中華民國第57屆中小學科學展覽會
作品說明書

高級中等學校組　數學科

第三名

050409

閃爍燈之循環性質研究與探討

學校名稱：國立鳳山高級中學

作者：	指導老師：
高二 林柏均	黃佩瑜
高二 曾愷威	許純瑋
高二 潘祈睿	

關鍵詞：閃爍燈、循環、狀態列

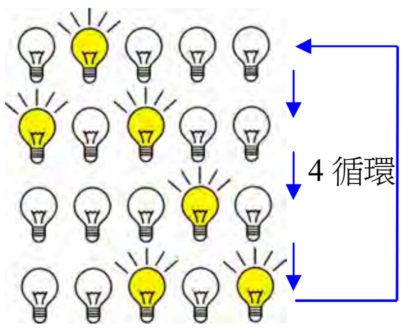
摘要

n 盞燈排成一列，最初將某些燈點亮，在每次操作，將上一次未亮且其旁邊僅有一盞燈是亮著的燈點亮，並將原來亮的燈熄滅，欲找出一種亮燈方式，使得此 n 盞燈無論操作幾次，至少存在一盞燈是亮著的。本作品旨在研究 n 個燈直線排列的循環性質，並把排列方式推廣到環狀、矩陣及三維陣列。研究中我們發現一種特別的最短循環集型式，是由若干個全 0 子狀態列去串接**基本型 2 循環集**，形成**複合基本 2 循環集**，進而找出所有排列大小的 2 循環集。而「**可逆性判斷法**」與「**l 循環集建構法**」可幫助我們探討各種循環集之存在性。最後，改變操作規則爲「將上一次未亮且其旁邊恰有 k 盞燈是亮著的燈點亮，其中 $k = 2,3,4$ 」。**閃爍燈的循環性質可應用在各類流量之自動調節系統的設計**。

壹、研究動機

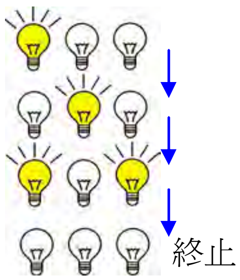
第 23 屆環球城市數學競賽試題中，有一個關於閃爍燈問題：「將 n 盞燈排成一列，最初將其中某些燈點亮，在以後的每次操作，將上一次未亮且其旁邊僅有一盞燈是亮著的燈點亮，同時將原來已亮的燈熄滅。試問對什麼樣的 n ，可以找到一種亮燈的方式，使得無論操作幾次，在每一次操作後，至少都有一盞燈是亮著的。」由於 n 盞燈的亮燈方式共 2^n 種，若 n 盞燈永不全滅，必定會產生循環。我們對於其循環性質感到好奇，便展開一連串的研究。

貳、研究目的



一、探討 n 個燈直線排列的循環性質。
二、探討 n 個燈環狀排列的循環性質。
三、探討 $m \times n$ 個燈矩陣排列的循環性質。
四、探討 $m \times n \times l$ 個燈三維陣列排列的循環性質。
五、改變操作規則，並探討各種排列之循環性質。

參、研究器材



紙、筆、電腦、C++

肆、研究過程

文獻探討

這個題目乍看之下似乎與常見的點燈問題相關，但當我們深入研究後發現，點燈問題是主觀的決定開關燈之目標與開關順序，然而閃爍燈問題是在固定開關燈規則下，客觀的全面進行操作，因此一旦初始狀態列決定，其變換過程、順序與結果均已確定。故傳統點燈的解題方式，皆不適用於這篇研究。而目前尚未有人對於閃爍燈問題有深入的探討。

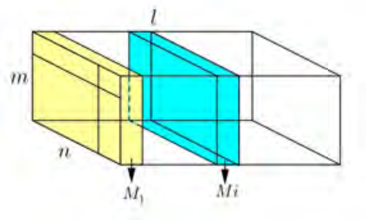
名詞與符號定義：

(一)狀態列P:

(1)直線狀態列$P=(a_1,a_2,\cdots\cdots,a_n)$：$a_i$爲由左至右第$i$個燈，稱狀態列$P$之元素。

(2)環狀狀態列$P=\overline{(a_1,a_2,\cdots\cdots,a_n)}$：$a_1,a_2,\cdots\cdots,a_n$爲順時針圍成一圈之元素。

(3)矩陣狀態列$P=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$：$a_{ij}$爲位在第$i$列第$j$行之元素。



(4)三維陣列狀態列$P=V_{m\times n\times l}\left[M_1M_2\cdots M_l\right]$：$M_i$爲位在第$i$層的$m\times n$矩陣狀態列。

(二)元素之狀態值：$a_i=\begin{cases}0,燈爲暗\\1,燈爲亮\end{cases}$　　(a_{ij}定義同)

(三)轉換函數T_k：若燈爲亮，則經操作變爲暗；若燈爲暗，且與之相鄰的燈恰有k個爲亮，則操作後變爲亮，反之，仍爲暗。即

$$T_k(a_i)=\begin{cases}0 & ,a_i=1\\1 & ,a_i=0且與a_i相鄰之元素恰k個值爲1\\0 & ,其他\end{cases}\qquad (T_k(a_{ij})\text{ 定義同})$$

$T_k(P)=P'$：狀態列P經轉換函數T_k之操作後變爲狀態列P'。

(四)可逆狀態列：若狀態列P爲可逆狀態列，則存在一狀態列Q使得$T_k(Q)=P$。反之則爲不可逆狀態列。

(五)終止狀態列：若狀態列P爲終止狀態列，則$T_k(P)=P$。

(六)l循環：若l爲最小自然數使得狀態列P滿足$\underbrace{T_k\circ T_k\circ\cdots\cdots\circ T_k}_{l個}(P)=P\ (l\ge 2)$，則稱$P$爲一$l$循環狀態列，其中$l$稱爲狀態列$P$之循環長度。

(七)l循環集：若一組狀態列$P_1,P_2,\cdots\cdots,P_l\ (l\ge 2)$，滿足$T_k(P_i)=P_{i+1}(i=1,2,\cdots,l-1),T_k(P_l)=P_1$，則稱$\{P_1,P_2,\cdots\cdots,P_l\}$爲一個$l$循環集，其中$l$爲此循環集之長度。

(八)最短循環集：所有循環集長度最短者，稱爲最短循環集。

(九)H_k^n：從n種(每種至少k件)相異物中，可重複取k個組合數。其中$H_k^n=C_k^{n+k-1}$。定義$H_k^0=0$。

(十)偶分割：將直線狀態列$P(a_1,a_2,\cdots\cdots,a_n)$分割成數個含偶數個元素之子狀態列，稱爲偶分割。例：$(1,0,0,1)(1,0)(0,1,1,0,0,1)$爲$P(1,0,0,1,1,0,0,1,1,0,0,1)$的一個偶分割。

(十一)同型偶分割：若$(X_1)(X_2)\cdots(X_m)$與$(Y_1)(Y_2)\cdots(Y_m)$分別爲狀態列$(a_1,a_2,\cdots\cdots,a_n)$與$(b_1,b_2,\cdots\cdots,b_n)$之偶分割，若$X_i$與$Y_i\,(i=1,2,\cdots,m)$所含元素個數相同，則稱$(X_1)(X_2)\cdots(X_m)$與$(Y_1)(Y_2)\cdots(Y_m)$爲同型偶分割。

研究一: n個燈直線排列；T_1

一、找出所有的終止狀態列：

性質 1.1：直線狀態列中，全 0 狀態列爲唯一之終止狀態列。

【證明】存在性：顯然 $T_1(0,0,\cdots\cdots,0)=(0,0,\cdots,0)$。

唯一性：假設一不全 0 狀態列 $(a_1,a_2,\cdots\cdots,a_n)$，使得 $T_1(a_1,a_2,\cdots\cdots,a_n)=(a_1,a_2,\cdots\cdots,a_n)$

令 $a_i=1$，則 $T_1(a_i)=0 \rightarrow\leftarrow$ ■

二、找出一次操作後變換成終止狀態列的充要條件：

性質 1.2：非全 0 直線狀態列中，一次操作後變全 0 狀態列的充分且必要條件爲 1 在邊且 0 皆不相鄰(含全 1 狀態)。

【證明】

($\Leftarrow$) 已知狀態列 $(a_1,a_2,\cdots\cdots,a_n)$ 中，1 在邊且 0 皆不相鄰，則每個 0 的兩旁均爲 1，

由 T_1 的轉換規則顯然得知 $T_1(a_i)=0,\forall 1\le i\le n$，故 $T_1(a_1,a_2,\cdots\cdots,a_n)=(0,0,\cdots\cdots,0)$。

($\Rightarrow$) 利用反證法證明，假設狀態列中存在 1 不在邊或 00 相鄰，會使得一次操作變全 0 狀態列

(1) 1 不在邊：型如 (0,_________) 或 (_________,0)

由對稱性，不妨假設狀態列 $(a_1,a_2,\cdots\cdots,a_n),a_1=0$

$\because (a_1,a_2,\cdots\cdots,a_n)\ne(0,0,\cdots\cdots,0)$，故必存在一 $2\le i\le n$ 使得 $a_1=a_2=\cdots=a_{i-1}=0$ 且 $a_i=1$

$\Rightarrow T_1(a_{i-1})=1$，即 $T_1(a_1,a_2,\cdots\cdots,a_n)\ne(0,0,\cdots\cdots,0)\rightarrow\leftarrow$

(2) 1 在邊且存在 00 相鄰：型如 (1,___,0,0,___,1)

假設 $(a_1,a_2,\cdots,a_i,a_{i+1},\cdots,a_n),a_1=a_n=1,a_i=a_{i+1}=0$，其中 $2\le i\le n-2$

故必存在一 $1\le j\le i-1$ 使得 $a_{j+1}=\cdots=a_i=a_{i+1}=0$ 且 $a_j=1\Rightarrow T_1(a_{j+1})=1$

即 $T_1(a_1,a_2,\cdots\cdots,a_n)\ne(0,0,\cdots\cdots,0)\rightarrow\leftarrow$

由(1)(2)可證若一次操作後變全 0 狀態列，則 1 在邊且 0 皆不相鄰。■

三、可逆性判斷法之研究：

(一)11 在邊或 111 相鄰：

性質 1.3：直線狀態列中，存在 11 在邊或 111 相鄰時，則爲不可逆狀態列。

【證明】

(1)11 在邊：型如 (1,1,__________) 或 (__________,1,1)

由對稱性，不妨假設狀態列 $(a_1,a_2,\cdots\cdots,a_n),a_1=a_2=1$

設存在一狀態列 $(b_1,b_2,\cdots\cdots,b_n)$ 使得 $T_1(b_1,b_2,\cdots\cdots,b_n)=(a_1,a_2,\cdots\cdots,a_n)$

$\because T_1(b_1)=1,T_1(b_2)=1\Rightarrow b_1=b_2=0\Rightarrow T_1(b_1)=0=a_1\ne1\rightarrow\leftarrow$ 故狀態列 $(1,1,\cdots\cdots,a_n)$ 不可逆。

(2)11 不在邊且存在 111 相鄰：型如 (____111____)

假設狀態列 $(a_1,\cdots,a_i,a_{i+1},a_{i+2},\cdots,a_n),a_i=a_{i+1}=a_{i+2}=1$，其中 $2\le i\le n-3$

設存在一狀態列 $(b_1,b_2,\cdots\cdots,b_n)$ 使得

$T_1(b_1,b_2,\cdots,b_i,b_{i+1},b_{i+2},\cdots,b_n)=(a_1,a_2,\cdots,a_i,a_{i+1,}a_{i+2},\cdots,a_n)$

$\because T_1(b_i)=T_1(b_{i+1})=T_1(b_{i+2})=1\Rightarrow b_i=b_{i+1}=b_{i+2}=0\Rightarrow T_1(b_{i+1})=0=a_{i+1}\ne1\rightarrow\leftarrow$

故狀態列 $(a_1,\cdots,1,1,1,\cdots,a_n)$ 不可逆。■

(二)11 不在邊且 111 不相鄰

因爲 111 不相鄰，故狀態列中的 1 至多 2 個相鄰，而若狀態列中存在 11 相鄰，則我們可**從兩個 1 間做分割，將狀態列分割成數個不含 11 相鄰之子狀態列，而這些子狀態列之變換互相不影響，故可分別討論其可逆性，再合併起來判斷原始狀態列之可逆性**。因此，我們只需要針對無 11 相鄰之狀態列來討論即可。

(1) **1_______________1 型：**　【因爲 11 不在邊，故必爲 10__________01 型式】

在研究的過程中，我們觀察到此型式之可逆性與其 1 的個數之奇偶性相關，結果如下：

性質 1.4: 若直線狀態列型如 $\overbrace{(1,0,1,0,1,0,\cdots,1,0,1)}^{t\text{個}1}$，當 t 爲偶數時，此狀態列可逆；當 t 爲奇數時，此狀態列不可逆。

【證明】

已知狀態列 $\overbrace{(1,0,1,0,1,0,\cdots,1,0,1)}^{t\text{個}1}$ 共有 $2t-1$ 個元素，其中共有 t 個1與 $(t-1)$ 個0

(1)當 t 爲偶數時，令 $t=2i\ (i\in N)$，即 $\overbrace{(1,0,1,0,1,0,\cdots,1,0,1)}^{t\text{個}1}$ 共有 $4i-1$ 個元素，其中共有 $2i$ 個1與 $(2i-1)$ 個0

則 $T_1(\underline{0,1,0,0},\underline{0,1,0,0},\cdots,\underline{0,1,0,0},\underline{0,1,0})=(\underline{1,0,1,0},\underline{1,0,1,0},\cdots,\underline{1,0,1,0},\underline{1,0,1})$

故當 t 爲偶數時，狀態列 $\overbrace{(1,0,1,0,1,0,\cdots,1,0,1)}^{t\text{個}1}$ 可逆。

(2)當 t 爲奇數時，令 $t=2i+1\ (i\in N\cup\{0\})$，即 $\overbrace{(1,0,1,0,1,0,\cdots,1,0,1)}^{t\text{個}1}$ 共有 $4i+1$ 個元素，其中共有 $2i+1$ 個1與 $2i$ 個0

當 $i=0$ 時，$t=1$，狀態列 (1) 顯然不可逆

當 $i\geq 1$ 時，假設狀態列 $\overbrace{(1,0,1,0,1,0,\cdots,1,0,1)}^{2i+1\text{個}1}$ 可逆

則存在一狀態列 $(a_1,a_2,a_3,\cdots,a_{4i+1})$ 使得 $T_1(a_1,a_2,\cdots,a_{4i},a_{4i+1})=\overbrace{(1,0,1,0,1,0,\cdots,1,0,1)}^{2i+1\text{個}1}$

故可知 $T_1(a_j)=\begin{cases}1\text{，當}j\text{爲奇數}\\0\text{，當}j\text{爲偶數}\end{cases}\Rightarrow a_j=\begin{cases}0 & \text{，當}j\text{爲奇數}\\0\text{或}1 & \text{，當}j\text{爲偶數}\end{cases}$

即 $T_1(a_1,a_2,\cdots,a_{4i},a_{4i+1})=T_1\overbrace{(0,a_2,0,a_4,0,a_6,\cdots,0,a_{4i-2},0,a_{4i},0)}^{2i+1\text{個}0}=\overbrace{(1,0,1,0,\cdots,1,0,1,0,1)}^{2i+1\text{個}1}$

顯然的 $\because T_1(a_1)=1$ 且 $a_1=0\quad\Rightarrow a_2=1$

$\because T_1(a_3)=1$ 且 $a_2=1,a_3=0\Rightarrow a_4=0$

$\because T_1(a_5)=1$ 且 $a_4=0,a_5=0\Rightarrow a_6=1$

依此類推可推得 $a_{4k-2}=1,a_{4k}=0(\forall k\in N)$，故 $a_{4i}=0$

但 $T_1(a_{4i+1})=1$ 且 $a_{4i+1}=0$，則 $a_{4i}=1\rightarrow\leftarrow$

故當 t 爲奇數時，狀態列 $\overbrace{(1,0,1,0,1,0,\cdots,1,0,1)}^{t\text{個}1}$ 不可逆。■

> 性質 1.5：若直線狀態列型如 $(\overbrace{1,\underbrace{0,\cdots,0}_{m_1},1,\underbrace{0,\cdots,0}_{m_2},1,0,\cdots,0,1,\underbrace{0,\cdots,0}_{m_{t-1}},1}^{t\text{個}1})$，$m_i \in N, 1\le i\le t-1$，
>
> 當 t 為偶數時，此狀態列可逆；當 t 為奇數時，此狀態列不可逆。
>
> 即狀態列 $(\overbrace{1,\underbrace{0,\cdots,0}_{m_1},1,\underbrace{0,\cdots,0}_{m_2},1,0\cdots,0,1,\underbrace{0,\cdots,0}_{m_{t-1}},1}^{t\text{個}1})$ 與狀態列 $(\overbrace{1,0,1,0,1,0,\cdots,1,0,1}^{t\text{個}1})$ 之可逆性相同。

