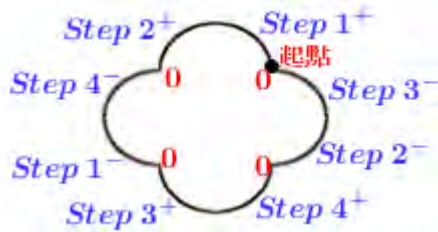


圖 17：花數列 $\{a_n\}$ ： $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$



圖 18：四片花瓣的花

當 $a_n = -a_{n-1} - a_{n-2} : 1, -1, 0, 1, -1, 0, \dots$ 時，符合 12 個循環步驟，即

$Step\ 1^+, Step\ 2^-, 0, Step\ 4^+, Step\ 1^-, 0, Step\ 3^+, Step\ 4^-, 0, Step\ 2^+, Step\ 3^-, 0$

則得到蜘蛛網的形狀，因此，我們稱此數列為**蜘蛛網數列**，參見圖 19 與圖 20。



圖 19：蜘蛛網數列 $\{a_n\}$ ： $a_n = -a_{n-1} - a_{n-2}$



圖 20：蜘蛛網

(iii) 當 $k=3$ 時，因為要滿足**判別法則**(a)，由**性質 5** 得到 $(c_1, c_2, c_3) = (1, -1, \pm 1), (-1, -1, \pm 1)$ 。

其次，檢測滿足**判別法則**(b)與(c)得 $a_n = a_{n-1} - a_{n-2} + a_{n-3}$ 或 $a_n = -a_{n-1} - a_{n-2} - a_{n-3}$ 。

當 $a_n = a_{n-1} - a_{n-2} + a_{n-3} : 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, \dots$ 時，符合 4 個循環步驟，即

$$\text{Step } 1^+, \text{Step } 2^+, 0, 0$$

則得到小山的形狀，因此，我們稱此數列為**小山數列**，參見圖 21 與圖 22。

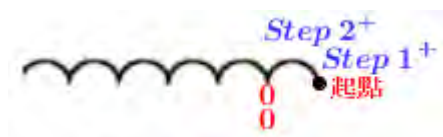


圖 21：小山數列 $\{a_n\} : a_n = a_{n-1} - a_{n-2} + a_{n-3}$



圖 22：小山

當 $a_n = -a_{n-1} - a_{n-2} - a_{n-3} : 1, -1, 0, 0, 1, -1, 0, 0, \dots$ 時，符合 4 個循環步驟，即

$$\text{Step } 1^+, \text{Step } 2^-, 0, 0$$

則得到**蟲蟲**的形狀，因此，我們稱此數列為**蟲蟲數列**，參見圖 23 與圖 24。



圖 23：蟲蟲數列 $\{a_n\} : a_n = -a_{n-1} - a_{n-2} - a_{n-3}$



圖 24：蟲蟲

(iv) 當 $k=4$ 時，因為要滿足**判別法則**(a)，由**性質 5** 得到

$$(c_1, c_2, c_3, c_4) = (1, -1, \pm 1, \pm 1), (-1, -1, \pm 1, \pm 1)。$$

其次，檢測滿足**判別法則**(b)與(c)得

$$a_n = a_{n-1} - a_{n-2} + a_{n-3} - a_{n-4} \text{ 或 } a_n = -a_{n-1} - a_{n-2} - a_{n-3} - a_{n-4}。$$

當 $a_n = a_{n-1} - a_{n-2} + a_{n-3} - a_{n-4} : 1, 1, 0, 0, 0, -1, -1, \dots$ 時，符合 20 個循環步驟，即

$$\text{Step } 1^+, \text{Step } 2^+, 0, 0, 0, \text{Step } 2^-, \text{Step } 3^-, 0, 0, 0, \text{Step } 3^+, \text{Step } 4^+, 0, 0, 0, \text{Step } 4^-, \text{Step } 1^-, 0, 0, 0$$

則得到**四片葉子**的形狀，因此，我們稱此數列為**葉數列**，參見圖 25 與圖 26。

美妙地，當 $a_n = -a_{n-1} - a_{n-2} - a_{n-3} - a_{n-4} : 1, -1, 0, 0, 0, 1, -1, 0, 0, 0, \dots$ 時，符合 20 個循環步驟，

即 $Step\ 1^+, Step\ 2^-, 0, 0, 0, Step\ 2^+, Step\ 3^-, 0, 0, 0, Step\ 3^+, Step\ 4^-, 0, 0, 0, Step\ 4^+, Step\ 1^-, 0, 0, 0$

同樣地得到我們的葉數列，因此，葉數列不唯一有兩個，參見圖 27。

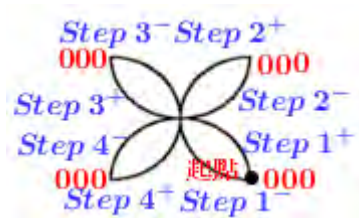
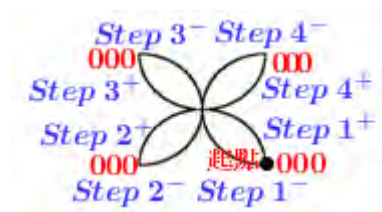


