中華民國第57屆中小學科學展覽會

作品說明書

高級中等學校組　數學科

050408

n 邊形作內接相似於某 m 邊形的作法

學校名稱：國立臺南第一高級中學

作者：	指導老師：
高二 洪苡皓	彭威銘
高二 曾柏皓	
高二 王皓平	

關鍵詞：旋伸中心、同組子 m 邊形、

Si {同 m 邊形 $E_1E_2\cdots E_m(L_1\times L_2\times\cdots\times L_m)$}

摘要

對於三角形內接三角形的問題，本文給出在任意三角形中內接相似於某標的三角形之子三角形作法，並發現這無限多個子三角形都繞同一個中心旋轉及伸縮，所以接下來證明旋伸中心的存在及找到它的方法，並研究出與它有關的諸多性質。然後為將問題延伸到一般的情況，依序研究 n 邊形內接相似於某標的三角形、n 邊形內接相似於某標的 m 邊形的作法與解法數討論。最後發展到在 m 條直線上取點作相似於與某標的 m 邊形的子 m 邊形作法。

壹、 研究動機

三角形內接三角形一直是個十分有趣的問題。有一次，我們在書中看到一道相關的問題，在探討三角形內接三角形的一些性質。為解決問題，我們開始研究內接三角形的作法。參考一些資料後發現研究內容多被限制在三角形內接三角形的框架中，我們試著將問題推廣至多邊形內接三角形，甚至是多邊形內接多邊形，並深入研究到在多條直線上取點作相似多邊形。

貳、 研究目的

一、在三直線上取點作與標的三角形相似之子三角形作法研究與同組子三角形旋伸中心探討
二、內接於三角形且與標的三角形相似之子三角形作法研究
三、內接於 m 邊形且與標的 m 邊形相似之子 m 邊形作法研究與解法數討論
四、內接於 n 邊形且與標的 m 邊形相似之子 m 邊形作法研究
五、在 m 條直線上取點作與標的 m 邊形相似之子 m 邊形作法研究與解法數討論
六、內接於三角形且與標的三角形相似之同組子三角形旋伸中心相關性質研究與幾何量計算

參、 研究設備及器材

電腦，紙，筆，Geogebra。

肆、研究過程

一、定義名詞

(一)先任意給定一個 m 邊形作為接下來所要作的相似形對象，稱為「**標的 m 邊形**」。

(二)依序(i =1, 2, ⋯, m)設定範圍 L_i (可為直線或直線上的部分圖形)後，在每一 L_i 上取出點 E_i'，作出與標的 m 邊形 $E_1E_2\cdots E_m$ 相似的 m 邊形 $E_1'E_2'\cdots E_m'$(其中 E_i'為 E_i 之對應點)，稱為「**子 m 邊形**」。收集所有子 m 邊形而成之集合表示成「**{m 邊形 $E_1E_2\cdots E_m$ ($L_1\times L_2\times\cdots\times L_m$)}**」。

(三)兩個相似多邊形對應頂點繞行時針方向，若相同則稱「**同相似**」；若相反則稱「**反相似**」。

(四){m 邊形 $E_1E_2\cdots E_m$ ($L_1\times L_2\times\cdots\times L_m$)}中的子 m 邊形 $E_1'E_2'\cdots E_m'$與 m 邊形 $E_1E_2\cdots E_m$ 同相似者稱為「**同子 m 邊形**」；反相似者稱為「**反子 m 邊形**」。而收集所有同子 m 邊形之集合表成「**{同 m 邊形 $E_1E_2\cdots E_m$ ($L_1\times L_2\times\cdots\times L_m$)}**」；收集所有反子 m 邊形之集合表成「**{反 m 邊形 $E_1E_2\cdots E_m$ ($L_1\times L_2\times\cdots\times L_m$)}**」。

(五)元素屬於同一個{同 m 邊形 $E_1E_2\cdots E_m$($L_1\times L_2\times\cdots\times L_m$)}或屬於同一個{反 m 邊形 $E_1E_2\cdots E_m$ ($L_1\times L_2\times\cdots\times L_m$)}者，稱為「**同組子 m 邊形**」。