【證明】 已知狀態列 $(\overbrace{1,\underbrace{0,\cdots,0}_{m_1},1,\underbrace{0,\cdots,0}_{m_2},1,0,\cdots,0,1,\underbrace{0,\cdots,0}_{m_{t-1}},1}^{t\text{個}1})$

(1)當 t 為偶數時，類同性質 1.4，

$$T_1(0,\underbrace{1,\cdots,1}_{m_1},0,\underbrace{0,\cdots,0}_{m_2},0,\underbrace{1,\cdots,1}_{m_3},0,\cdots,0,0,\underbrace{1,\cdots,1}_{m_{t-1}},0)=(\overbrace{1,\underbrace{0,\cdots,0}_{m_1},1,\underbrace{0,\cdots,0}_{m_2},1,\underbrace{0,\cdots0}_{m_3},1,\cdots,0,1,\underbrace{0,\cdots,0}_{m_{t-1}},1}^{t\text{個}1})$$

故當 t 為偶數時，$(\overbrace{1,\underbrace{0,\cdots,0}_{m_1},1,\underbrace{0,\cdots,0}_{m_2},1,0,\cdots,0,1,\underbrace{0,\cdots,0}_{m_{t-1}},1}^{t\text{個}1})$ 可逆。

(2)當 t 為奇數時，由性質 1.4 知，狀態列 $(\overbrace{1,0,1,0,1,0,\cdots,1,0,1}^{t\text{個}1})$ 為不可逆

欲證 $(\overbrace{\underbrace{1,\underbrace{0,\cdots,0}_{m_1},1,0,\cdots0,}_{\text{共}l_1\text{項}}\boxed{1,\underbrace{0,\cdots,0}_{m_i},1}\underbrace{,0,\cdots,0,1,\underbrace{0,\cdots,0}_{m_{t-1}},1}_{\text{共}l_2\text{項}}}^{t\text{個}1})$ 皆不可逆(其中 $m_i\in N,\forall 1\le i\le t-1$)

設當 $m_i=m\ (m\ge 2)$ 時可逆，即狀態列型如

$(\underbrace{a_1,a_2,\cdots,a_{l_1}}_{l_1},1,\underbrace{0,\cdots,0}_{m\text{個}},1,\underbrace{a_{l_1+m+3},\cdots,a_{l_1+l_2+(m+1)},a_{l_1+l_2+(m+2)}}_{l_2})$ 可逆

即存在一狀態列 $(\underbrace{b_1,b_2,\cdots,b_{l_1}}_{l_1},b_{l_1+1},\cdots,b_{l_1+(m+2)},\underbrace{b_{l_1+(m+3)},\cdots,b_{l_1+l_2+(m+2)}}_{l_2})$ 使得

$$T_1(\underbrace{b_1,b_2,\cdots,b_{l_1}}_{l_1},b_{l_1+1},\cdots,b_{l_1+(m+2)},\underbrace{b_{l_1+(m+3)},\cdots,b_{l_1+l_2+(m+2)}}_{l_2})=$$

$$(\underbrace{a_1,a_2,\cdots,a_{l_1}}_{l_1},1,\underbrace{0,\cdots,0}_{m},1,\underbrace{a_{l_1+(m+3)},\cdots,a_{l_1+l_2+(m+1)},a_{l_1+l_2+(m+2)}}_{l_2})$$

$\because$ 子狀態列 $(b_{l_1+1},\cdots,b_{l_1+(m+2)})$ 滿足 $T_1(b_{l_1+1},\cdots,b_{l_1+(m+2)})=(1,\underbrace{0,\cdots,0}_{m},1)$

故 $(b_{l_1+1},\cdots,b_{l_1+(m+2)})=(\underbrace{0,0,\cdots,0,0}_{m+2})$ 或

$(0,1,\underbrace{b_{l_1+3},\cdots,b_{l_1+m}}_{m-2},1,0)$，其中 $(\underbrace{b_{l_1+3},\cdots,b_{l_1+m}}_{m-2})$ 為一 0 不相鄰之狀態列

(若 $m=2$ 時，$(b_{l_1+1},b_{l_1+2},b_{l_1+3},b_{l_1+4})=(0,1,1,0)$)

【註：當 $i=1$ 或 $i=t-1$ 時，$(b_{l_1+1},\cdots,b_{l_1+(m+2)})\neq(\underbrace{0,0,\cdots,0,0}_{m+2})$】

①若 $(b_{l_1+1},\cdots,b_{l_1+(m+2)})=(\underbrace{0,0,\cdots,0,0}_{m+2})$，則

$$T_1(\underbrace{b_1,b_2,\cdots,b_{l_1}}_{l_1},0,\boxed{\underbrace{\cancel{0}}_{b_{l_1+2}}},\cdots,0,0,\underbrace{b_{l_1+(m+3)},\cdots,b_{l_1+l_2+(m+1)},b_{l_1+l_2+(m+2)}}_{l_2})=$$

$$(\underbrace{a_1,a_2,\cdots,a_{l_1}}_{l_1},1,\boxed{\underbrace{\cancel{0}}_{a_{l_1+2}}},\cdots,0,1,\underbrace{a_{l_1+(m+3)},\cdots,a_{l_1+l_2+(m+1)},a_{l_1+l_2+(m+2)}}_{l_2})$$

【註：$T(b_1,b_2,\cdots,b_{l_1})=(a_1,a_2,\cdots,a_{l_1})$；

$T_1(b_{l_1+(m+3)},\cdots,b_{l_1+l_2+(m+1)},b_{l_1+l_2+(m+2)})=(a_{l_1+(m+3)},\cdots,a_{l_1+l_2+(m+1)},a_{l_1+l_2+(m+2)})$

之變換不受刪除 $T_1(b_{l_1+2})=a_{l_1+2}$ 而影響】

② 若 $(b_{l_1+1},\cdots,b_{l_1+(m+2)})=(0,1,\underbrace{b_{l_1+3},\cdots,b_{l_1+m}}_{m-2},1,0)$，其中 $(\underbrace{b_{l_1+3},\cdots,b_{l_1+m}}_{m-2})$ 為一 0 不相鄰之子狀態列，則 $(\cancel{b_{l_1+3}},\underbrace{b_{l_1+4}\cdots,b_{l_1+m}}_{m-3})$ 也會是一 0 不相鄰之子狀態列，

故 $T_1(\underbrace{b_1,b_2,\cdots,b_{l_1}}_{l_1},0,1,\boxed{\cancel{b_{l_1+3}}},\underbrace{b_{l_1+4},\cdots,b_{l_1+m}}_{m-3},1,0,\underbrace{b_{l_1+(m+3)},\cdots,b_{l_1+l_2+(m+1)},b_{l_1+l_2+(m+2)}}_{l_2})=$

$$(\underbrace{a_1,a_2,\cdots\cdots,a_{l_1}}_{l_1},1,0,\underbrace{\boxed{\cancel{0}},\cdots}_{m-2},0,1,\underbrace{a_{l_1+m+3},\cdots,a_{l_1+l_2+(m+1)},a_{l_1+l_2+(m+2)}}_{l_2})$$

(若 $m=2$，則 $T_1(\underbrace{b_1,b_2,\cdots,b_{l_1}}_{l_1},0,\boxed{\underbrace{\cancel{1}}_{b_{l_1+2}}},1,0,\underbrace{b_{l_1+5},\cdots,b_{l_1+l_2+3},b_{l_1+l_2+4}}_{l_2})=$

$$(\underbrace{a_1,a_2,\cdots,a_{l_1}}_{l_1},1,\boxed{\underbrace{\cancel{0}}_{b_{l_1+2}}},0,1,\underbrace{a_{l_1+5},\cdots,a_{l_1+l_2+3},a_{l_1+l_2+4}}_{l_2}))$$

由①②知狀態列 $(\underbrace{a_1,a_2,\cdots,a_{l_1}}_{l_1},1,\underbrace{0,\cdots,0}_{m-1},1,\underbrace{a_{l_1+m+3},\cdots,a_{l_1+l_2+(m+1)},a_{l_1+l_2+(m+2)}}_{l_2})$ 可逆

由以上證明知，當 $m_i=m(m\geq 2)$ 時狀態列為可逆，則 $m_i=m-1$ 時狀態列也是可逆。

因此若 $(\overbrace{1,\underbrace{0,\cdots,0}_{m_1},1,\underbrace{0,\cdots,0}_{m_2},1,0,\cdots,0,1,\underbrace{0,\cdots,0}_{m_{t-1}},1}^{t\text{個}1})$ 爲可逆，對於每個 m_i 均可遞減 0 之個數得

$(\overbrace{1,0,1,0,1,0\cdots,1,0,1}^{t\text{個}1})$ 也是可逆狀態列 $\rightarrow\leftarrow$

故當 t 爲奇數時，$(\overbrace{1,\underbrace{0,\cdots,0}_{m_1},1,0,\cdots,0,1,\underbrace{0,\cdots,0}_{m_i},1,0\cdots,0,1,\underbrace{0,\cdots,0}_{m_{t-1}},1}^{t\text{個}1})$ 不可逆。■

(2) 1________________0 型：

性質 1.6: 若直線狀態列型如 $(\overbrace{1,\underbrace{0,\cdots,0}_{m_1},1,\underbrace{0,\cdots,0}_{m_2},1,0,\cdots,0,1,\underbrace{0,\cdots,0}_{m_t}}^{t\text{個}1})$ ，$m_i \in N, 1 \le i \le t$ ，則

皆爲可逆狀態列。即狀態列 $(\overbrace{1,\underbrace{0,\cdots,0}_{m_1},1,\underbrace{0,\cdots,0}_{m_2},1,0,\cdots,0,1,\underbrace{0,\cdots,0}_{m_t}}^{t\text{個}1})$ 與狀態列

$(\overbrace{1,0,1,0,1,0,\cdots,1,0}^{t\text{個}1})$ 之可逆性相同。

【證明】

(1)當 t 爲奇數時，

$$T_1(0,\underbrace{1,\cdots,1}_{m_1},0,\underbrace{0,\cdots,0}_{m_2},0,\underbrace{1,\cdots1}_{m_3},0,\cdots,\underbrace{0,\cdots,0}_{m_{t-1}},0,\underbrace{1,\cdots,1}_{m_t}) = (\overbrace{1,\underbrace{0,\cdots,0}_{m_1},1,\underbrace{0,\cdots,0}_{m_2},1,\underbrace{0,\cdots0}_{m_3},1,\cdots,\underbrace{0,\cdots,0}_{m_{t-1}},1,\underbrace{0,\cdots,0}_{m_t}}^{t\text{個}1})$$

(2)當 t 爲偶數時，

$$T_1(0,\underbrace{1,\cdots,1}_{m_1},0,\underbrace{0,\cdots,0}_{m_2},0,\underbrace{1,\cdots,1}_{m_3},0,\cdots,\underbrace{1,\cdots,1}_{m_{t-1}},0,\underbrace{0,\cdots,0}_{m_t}) = (\overbrace{1,\underbrace{0,\cdots0}_{m_1},1,\underbrace{0,\cdots,0}_{m_2},1,\underbrace{0,\cdots,0}_{m_3},1\cdots,\underbrace{0,\cdots,0}_{m_{t-1}},1,\underbrace{0,\cdots,0}_{m_t}}^{t\text{個}1})$$

故直線狀態列型如 $(\overbrace{1,\underbrace{0,\cdots,0}_{m_1},1,\underbrace{0,\cdots,0}_{m_2},1,0,\cdots,0,1,\underbrace{0,\cdots,0}_{m_t}}^{t\text{個}1})$ 皆可逆。■

(3) 0________________0 型：

性質 1.7: 若直線狀態列型如 $(\overbrace{\underbrace{0,\cdots,0}_{m_1},1,\underbrace{0,\cdots,0}_{m_2},1,0,\cdots,0,1,\underbrace{0,\cdots,0}_{m_{t+1}}}^{t\text{個}1})$ ，$m_i \in N, 1 \le i \le t+1$ ，則

皆爲可逆狀態列。即狀態列 $(\overbrace{\underbrace{0,\cdots,0}_{m_1},1,\underbrace{0,\cdots,0}_{m_2},1,0,\cdots,0,1,\underbrace{0,\cdots,0}_{m_{t+1}}}^{t\text{個}1})$ 與狀態列

$(\overbrace{0,1,0,1,0,\cdots,1,0}^{t\text{個}1})$ 之可逆性相同。

【證明】

(1)當 t 爲奇數時，

$$T_1(\underbrace{1,\cdots,1}_{m_1},0,\underbrace{0,\cdots,0}_{m_2},0,\underbrace{1,\cdots,1}_{m_3},0,\cdots,\underbrace{1,\cdots,1}_{m_t},0,\underbrace{0\cdots,0}_{m_{t+1}})=\overbrace{(\underbrace{0,\cdots,0}_{m_1},1,\underbrace{0,\cdots,0}_{m_2},1,\underbrace{0,\cdots0}_{m_3},1,\cdots,\underbrace{0,\cdots,0}_{m_t},1,\underbrace{0,\cdots,0}_{m_{t+1}})}^{t\text{個}1}$$

(2)當 t 爲偶數時，

$$T_1(\underbrace{1,\cdots,1}_{m_1},0,\underbrace{0,\cdots,0}_{m_2},0,\underbrace{1,\cdots1}_{m_3},0,\cdots,\underbrace{0,\cdots,0}_{m_t},0,\underbrace{1,\cdots1}_{m_{t+1}})=\overbrace{(\underbrace{0,\cdots,0}_{m_1},1,\underbrace{0,\cdots,0}_{m_2},1,\underbrace{0,\cdots,0}_{m_3},1,\cdots,\underbrace{0,\cdots,0}_{m_t},1,\underbrace{0,\cdots,0}_{m_{t+1}})}^{t\text{個}1}$$

故直線狀態列型如 $\overbrace{(\underbrace{0,\cdots,0}_{m_1},1,\underbrace{0,\cdots,0}_{m_2},1,0,\cdots,0,1,\underbrace{0,\cdots,0}_{m_{t+1}})}^{t\text{個}1}$ 皆爲可逆狀態列。■

直線狀態列可逆性判斷法：

步驟一：若爲 11 在邊或 111 相鄰時，則不可逆，否則進行步驟二。
步驟二：將狀態列中 11 相鄰處，由兩個 1 間分割成數個無 11 相鄰的子狀態列。
步驟三：針對每個子狀態列依照性質 1.5~性質 1.7 分別判斷其可逆性，若皆可逆，則原始狀態列可逆；反之，則不可逆。

【例】判斷狀態列 $P=(1,0,0,1,0,0,0,1,0,\boxed{1,1},0,1,0,0,0,\boxed{1,1},0,0,0,0,0,1,0,1,0,0,0)$ 之可逆性

步驟二：分割成 $P=(1,0,0,1,0,0,0,1,0,1)(1,0,1,0,0,0,1)(1,0,0,0,0,1,0,1,0,0,0)$
步驟三：由性質 1.5 與性質 1.6 知 $(1,0,0,1,0,0,0,1,0,1)$ 可逆；$(1,0,1,0,0,0,1)$ 不可逆；$(1,0,0,0,0,1,0,1,0,0,0)$ 可逆，故狀態列 P 不可逆。

四、找出直線狀態列中，最短循環集長度，以及所有最短循環集個數。

註：爲討論方便，以下 2 循環集 $\{(a_1,a_2,\cdots,a_n),(b_1,b_2,\cdots,b_n)\}$ 以 $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix}$ 型式呈現。

(1) 當 $n=1$，顯然無論是 (1) 或 (0) 皆不可能產生循環狀態。

(2) 當 $n=2$，循環集只有 $\{(1,0),(0,1)\}$

(3) 當 $n=3$，$(1,1,1),(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1),(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(0,0,0)$ 皆無法產生循環。

(4) 當 $n=4$，若 $\{(a_1,a_2,a_3,a_4),(b_1,b_2,b_3,b_4)\}$ 爲一 2 循環集，即

$T_1(a_i)=b_i, T_1(b_i)=a_i, i=1,2,3,4$，
已知 $T_1(1)=0, T_1(0)=0$ 或 1，故數對 $(a_i,b_i)=(0,0)$ 或 $(1,0)$ 或 $(0,1)$