圖 25: 數列: $a_n = a_{n-1} - a_{n-2} + a_{n-3} - a_{n-4}$

圖 26: 葉子

圖 27: 數列: $a_n = -a_{n-1} - a_{n-2} - a_{n-3} - a_{n-4}$

在性質 6 中，我們針對建構 $k = 1, 2, 3, 4$ 階具有封閉性或對稱性的數列曲線給了一個結果，那麼要問

對於 $k (\geq 5)$ 階是否也能建構出封閉性或對稱性的數列曲線呢？

透過週期性，我們獲得以下的主要結果：

【定理 10】 給定 k 階齊次線性遞迴數列 $\{a_n\}$ ，若 $c_1, c_2, c_3, \dots, c_k \in \{-1, 1\}$ ，且數列曲線具有封閉性或對稱性，則在判別法則下的數列曲線如下：

(i) $(c_1, c_2, c_3, \dots, c_k) = \begin{cases} (1, -1, \dots, -1, 1, -1), & \text{當 } k \text{ 為偶數} \\ (1, -1, \dots, 1, -1, 1), & \text{當 } k \text{ 為奇數} \end{cases}$ 或者 $(c_1, c_2, c_3, \dots, c_k) = (-1, -1, \dots, -1)$ 。

(ii) 當 $k \equiv 1 \pmod{4}$ 時，則數列曲線為月亮數列或星星數列。

(iii) 當 $k \equiv 2 \pmod{4}$ 時，則數列曲線為花數列或蜘蛛網數列。

(iv) 當 $k \equiv 3 \pmod{4}$ 時，則數列曲線為小山數列或蟲蟲數列。

(v) 當 $k \equiv 0 \pmod{4}$ 時，則數列曲線為葉數列。

【證明】 (i) 性質 6 的證明中，我們得到 $k = 1, 2, 3, 4$ 階的結果：當

$$(c_1, c_2, c_3, c_4) = (\underbrace{1}_{k=1}, \underbrace{-1, 1, -1}_{k=3}) \text{ 或者 } (c_1, c_2, c_3, c_4) = (\underbrace{-1}_{k=1}, \underbrace{-1, -1, -1}_{k=3}) \text{ 時，數列曲線具有封閉性或對稱性。}$$

類推 $k \geq 5$ 的情形，與性質 6 的證明相同，採用判別法則下來檢測得到

$$(c_1, c_2, c_3, \dots, c_k) = \begin{cases} (1, -1, \dots, -1, 1, -1), & \text{當 } k \text{ 為偶數} \\ (1, -1, \dots, 1, -1, 1), & \text{當 } k \text{ 為奇數} \end{cases} \text{ 或者 } (c_1, c_2, c_3, \dots, c_k) = (-1, -1, \dots, -1)。$$

(ii) 根據性質 6 當 $k=1$ 時，我們得到月亮數列或星星數列。考慮 $k=5$ 的情形，由(i)得到 $(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5) = (1, -1, 1, -1, 1)$ 或者 $(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5) = (-1, -1, -1, -1, -1)$ ，討論：

當 $a_n = a_{n-1} - a_{n-2} + a_{n-3} - a_{n-4} + a_{n-5} : 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0$ 時，循環步驟變為 12 個後，也同樣得到月亮數列，參見圖 28。



圖 28：月亮數列

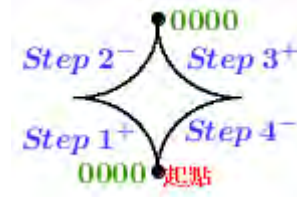


圖 29：星星數列

注意到由圖形來觀察只要將數列中有 0 的地方加入 4 的倍數個 0，也同樣得到月亮數列，因為補上 4 的倍數個 0 後，仍滿足數列曲線的一個循環，依然得到月亮數列。補上 4 的倍數個 0 後，此數列就是 $(c_1, c_2, \dots, c_{k-1}, c_k) = (1, -1, \dots, 1, -1, 1)$ ，因此， $k \equiv 1 \pmod{4}$ 階的數列為月亮數列。

其次，當 $a_n = -a_{n-1} - a_{n-2} - a_{n-3} - a_{n-4} - a_{n-5} : 1, -1, 0, 0, 0, 0, 1, -1, 0, 0, 0, 0$ 時，循環步驟變為 12 個後，也同樣得到星星數列，參見圖 29。同樣地，數列中有 0 的地方加入 4 的倍數個 0 也是星星數列，這數列就是 $(c_1, c_2, \dots, c_k) = (-1, -1, \dots, -1)$ ，因此 $k \equiv 1 \pmod{4}$ 階的數列為星星數列。

(iii) 根據性質 6 當 $k=2$ 時，我們得到花數列或蜘蛛網數列。證明仿照(ii)只要將數列中有 0 的地方加入 4 的倍數個 0，也同樣得到花數列或蜘蛛網數列，這係數分別為 $(c_1, c_2, \dots, c_{k-1}, c_k) = (1, -1, \dots, -1, 1, -1)$ 或 $(c_1, c_2, \dots, c_k) = (-1, -1, \dots, -1)$ ，因此， $k \equiv 2 \pmod{4}$ 階的數列為花數列或蜘蛛網數列。

(iv) 根據性質 6 當 $k=3$ 時，我們得到小山數列或蟲蟲數列。證明仿照(ii)只要將數列中有 0 的地方加入 4 的倍數個 0，也同樣得到小山數列或蟲蟲數列，這係數分別為 $(c_1, c_2, \dots, c_{k-1}, c_k) = (1, -1, \dots, 1, -1, 1)$ 或 $(c_1, c_2, \dots, c_k) = (-1, -1, \dots, -1)$ ，因此， $k \equiv 3 \pmod{4}$ 階的數列為小山數列或蟲蟲數列。