(六)同一個{同 m 邊形 $E_1E_2\cdots E_m(L_1\times L_2\times\cdots\times L_m)$}或同一個

{反 m 邊形 $E_1E_2\cdots E_m(L_1\times L_2\times\cdots\times L_m)$}中的所有同組子 m 邊形有時會繞同一點旋轉及伸縮、有時只有伸縮，稱此點為該集合的「**旋伸中心**」，底下習慣以 R 表之。

(七)同一個{同 m 邊形 $E_1E_2\cdots E_m(L_1\times L_2\times\cdots\times L_m)$}或同一個

{反 m 邊形 $E_1E_2\cdots E_m(L_1\times L_2\times\cdots\times L_m)$}中的所有同組子 m 邊形 $E_1'E_2'\cdots E_m'$，其頂點 E_i' 在 L_i 上的變動範圍以「**S_i{同 m 邊形 $E_1E_2\cdots E_m(L_1\times L_2\times\cdots\times L_m)$}**」或

「**S_i{反 m 邊形 $E_1E_2\cdots E_m(L_1\times L_2\times\cdots\times L_m)$}**」表之。

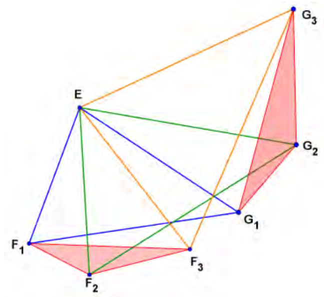
二、三直線取點作子三角形的方法

(一) <引理一>

若$\Delta EF_1G_1\sim\Delta EF_2G_2\sim\Delta EF_3G_3$(同相似)(如圖 1)，則：

(1)$\Delta F_1F_2F_3\sim\Delta G_1G_2G_3$

(2)當 F_1、F_2、F_3 共線時，G_1、G_2、G_3 亦共線



(圖一)

[證明](1)在ΔEF_1F_2與ΔEG_1G_2中

因$\angle F_1EF_2=\angle F_1EG_1-\angle F_2EG_1=\angle F_2EG_2-\angle F_2EG_1=\angle G_1EG_2$

又$\overline{EF_1}:\overline{EF_2}=\overline{EG_1}:\overline{EG_2}$

所以$\Delta EF_1F_2\sim\Delta EG_1G_2$ (SAS 相似)

得$\angle EF_2F_1=\angle EG_2G_1$

同理得$\angle EF_2F_3=\angle EG_2G_3$

上兩式相加得$\angle F_1F_2F_3=\angle G_1G_2G_3$

同理亦得$\angle F_1F_3F_2=\angle G_1G_3G_2$

故$\Delta F_1F_2F_3\sim\Delta G_1G_2G_3$ (AA 相似)

(2)由(1)明顯可得

(二) <引理二>

依序在任意三相異直線上取點作子三角形方法

(如圖 2)

[已知]標的ΔEFG，任意三直線 L_1、L_2、L_3

[求作] $\Delta E'F'G'\in\{\Delta EFG(L_1\times L_2\times L_3)\}$

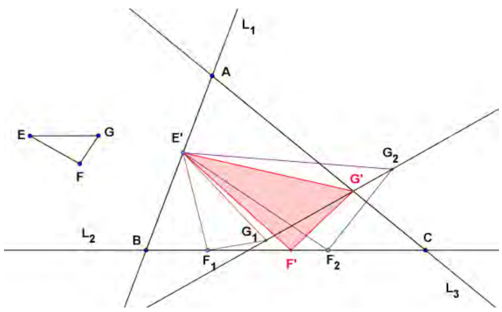
[作法] 1.在 L_1 上取一點 E'

2.在 L_2 上任取兩點 F_1、F_2，分別作$\Delta E'F_1G_1$、$\Delta E'F_2G_2$ 同相似於ΔEFG

3.設直線 G_1G_2 交 L_3 於G'

4.作$\Delta E'G'F'$同相似於ΔEGF，則$\Delta E'F'G'$即為所求

註：若無法作出，則換成在 L_2 上重複相對應步驟就能作出，理由等旋伸中心討論後便知。



(圖 2)