若 $a_1=b_1=0$，令 i 爲最小自然數使得 $a_i=1$，j 爲最小自然數使得 $b_j=1$，

不妨假設 $i<j$，則 $T_1(a_{i-1})=1=b_{i-1}$ $\rightarrow\leftarrow$
故 $(a_1,b_1)=(1,0)$ 或 $(0,1)$，不失一般性，令 $(a_1,b_1)=(1,0)\Rightarrow(a_2,b_2)=(0,1)$
又 $\because T_1(a_2)=b_2, a_1=1$，$\therefore a_3=0$，則 $b_3=0$ 或 1

即$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \square \\ 0 & 1 & \boxed{0/1} & \square \end{pmatrix}$

①若$b_3 = 0$，則$a_4 = 0, b_4 = 1$

即$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow\leftarrow$

②若$b_3 = 1$，則$a_4 = 1, b_4 = 0$

即$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

由以上討論知，$n = 4$時的最短循環集只有$\{(1,0,0,1),(0,1,1,0)\}$，共 1 個。

(5) 當$n = 5$，若$\{(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5),(b_1,b_2,b_3,b_4,b_5)\}$爲一 2 循環集，即

$T_1(a_i) = b_i, T_1(b_i) = a_i, i = 1,2,3,4,5$，

同$n = 4$之討論過程，不失一般性，可令$(a_1,b_1) = (1,0) \Rightarrow (a_2,b_2) = (0,1)$

又$\because T_1(a_2) = b_2, a_1 = 1$，$\therefore a_3 = 0$，則$b_3 = 0$ 或 1

即$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \square & \square \\ 0 & 1 & \boxed{0/1} & \square & \square \end{pmatrix}$

①若$b_3 = 0$，則$a_4 = 0, b_4 = 1 \Rightarrow a_5 = 1, b_5 = 0$

即$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

②若$b_3 = 1$，則$a_4 = 1, b_4 = 0 \Rightarrow b_5 = 0$

$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & \square \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

但無論$a_5 = 0$或1皆無法形成 2 循環集$\rightarrow\leftarrow$

由以上討論知，$n = 5$時的最短循環集只有$\{(1,0,0,0,1),(0,1,0,1,0)\}$，共 1 個。

依此討論方法必可將所有n值之所有最短循環集找出，結論整理於後。

性質 1.8：已知P爲n個元素的直線狀態列，在T_1作用下，當$n \in N$且$n \neq 1,3$時，其最短循環集長度爲 2。當$n = 1,3$時，不存在任何循環狀態列。

【證明】

(1)顯然，$n = 1,3$不存在任何循環集。

(2)$n \neq 1,3$

①當 n 爲偶數，則存在一 2 循環集 $\{(1,0,\underline{0,1,1,0},\underline{0,1,\cdots,1,0},\underline{0,1,\cdots}),(0,\underline{1,1,0,0},\underline{1,1,0,\cdots},\underline{0,1,1,0},\cdots)\}$

②當 n 爲奇數，則存在一 2 循環集 $\{(0,1,0,\underline{1,0,0,1},\underline{1,0,0,1},\cdots),(1,0,0,\underline{0,1,1,0},\underline{0,1,1,0},\cdots)\}$ ■

而我們也觀察到，直線狀態列所有的 2 循環集都有很特別的規律，爲了描述它們的形式，我們先定義兩個重要的名詞。

> 定義 1.9：已知直線狀態列 $P=(a_1,a_2,\cdots,a_t)$，定義**直線基本型 2 循環集**爲：t 爲偶數且
>
> (1)當 $t=2$，型如 $\{(1,0),(0,1)\}$
>
> (2)當 $t=4r(r\in N)$， 型如 $\{(1,0,0,1,1,0,0,1,\cdots,1,0,0,1),(0,1,1,0,0,1,1,0,\cdots,0,1,1,0)\}$
>
> (3)當 $t=4r+2(r\in N)$)，型如 $\{(1,0,0,1,\cdots,1,0,0,1,1,0),(0,1,1,0,\cdots,0,1,1,0,0,1)\}$

> 定義 1.10：已知直線狀態列 $P=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，$n\neq 1,3$，定義**直線複合基本 2 循環集**型如：
>
> $$\left\{\begin{matrix}(\overbrace{X_1\quad 0\quad X_2\quad 0\quad \cdots\quad 0\quad X_m\quad 0\quad X_{m+1}}^{\text{由}m\text{個}0\text{連接}X_i}),(\overbrace{Y_1\quad 0\quad Y_2\quad 0\quad \cdots\quad 0\quad Y_m\quad 0\quad Y_{m+1}}^{\text{由}m\text{個}0\text{連接}Y_i})\end{matrix}\right\},$$
>
> 當 n 爲偶數時，$m=2t'\quad (t'\leq\dfrac{n-2}{6},t'\in N\cup\{0\})$ (若 $t'=0$，則型如 $\{(X_1),(Y_1)\}$)
>
> 當 n 爲奇數時，$m=2t'+1\,(t'\leq\dfrac{n-5}{6},t'\in N\cup\{0\})$，其中 $\{(X_i),(Y_i)\}$ 爲一組**直線基本型 2 循環集**且每個連接 X_i、Y_i 的 0 左右需同時銜接 1 或 0。

> 性質 1.11：已知 P 爲 n 個元素的直線狀態列，$n\neq 1,3$，所有的 2 循環集必型如**直線複合基本 2 循環集**。

【證明】

設 $\{(a_1,a_2,\cdots,a_n),(b_1,b_2,\cdots,b_n)\}$ 爲一 2 循環集，我們分 $m=0$ 與 $m\neq 0$ 兩類型討論其存在性。

1. $m=0$ （即 $\forall i\in N,(a_i,b_i)\neq(0,0)$）

由 p8.之討論知，不妨令 $(a_1,b_1)=(1,0)$，則 $(a_2,b_2)=(0,1)\Rightarrow a_3=0$，即

$$\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n\\ b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & a_n\\ 0 & 1 & \boxed{b_3} & \cdots & b_n\end{pmatrix},$$

由於 $(a_3,b_3)\neq(0,0)$，故 $(a_3,b_3)=(0,1)$ 依此類推 $(a_4,b_4)=(1,0),(a_5,b_5)=(1,0)\cdots\cdots$ 可得 $(a_{4k},b_{4k})=(1,0)$、$(a_{4k+1},b_{4k+1})=(1,0)$、$(a_{4k+2},b_{4k+2})=(0,1)$、$(a_{4k+3},b_{4k+3})=(0,1)$

(1)若 n 爲奇數，則 $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} & b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 或 $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & 1 & 1 \\ b_1 & b_2 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow\leftarrow$

故當 n 爲奇數時，不存在 $m=0$ 此型的 2 循環集。

(2)若 n 爲偶數，

(Ⅰ)當 $n=2$ 時，$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(Ⅱ)設當 $n=2t(t\in N)$ 時，存在一 2 循環集 $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{2t} \\ b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & \cdots \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots \end{pmatrix}$

則當 $n=2(t+1)$ 時，

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{2t} & a_{2t+1} & a_{2t+2} \\ b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_{2t} & b_{2t+1} & b_{2t+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 0 & \square & \square \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \square & \square \end{pmatrix} \cdots\cdots(a)$$

$$\text{或} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 1 & \square & \square \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \square & \square \end{pmatrix} \cdots\cdots(b)$$

當爲 (a) 時，$\begin{pmatrix} a_{2t+1} & a_{2t+2} \\ b_{2t+1} & b_{2t+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$；當爲 (b) 時，$\begin{pmatrix} a_{2t+1} & a_{2t+2} \\ b_{2t+1} & b_{2t+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$。

由(Ⅰ)(Ⅱ)以及數學歸納法知，當 n 爲偶數且 $m=0$ 時，2 循環集必型如 $\{(X_1),(Y_1)\}$。

2. $m\neq 0$　(即 $\exists i\in N \ni (a_i,b_i)=(0,0)$)

(Ⅰ)由 p8.討論，$n=1,3$ 時，不存在任何循環集

$n=2$ 時，唯一之 2 循環集爲 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$　　(爲 $m=0$ 之型式)

$n=4$ 時，唯一之 2 循環集爲 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$　　(爲 $m=0$ 之型式)

$n=5$ 時，唯一之 2 循環集爲 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$　　(爲 $m=1$ 之型式)

$n\geq 5$ 且 $m\neq 0$ 時，2 循環集必型如 $\begin{pmatrix} \overbrace{\cdots\cdots}^{p\text{個元素}} & 0 & \overbrace{\cdots\cdots}^{q\text{個元素}} \\ \cdots\cdots & 0 & \cdots\cdots \end{pmatrix}$，而每個 0 左右需同時銜接 1 或 0，且 $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 的左右可視爲兩組分別具有 p,q 個元素的 2 循環集。又 $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 左右皆不可放 $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，因此必型

如 $\begin{pmatrix} \boxed{\overbrace{\begin{matrix}\cdots\cdots 0\,1 \\ \cdots\cdots 1\,0\end{matrix}}^{p\text{個元素}}} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} & \boxed{\overbrace{\begin{matrix}1\,0\cdots\cdots \\ 0\,1\cdots\cdots\end{matrix}}^{q\text{個元素}}} \end{pmatrix}$。

$n=6$ 時，$p+q=5$，正整數解爲 $(p,q)=(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)$ 皆無法分割成兩個 2 循環集。

$n=7$ 時，$p+q=6$，其中二組正整數解 $(p,q)=(2,4),(4,2)$ 爲可分割解，即有兩個 2 循環

集$\begin{pmatrix}1&0&0&0&1&1&0\\0&1&0&1&0&0&1\end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix}1&0&0&1&0&1&0\\0&1&1&0&0&0&1\end{pmatrix}$

(Ⅱ)設$7\le n\le t$時，若$m\ne 0$，2 循環集型如$\begin{pmatrix}\overbrace{X_1 & 0 & X_2 & 0 & \cdots & 0 & X_m & 0 & X_{m+1}}^{m個0}\\ Y_1 & 0 & Y_2 & 0 & \cdots & 0 & Y_m & 0 & Y_{m+1}\end{pmatrix}$

當n為偶數時，m為偶數；而當n為奇數時，m為奇數，其中$\{(X_i),(Y_i)\}$為一組直線基本型 2 循環集且每個連接X_i、Y_i的0左右需同時銜接1或0

則當$n=t+1$時，若 2 循環集型如$\begin{pmatrix}\overbrace{\cdots\cdots}^{p個元素} & 0 & \overbrace{\cdots\cdots}^{q個元素}\\ \cdots\cdots & 0 & \cdots\cdots\end{pmatrix}$，則$p+q=t$，

a.若n為偶數，$p+q=t$為奇數，不妨假設p為奇數，q為偶數，則左方為p個元素的 2 循環集，由奇數個$\begin{matrix}0\\0\end{matrix}$連接所有的$\begin{matrix}X_i\\Y_i\end{matrix}$，而右方為$q$個元素的 2 循環集，由偶數個$\begin{matrix}0\\0\end{matrix}$連接所有$\begin{matrix}X_i\\Y_i\end{matrix}$，故$n=t+1$時，2 循環集為由偶數個$\begin{matrix}0\\0\end{matrix}$連接所有的$\begin{matrix}X_i\\Y_i\end{matrix}$。

b.若n為奇數，$p+q=t-1$為偶數，則p,q皆為偶數或皆為奇數。若p,q皆偶數，則左方為p個元素的 2 循環集，由偶數個$\begin{matrix}0\\0\end{matrix}$連接所有的$\begin{matrix}X_i\\Y_i\end{matrix}$；而右方為$q$個元素的 2 循環集，亦由偶數個$\begin{matrix}0\\0\end{matrix}$連接所有$\begin{matrix}X_i\\Y_i\end{matrix}$，故$n=t+1$時，2 循環集為由奇數個$\begin{matrix}0\\0\end{matrix}$連接所有的$\begin{matrix}X_i\\Y_i\end{matrix}$。同理可證$p,q$皆為奇數之情形，。

由(Ⅰ)(Ⅱ)與第二數學歸納法可得證。■

$\boxed{討論}$ 事實上，若定義 1.10 中的$\{(X_i),(Y_i)\}$為一組直線基本型 2 循環集，且每個連接X_i、Y_i的0左右需同時銜接1或0，則$(X_1)(X_2)\cdots(X_{m+1})$為狀態列$(\underbrace{1,0,0,1,1,0,0,1,\cdots}_{(n-m)個})$的偶分割，$(Y_1)(Y_2)\cdots(Y_{m+1})$為狀態列$(\underbrace{0,1,1,0,0,1,1,0,\cdots}_{(n-m)個})$與$(X_1)(X_2)\cdots(X_{m+1})$的同型偶分割。

$\boxed{討論}$ 如何計算n個元素的直線狀態列共有幾個最短循環集呢?

【例】以$n=10$為例，由定義 1.10 與性質 1.11 知，因$t'\le\dfrac{10-2}{6}=\dfrac{4}{3}\Rightarrow t'=0,1\Rightarrow m=0,2$，故它有兩類型式的 2 循環集，即$\{X_1,Y_1\}$與$\{(X_1\quad 0\quad X_2\quad 0\quad X_3),(Y_1\quad 0\quad Y_2\quad 0\quad Y_3)\}$。第一類型式只有 1 種，而第二類型式的個數，即為$(1,0,0,1,1,0,0,1)$之偶分割方法數。可令子狀態列

X_1,X_2,X_3之長度分別爲x_1,x_2,x_3，故可視爲方程式$x_1+x_2+x_3=8$的正偶數解之個數，即 $x_1'+x_2'+x_3'=4$之正整數解之個數，共$H_1^3=3$個，事實上$(x_1,x_2,x_3)=(2,2,4),(2,4,2),(4,2,2)$。

故 $n=10$ 時，共有 4 個 2 循環集，分別爲：

$\{(1,0,0,1,1,0,0,1,1,0),(0,1,1,0,0,1,1,0,0,1)\}$、$\{(1,0,\boxed{0},0,1,\boxed{0},1,0,0,1),(0,1,\boxed{0},1,0,\boxed{0},0,1,1,0)\}$

$\{(1,0,\boxed{0},0,1,1,0,\boxed{0},0,1),(0,1,\boxed{0},1,0,0,1,\boxed{0},1,0)\}$、$\{(1,0,0,1,\boxed{0},1,0,\boxed{0},0,1),(0,1,1,0,\boxed{0},0,1,\boxed{0},1,0)\}$。

性質 1.12：若直線狀態列$P=(a_1,a_2,\cdots\cdots,a_n)$可化爲$\overbrace{(X_1\quad 0\quad X_2\quad 0\quad \cdots\quad 0\quad X_m\quad 0\quad X_{m+1})}^{由m個0連接X_i}$型式，$0\le m\le\dfrac{n-2}{3}$，且$n-m$爲偶數，其中$(X_1)(X_2)\cdots(X_{m+1})$爲狀態列$(\underbrace{1,0,0,1,1,0,0,1,\cdots}_{(n-m)個})$的偶分割之方法數爲$H^{m+1}_{\frac{n-3m-2}{2}}$。

【證明】

設X_i爲含有x_i個元素的子狀態列，

欲求$x_1+x_2+\cdots\cdots+x_{m+1}=n-m$的正偶數解之個數，

即$x_1'+x_2'+\cdots\cdots+x_{m+1}'=\dfrac{n-m}{2}$的正整數解之個數爲$H^{m+1}_{\frac{n-m}{2}-(m+1)}=H^{m+1}_{\frac{n-3m-2}{2}}$。■

性質 1.13：已知P爲n個元素的直線狀態列，則

(1)若n爲偶數，則共有$\displaystyle\sum_{i=0}^{\left[\frac{n-2}{6}\right]}H^{2i+1}_{\frac{n-6i-2}{2}}$個最短循環集。

(2)若n爲奇數，則共有$\displaystyle\sum_{i=0}^{\left[\frac{n-5}{6}\right]}H^{2i+2}_{\frac{n-6i-5}{2}}$個最短循環集。

【證明】

若n爲偶數，由定義 1.10 知，$t'\le\dfrac{n-2}{6}\Rightarrow t'=0,1,2,\cdots,\left[\dfrac{n-2}{6}\right]\Rightarrow m=0,2,4,\cdots,2\left[\dfrac{n-2}{6}\right]$

令$m=2i(0\le i\le\left[\dfrac{n-2}{6}\right])$，由性質 1.11 與性質 1.12 知，共有$\displaystyle\sum_{i=0}^{\left[\frac{n-2}{6}\right]}H^{2i+1}_{\frac{n-6i-2}{2}}$個 2 循環集。