(v) 根據性質 6 當 $k=4$ 時，我們得到葉數列。證明仿照(ii)只要將數列中有 0 的地方加入 4 的倍數個 0，也同樣得到葉數列，這係數分別為 $(c_1, c_2, \dots, c_{k-1}, c_k) = (1, -1, \dots, -1, 1, -1)$ 或 $(c_1, c_2, \dots, c_k) = (-1, -1, \dots, -1)$ ，因此， $k \equiv 0 \pmod{4}$ 階的數列為葉數列。 ■

伍、研究結果

由於費氏數列 $\{F_n\}$ 滿足 $\sum_{i=1}^n F_i^2 = F_n F_{n+1}$, $\forall n \in N$ ，所以產生了費氏矩形及費氏螺線，這螺線的樣式是本研究延伸重點。因此，依照此樣式而推廣到一般 k 階齊次線性遞迴數列 $\{a_n\}$ 的數列曲線，我們研究得到數列曲線包含數列螺線及數列非螺線，主要成果如下：

一、不論是數列螺線還是數列非螺線，我們都可以統整為數列曲線方程式：

(一) 當係數 $c_1, c_2, c_3, \dots, c_k > 0$ 時，數列曲線均為螺線，且找出數列螺線方程式，參見性質 1、

定理 1 及定理 2。

$$X(t) = 1 + \sum_{i=1}^{[t]} \frac{1+(-1)^{i+1}}{2} \times (-1)^{\lfloor \frac{i+1}{2} \rfloor} \times (a_i - a_{i-1}) + a_{[t]} \cdot \cos\left(\frac{t-1}{2}\pi\right)$$

$$Y(t) = \sum_{i=1}^{[t]} \frac{1+(-1)^i}{2} \times (-1)^{\lfloor \frac{i}{2} \rfloor} \times (a_i - a_{i-1}) + a_{[t]} \cdot \sin\left(\frac{t-1}{2}\pi\right), \text{ 其中實數 } t \geq 1。$$

(二) 當係數 $c_1, c_2, c_3, \dots, c_k$ 至少有一個負實數時，數列螺線或非螺線，且找出數列曲線方程式，參見定理 2。

$$X(t) = 1 + \sum_{i=1}^{[t]} \frac{1+(-1)^{i+1}}{2} \times (-1)^{\lfloor \frac{i+1}{2} \rfloor} \times (a_i - a_{i-1}) + |a_{[t]}| \cdot \cos \theta$$

$$Y(t) = \sum_{i=1}^{[t]} \frac{1+(-1)^i}{2} \times (-1)^{\lfloor \frac{i}{2} \rfloor} \times (a_i - a_{i-1}) + |a_{[t]}| \cdot \sin \theta$$

其中實數 $t \geq 1$ ，同時若 $a_{[t]} > 0$ ，則 $\theta = \frac{t-1}{2}\pi$ ；若 $a_{[t]} < 0$ ，則 $\theta = \frac{t+1}{2}\pi$ 。

二、 k 階實係數線性遞迴數列 $\{a_n\}$ 中的係數分為 $c_1, c_2, \dots, c_k > 0$ 與 $c_1 < 0, c_2 > 0, c_3 < 0, c_4 > 0, \dots$

來探討，分別得到數列後前項之極限比等於其特徵方程式的正實根或負實根兩種情形，參見性質 2~4、定理 3~9。

特別地，**定理 6** 與 **定理 9** 提供了最佳的**充分條件**，來區分數列螺線或反費氏曲線的所有情形，這充分條件是由 $c_1 + c_2 + c_3 + \cdots + c_k$ 或 $|c_1| + |c_2| + |c_3| + \cdots + |c_k|$ 的值來決定，因此，我們得到主要結果：

分類	係數 $c_1, c_2, \dots, c_k$ 為正實數	$c_1 < 0, c_2 > 0, c_3 < 0, c_4 > 0, \dots$ (正負相間)
唯一實根	α_1 為數列的特徵方程式中唯一的正實根，且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \alpha_1$ 。	α_k 為數列的特徵方程式中唯一的負實根，且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \alpha_k$ 。
區分數列曲線	若 $c_1 + c_2 + c_3 + \cdots + c_k > 1$ 時，則數列曲線是由內而外逆時鐘旋出的螺線。	若 $ c_1 + c_2 + c_3 + \cdots + c_k > 1$ 時，則數列曲線為由內而外逆時鐘旋出的反費氏曲線。
	若 $c_1 + c_2 + c_3 + \cdots + c_k = 1$ 時，則數列曲線是由內而外逆時鐘旋轉的螺線。且當 $n \rightarrow \infty$ 時，數列螺線會收斂於一圓(極限圓)。	若 $ c_1 + c_2 + c_3 + \cdots + c_k = 1$ 時，則數列曲線是由內而外逆時鐘旋轉的反費氏曲線。且當 $n \rightarrow \infty$ 時，數列曲線會收斂於極限反費氏曲線。
	若 $0 < c_1 + c_2 + c_3 + \cdots + c_k < 1$ 時，則數列曲線是由外而內逆時鐘旋入的螺線。且當 $n \rightarrow \infty$ 時，數列螺線會旋入至一點(點圓)。	若 $0 < c_1 + c_2 + c_3 + \cdots + c_k < 1$ 時，則數列曲線是由外而內逆時鐘旋入的反費氏曲線。且當 $n \rightarrow \infty$ 時，數列曲線會旋入至一點。

三、針對具有封閉性或對稱性、且係數 $c_1, c_2, c_3, \dots, c_k \in \{-1, 1\}$ 的數列曲線，我們研究得到數列必須達到以下的判別法則：