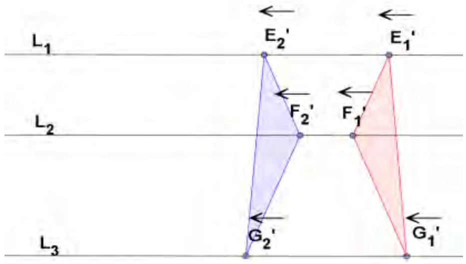
[證明]因$\Delta E'F_1G_1\sim\Delta E'F'G'\sim\Delta E'F_2G_2$(同相似)且 G_1、G'、G_2 共線

由<引理一>知 F_1、F'、F_2 共線，所以$F'\in L_2$

三、三直線取點作出的同組子三角形之旋伸中心探討

依三相異直線 L_1、L_2、L_3 相交情形與{$\Delta EFG(L_1 \times L_2 \times L_3)$}中同子$\Delta E_1'F_1'G_1'$組與反子$\Delta E_2'F_2'G_2'$組落在哪區，分四類型討論旋伸中心 R：

<型 a>三線平行：同組子三角形沒有旋轉，沒有伸縮，只有平移，(如圖 3-1)。



(圖 3-1)

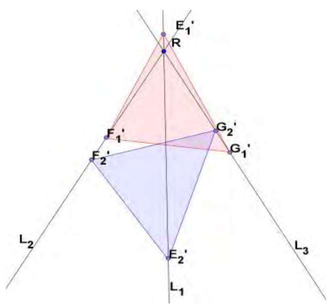
<型 b>三線共點：同組子三角形僅有伸縮，R 在三直線交點。

設 θ_i 表示以 R 為旋轉中心，將 L_i 分別往順、逆時針兩個方向旋轉到下一條直線之旋轉角度和：

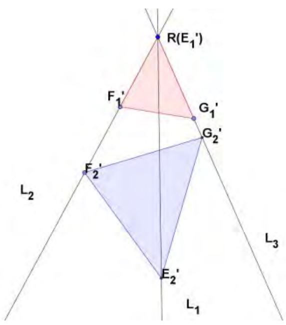
(1)若 $E< \theta_1$ 且 $F < \theta_2$ 且 $G < \theta_3$，則 R 恰落在同子組或反子組之一的所有三角形內。如圖 R 落在$\Delta E_1'F_1'G_1'$同組子三角形內(如圖 3-2)。

(2) 若 $E = \theta_1$ 或 $F = \theta_2$ 或 $G = \theta_3$，則 R 就是同子組或反子組之一的所有子三角形同一對應頂點。如圖 $E = \theta_1$，所以 $R=E_1$(如圖 3-3)。

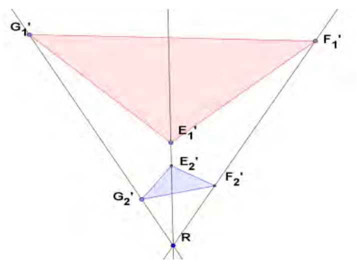
(3)若 $E > \theta_1$ 或 $F > \theta_2$ 或 $G > \theta_3$，則 R 落在同子組與反子組所有三角形外(如圖 3-4)。



(圖 3-2)



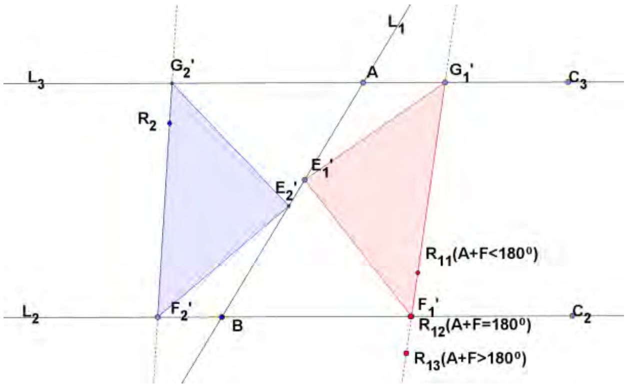
(圖 3-3)