同理可證得若n爲奇數，則共有$\displaystyle\sum_{i=0}^{\left[\frac{n-5}{6}\right]}H^{2i+2}_{\frac{n-6i-5}{2}}$個 2 循環集。■

五、l循環集建構法：

利用「l循環集建構法」，可以幫助我們探討各種循環集的存在性。同時，我們也觀察到，**l循環集也具有以 0 串接「基本型l循環集」而成「複合基本l循環集」的特性**。因版面有限，我們將內容置於研究日誌。

研究二: n個燈環狀排列；T_1

一、找出所有的終止狀態列：

性質 2.1：環狀狀態列中，全 0 狀態列爲環狀狀態列唯一之終止狀態列。

【證明】 類同性質 1.1，證明略。

二、找出一次操作後變換成終止狀態列的充要條件：

性質 2.2：非全 0 環狀狀態列中，一次操作後變全 0 狀態列的充分且必要條件爲 0 皆不相鄰(含全 1 狀態)。

【證明】 類同性質 1.2，證明略。

三、可逆性判斷法之研究：

在探討環狀狀態列之可逆性時，因已排除全 0 或全 1 的狀態列，因此我們僅需討論同時含有 0 與 1 之狀態列，不失一般性，我們可**假設所有被討論的狀態列** P **皆爲** $(\overline{1\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_0})$ **型**。由於環狀狀態列的討論過程和直線狀態列相似，故相關證明省略。

(一)111 相鄰：

性質 2.3：環狀狀態列中，存在 111 相鄰時，則爲不可逆狀態列。

【證明】 類同性質 1.3，證明略。

(二)111 不相鄰 (可將狀態列分割成數個不含 11 相鄰之子狀態列來討論)

性質 2.4: 若狀態列型如 $(\underbrace{\overline{1,0,1,0,\cdots,1,0}}_{t個1})$，當 t 爲偶數時，此狀態列可逆；當 t 爲奇數時，此狀態列不可逆。

【證明】 類同性質 1.4，證明略。

性質 2.5: 若狀態列型如 $(\overbrace{\overline{1,\underbrace{0,\cdots,0}_{m_1},1,\underbrace{0,\cdots,0}_{m_2},1,0,\cdots,0,1,\underbrace{0,\cdots,0}_{m_t}}}^{t個1})$，$m_i \in N, 1 \le i \le t$，當 t 爲偶數時，此狀態列可逆；當 t 爲奇數時，此狀態列不可逆。 即狀態列 $(\overbrace{\overline{1,\underbrace{0,\cdots,0}_{m_1},1,\underbrace{0,\cdots,0}_{m_2},1,0,\cdots,0,1,\underbrace{0,\cdots,0}_{m_t}}}^{t個1})$ 與狀態列 $(\underbrace{\overline{1,0,1,0,\cdots,1,0}}_{t個1})$ 之可逆性相同。

【證明】 類同性質 1.5，證明略。

環狀狀態列可逆性判斷法：

步驟一：若存在 111 相鄰時，則不可逆，否則進行步驟二。

步驟二：若狀態列完全無 11 相鄰處，則判斷法如性質 2.5。但若有 11 相鄰處，則由兩個 1 間分割成數個無 11 相鄰的子狀態列，事實上所分割成的子狀態列皆爲 (1_________1) 型式的直線狀態列。

步驟三：針對每個子狀態列依照性質 1.5 分別判斷其可逆性，若皆可逆，則原始狀態列可逆；反之，則不可逆。

【例】判斷狀態列 $P=\overline{(1,0,0,1,0,0,0,1,0,\boxed{1,1},0,1,0,0,1,0,\boxed{1,1},0,0,0,0,1,0,0)}$ 之可逆性

步驟二：分割成 $P=(1,0,1,0,0,1,0,1)(1,0,0,0,0,1,0,0,1,0,0,1,0,0,0,1,0,1)$

步驟三：由性質 1.5 知 $(1,0,1,0,0,1,0,1)$ 與 $(1,0,0,0,0,1,0,0,1,0,0,1,0,0,0,1,0,1)$ 皆可逆，故狀態列 P 可逆。

四、找出環狀狀態列中，最短循環集長度，以及所有最短循環集個數。

環狀狀態列中，找尋最短循環集的過程與直線排列非常類似，因此在此不贅述，僅將結論整理於後。

性質 2.6：已知 P 為 n 個元素的環狀狀態列，在 T_1 作用下，當 $n\in N$ 且 $n\neq 1,2,3,7$ 時，其最短循環集長度為 2。當 $n=1,2,3,7$ 時，不存在任何循環狀態列。

【證明】

(1)顯然，$n=1,2,3$ 不存在任何循環集。

(2)當 $n=7$，由性質 2.2 與性質 2.3 知，0 皆不相鄰或存在 111 相鄰的情形皆不可能為循環狀態列，因此，只剩下 9 種情形：

①4 個 1：$\overline{(1,1,0,1,1,0,0)}$

②3 個 1：$\overline{(1,1,0,1,0,0,0)}$、$\overline{(1,1,0,0,1,0,0)}$、$\overline{(1,1,0,0,0,1,0)}$、$\overline{(1,0,1,0,1,0,0)}$

③2 個 1：$\overline{(1,1,0,0,0,0,0)}$、$\overline{(1,0,0,0,0,1,0)}$、$\overline{(1,0,0,0,1,0,0)}$

④1 個 1：$\overline{(1,0,0,0,0,0,0)}$

其中，依照環狀狀態列可逆性判斷法又可刪除

$\overline{(1,1,0,1,0,0,0)}$、$\overline{(1,1,0,0,1,0,0)}$、$\overline{(1,1,0,0,0,1,0)}$、$\overline{(1,0,1,0,1,0,0)}$、$\overline{(1,0,0,0,0,0,0)}$

而剩餘 4 個狀態列最終都會轉換到 $\overline{(0,0,0,0,0,0,0)}$，故不存在任何循環集。

(3) $n\neq 1,2,3,7$，$n\in N$

①當 $n\equiv 0 \pmod 4$，存在 2 循環集 $\left\{\overline{(\underline{1,0,0,1},\underline{1,0,0,1},\cdots,\underline{1,0,0,1})},\overline{(\underline{0,1,1,0},\underline{0,1,1,0},\cdots,\underline{0,1,1,0})}\right\}$

②當 $n\equiv 1 \pmod 4$，存在 2 循環集 $\left\{\overline{(0,\underline{1,0,0,1},\underline{1,0,0,1},\cdots,\underline{1,0,0,1})},\overline{(0,\underline{0,1,1,0},\underline{0,1,1,0},\cdots,\underline{0,1,1,0})}\right\}$

③當 $n\equiv 2 \pmod 4$ 存在 2 循環集

$$\left\{\overline{(0,1,0,0,\underline{0,1,1,0},\underline{0,1,1,0},\cdots,\underline{0,1,1,0},0,1)},\overline{(0,0,1,0,\underline{1,0,0,1},\underline{1,0,0,1},\cdots,\underline{1,0,0,1},1,0)}\right\}$$

④當 $n\equiv 3 \pmod 4, n\geq 11$，存在 2 循環集

$$\left\{\overline{(0,1,0,0,0,1,0,\underline{1,0,0,1},\underline{1,0,0,1},\cdots,\underline{1,0,0,1})},\overline{(0,0,1,0,1,0,0,\underline{0,1,1,0},\underline{0,1,1,0},\cdots,\underline{0,1,1,0})}\right\}$$

故當 $n\in N$ 且 $n\neq 1,2,3,7$ 時，最短循環集長度為 2。■

同樣的，**環狀狀態列所有的 2 循環集的型式與直線狀態列有共同的特性，都是以 0 去串接「基本型 2 循環集」而成「複合基本 2 循環集」**。描述如下：

定義 2.7：已知環狀狀態列 $P=(\overline{a_1,a_2,\cdots\cdots,a_n})$，$n\neq 1,2,3,7$，定義**環狀複合基本 2 循環集**

型如：$\left\{(\overline{\overbrace{0\quad X_1\quad 0\quad X_2\quad \cdots\cdots\quad 0\quad X_{m-1}\quad 0\quad X_m}^{\text{由}m\text{個}0\text{連接}X_i}}),(\overline{\overbrace{0\quad Y_1\quad 0\quad Y_2\quad \cdots\cdots\quad 0\quad Y_{m-1}\quad 0\quad Y_m}^{\text{由}m\text{個}0\text{連接}Y_i}})\right\}$

(1)當 $n\equiv 0(\bmod 4), n\in N$ 時，$m=4t'$，$(t'\leq\dfrac{n}{12}, t'\in N\cup\{0\})$ (若 $t'=0$，則型如 $\{(\overline{X_1}),(\overline{Y_1})\}$)

(2)當 $n\equiv 1(\bmod 4), n\in N$，$m=4t'+1$，$(t'\leq\dfrac{n-3}{12}, t'\in N\cup\{0\})$

(3)當 $n\equiv 2(\bmod 4), n\in N$，$m=4t'+2$，$(t'\leq\dfrac{n-6}{12}, t'\in N\cup\{0\})$

(4)當 $n\equiv 3(\bmod 4), n\in N, n\geq 11$，$m=4t'+3$，$(t'\leq\dfrac{n-9}{12}, t'\in N\cup\{0\})$

其中 $\{(X_i),(Y_i)\}$ 爲一組**直線基本型 2 循環集**且每個連接 X_i、Y_i 的 0 兩側需同時銜接 1 或 0。

性質 2.8：已知 P 爲 n 個元素的環狀狀態列，$n\neq 1,2,3,7$，所有的 2 循環集必型如**環狀複合基本 2 循環集**。

【證明】因版面有限，置於研究日誌。

【例】以 $n=10$ 爲例，由定義 2.7 知，因 $t'\leq\dfrac{10-6}{12}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow t'=0\Rightarrow m=2$，故其 2 循環集爲

$\{(\overline{0\quad X_1\quad 0\quad X_2}),(\overline{0\quad Y_1\quad 0\quad Y_2})\}$ 型式，其個數爲 $(1,0,0,1,1,0,0,1)$ 之偶分割方法數。可令子狀態列 X_1,X_2 之長度分別爲 x_1,x_2，故可視爲方程式 $x_1+x_2=8$ 的正偶數解之個數，即 $x_1'+x_2'=4$ 之正整數解之個數，共 $H_2^2=3$ 個，得到 $(x_1,x_2)=(2,6),(4,4),(6,2)$。然而 $(x_1,x_2)=(2,6),(6,2)$ 兩種情形在環狀狀態列中是同型的，因此事實上只有 $(x_1,x_2)=(2,6),(4,4)$ 兩組相異解。即 $\{(\overline{0,1,0,0,0,1,1,0,0,1}),(\overline{0,0,1,0,1,0,0,1,1,0})\}$、$\{(\overline{0,1,0,0,1,0,1,0,0,1}),(\overline{0,0,1,1,0,0,0,1,1,0})\}$。然而，<u>若要一一考量旋轉後是否爲同型解，情況太過複雜，因此性質 2.9 與性質 2.10 的公式僅呈現不刪除旋轉同型解的情形。</u>

性質 2.9：若環狀狀態列 $P=(\overline{a_1,a_2,\cdots\cdots,a_n})$ 可化為 $(\overbrace{0\quad X_1\quad 0\quad X_2\quad \cdots\cdots\quad 0\quad X_{m-1}\quad 0\quad X_m}^{\text{由}m\text{個0連接}X_i})$ 型式，$0\le m\le \frac{n}{3}$，且 $n-m$ 為偶數，其中 $(X_1)(X_2)\cdots(X_m)$ 為狀態列 $(\underbrace{1,0,0,1,1,0,0,1,\cdots}_{(n-m)\text{個}})$ 的偶分割之方法數為 $H^{m}_{\frac{n-3m}{2}}$ 。

【證明】

設 X_i 為含有 x_i 個元素的子狀態列，

欲求 $x_1+x_2+\cdots\cdots+x_m=n-m$ 的正偶數解之個數，

即 $x_1'+x_2'+\cdots\cdots+x_m'=\frac{n-m}{2}$ 的正整數解之個數為 $H^{m}_{\frac{n-m}{2}-m}=H^{m}_{\frac{n-3m}{2}}$ 。■

性質 2.10：已知 P 為 n 個元素的環狀狀態列，在不考慮旋轉同型解的情況下，

(1)若 $n\equiv 0(\bmod 4), n\in N$ ，則共有 $\sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{12}\right]} H^{4i}_{\frac{n-12i}{2}}$ 個最短循環集。

(2)若 $n\equiv 1(\bmod 4), n\in N$ ，則共有 $\sum_{i=0}^{\left[\frac{n-3}{12}\right]} H^{4i+1}_{\frac{n-12i-3}{2}}$ 個最短循環集。

(3)若 $n\equiv 2(\bmod 4), n\in N$ ，則共有 $\sum_{i=0}^{\left[\frac{n-6}{12}\right]} H^{4i+2}_{\frac{n-12i-6}{2}}$ 個最短循環集。

(4)若 $n\equiv 3(\bmod 4), n\in N, n\ge 11$ ，則共有 $\sum_{i=0}^{\left[\frac{n-9}{12}\right]} H^{4i+3}_{\frac{n-12i-9}{2}}$ 個最短循環集。

【證明】

若 $n\equiv 0(\bmod 4), n\in N$ ，由定義 2.7 知，$t'\le \frac{n}{12}\Rightarrow t'=0,1,2,\cdots,\left[\frac{n}{12}\right]\Rightarrow m=0,4,8,\cdots,4\left[\frac{n}{12}\right]$

令 $m=4i(0\le i\le \left[\frac{n}{12}\right])$ ，由性質 2.8 與性質 2.9 知，共有 $\sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{12}\right]} H^{4i}_{\frac{n-12i}{2}}$ 個 2 循環集。

同理可證(2)(3)(4)。■

研究三: $m\times n$ 個燈矩陣排列；T_1

在研究三中，我們將燈的排列方式改成矩陣狀態列 $P=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}$，共 $m\times n$ 個燈，想找出其最短循環集長度。首先，我們先針對 $2\times n$ 的矩陣狀態列研究，發現令人驚喜的結果，**其所有的 2 循環集的型式與直線、環狀狀態列相同，也具有以全 0 子狀態列去串接「基本型 2 循環集」而成「複合基本 2 循環集」的特性**，介紹如下：

定義 3.1：已知矩陣狀態列 $P=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1t} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2t} \end{bmatrix}_{2\times t}$，定義**基本型 2 循環集**爲：$t$ 爲偶數且

(1)當 $t=2$，型如 $\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$

(2)當 $t=4r(r\in N)$， 型如 $\left\{\begin{array}{l}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \boxed{M_1} & 0 & 0 & \boxed{M_2} & 0 & 0 & \cdots\cdots & \boxed{M_{r-1}} & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & & 0 & 0 & & 0 & 0 & & & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ ,\begin{bmatrix} 0 & \boxed{M_1'} & 0 & 0 & \boxed{M_2'} & 0 & 0 & \boxed{M_3'} & \cdots\cdots & 0 & 0 & \boxed{M_r'} & 0 \\ 0 & & 0 & 0 & & 0 & 0 & & & 0 & 0 & & 0 \end{bmatrix}\end{array}\right\}$

(3)當 $t=4r+2(r\in N)$)，型如 $\left\{\begin{array}{l}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \boxed{M_1} & 0 & 0 & \boxed{M_2} & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 & 0 & \boxed{M_r} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & & 0 & 0 & & 0 & 0 & & 0 & 0 & & 0 \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} 0 & \boxed{M_1'} & 0 & 0 & \boxed{M_2'} & 0 & 0 & \boxed{M_3'} & \cdots\cdots & \boxed{M_r'} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & & 0 & 0 & & 0 & 0 & & & & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\end{array}\right\}$

其中 $M_i=\begin{bmatrix} (m_i)_{11} & (m_i)_{12} \\ (m_i)_{21} & (m_i)_{22} \end{bmatrix}, i=1,2,\cdots r$ ，滿足 $T_1(M_i)=O_{2\times 2}$，$\begin{bmatrix} (m_r)_{12} \\ (m_r)_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

；M_i' 則爲其**相對應循環子狀態列**，滿足 $T_1(M_i')=O_{2\times 2}$。

【註】令 $M_i'=\begin{bmatrix} (m_i')_{11} & (m_i')_{12} \\ (m_i')_{21} & (m_i')_{22} \end{bmatrix}$，$M_{i-1}=\begin{bmatrix} (m_{i-1})_{11} & (m_{i-1})_{12} \\ (m_{i-1})_{21} & (m_{i-1})_{22} \end{bmatrix}$、$M_i=\begin{bmatrix} (m_i)_{11} & (m_i)_{12} \\ (m_i)_{21} & (m_i)_{22} \end{bmatrix}$