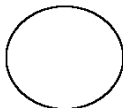
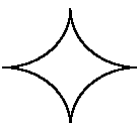
(a) $k (\geq 2)$ 階齊次線性遞迴數列 $\{a_n\}$ 必須至少有一項是零。

(b) 數列方形的邊長為 1。 (c) 要固定的循環步驟。

符合的條件為

$$(c_1, c_2, c_3, \dots, c_k) = \begin{cases} (1, -1, \dots, -1, 1, -1), & \text{當 } k \text{ 為偶數} \\ (1, -1, \dots, 1, -1, 1), & \text{當 } k \text{ 為奇數} \end{cases} \quad \text{或者 } (c_1, c_2, c_3, \dots, c_k) = (-1, -1, \dots, -1)。$$

我們將一些數列曲線解釋為大自然的各種圖像，參見**性質 6** 及 **定理 10**，結果如下：

$\begin{cases} (1, -1, \dots, -1, 1, -1), & \text{當 } k \text{ 為偶數} \\ (1, -1, \dots, 1, -1, 1), & \text{當 } k \text{ 為奇數} \end{cases}$		$(c_1, c_2, c_3, \dots, c_k) = (-1, -1, \dots, -1)$	
$k \equiv 1 \pmod{4}$	$k \equiv 3 \pmod{4}$	$k \equiv 1 \pmod{4}$	$k \equiv 3 \pmod{4}$
 月亮數列	 小山數列	 星星數列	 蟲蟲數列
$k \equiv 2 \pmod{4}$	$k \equiv 0 \pmod{4}$	$k \equiv 2 \pmod{4}$	$k \equiv 0 \pmod{4}$
 花數列	 葉數列	 蜘蛛網數列	 葉數列

陸、結論與未來展望

本研究以費氏矩形及費氏螺線為延伸主體，推廣到一般 k 階齊次線性遞迴數列的情形，建構出的曲線包含螺線與非螺線。我們將數列曲線統整為數列曲線方程式，也探討出如何區分數列螺線以及數列非螺線的充分條件，進一步分析增減性在幾何圖形上的意義。另外，數列中的係數 $c_1, c_2, \dots, c_k$ 影響著數列的增減性，而增減性可決定數列曲線是螺線還是非螺線。事實上，由係數 $c_1, c_2, \dots, c_k$ 判定數列曲線是否為螺線，是困難重重的。而當我們提供最佳的充分條件是由 $c_1 + c_2 + c_3 + \dots + c_k$ 的值來決定，結果更加完美也漂亮。相信未來繼續研究，將有更完美的判別法則。

費氏數列的後前兩項之極限比等於黃金比例 ϕ ，也等於其特徵方程式之正實根，我們也將此性質推廣到一般 k 階齊次線性遞迴數列的情形。因此，得到當係數 $c_1, c_2, \dots, c_k > 0$ 時，後前兩項之極限比等於數列的特徵唯一正實根。另外，是否後前兩項之極限比等於數列的特徵方程式之負實根呢？我們考慮係數 $c_1 < 0, c_2 > 0, c_3 < 0, c_4 > 0, \dots$ 為正負相間的情形，得到後前兩項之極限比等於數列的特徵唯一負實根，從中也建構出偶數段曲線凹性與費氏螺線相反的曲線，我們稱為反費氏螺線，推廣到 k 階稱為反費氏曲線。

大自然的運行中常隱藏費氏數列如鸚鵡螺，我們也建構出一些具有封閉性或對稱性的數列曲線所呈現之圖像來解釋大自然。特別解釋為月亮、星星、花、蜘蛛網、小山、蟲蟲、及葉數列等等，也期盼這些曲線能在自然界中廣泛的應用。

這次研究從二階費氏螺線推廣到一般 k 階齊次線性遞迴數列相應的各種曲線，最期待的，是否還有其他的推廣性質呢？如下三個結果，都是值得我們繼續研究的方向。

- (1) k 階齊次線性遞迴數列出現正負相間的情形，係數為 $c_1 < 0, c_2 > 0, c_3 < 0, c_4 > 0, \dots$ 外，還有哪些係數組合方式可形成數列出現正負相間的情形。
- (2) 特徵方程式的實根性質如**定理 3~定理 9**，若能夠增加複數根的情形來探討更為完備。
- (3) 若改變**判別法則**後，我們發現仍有解釋大自然的圖像。

例如：若改變**判別法則**(b)為數列方形的邊長不限制，則可建構出**眼睛數列**。

數列 $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} - a_{n-3} - a_{n-4} + a_{n-5}$ ，滿足 12 個循環步驟有，可得到**眼睛**的形狀，因此，我們稱此數列為**眼睛數列**，參見圖 30 與圖 31。



圖 30：眼睛數列

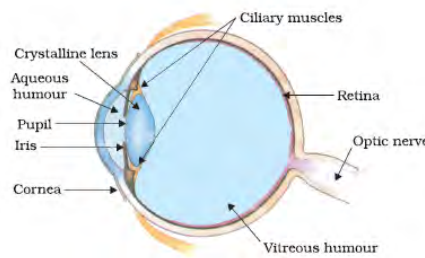


圖 31：眼睛數列

柒、參考資料

- [1] 林福來/譯. C. L. Lin/著 (1982)。組合數學。臺北市：國立編譯館主編。
- [2] 張福春、莊淨惠 (2009)。線性遞迴關係之求解(上)。數學傳播，33(4)，47-62。
- [3] 張福春、莊淨惠 (2009)。線性遞迴關係之求解(下)。數學傳播，34(1)，35-57。
- [4] 黃敏晃、方述誠 (2000)。黃金分割比。科學月刊，1(4)。
- [5] Alfred S. Posamentier and Ingmar Lehmann (2007). *The fabulous Fibonacci numbers*. Amherst, N.Y. : Prometheus Books.
- [6] Chuan-Chong Chen and Khee-Meng Koh (1992). *Principles and techniques in combinatorics*. Singapore ; River Edge, N.J. : World Scientific.
- [7] Xiaoshen Wang (2004). A simple proof of Descartes's Rule of Signs. *Amer. Math. Monthly* 111, 525 - 526.

【評語】 050410

作者研究 k 階實係數齊次線性遞迴數列，利用判別式 $C_1+C_2+\cdots+C_{k-1}$ 去區分數列螺線的圖形，相當有趣。

在特定係數下，其相應的曲線可解釋一些大自然的圖像。

作品海報

簡介

在13世紀初，義大利數學家費波那契 (Fibonacci) 所著《算盤書》一書中談到兔子的生長問題，可用二階實係數遞迴關係來描述如下

$$\begin{cases} F_0=0, & F_1=1 \\ F_n=F_{n-1}+F_{n-2}, & n \geq 2 \end{cases}$$

後人寫成數列形式為0,1,1,2,3,5,8,...，稱為費氏數列(Fibonacci sequence)，參考資料[5]，此數列也表現了自然界生物的許多生長現象，如：鳳梨、向日葵、松果以及鸚鵡螺。此外，具有許多有趣的性質：

1. 後前項比的極限為黃金分割的比值，也稱為黃金比例。
2. 利用費氏數列的各項為邊作正方形，依序以逆時針排列，由0點出發，不斷在正方形內逆時針作出四分之一之圓弧，連結成一條螺線，稱為費氏螺線，這近似於鸚鵡螺的螺線。



$$\text{費氏螺線: } \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{i=1}^n F_i^2 = F_n F_{n+1}$$

本作品中，我們嘗試將上述二階遞迴關係推廣到一般 $k(>2)$ 階實係數遞迴關係的情形。我們發現上述二個結果有各種變化，但萬變不離其宗，收穫是豐富且多樣的。例如：相應的曲線有螺線與非螺線之分，並且都可以解釋為大自然的各種圖像。

研究目的

- 一、依照費氏螺線的樣式，建構推廣費氏矩形及費氏螺線。
- 二、探討 k 階遞迴關係中係數在何種條件下，形成推廣費氏螺線或非螺線的性質。
- 三、在 k 階齊次線性遞迴數列中，探討後前項比的極限與其特徵方程式的實根之性質，再論證出形成螺線以及非螺線的充分條件。
- 四、建構 k 階齊次線性遞迴數列相應的曲線，並且將曲線解釋成大自然的圖像。

研究過程或方法

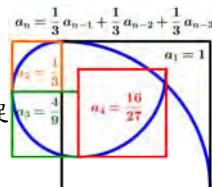
【定義1】給定一數列 $\{a_n\}$ ，若存在 $k(\geq 2)$ 個實數： $c_1, c_2, \dots, c_k$ ，其中 $c_k \neq 0$ ，滿足

(i) (初始條件) $a_1=1, a_i=0$ ，其中 $-(k-2) \leq i \leq 0$ 。

(ii) (遞迴關係) $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + c_3 a_{n-3} + \dots + c_{k-1} a_{n-k+1} + c_k a_{n-k}, n \geq 2$ 。 (1)

則滿足(i)與(ii)式的數列 $\{a_n\}$ 我們叫做 k 階實係數齊次線性遞迴數列。

(1)式的特徵方程式為 $f(x) = x^k - c_1 x^{k-1} - c_2 x^{k-2} - c_3 x^{k-3} - \dots - c_{k-1} x - c_k = 0$ 。 (2)



數列方形是可重疊的

本研究針對(1)式中係數分兩種

(i) 當 $c_1, c_2, \dots, c_k > 0$ 時，則(2)式恰有一正實根(笛卡兒符號法則)，其特徵實根均相異。(定理4)

(ii) 當 $c_1 < 0, c_2 > 0, c_3 < 0, c_4 > 0, \dots$ 時，則(2)式恰有一負實根，其特徵實根均相異。(定理7)