若 M_i' 爲**相對應循環子狀態列**，意指 $\begin{bmatrix} (m_{i-1})_{12} \\ (m_{i-1})_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} (m_i')_{11} \\ (m_i')_{21} \end{bmatrix}$ 且 $\begin{bmatrix} (m_i')_{12} \\ (m_i')_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} (m_i)_{11} \\ (m_i)_{21} \end{bmatrix}$。

特別的是，$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} (m_1')_{11} \\ (m_1')_{21} \end{bmatrix}$ 且 $\begin{bmatrix} (m_r')_{12} \\ (m_r')_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$。

【例 1】如何尋找 2×8 的基本型 2 循環集？

$$\because t=8\Rightarrow r=2\Rightarrow \text{型如}\left\{\begin{bmatrix}1&0&0&\boxed{M_1}&0&0&1\\1&0&0&&0&0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&\boxed{M_1'}&0&0&\boxed{M_2'}&0\\0&&0&0&&0\end{bmatrix}\right\}$$

$$\text{其中}\,M_1\in\left\{\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\1&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\right\}$$

以 $M_1=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$ 爲例，$M_1'=\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix},M_2'=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}$

故 $\left\{\begin{bmatrix}1&0&0&\boxed{\begin{matrix}1&1\\0&1\end{matrix}}&0&0&1\\1&0&0&&0&0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&\boxed{\begin{matrix}1&1\\1&0\end{matrix}}&0&0&\boxed{\begin{matrix}1&1\\1&1\end{matrix}}&0\\0&&0&0&&0\end{bmatrix}\right\}$ 爲一組基本型 2 循環集。

接著，我們要**利用定義 3.1 中的基本型 2 循環集建構** $2\times n$ **之矩陣狀態列所有的 2 循環集**。結論整理於性質 3.2。

性質 3.2：已知矩陣狀態列 $P=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\end{bmatrix}_{2\times n}$，則其所有最短循環集有兩型：

第一型：$\left\{\begin{bmatrix}a_1&a_2&\cdots&a_n\\0&0&\cdots&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0&\cdots&0\\a_1&a_2&\cdots&a_n\end{bmatrix}\right\}$，其中 $T_1(a_1,a_2,\cdots,a_n)=(0,0,\cdots,0)$

，即 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 爲一 1 在邊且 0 皆不相鄰之非全 0 直線狀態列。

第二型：$(n\neq 1,3)$，型如

$$\left\{\overbrace{\begin{bmatrix}X_1&\begin{matrix}0\\0\end{matrix}&X_2&\begin{matrix}0\\0\end{matrix}&\cdots&\begin{matrix}0\\0\end{matrix}&X_m&\begin{matrix}0\\0\end{matrix}&X_{m+1}\end{bmatrix}}^{\text{由}m\text{個}\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\text{連接}X_i},\overbrace{\begin{bmatrix}Y_1&\begin{matrix}0\\0\end{matrix}&Y_2&\begin{matrix}0\\0\end{matrix}&\cdots&\begin{matrix}0\\0\end{matrix}&Y_m&\begin{matrix}0\\0\end{matrix}&Y_{m+1}\end{bmatrix}}^{\text{由}m\text{個}\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\text{連接}Y_i}\right\}$$

當 n 爲偶數時，$m=2t'\quad(t'\le\dfrac{n-2}{6},t'\in N\cup\{0\})$（若 $t'=0$，則型如 $\{[X_1],[Y_1]\}$）

當 n 爲奇數時，$m=2t'+1\,(t'\le\dfrac{n-5}{6},t'\in N\cup\{0\})$，

其中 $\{[X_i],[Y_i]\}$ 爲一組**基本型 2 循環集**且每個連接 X_i、Y_i 的 $\begin{matrix}0\\0\end{matrix}$ 左右需同時銜接

$\begin{matrix}1\\1\end{matrix}$ 或 $\begin{matrix}0\\0\end{matrix}$，即型如 $\begin{bmatrix}\cdots&\overbrace{}^{X_i}\begin{matrix}0\,0\,0\\0\,0\,0\end{matrix}\overbrace{}^{X_{i+1}}&\cdots\end{bmatrix}$ 或 $\begin{bmatrix}\cdots&\overbrace{}^{X_i}\begin{matrix}1\,0\,1\\1\,0\,1\end{matrix}\overbrace{}^{X_{i+1}}&\cdots\end{bmatrix}$，$Y_i$ 亦同。

【證明】

此證明法可以以數學歸納法完成，因版面有限，置於研究日誌。

【例 2】如何尋找 2×11 的 2 循環集？

第一型：如 (10110111011) 爲 1 在邊且 0 皆不相鄰之非全 0 直線狀態列，

$$\text{故}\left\{\begin{bmatrix}1\,0\,1\,1\,0\,1\,1\,1\,0\,1\,1\\0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\\1\,0\,1\,1\,0\,1\,1\,1\,0\,1\,1\end{bmatrix}\right\}\text{爲一組 2 循環集。}$$

第二型：$\because t'\le \dfrac{11-5}{6}=1\Rightarrow t'=0,1\Rightarrow m=1,3$

(1)當 $m=1$，型如 $\left\{\begin{bmatrix}X_1 & \begin{matrix}0\\0\end{matrix} & X_2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}Y_1 & \begin{matrix}0\\0\end{matrix} & Y_2\end{bmatrix}\right\}$

若 X_i 的行數爲 x_i，則 $x_1+x_2=10$ 且 x_1,x_2 皆爲正偶數，
以 $(x_1,x_2)=(2,8)$ 這組解爲例，

$\left\{\begin{bmatrix}1&0\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\0&1\end{bmatrix}\right\}$ 是 2×2 矩陣狀態列唯一的基本型 2 循環集，

而【例 1】中 $\left\{\left[\begin{array}{ccc|cc|ccc}1&0&0&1&1&0&0&1\\1&0&0&0&1&0&0&1\end{array}\right],\left[\begin{array}{c|cc|cc|cc|c}0&1&1&0&0&1&1&0\\0&1&0&0&0&1&1&0\end{array}\right]\right\}$ 爲 2×8 的一組基本型 2 循環集，由性質 3.2 知

$$\left\{\begin{bmatrix}1&0&0&0&1&1&0&0&1&1&0\\1&0&0&0&1&0&0&0&1&1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1&0&1&0&0&1&1&0&0&1\\0&1&0&1&0&0&0&1&0&0&1\end{bmatrix}\right\}$$

爲 2×11 的一組 2 循環集。

(2)當 $m=3$，型如 $\left\{\begin{bmatrix}X_1 & \begin{matrix}0\\0\end{matrix} & X_2 & \begin{matrix}0\\0\end{matrix} & X_3 & \begin{matrix}0\\0\end{matrix} & X_4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}Y_1 & \begin{matrix}0\\0\end{matrix} & Y_2 & \begin{matrix}0\\0\end{matrix} & Y_3 & \begin{matrix}0\\0\end{matrix} & Y_4\end{bmatrix}\right\}$

則 $x_1+x_2+x_3+x_4=8$，而 $(2,2,2,2)$ 爲唯一一組正偶數解，

$$\text{即}\left\{\begin{bmatrix}1&0&0&0&1&0&1&0&0&0&1\\1&0&0&0&1&0&1&0&0&0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1&0&1&0&0&0&1&0&1&0\\0&1&0&1&0&0&0&1&0&1&0\end{bmatrix}\right\}$$

爲 2×11 的一組 2 循環集。

接著，我們嘗試以同樣的方式處理$3\times n$之矩陣狀態列。我們發現問題比我們想像的複雜許多。我們花了很多時間去尋找其中規律，發現$3\times n$矩陣狀態列的 2 循環集型式主要有以下兩種：

第一型爲$P=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \end{bmatrix}_{3\times n}$，即第二列均爲 0。而此型的循環集也有類似由某些基本型 2 循環集去建構複合基本 2 循環集的特性。

舉例來說：

$$\left\{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right\}$$爲3×4矩陣狀態列之 2 循環集。

$$\left\{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right\}$$爲3×5矩陣狀態列之 2 循環集。

以上兩組 2 循環集可以組合成3×10的 2 循環集。如下：

$$\left\{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\right\}$$

這樣的 2 循環集雖然可歸納出漂亮規律，可是卻無法類推至$m\ge 4$，因此我們暫時不討論此型。

反而是另外一型的 2 循環集與性質 3.2 所提的最短循環集有一模一樣的特性，**我們大膽的猜測，即使$\boldsymbol{m\times n}$($\boldsymbol{m\ge 4}$)的矩陣狀態列，也必定存在如同性質 3.2 之 2 循環集型式**。經過驗證，果然證實我們的猜測，以下我們將推廣的結果整理如下：

定義 3.3：已知矩陣狀態列 $P=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1t} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2t} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & a_{mt} \end{bmatrix}_{m\times t}$，定義**矩陣基本型 2 循環集**為：$t$ 為偶數且(1)當 $t=2$，型如 $\left\{\begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & 0 \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1} & 0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 & a_{11} \\ 0 & a_{21} \\ \vdots & \vdots \\ 0 & a_{m1} \end{bmatrix}\right\}$

(2)當 $t=4r(r\in N)$，型如
$$\left\{\begin{bmatrix} a_{11} & 0\ 0 & & 0\ 0 & & 0\ 0 & & 0\ 0 & a_{1t} \\ a_{21} & 0\ 0 & \boxed{M_1} & 0\ 0 & \boxed{M_2} & 0\ 0 & \cdots\cdots \boxed{M_{r-1}} & 0\ 0 & a_{2t} \\ \vdots & \vdots\ \vdots & & \vdots\ \vdots & & \vdots\ \vdots & & \vdots\ \vdots & \vdots \\ a_{m1} & 0\ 0 & & 0\ 0 & & 0\ 0 & & 0\ 0 & a_{mt} \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 & & 0\ 0 & & 0\ 0 & & 0\ 0 & & 0 \\ 0 & \boxed{M_1'} & 0\ 0 & \boxed{M_2'} & 0\ 0 & \boxed{M_3'}\cdots\cdots & 0\ 0 & \boxed{M_r'} & 0 \\ \vdots & & \vdots\ \vdots & & \vdots\ \vdots & & \vdots\ \vdots & & \vdots \\ 0 & & 0\ 0 & & 0\ 0 & & 0\ 0 & & 0 \end{bmatrix}\right\}$$

(3)當 $t=4r+2(r\in N)$，型如
$$\left\{\begin{bmatrix} a_{11} & 0\ 0 & & 0\ 0 & & 0\ 0 & & 0\ 0 & & 0 \\ a_{21} & 0\ 0 & \boxed{M_1} & 0\ 0 & \boxed{M_2} & 0\ 0 & \cdots\cdots & 0\ 0 & \boxed{M_r} & 0 \\ \vdots & \vdots\ \vdots & & \vdots\ \vdots & & \vdots\ \vdots & & \vdots\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & 0\ 0 & & 0\ 0 & & 0\ 0 & & 0\ 0 & & 0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 & & 0\ 0 & & 0\ 0 & & 0\ 0 & a_{1t}' \\ 0 & \boxed{M_1'} & 0\ 0 & \boxed{M_2'} & 0\ 0 & \boxed{M_3'}\cdots\cdots\boxed{M_r'} & 0\ 0 & a_{2t}' \\ \vdots & & \vdots\ \vdots & & \vdots\ \vdots & & \vdots\ \vdots & \vdots \\ 0 & & 0\ 0 & & 0\ 0 & & 0\ 0 & a_{mt}' \end{bmatrix}\right\}$$

其中 $T_1\left(\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}\right)=T_1\left(\begin{bmatrix} a_{1t} \\ a_{2t} \\ \vdots \\ a_{mt} \end{bmatrix}\right)=T_1\left(\begin{bmatrix} a_{1t}' \\ a_{2t}' \\ \vdots \\ a_{mt}' \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$

$M_i=\begin{bmatrix} (m_i)_{11} & (m_i)_{12} \\ (m_i)_{21} & (m_i)_{22} \\ \vdots & \vdots \\ (m_i)_{m1} & (m_i)_{m2} \end{bmatrix}_{m\times 2}$, $i=1,2,\cdots,r$，滿足 $T_1(M_i)=O_{m\times 2}$，$\begin{bmatrix} (m_r)_{12} \\ (m_r)_{22} \\ \vdots \\ (m_r)_{m2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{1t}' \\ a_{2t}' \\ \vdots \\ a_{mt}' \end{bmatrix}$

；M_i' 則為其**相對應循環子狀態列**，滿足 $T_1(M_i')=O_{m\times 2}$。

【例 3】如何尋找 3×8 的基本型 2 循環集？

$$\because t=8 \Rightarrow r=2 \Rightarrow \text{型如}\left\{\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & & 0 & 0 & a_{18} \\ a_{21} & 0 & 0 & \boxed{M_1} & 0 & 0 & a_{28} \\ a_{31} & 0 & 0 & & 0 & 0 & a_{38} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & \boxed{M_1'} & 0 & 0 & \boxed{M_2'} & 0 \\ 0 & & 0 & 0 & & 0 \end{bmatrix}\right\}$$

$$\text{其中} T\left(\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix}\right) = T\left(\begin{bmatrix} a_{18} \\ a_{28} \\ a_{38} \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{，取} \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{18} \\ a_{28} \\ a_{38} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{。}$$

$$\text{又} T_1(M_1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{，以} M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{爲例，則} M_1' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, M_2' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{故}\left\{\left[\begin{array}{ccc|cc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right], \left[\begin{array}{c|cc|cc|cc|c} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]\right\} \text{爲一組基本型 2 循環集。}$$

定義 3.4：已知 $n \neq 1,3$，矩陣狀態列 $P = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$，定義**矩陣複合基本 2 循環集**

型如：

$$\left\{ \overbrace{\begin{bmatrix} & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & \\ & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & \\ X_1 & \vdots & X_2 & \vdots & \cdots & \vdots & X_{m'} & \vdots & X_{m'+1} \\ & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & \end{bmatrix}}^{\text{由}m'\text{個}\begin{smallmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{smallmatrix}\text{連接}X_i}, \overbrace{\begin{bmatrix} & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & \\ & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & \\ Y_1 & \vdots & Y_2 & \vdots & \cdots & \vdots & Y_{m'} & \vdots & Y_{m'+1} \\ & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & \end{bmatrix}}^{\text{由}m'\text{個}\begin{smallmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{smallmatrix}\text{連接}Y_i} \right\}$$

當 n 爲偶數時，$m' = 2t'$ $\left(t' \leq \dfrac{n-2}{6}, t' \in N \cup \{0\}\right)$（若 $t'=0$，則型如 $\{[X_1],[Y_1]\}$）

當 n 爲奇數時，$m' = 2t'+1$ $\left(t' \leq \dfrac{n-5}{6}, t' \in N \cup \{0\}\right)$，其中 $\{[X_i],[Y_i]\}$ 爲一組**矩陣基本型 2 循環集**且每個連接 X_i、Y_i 的 $\begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix}$ 左右需同時銜接相同的行矩陣子狀態列。

【例 4】如何尋找3×11的 2 循環集？

$$\because t' \le \frac{11-5}{6} = 1 \Rightarrow t' = 0,1 \Rightarrow m' = 1,3$$

以$m=1$爲例，二循環集型如$\left\{ \begin{bmatrix} & 0 & \\ X_1 & 0 & X_2 \\ & 0 & \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} & 0 & \\ Y_1 & 0 & Y_2 \\ & 0 & \end{bmatrix} \right\}$，

若X_i的行數爲x_i，則$x_1+x_2=10$且x_1,x_2皆爲正偶數，取$(x_1,x_2)=(2,8)$，

$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$是$3\times 2$矩陣狀態列的基本型 2 循環集，而【例 3】中

$\left\{ \left[\begin{array}{ccc|cc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c|cc|cc|cc|c} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right] \right\}$爲$3\times 8$的一組基本

型 2 循環集；由定義 3.4 知

$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$爲$3\times 11$

的一組 2 循環集。

性質 3.5：已知P爲$m\times n$($m\le n$)的矩陣狀態列，$(m,n)\ne(1,1),(1,3)$，在T_1作用下，其最短循環集長度爲 2。