【問題1】若依照費氏螺線的樣式，當推廣 k 階實係數齊次線性遞迴數列時，所產生曲線均為螺線嗎？

數列曲線：

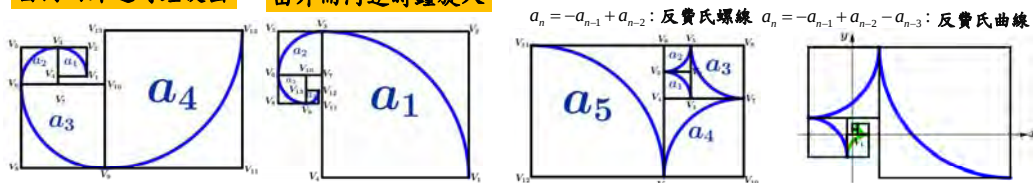
數列螺線

數列非螺線

遞增數列，數列曲線
由內而外逆時鐘旋出

遞減數列，數列曲線
由外而內逆時鐘旋入

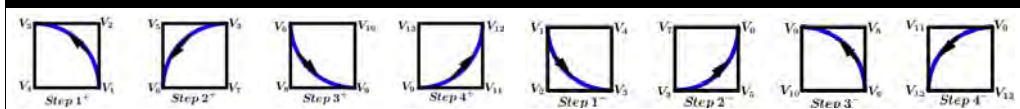
包含有數列正負相間的曲線及大自然圖像之曲線



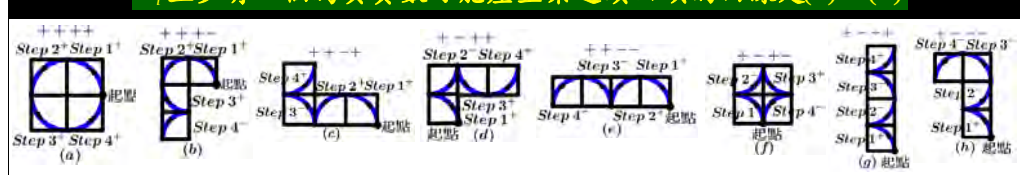
數列曲線的八個循環步驟

$a_i > 0$

$a_i < 0$



a_i 至少有一個為負實數可能產生某連續四項的曲線是(b)~(h)



數列曲線要判斷是否為數列非螺線，我們採取尖點判定法：

若考慮 $a_i (i=1,2,3,\dots,n)$ 至少有一個為負實數，其餘不為零時，會產生四個循環方向，前後步驟正負交錯的情形，則交接處會有尖點產生，因此，此曲線就是數列非螺線。

例如：

$$a_0=0, a_1=1, a_n=-2a_{n-1}-3a_{n-2}, \text{ 此數列為}$$

$$1, -2, 1, 4, -11, 10, 13, -56, 73, \dots \text{ 即是 (d) 的情形。}$$

Step 1⁺, Step 2⁺, Step 3⁺, Step 4⁺

$$1, -2, 1, 4, -11, 10, 13, -56, 73, \dots \text{ 即是 (c) 的情形。}$$

Step 1⁺, Step 2⁺, Step 3⁺, Step 4⁺

【定理 1】費氏螺旋方程式為

$$X(t) = 1 + \sum_{i=1}^{\lfloor t \rfloor} \frac{1+(-1)^{i+1}}{2} \times (-1)^{\lfloor \frac{i+1}{2} \rfloor} \times (a_i - a_{i-1}) + a_{\lfloor t \rfloor} \cdot \cos\left(\frac{t-1}{2}\pi\right)$$
$$Y(t) = \sum_{i=1}^{\lfloor t \rfloor} \frac{1+(-1)^i}{2} \times (-1)^{\lfloor \frac{i}{2} \rfloor} \times (a_i - a_{i-1}) + a_{\lfloor t \rfloor} \cdot \sin\left(\frac{t-1}{2}\pi\right) \quad , \text{其中實數 } t \geq 1。$$

【定理 2】數列曲線方程式為

$$X(t) = 1 + \sum_{i=1}^{\lfloor t \rfloor} \underbrace{\frac{1+(-1)^{i+1}}{2}}_{\text{決定是否影響 } x,y \text{ 坐標的移動量}} \times \underbrace{(-1)^{\lfloor \frac{i+1}{2} \rfloor}}_{\text{決定正負}} \times (a_i - a_{i-1}) + |a_{\lfloor t \rfloor}| \cdot \cos \theta$$
$$Y(t) = \sum_{i=1}^{\lfloor t \rfloor} \underbrace{\frac{1+(-1)^i}{2}}_{\text{決定是否影響 } x,y \text{ 坐標的移動量}} \times \underbrace{(-1)^{\lfloor \frac{i}{2} \rfloor}}_{\text{決定正負}} \times (a_i - a_{i-1}) + |a_{\lfloor t \rfloor}| \cdot \sin \theta \quad , \text{其中實數 } t \geq 1。$$

若 $a_{\lfloor t \rfloor} > 0$ ，則 $\theta = \frac{t-1}{2}\pi$ ；若 $a_{\lfloor t \rfloor} < 0$ ，則 $\theta = \frac{t+1}{2}\pi$ 。

圓心移動軌跡	向左	向下	向右	向上
x 軸方向	-1	0	+1	0
y 軸方向	0	-1	0	+1

【問題 2】 k 階實係數齊次線性遞迴數列之後前項比的極限等於數列的特徵正實根或負實根嗎？

如何用係數找到區分數列曲線的充分條件？

黃金比例 $\phi = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1.618$

性質

數列各項皆為正 $c_1, c_2, \dots, c_k > 0$
特徵實根 $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_k$

數列正負相間 $c_1 < 0, c_2 > 0, c_3 < 0, c_4 > 0, \dots$
特徵實根 $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_k$

唯一實根及後前項比的極限

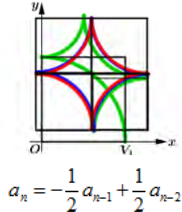
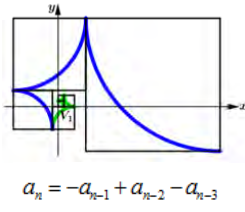
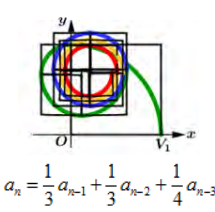
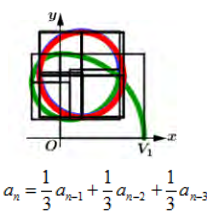
- (i) 數列 $\left\{ \frac{a_{n+1}}{a_n} \right\}$ 為收斂數列 (定理3)
(ii) α_1 為數列的唯一特徵正實根，實根均相異 (定理4)
(iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \alpha_1$ (定理5)