【證明】

當$m=1$時，P爲直線狀態列，由性質 1.8 知，當$n\ne 1,3$時，皆存在 2 循環集。

當$m=2$時，由性質 3.2 的第一型知，皆存在 2 循環集。

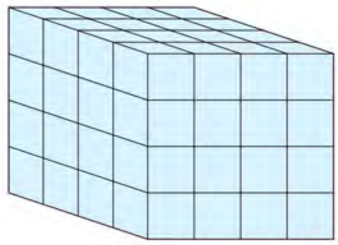
當$m\ge 3$時，由定義 3.4 知，$m\times n$(除3×3之外)之矩陣狀態列皆存在矩陣複合基本 2

循環集，而3×3存在 2 循環集爲$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$。■

研究四：$m\times n\times l$個燈三維陣列排列；T_1

我們打算將研究三之結論推廣至三維陣列排列之情形，發現也具有類似特性的 2 循環集出現，即**以若干個全 0 的子矩陣狀態列串接「基本型 2 循環集」而成「複合基本 2 循環集」**。這個結論讓我們非常興奮。由於立體情形以文字敘述不容易理解，以下我們先以圖示法舉例：

【例 5】**4×4×4** 基本型 2 循環集



第一層

1	1	0	1
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	1	0

第二層

0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0

第三層

0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0

第四層

1	0	1	1
1	1	1	0
1	1	0	1
0	1	1	1

T_1作用

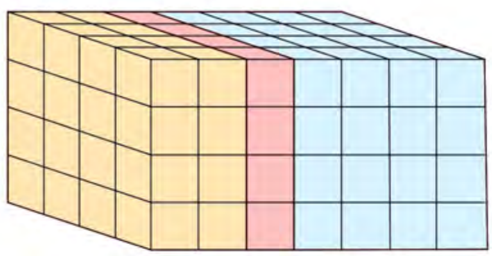
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0

1	1	0	1
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	1	0

1	0	1	1
1	1	1	0
1	1	0	1
0	1	1	1

0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0

【例 6】**4×4×7** 複合基本 **2** 循環集



第一層

0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0

第二層

1	1	0	1
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	1	0

第三層

0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0

第四層

1	1	0	1
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	1	0

第五層

0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0

第六層

0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0

第七層

1	0	1	1
1	1	1	0
1	1	0	1
0	1	1	1

T_1作用

1	1	0	1
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	1	0

0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0

0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0

0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0

1	1	0	1
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	1	0

1	0	1	1
1	1	1	0
1	1	0	1
0	1	1	1

0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0

依照上述之建構法，必可建構出$m \times n \times l$三維陣列所有大小之 2 循環集。我們敘述如下：

定義 4.1：已知三維陣列狀態列$P = V_{m \times n \times t}\left[M_1 M_2 \cdots M_t\right]$，定義三維陣列基本型 2 循環集爲：

t爲偶數且

(1)當$t = 2$，型如$\left\{V_{m \times n \times 2}\left[M_1 O^{(1)}\right], V_{m \times n \times 2}\left[O^{(1)} M_1\right]\right\}$

(2)當$t = 4r (r \in N)$， 型如

$$\left\{V_{m \times n \times t}\left[M_1 O^{(2)} \boxed{V_1} O^{(2)} \boxed{V_2} O^{(2)} \cdots\cdots \boxed{V_{r-1}} O^{(2)} M_t\right], V_{m \times n \times t}\left[O^{(1)} \boxed{V_1'} O^{(2)} \boxed{V_2'} O^{(2)} \boxed{V_3'} \cdots\cdots O^{(2)} \boxed{V_r'} \ O^{(1)}\right]\right\}$$

(3)當$t = 4r + 2 (r \in N)$，型如

$$\left\{V_{m \times n \times t}\left[M_1 O^{(2)} \boxed{V_1} O^{(2)} \boxed{V_2} O^{(2)} \cdots\cdots O^{(2)} \ \boxed{V_r} O^{(1)}\right], V_{m \times n \times t}\left[O^{(1)} \boxed{V_1'} O^{(2)} \boxed{V_2'} O^{(2)} \boxed{V_3'} \cdots\cdots \boxed{V_r'} O^{(2)} M_t'\right]\right\}$$

其中$O^{(i)}$表示$m \times n \times i$的三維陣列中所有元素皆爲 0 、

$T_1\left(M_1\right) = T_1\left(M_t\right) = T_1\left(M_t'\right) = O^{(1)}$

$V_i = V_{m \times n \times 2}\left[M_{i1} M_{i2}\right], i = 1, 2, \cdots, r$ 、滿足$T_1\left(V_i\right) = O^{(2)}$，$M_{r2} = M_t'$，

；V_i'則爲其**相對應循環子狀態列**，滿足$T_1\left(V_i'\right) = O^{(2)}$ 。

定義 4.2：已知三維陣列狀態列$P = V_{m \times n \times l}\left[M_1 M_2 \cdots M_l\right]$，定義三維陣列複合基本 2 循環集

型如：
$$\left\{\begin{array}{l} V_{m \times n \times l}\left[\overbrace{X_1 \quad O^{(1)} \quad X_2 \quad O^{(1)} \quad \cdots \quad O^{(1)} \quad X_{m'} \quad O^{(1)} \quad X_{m'+1}}^{\text{由}m'\text{個}O^{(1)}\text{ 連接}X_i}\right] \\ , V_{m \times n \times l}\left[\overbrace{Y_1 \quad O^{(1)} \quad Y_2 \quad O^{(1)} \quad \cdots \quad O^{(1)} \quad Y_{m'} \quad O^{(1)} \quad Y_{m'+1}}^{\text{由}m'\text{個}O^{(1)}\text{ 連接}Y_i}\right] \end{array}\right\}$$

當n爲偶數時，$m' = 2t' \quad (t' \le \dfrac{n-2}{6}, t' \in N \cup \{0\})$，

(若$t' = 0$，則型如$\left\{V_{m \times n \times l}\left[X_1\right], V_{m \times n \times l}\left[Y_1\right]\right\}$)

當n爲奇數時，$m' = 2t' + 1 \ (t' \le \dfrac{n-5}{6}, t' \in N \cup \{0\})$，

其中$\left\{V_{m \times n \times t}\left[X_i\right], V_{m \times n \times t}\left[Y_i\right]\right\}$爲一組**三維陣列基本型 2 循環集**且每個連接X_i、Y_i

的 $O^{(1)}$ 左右需同時銜接相同的矩陣子狀態列。

性質 4.3：已知 P 爲 $m\times n\times l$ ($m\le n\le l$)的三維陣列狀態列，$(m,n,l)\ne(1,1,1),(1,1,3)$ ，在 T_1 作用下，其最短循環集長度爲 2。

【證明】

當 $l=1$ 時，P 爲矩陣狀態列，由性質 3.5 知，當 $(m,n,l)\ne(1,1,1)$ 時，皆存在 2 循環集。

當 $l\ge 2$ 時，由定義 4.2 知，當 $(m,n,l)\ne(1,1,3)$ 、 $(3,3,3)$ 時，皆存在三維陣列複合基本 2 循環集，而 $3\times3\times3$ 存在 2 循環集爲

$$\left\{\left[V_{3\times3\times3}\begin{vmatrix}1&1&0\\0&0&0\\0&1&1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1&1&0\\0&0&0\\0&1&1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1&1&0\\0&0&0\\0&1&1\end{vmatrix}\right],\left[V_{3\times3\times3}\begin{vmatrix}0&0&1\\1&0&1\\1&0&0\end{vmatrix}\begin{vmatrix}0&0&1\\1&0&1\\1&0&0\end{vmatrix}\begin{vmatrix}0&0&1\\1&0&1\\1&0&0\end{vmatrix}\right]\right\}$$ 。■

研究五：T_k ， $k=2,3,4$

解決了 T_1 ，我們不禁好奇，若將變換規則改成「在上一次未亮且其旁邊恰有 k 盞燈是亮著的燈點亮，同時將原來已亮的燈熄滅，其中 $k=2,3,4$ 」，那麼其是否仍存在循環狀態列？以下爲我們研究的結果：

性質 5.1：已知 P 爲 n 個元素的直線狀態列，在 T_2 作用下，不存在任何循環狀態列。

【證明】

事實上，若 P 爲不循環狀態列，則必在有限變換次數後變成終止狀態 $(0,0,\cdots,0)$

(1)當 $n=1$ ，P 至多變換一次成 (0)

(2)假設當 $1\le n\le t$ 時，P 經有限變換次數後變成 $(0,0,\cdots,0)$

則當 $n=t+1$ 時，$P=(a_1,a_2,\cdots\cdots,a_t,a_{t+1})$

①若 $a_{t+1}=0$ ，則 $(a_1,a_2,\cdots\cdots,a_t)$ 往後之變換完全不受 $a_{t+1}=0$ 影響，

故 P 經有限變換次數後變成 $(0,0,\cdots,0)$

②若 $a_{t+1}=1$ ，則 $T_2(a_1,a_2,\cdots\cdots,a_t,a_{t+1})=(a_1',a_2',\cdots\cdots,a_t',0)$

而 $(a_1',a_2',\cdots\cdots,a_t')$ 往後的變換完全不受 $a_{t+1}'=0$ 影響

故 P 經有限變換次數後變成 $(0,0,\cdots,0)$

由(1)(2)及第二數學歸納法得證。■

性質 5.2：已知 P 爲 n 個元素的環狀狀態列，在 T_2 作用下，當 n 爲偶數時，其最短循環集長度爲 2；當 n 爲奇數時，不存在任何循環狀態列。

【證明】

(1)當 n 爲偶數，則存在 2 循環集 $\left\{\overline{(1,0,1,0,\cdots\cdots,1,0)},\overline{(0,1,0,1,\cdots\cdots,0,1)}\right\}$

(2)當 n 爲奇數，P 至少有兩個 0 或兩個 1 相鄰，因此不妨假設 $(a_{2t},a_{2t+1})=(0,0)$ 或 $(1,1)$

①若 $(a_{2t},a_{2t+1})=(0,0)$ ，則 $(a_1,a_2,\cdots\cdots,a_{2t-1})$ 往後之變換完全不受 a_{2t},a_{2t+1} 影響，

由性質 5.1 知，P 在經有限次變換後變成 $\overline{(0,0,\cdots,0)}$ 。

② $(a_{2t},a_{2t+1})=(1,1)$，則$T_2(a_1,a_2,\cdots\cdots a_{2t-1},a_{2t},a_{2t+1})=(a_1',a_2',\cdots\cdots,a_{2t-1}',0,0)$
而$(a_1',a_2',\cdots\cdots,a_{2t-1}')$往後之變換完全不受$a_{2t}'=0,a_{2t+1}'=0$影響

由性質 5.1 知，P在經有限次變換後變成$\overline{(0,0,\cdots,0)}$。■

性質 5.3：已知P爲$m\times n$的矩陣狀態列，當$m\geq 2,n\geq 2$，在T_2作用下，其最短循環集長度爲 2。

【證明】

當$m\geq 2,n\geq 2$，存在 2 循環集$\left\{\begin{bmatrix}1&0&0&\cdots&0\\0&1&0&\cdots&0\\0&0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1&0&\cdots&0\\1&0&0&\cdots&0\\0&0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\right\}$。■

性質 5.4：已知P爲$m\times n\times l(m\leq n\leq l)$三維陣列狀態列，當$2\leq n\leq l$，在$T_2$作用下，其最短循環集長度爲 2。

【證明】

將$\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$的二維矩陣任意置放入三維陣列中，其餘元素皆 0，即爲一 2 循環狀態列。■

性質 5.5：已知P爲$m\times n$的矩陣狀態列，在T_3或T_4作用下，不存在任何循環狀態列。

【證明】

當$m=n=1$時，$P=[1]\Rightarrow T_3(P)=[0]$

假設$1\leq m\leq t$或$1\leq n\leq s$時P在經T_3有限變換次數後變成零矩陣，

則當$m=t+1,n=s+1$時，$P=\begin{bmatrix}a_{11}&\cdots&\cdots&a_{1(s+1)}\\\vdots&&&\vdots\\\vdots&&a_{ts}&a_{t(s+1)}\\a_{(t+1)1}&\cdots&a_{(t+1)s}&\boxed{a_{(t+1)(s+1)}}\end{bmatrix}$

(1)當$a_{(t+1)(s+1)}=0$，則$a_{(t+1)s}$必在有限步變成 0，而一旦變成 0 就會永久爲 0，而

$a_{(t+1)(s-1)},a_{(t+1)(s-2)},\cdots,a_{(t+1)1}$依序會在有限步後變成 0。而$P=\begin{bmatrix}a_{11}&\cdots&\cdots&a_{1(s+1)}\\\vdots&&&\vdots\\a_{t1}&\cdots&a_{ts}&a_{t(s+1)}\end{bmatrix}$

之變換完全不受下方列$P=\begin{bmatrix}0&\cdots&0&\boxed{0}\end{bmatrix}$影響，

故也會在有限步後變成全 0 狀態列。

(2) 當 $a_{(t+1)(s+1)}=1$ ，$T_3\left(\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1(s+1)} \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & a_{ts} & a_{t(s+1)} \\ a_{(t+1)1} & \cdots & a_{(t+1)s} & \boxed{1} \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} a_{11}' & \cdots & \cdots & a_{1(s+1)}' \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & a_{ts}' & a_{t(s+1)}' \\ a_{(t+1)1}' & \cdots & a_{(t+1)s}' & \boxed{0} \end{bmatrix}$

同(1)，$\begin{bmatrix} a_{11}' & \cdots & \cdots & a_{1(s+1)}' \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & a_{ts}' & a_{t(s+1)}' \\ a_{(t+1)1}' & \cdots & a_{(t+1)s}' & \boxed{0} \end{bmatrix}$ 必會在有限步後變成全 0 狀態列。

由(1)(2)及第二數學歸納法得證。同理可證 T_4 之結論。■

伍、研究結果

一、最短循環集長度：

	n 個元素的 直線狀態列	n 個元素的 環狀狀態列	$m\times n$ ($m\le n$)的 矩陣狀態列	$m\times n\times l$ ($m\le n\le l$) 三維陣列狀態列
T_1	當 $n\ne 1,3$ 時，最短循環集長度爲 2。 當 $n=1,3$ 時，不存在任何循環狀態列。	當 $n\ne 1,2,3,7$ 時，最短循環集長度爲 2。 當 $n=1,2,3,7$ 時，不存在任何循環狀態列。	$(m,n)\ne(1,1),(1,3)$ ，最短循環集長度爲 2。	$(m,n,l)\ne(1,1,1),(1,1,3)$ 最短循環集長度爲 2。
T_2	不存在任何循環狀態列。	當 n 爲偶數時，最短循環集長度爲 2； 當 n 爲奇數時，不存在任何循環狀態列。	當 $m\ge 2,n\ge 2$ ，最短循環集長度爲 2。	當 $2\le n\le l$ ，最短循環集長度爲 2。
T_3 T_4			不存在任何循環狀態列。	

二、**最短循環集型式**：由若干個全 0 子狀態列串接「**基本型 2 循環集**」，形成「**複合基本 2 循環集**」。

陸、討論與應用

這篇作品我們花了很多時間去尋找各式循環集的規律，並使用數學歸納法來驗證我們的結論。除了找出最短循環集長度外，我們也嘗試尋找不同 n 值的最長循環集。在研究的過程中，我們有幾項重大的發現。我們發現若直線狀態列 $P=(a_1,a_2,\cdots\cdots,a_n)$ 存在 l 循環集，則 l 必爲偶數。同時也發現大部分的最長的循環集均是以 $(1,0,0,\cdots,0)$ 爲初始狀態列所產生之循環集，且其循環長度 l 皆有漂亮規律。我們也針對以 $(1,0,0,\cdots,0)$ 爲初始狀態列去觀察其循環情形，發現大部分 n 值的最長循環集長度 l ，皆是 2^k-2^h 的形式。其中幾個性質值得留意：(研究日誌)