- (i) α_k 為數列的唯一特徵負實根，實根均相異 (定理7)
(ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \alpha_k$ (定理8)

區分數列曲線

- (i) 若 $c_1 + c_2 + \dots + c_k > 1$ 時，則 $\{a_n\}$ 為遞增數列
數列曲線是由內而外逆時鐘旋出的螺旋。
(ii) 若 $c_1 + c_2 + \dots + c_k = 1$ 時，則 $\{a_n\}$ 趨近常數數列
數列曲線是由內而外逆時鐘旋轉的螺旋
當 $n \rightarrow \infty$ 時，數列螺旋會收斂於一圓(極限圓)。
(iii) 若 $0 < c_1 + c_2 + \dots + c_k < 1$ 時，則 $\{a_n\}$ 為遞減數列
數列曲線是由外而內逆時鐘旋入的螺旋
當 $n \rightarrow \infty$ 時，數列螺旋會旋入至一點(點圓)。
(定理6)

- (i) 若 $|c_1| + |c_2| + \dots + |c_k| > 1$ 時，則
數列曲線是由內而外逆時鐘旋出的反費氏曲線。
(ii) 若 $|c_1| + |c_2| + \dots + |c_k| = 1$ 時，則
數列曲線是由內而外逆時鐘旋轉的反費氏曲線
當 $n \rightarrow \infty$ 時，數列曲線會收斂於極限反費氏曲線
(iii) 若 $0 < |c_1| + |c_2| + \dots + |c_k| < 1$ 時，則
數列曲線是由外而內逆時鐘旋入的反費氏曲線
當 $n \rightarrow \infty$ 時，數列曲線會旋入至一點。
(定理9)



【註】數列為 $a_n = -a_{n-1} + a_{n-2}$ ； $a_1=1, a_2=-1, a_3=2, a_4=-3, a_5=5, \dots$ 若此數列都取正號，即費氏數列，有正負相間代表圖形偶數段曲線凹性與費氏螺旋相反，顯然是非螺旋，為了方便稱為反費氏螺旋，推廣至 k 階時，就稱為反費氏曲線。

【問題 3】數列曲線可以解釋哪些大自然的圖像呢？

數列至少有一個為負實數且 $c_1, c_2, \dots, c_k \in [1, -1]$

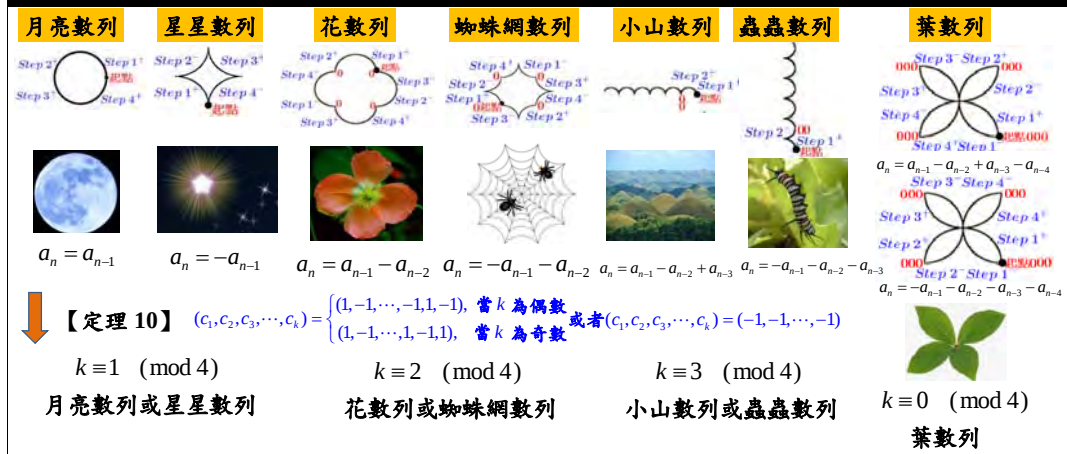
- (i) 當 $k \geq 2, c_1=1, c_2=-1$ 時，則數列 $\{a_n\}$ 至少有一項是零。
(ii) 當 $k \geq 2, c_1=-1, c_2=-1$ 時，則數列 $\{a_n\}$ 至少有一項是零。

數列曲線必須具有封閉性或對稱性 判別法則

(a) $k (\geq 2)$ 階實係數齊次線性遞迴數列必須至少有一項是零。 (b) 數列方形的邊長為 1。 (c) 要固定的循環步驟。

【性質 6】

- (i) 當 $k=1$ 時，則數列 $\{a_n\}$ ： $a_n = a_{n-1}$ (月亮數列)、 $a_n = -a_{n-1}$ (星星數列)。
(ii) 當 $k=2$ 時，則數列 $\{a_n\}$ ： $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ (花數列)、 $a_n = -a_{n-1} - a_{n-2}$ (蜘蛛網數列)。
(iii) 當 $k=3$ 時，則數列 $\{a_n\}$ ： $a_n = a_{n-1} - a_{n-2} + a_{n-3}$ (小山數列)、 $\{a_n\}$ ： $a_n = -a_{n-1} - a_{n-2} - a_{n-3}$ (蟲蟲數列)。
(iv) 當 $k=4$ 時，則數列 $\{a_n\}$ ： $a_n = a_{n-1} - a_{n-2} + a_{n-3} - a_{n-4}$ 、 $a_n = -a_{n-1} - a_{n-2} - a_{n-3} - a_{n-4}$ (葉數列)。



舉例說明： $k \equiv 1 \pmod{4}$ 階實係數齊次線性遞迴數列為

當 $k=1$ 時，則 $a_n = a_{n-1}$ ，代表數列 $\{a_n\}: 1, 1, 1, 1, \dots$ 。

當 $k=5$ 時，則 $a_n = a_{n-1} - a_{n-2} + a_{n-3} - a_{n-4} + a_{n-5}$ ，代表數列 $\{a_n\}: 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, \dots$ 。

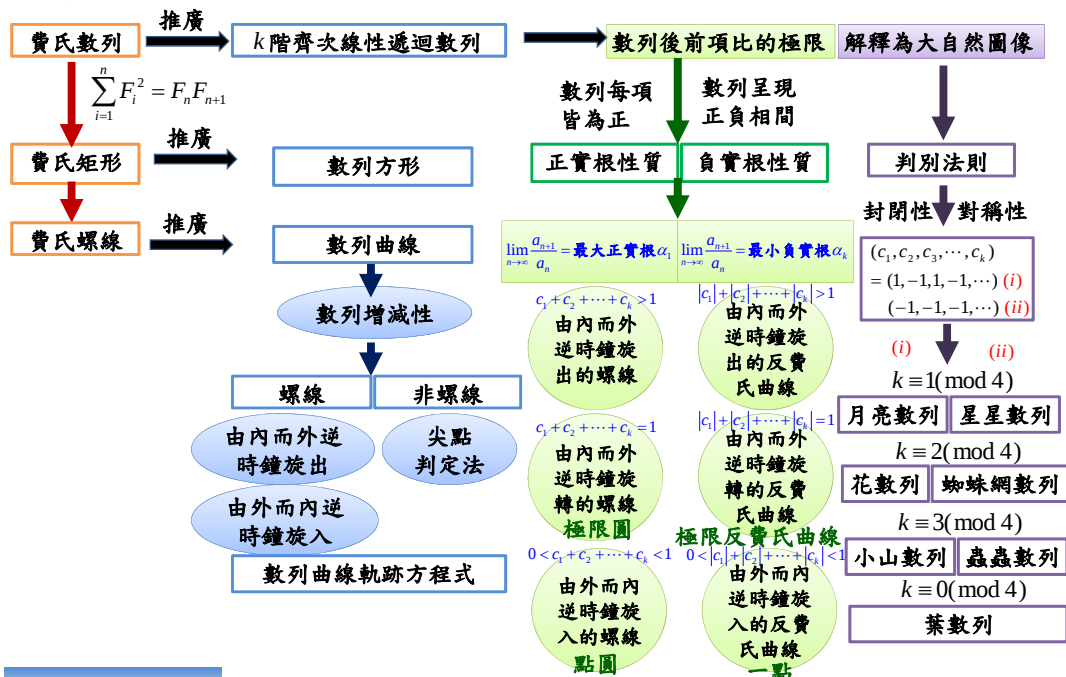
當 $k=9$ 時，則 $a_n = a_{n-1} - a_{n-2} + a_{n-3} - a_{n-4} + a_{n-5} - a_{n-6} + a_{n-7} - a_{n-8} + a_{n-9}$ ，代表數列

$\{a_n\}: 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \dots$

以此類推 $k \equiv 1 \pmod{4}$ 階實係數齊次線性遞迴數列，即是將每項數列中 0 的地方加入 4 的倍數個 0。

對於其他情形如 $k \equiv 2 \pmod{4}$ 、 $k \equiv 3 \pmod{4}$ 以及 $k \equiv 0 \pmod{4}$ 方法均相同。

研究結果與結論



未來展望

這次研究從二階費氏螺線推廣到一般 k 階實係數齊次線性遞迴數列相應的各種曲線，如下三個結果，都是值得我們繼續研究的方向。

- k 階實係數齊次線性遞迴數列出現正負相間的情形，係數為 $c_1 < 0, c_2 > 0, c_3 < 0, c_4 > 0, \dots$ 外，還有哪些係數組合方式可形成數列出現正負相間的情形。
- 特徵方程式的實根性質如定理 3~定理 9，若能夠增加複數根的情形來探討更為完備。
- 若改變判斷法則後，是否還有曲線能解釋為大自然的圖像呢？如改變判斷法則 (b) 為數列方形的邊長不限制。例如：數列 $\{a_n\}: a_n = a_{n-1} + a_{n-2} - a_{n-3} - a_{n-4} + a_{n-5}$ ，滿足 12 個循環步驟，可得到眼睛的形狀，因此我們稱此數列為眼睛數列，參見下圖。

參考資料

- 林福來/譯. C. L. Lin/著 (1982)。組合數學。臺北市：國立編譯館主編。
- 張福春、莊淨惠 (2009)。線性遞迴關係之求解(上)。數學傳播, 33(4), 47-62。
- 張福春、莊淨惠 (2009)。線性遞迴關係之求解(下)。數學傳播, 34(1), 35-57。
- 黃敏敏、方述誠 (2000)。黃金分割比。科學月刊, 1(4)。
- Alfred S. Posamentier and Ingmar Lehmann (2007)。The fabulous Fibonacci numbers. Amherst, N.Y.: Prometheus Books.
- Chuan-Chong Chen and Khee-Meng Koh (1992)。Principles and techniques in combinatorics. Singapore: River Edge, N.J.: World Scientific.
- Xiaoshen Wang (2004)。A simple proof of Descartes's Rule of Signs. Amer. Math. Monthly 111, 525 - 526.