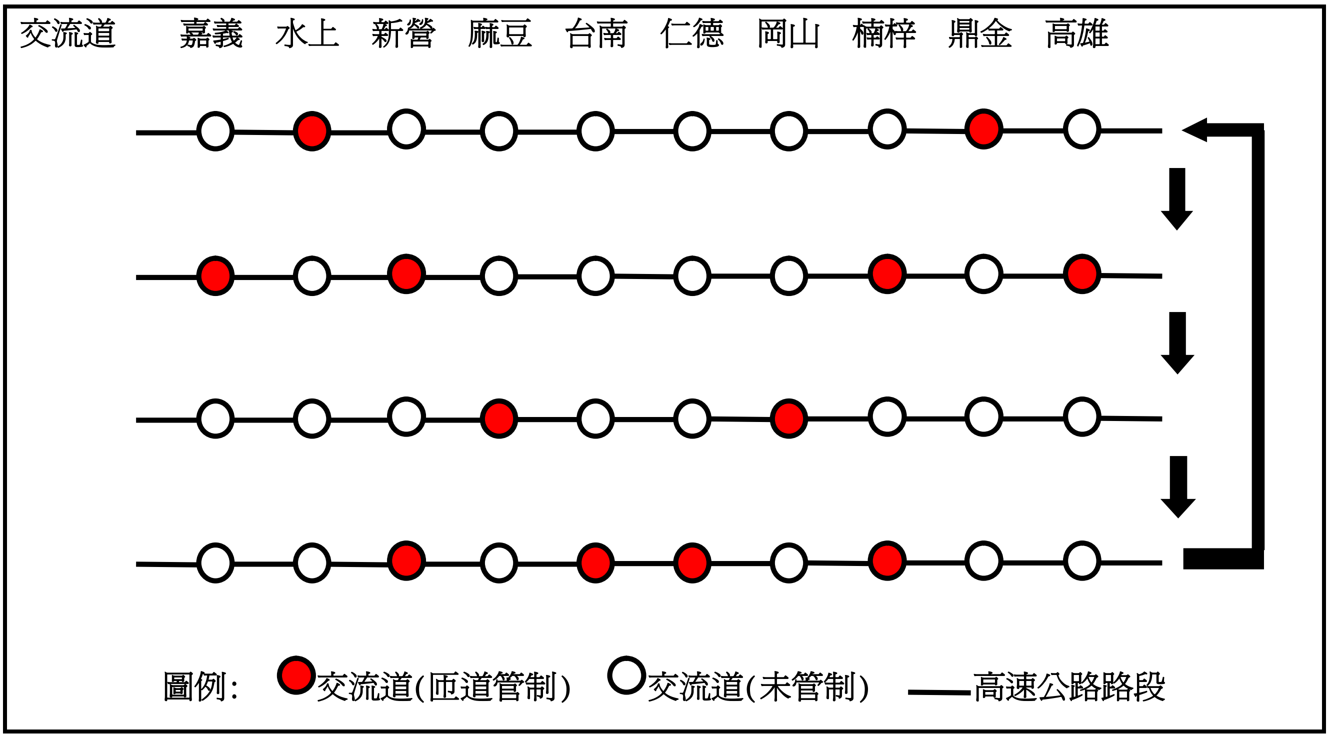
性質一：當 $n=2^k-2$ 或 $n=2^k(k\geq 3)$ 時，$l=2^{k+1}-2$。
性質二：當 $n=3\cdot 2^k-1(k\in N)$ 時，$l=2^{k+1}$。
性質三：當 $n=2^k-3(k\geq 4)$ 時，$l=2^{k+1}-4$。
性質四：當 $n=2^k-1(k\in N)$ 時，不存在循環。

然而，仍有部分 n 值的最長循環尚未歸納出通式，我們希望未來可以完成。

我們認為，閃爍燈的循環性質，可以應用在日常生活中各種流量之自動調節系統設計，比如水流量或車流量等。以下舉例說明：

【高速公路的匝道自動管制系統】

1. 平時車流量低時，全線不管制。
2. 連續假期或尖峰時段時，依照歷年交通調查資料選定數個易壅塞交流道進行管制(即初始狀態列)，並滿足適當的循環長度，設定適當間隔時間變換管制之入口匝道。
3. 改良全時段固定某幾個交流道進行匝道管制，利用車流量變化之特性，設計可自動調節的管制系統，以更有效的舒解車流。



柒、參考資料

1. 林常(編譯)(2011)。**環球城市數學奧林匹克試題解**。杭州：浙江大學出版社。
2. 許志農(主編) (2016)。**普通高級中學數學 2**。台北：龍騰文化。
3. 游森棚(主編)(2016)。**普通高級中學數學 4**。台南：翰林出版。
4. 馮志剛(2005)。**數學歸納法的証題方法與技巧**。上海：華東師範大學出版社。
5. 華羅庚(2001)。**數學歸納法**。新竹：凡異出版社。
6. 交通部台灣區國道高速公路局（民 103 年 12 月 30 日）。行車指南。取自 http://www.freeway.gov.tw/

【評語】050409

本文最主要在探討第 23 屆環球城市盃數學競賽試題—「閃爍燈問題」，此問題與「點燈問題」不同，整體而言有不錯的結果，題目也十分有趣。

可將其推廣到更一般的圖形。若能思考在何種數學模型下，能做相關性的應用會更好。

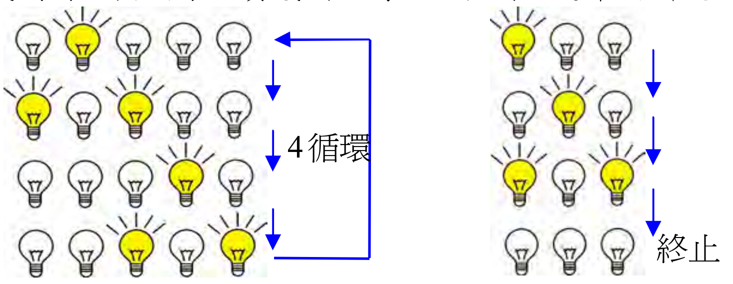
作品海報

壹、研究動機

第 23 屆環球城市數學競賽試題中，有一個關於閃爍燈問題：「將 n 盞燈排成一列，最初將其中某些燈點亮，在以後的每次操作，將上一次未亮且其旁邊僅有一盞燈是亮著的燈點亮，同時將原來已亮的燈熄滅。試問對什麼樣的 n，可以找到一種亮燈的方式，使得無論操作幾次，在每一次操作後，至少都有一盞燈是亮著的。」由於 n 盞燈亮燈方式共 2^n 種，若 n 盞燈永不全滅，必定會產生循環。我們對於其循環性質感到好奇，便展開一連串的研究。

貳、研究目的

一、探討 n 個燈直線排列的循環性質。
二、探討 n 個燈環狀排列的循環性質。
三、探討 $m\times n$ 個燈矩陣排列的循環性質。
四、探討 $m\times n\times l$ 個燈三維陣列排列的循環性質。
五、改變操作規則，並探討各種排列之循環性質。



參、研究設備與器材

紙、筆、電腦、C++

肆、研究過程與方法

名詞與符號定義：

(一)元素之狀態值：$a_i=\begin{cases}0,\text{燈為暗}\\1,\text{燈為亮}\end{cases}$ （a_{ij} 定義同）

(二)轉換函數T_k：$T_k(a_i)=\begin{cases}0 & ,a_i=1\\1 & ,a_i=0\text{且與}a_i\text{相鄰之元素恰}k\text{個值為}1\\0 & ,\text{其他}\end{cases}$ （$T_k(a_{ij})$ 定義同）

(三)l 循環集：若一組狀態列$P_1,P_2,\cdots\cdots,P_l\ (l\ge 2)$，滿足$T_k(P_i)=P_{i+1}(i=1,2,\cdots,l-1),T_k(P_l)=P_1$，則稱$\{P_1,P_2,\cdots\cdots,P_l\}$ 為一個l 循環集，其中l 為此循環集之長度。

研究一：n 個燈直線排列；T_1

一、可逆性判斷法之研究：

性質 1.3：直線狀態列中，存在 11 在邊或 111 相鄰時，則為不可逆狀態列。

性質 1.5：若直線狀態列型如 $(\overbrace{1,\underbrace{0,\cdots,0}_{m_1},1,\underbrace{0,\cdots,0}_{m_2},1,0,\cdots,0,1,\underbrace{0,\cdots,0}_{m_{t-1}},1}^{t\text{個}1})$，$m_i\in N,1\le i\le t-1$，當 t 為偶數時，此狀態列可逆；當 t 為奇數時，此狀態列不可逆。

性質 1.6：若直線狀態列型如 $(\overbrace{1,\underbrace{0,\cdots,0}_{m_1},1,\underbrace{0,\cdots,0}_{m_2},1,0,\cdots,0,1,\underbrace{0,\cdots,0}_{m_t}}^{t\text{個}1})$，$m_i\in N,1\le i\le t$，則皆為可逆狀態列。

性質 1.7：若直線狀態列型如 $(\overbrace{\underbrace{0,\cdots,0}_{m_1},1,\underbrace{0,\cdots,0}_{m_2},1,0,\cdots,0,1,\underbrace{0,\cdots,0}_{m_{t+1}}}^{t\text{個}1})$，$m_i\in N,1\le i\le t+1$，則皆為可逆狀態列。

直線狀態列可逆性判斷法：
步驟一：若為 11 在邊或 111 相鄰時，則不可逆，否則進行步驟二。
步驟二：將狀態列中 11 相鄰處，由兩個 1 間分割成數個無 11 相鄰的子狀態列。
步驟三：針對每個子狀態列依照性質 1.5~性質 1.7 分別判斷其可逆性，若皆可逆，則原始狀態列可逆；反之，則不可逆。

【例】判斷狀態列 $P=(1,0,0,1,0,0,0,1,0,\boxed{1,1},0,1,0,0,0,\boxed{1,1},0,0,0,0,1,0,1,0,0,0)$ 之可逆性
步驟二：分割成 $P=(1,0,0,1,0,0,0,1,0,1)(1,0,1,0,0,0,1)(1,0,0,0,0,1,0,1,0,0,0)$
步驟三：由性質 1.5 與性質 1.6 知 $(1,0,0,1,0,0,0,1,0,1)$ 可逆；$(1,0,1,0,0,0,1)$ 不可逆；$(1,0,0,0,0,1,0,1,0,0,0)$ 可逆，故狀態列 P 不可逆。

二、最短循環集研究：

定義 1.9：已知直線狀態列 $P=(a_1,a_2,\cdots,a_t)$，定義**直線基本型 2 循環集**為：t 為偶數且
(1)當 $t=2$，型如 $\{(1,0),(0,1)\}$ (2)當 $t=4r(r\in N)$， 型如 $\{(1,0,0,1,1,0,0,1,\cdots,1,0,0,1),(0,1,1,0,0,1,1,0,\cdots,0,1,1,0)\}$
(3)當 $t=4r+2(r\in N)$)，型如 $\{(1,0,0,1,\cdots,1,0,0,1,1,0),(0,1,1,0,\cdots,0,1,1,0,0,1)\}$

定義 1.10：已知直線狀態列 $P=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，$n\ne 1,3$，定義**直線複合基本 2 循環集**型如：

$$\left\{(\overbrace{X_1\quad 0\quad X_2\quad 0\quad \cdots\quad 0\quad X_m\quad 0\quad X_{m+1}}^{\text{由}m\text{個}0\text{連接}X_i}),(\overbrace{Y_1\quad 0\quad Y_2\quad 0\quad \cdots\quad 0\quad Y_m\quad 0\quad Y_{m+1}}^{\text{由}m\text{個}0\text{連接}Y_i})\right\},$$

當 n 為偶數時，$m=2t'$ $(t'\le\dfrac{n-2}{6},t'\in N\cup\{0\})$（若 $t'=0$，則型如 $\{(X_1),(Y_1)\}$）

當 n 為奇數時，$m=2t'+1\,(t'\le\dfrac{n-5}{6},t'\in N\cup\{0\})$，其中 $\{(X_i),(Y_i)\}$ 為一組**直線基本型 2 循環集**且每個連接 X_i、Y_i 的 0 左右需同時銜接 1 或 0。

性質 1.11：已知 P 為 n 個元素的直線狀態列，$n\ne 1,3$，所有的 2 循環集必型如**直線複合基本 2 循環集**。

【例】以 $n=10$ 為例，因 $t'\le\dfrac{10-2}{6}=\dfrac{4}{3}\Rightarrow t'=0,1\Rightarrow m=0,2$，故它有兩類形式的 2 循環集，即 $\{X_1,Y_1\}$ 與 $\{(X_1\quad 0\quad X_2\quad 0\quad X_3),(Y_1\quad 0\quad Y_2\quad 0\quad Y_3)\}$。第一類形式只有 1 種，而第二類形式中，若子狀態列 X_1,X_2,X_3 之長度分別為 x_1,x_2,x_3，則 $(x_1,x_2,x_3)=(2,2,4),(2,4,2),(4,2,2)$。故 $n=10$ 時，共有 4 個 2 循環集，分別為：
$\{(1,0,0,1,1,0,0,1,1,0),(0,1,1,0,0,1,1,0,0,1)\}$、$\{(1,0,\boxed{0},0,1,\boxed{0},1,0,0,1),(0,1,\boxed{0},1,0,\boxed{0},0,1,1,0)\}$
$\{(1,0,\boxed{0},0,1,1,0,\boxed{0},0,1),(0,1,\boxed{0},1,0,0,1,\boxed{0},1,0)\}$、$\{(1,0,0,1,\boxed{0},1,0,\boxed{0},0,1),(0,1,1,0,\boxed{0},0,1,\boxed{0},1,0)\}$。

研究二：n 個燈環狀排列；T_1

一、可逆性判斷法之研究：

性質 2.3：當環狀狀態列中存在 111 相鄰時，其為不可逆狀態列。

性質 2.5：若狀態列型如 $(\overbrace{1,\underbrace{0,\cdots,0}_{m_1},1,\underbrace{0,\cdots,0}_{m_2},1,0,\cdots,0,1,\underbrace{0,\cdots,0}_{m_t}}^{t\text{個}1})$，$m_i\in N,1\le i\le t$，當 t 為偶數時，此狀態列可逆；當 t 為奇數時，此狀態列不可逆。

環狀狀態列可逆性判斷法：
步驟一：若存在 111 相鄰時，則不可逆，否則進行步驟二。
步驟二：若狀態列完全無 11 相鄰處，則判斷法如性質 2.5。但若有 11 相鄰處，則由兩個 1 間分割成數個無 11 相鄰的子狀態列，事實上所分割成的子狀態列皆為 (1_________1) 型式的直線狀態列。
步驟三：針對每個子狀態列依照性質 1.5 分別判斷其可逆性，若皆可逆，則原始狀態列可逆；反之，則不可逆。

【例】判斷狀態列 $P=\overline{(1,0,0,1,0,0,0,1,0,\boxed{1,|1},0,1,0,0,1,0,\boxed{1,|1},0,0,0,0,1,0,0)}$ 之可逆性

步驟二：分割成 $P=(1,0,1,0,0,1,0,1)(1,0,0,0,0,1,0,0,1,0,0,1,0,0,0,1,0,1)$

步驟三：由性質 1.5 知 $(1,0,1,0,0,1,0,1)$ 與 $(1,0,0,0,0,1,0,0,1,0,0,1,0,0,0,1,0,1)$ 皆可逆，故狀態列 P 可逆。

二、最短循環集研究：

性質 2.6：已知 P 為 n 個元素的環狀狀態列，在 T_1 作用下，當 $n\in N$ 且 $n\neq 1,2,3,7$ 時，其最短循環集長度為 2。當 $n=1,2,3,7$，不存在任何循環狀態列。

定義 2.7：已知環狀狀態列 $P=\overline{(a_1,a_2,\cdots\cdots,a_n)}$，$n\neq 1,2,3,7$，定義**環狀複合基本 2 循環集**型如：

$$\left\{\overline{(\overbrace{0\quad X_1\quad 0\quad X_2\quad \cdots\cdots\quad 0\quad X_{m-1}\quad 0\quad X_m}^{由m個0連接X_i})},\overline{(\overbrace{0\quad Y_1\quad 0\quad Y_2\quad \cdots\cdots\quad 0\quad Y_{m-1}\quad 0\quad Y_m}^{由m個0連接Y_i})}\right\}$$

(1) 當 $n\equiv 0(\mathrm{mod}\,4), n\in N$ 時，$m=4t'$，$(t'\le\dfrac{n}{12}, t'\in N\cup\{0\})$（若 $t'=0$，則型如 $\left\{\overline{(X_1)},\overline{(Y_1)}\right\}$）

(2) 當 $n\equiv 1(\mathrm{mod}\,4), n\in N$，$m=4t'+1$，$(t'\le\dfrac{n-3}{12}, t'\in N\cup\{0\})$ (3) 當 $n\equiv 2(\mathrm{mod}\,4), n\in N$，$m=4t'+2$，$(t'\le\dfrac{n-6}{12}, t'\in N\cup\{0\})$

(4) 當 $n\equiv 3(\mathrm{mod}\,4), n\in N, n\ge 11$，$m=4t'+3$，$(t'\le\dfrac{n-9}{12}, t'\in N\cup\{0\})$

其中 $\left\{(X_i),(Y_i)\right\}$ 為一組**直線基本型 2 循環集**且每個連接 X_i、Y_i 的 0 兩側需同時銜接 1 或 0。

性質 2.8：已知 P 為 n 個元素的環狀狀態列，$n\neq 1,2,3,7$，所有的 2 循環集必型如**環狀複合基本 2 循環集**。

研究三：$m\times n$ 個燈矩陣排列；T_1

定義 3.3：已知 $m\times t$ 的矩陣狀態列 P，定義**矩陣基本型 2 循環集**為：t 為偶數且

(1) 當 $t=2$，型如 $\left\{\begin{bmatrix} a_{11} & 0\\ a_{21} & 0\\ \vdots & \vdots\\ a_{m1} & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 & a_{11}\\ 0 & a_{21}\\ \vdots & \vdots\\ 0 & a_{m1}\end{bmatrix}\right\}$

(2) 當 $t=4r(r\in N)$，型如

$$\left\{\begin{bmatrix} a_{11} & 0\ 0 & & 0\ 0 & & 0\ 0 & & & 0\ 0 & a_{1t}\\ a_{21} & 0\ 0 & \boxed{M_1} & 0\ 0 & \boxed{M_2} & 0\ 0 & \cdots\cdots & \boxed{M_{r-1}} & 0\ 0 & a_{2t}\\ \vdots & \vdots\ \vdots & & \vdots\ \vdots & & \vdots\ \vdots & & & \vdots\ \vdots & \vdots\\ a_{m1} & 0\ 0 & & 0\ 0 & & 0\ 0 & & & 0\ 0 & a_{mt}\end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 & & 0\ 0 & & 0\ 0 & & 0\ 0 & & 0\\ 0 & \boxed{M_1'} & 0\ 0 & \boxed{M_2'} & 0\ 0 & \boxed{M_3'}\cdots\cdots & 0\ 0 & \boxed{M_r'} & 0\\ \vdots & & \vdots\ \vdots & & \vdots\ \vdots & & \vdots\ \vdots & & \vdots\\ 0 & & 0\ 0 & & 0\ 0 & & 0\ 0 & & 0\end{bmatrix}\right\}$$

(3) 當 $t=4r+2(r\in N)$，型如

$$\left\{\begin{bmatrix} a_{11} & 0\ 0 & & 0\ 0 & & 0\ 0 & & 0\ 0 & & 0\\ a_{21} & 0\ 0 & \boxed{M_1} & 0\ 0 & \boxed{M_2} & 0\ 0 & \cdots\cdots & 0\ 0 & \boxed{M_r} & 0\\ \vdots & \vdots\ \vdots & & \vdots\ \vdots & & \vdots\ \vdots & & \vdots\ \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & 0\ 0 & & 0\ 0 & & 0\ 0 & & 0\ 0 & & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 & & 0\ 0 & & 0\ 0 & & & 0\ 0 & a_{1t}'\\ 0 & \boxed{M_1'} & 0\ 0 & \boxed{M_2'} & 0\ 0 & \boxed{M_3'}\cdots\cdots & \boxed{M_r'} & 0\ 0 & a_{2t}'\\ \vdots & & \vdots\ \vdots & & \vdots\ \vdots & & & \vdots\ \vdots & \vdots\\ 0 & & 0\ 0 & & 0\ 0 & & & 0\ 0 & a_{mt}'\end{bmatrix}\right\}$$

，其中 $T_1\left(\begin{bmatrix} a_{11}\\ a_{21}\\ \vdots\\ a_{m1}\end{bmatrix}\right)=T_1\left(\begin{bmatrix} a_{1t}\\ a_{2t}\\ \vdots\\ a_{mt}\end{bmatrix}\right)=T_1\left(\begin{bmatrix} a_{1t}'\\ a_{2t}'\\ \vdots\\ a_{mt}'\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} 0\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}$

$M_i=\begin{bmatrix} (m_i)_{11} & (m_i)_{12}\\ (m_i)_{21} & (m_i)_{22}\\ \vdots & \vdots\\ (m_i)_{m1} & (m_i)_{m2}\end{bmatrix}_{m\times 2}$，$i=1,2,\cdots,r$，滿足 $T_1(M_i)=O_{m\times 2}$，$\begin{bmatrix} (m_r)_{12}\\ (m_r)_{22}\\ \vdots\\ (m_r)_{m2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{1t}'\\ a_{2t}'\\ \vdots\\ a_{mt}'\end{bmatrix}$；$M_i'$ 則為其**相對應循環子狀態列**，滿足 $T_1(M_i')=O_{m\times 2}$。

【例】以 3×8 為例，$\because t=8\Rightarrow r=2\Rightarrow$ 故 $\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0\end{bmatrix}\right\}$ 為一組矩陣基本型 2 循環集。

定義 3.4：已知 $n\neq 1,3$，$m\times n$ 的矩陣狀態列 P，定義**矩陣複合基本 2 循環集**型如：

$$\left\{\overbrace{\begin{bmatrix} & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & \\ X_1 & 0 & X_2 & 0 & \cdots & 0 & X_{m'} & 0 & X_{m'+1}\\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & \end{bmatrix}}^{由m'個\begin{smallmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{smallmatrix}連接X_i},\overbrace{\begin{bmatrix} & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & \\ Y_1 & 0 & Y_2 & 0 & \cdots & 0 & Y_{m'} & 0 & Y_{m'+1}\\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & \end{bmatrix}}^{由m'個\begin{smallmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{smallmatrix}連接Y_i}\right\}$$

當 n 為偶數時，$m'=2t'$ $(t'\le\dfrac{n-2}{6}, t'\in N\cup\{0\})$（若 $t'=0$，則型如 $\left\{[X_1],[Y_1]\right\}$）

當 n 為奇數時，$m'=2t'+1\ (t'\le\dfrac{n-5}{6}, t'\in N\cup\{0\})$，其中 $\left\{[X_i],[Y_i]\right\}$ 為一組**矩陣基本型 2 循環集**且每個連接 X_i、Y_i 的 $\begin{smallmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{smallmatrix}$ 左右需同時銜接相同的行矩陣子狀態列。

【例】如何尋找 3×11 的 2 循環集？$\because t'\le\dfrac{11-5}{6}=1\Rightarrow t'=0,1\Rightarrow m'=1,3$ 以 $m'=1$ 為例，2 循環集型如

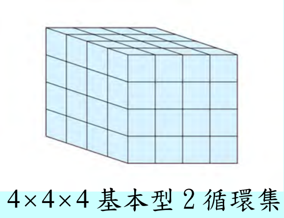
$\left\{\begin{bmatrix} & 0 & \\ X_1 & 0 & X_2\\ & 0 & \end{bmatrix},\begin{bmatrix} & 0 & \\ Y_1 & 0 & Y_2\\ & 0 & \end{bmatrix}\right\}$，即 $\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0\end{pmatrix}\right\}$。

性質 3.5：已知 P 為 $m\times n$（$m\le n$）的矩陣狀態列，$(m,n)\neq(1,1),(1,3)$，在 T_1 作用下，其最短循環集長度為 2。

研究四：$m\times n\times l$ 個燈三維陣列排列；T_1

定義 4.1：已知三維陣列狀態列 $P=V_{m\times n\times t}\left[M_1M_2\cdots M_t\right]$，定義**三維陣列基本型 2 循環集**為：

t 為偶數且



4×4×4 基本型 2 循環集

(1)當 $t=2$，型如 $\left\{V_{m\times n\times 2}\left[M_1O^{(1)}\right],V_{m\times n\times 2}\left[O^{(1)}M_1\right]\right\}$

(2)當 $t=4r(r\in N)$， 型如

$$\left\{V_{m\times n\times t}\left[M_1O^{(2)}\boxed{V_1}O^{(2)}\boxed{V_2}O^{(2)}\cdots\cdots\boxed{V_{r-1}}O^{(2)}M_t\right],V_{m\times n\times t}\left[O^{(1)}\ \boxed{V_1'}O^{(2)}\boxed{V_2'}O^{(2)}\boxed{V_3'}\cdots\cdots O^{(2)}\ \boxed{V_r'}\ O^{(1)}\right]\right\}$$

(3)當 $t=4r+2(r\in N)$，型如

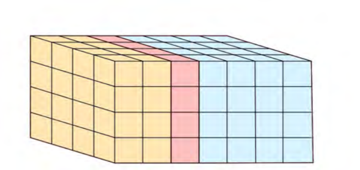
$$\left\{V_{m\times n\times t}\left[M_1O^{(2)}\boxed{V_1}O^{(2)}\boxed{V_2}O^{(2)}\cdots\cdots O^{(2)}\ \boxed{V_r}\ O^{(1)}\right],V_{m\times n\times t}\left[O^{(1)}\ \boxed{V_1'}O^{(2)}\boxed{V_2'}O^{(2)}\boxed{V_3'}\cdots\cdots\boxed{V_r'}O^{(2)}M_t'\right]\right\}$$

其中 $O^{(i)}$ 表示 $m\times n\times i$ 的三維陣列中所有元素皆為 0 、 $T_1\left(M_1\right)=T_1\left(M_t\right)=T_1\left(M_t'\right)=O^{(1)}$，

$V_i=V_{m\times n\times 2}\left[M_{i1}M_{i2}\right],\ i=1,2,\cdots,r$、滿足 $T_1\left(V_i\right)=O^{(2)}$，$M_{r2}=M_t'$；$V_i'$ 則為其**相對應循環子狀態列**，滿足 $T_1\left(V_i'\right)=O^{(2)}$。

定義 4.2：已知三維陣列狀態列 $P=V_{m\times n\times l}\left[M_1M_2\cdots M_l\right]$，定義**三維陣列複合基本 2 循環集** 型如：

$$\left\{\begin{array}{l} V_{m\times n\times l}\overbrace{\left[X_1\quad O^{(1)}\quad X_2\quad O^{(1)}\quad\cdots\quad O^{(1)}\quad X_{m'}\quad O^{(1)}\quad X_{m'+1}\right]}^{\text{由}m'\text{個}O^{(1)}\text{ 連接}X_i} \\ ,V_{m\times n\times l}\overbrace{\left[Y_1\quad O^{(1)}\quad Y_2\quad O^{(1)}\quad\cdots\quad O^{(1)}\quad Y_{m'}\quad O^{(1)}\quad Y_{m'+1}\right]}^{\text{由}m'\text{個}O^{(1)}\text{ 連接}Y_i}\end{array}\right\}$$



4×4×7 複合基本 2 循環集

當 n 為偶數時，$m'=2t'\quad (t'\le\frac{n-2}{6},t'\in N\cup\{0\})$，(若 $t'=0$，則型如 $\left\{V_{m\times n\times l}\left[X_1\right],V_{m\times n\times l}\left[Y_1\right]\right\}$)

當 n 為奇數時，$m'=2t'+1\,(t'\le\frac{n-5}{6},t'\in N\cup\{0\})$，其中 $\left\{V_{m\times n\times t}\left[X_i\right],V_{m\times n\times t}\left[Y_i\right]\right\}$ 為一組**三維陣列基本型 2 循環集**且每個連接 X_i、Y_i 的 $O^{(1)}$ 左右需同時銜接相同的矩陣子狀態列。

性質 4.3：已知 P 為 $m\times n\times l$ ($m\le n\le l$)的三維陣列狀態列，$(m,n,l)\ne(1,1,1),(1,1,3)$，在 T_1 作用下，其最短循環集長度為 2。

研究五：T_k，$k=2,3,4$

性質 5.1：已知 P 為 n 個元素的直線狀態列，在 T_2 作用下，不存在任何循環狀態列。

性質 5.2：已知 P 為 n 個元素的環狀狀態列，在 T_2 作用下，當 n 為偶數，其最短循環集長度為 2；當 n 為奇數，不存在任何循環狀態列。

性質 5.3：已知 P 為 $m\times n$ 的矩陣狀態列，當 $m\ge 2,n\ge 2$，在 T_2 作用下，其最短循環集長度為 2。

性質 5.4：已知 P 為 $m\times n\times l(m\le n\le l)$ 三維陣列狀態列，當 $2\le n\le l$，在 T_2 作用下，其最短循環集長度為 2。

性質 5.5：已知 P 為 $m\times n$ 的矩陣狀態列，在 T_3 或 T_4 作用下，不存在任何循環狀態列。

性質 5.6：已知 P 為 $m\times n\times l(m\le n\le l)$ 三維陣列狀態列，當 $m\ge 2$，在 T_3 作用下，其最短循環集長度為 2。

伍、研究結果

一、最短循環集長度：

	n 個元素的直線狀態列	n 個元素的環狀狀態列	$m\times n$ ($m\le n$)的矩陣狀態列	$m\times n\times l$ ($m\le n\le l$) 三維陣列狀態列
T_1	當 $n\ne 1,3$ 時，最短循環集長度為 2。 當 $n=1,3$ 時，不存在任何循環狀態列。	當 $n\ne 1,2,3,7$ 時，最短循環集長度為 2。 當 $n=1,2,3,7$ 時，不存在任何循環狀態列。	$(m,n)\ne(1,1),(1,3)$，最短循環集長度為 2。	$(m,n,l)\ne(1,1,1),(1,1,3)$ 最短循環集長度為 2。
T_2	不存在任何循環狀態列。	當 n 為偶數時，最短循環集長度為 2； 當 n 為奇數時，不存在任何循環狀態列。	當 $m\ge 2,n\ge 2$，最短循環集長度為 2。	當 $2\le n\le l$，最短循環集長度為 2。
T_3			不存在任何循環狀態列。	當 $m\ge 2$，最短循環集長度為 2。
T_4			不存在任何循環狀態列。	不存在任何循環狀態列。
T_5、T_6				不存在任何循環狀態列。

二、最短循環集型式：由若干個全 0 子狀態列串接「基本型 2 循環集」，形成「複合基本 2 循環集」。

陸、討論與應用

這篇作品我們花了很多時間去尋找各式循環集的規律，並使用數學歸納法來驗證我們的結論。除了找出最短循環集長度外，我們也嘗試尋找不同 n 值的最長循環集。在研究的過程中，我們有幾項重大的發現。我們發現若直線狀態列 $P=(a_1,a_2,\cdots\cdots,a_n)$ 存在 l 循環集，則 l 必為偶數。且發現大部分的最長的循環集均是以 $(1,0,0,\cdots,0)$ 為初始狀態列所產生之循環集，且其循環長度 l 皆有漂亮規律。我們也針對以 $(1,0,0,\cdots,0)$ 為初始狀態列去觀察其循環情形，發現大部分 n 值的最長循環集長度 l，皆是 2^k-2^h 的形式。其中幾個性質值得留意：

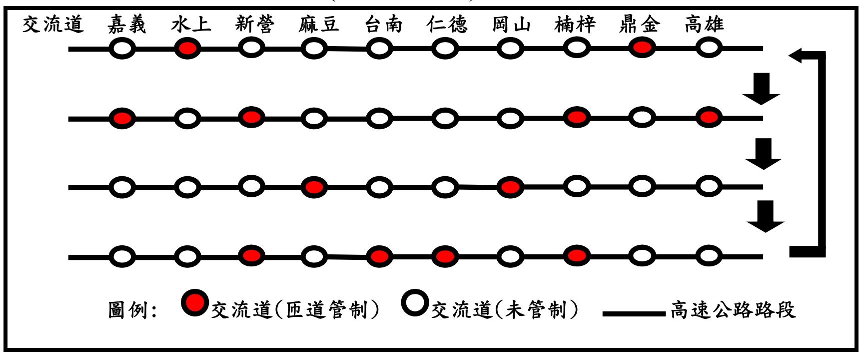
性質一：當 $n=2^k-2$ 或 $n=2^k(k\ge 3)$ 時，$l=2^{k+1}-2$。

性質二：當 $n=3\cdot 2^k-1(k\in N)$ 時，$l=2^{k+1}$。

性質三：當 $n=2^k-3(k\ge 4)$ 時，$l=2^{k+1}-4$。

性質四：當 $n=2^k-1(k\in N)$ 時，不存在循環。

然而，仍有部分 n 值的最長循環尚未歸納出通式，我們希望未來可以完成。我們認為，閃爍燈的循環性質，可以應用在日常生活中各種流量之自動調節系統設計，比如水流量或車流量等。



柒、參考資料

1. 林常(編譯)(2011)。**環球城市數學奧林匹克試題解**。杭州：浙江大學出版社。
2. 許志農(主編) (2016)。**普通高級中學數學 2**。台北：龍騰文化。
3. 游森棚(主編)(2016)。**普通高級中學數學 4**。台南：翰林出版。
4. 馮志剛(2005)。**數學歸納法的証題方法與技巧**。上海：華東師範大學出版社。
5. 華羅庚(2001)。**數學歸納法**。新竹：凡異出版社。
6. 交通部台灣區國道高速公路局 (民 103 年 12 月 30 日)。行車指南。取自 http://www.freeway.gov.tw/