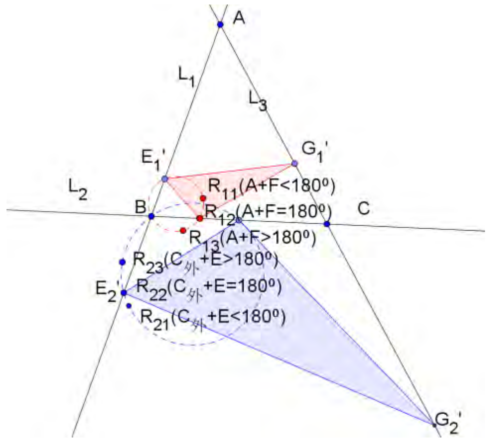


(圖 3-4)

<型 c>兩線平行：同組子三角形會旋轉及伸縮，R 在子三角形兩平行線上之頂點的連線上。只討論子$\Delta E_1'F_1'G_1'$組中 R 的局部相對位置即可，設$\angle C_3AB = A$，$\angle C_2BA = B$(如圖 3-5)

<型 d>圍三角形：同組子三角形會旋轉及伸縮，區分成在旋伸過程中會出現內接於三直線所圍成三角形ΔABC，如圖子$\Delta E_1'F_1'G_1'$組，以<型 d 內>稱之；與側接於三直線所圍成三角形，如圖子$\Delta E_2'F_2'G_2'$組，以<型 d 側>稱之。圖中並以落在$\angle B$ 的內、外角區作分別，並討論 R 的局部相對位置。設$\angle A$ 的內角= A，$\angle C$ 的外角= $C_{外}$(如圖 3-6)



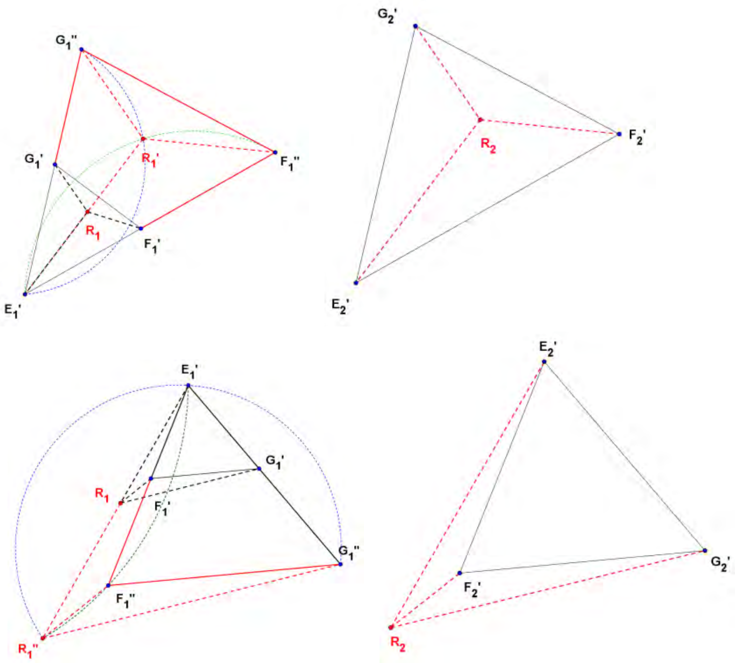


(圖 3-5)　　　　　　　　　　　　　　　　(圖 3-6)

(一)為方便證明<型 b、c、d>的 R 具伸縮中心功能，先引入一引理。

<引理三>

若$\Delta E_1'F_1'G_1' \sim \Delta E_2'F_2'G_2'$(同相似)，無論點 R_1、R_2 在哪，只要滿足$\angle E_1'R_1'F_1'=\angle E_2'R_2'F_2'$，$\angle F_1'R_1G_1'=\angle F_2'R_2G_2'$，$\angle G_1'R_1E_1'=\angle G_2'R_2E_2'$，則$\angle R_1E_1'F_1'= R_2E_2'F_2'$



[證明]R_i 在$\Delta E_i'F_i'G_i'$某邊所在直線上(含頂點)的情況明顯可證，所以只呈現在

$\Delta E_i'F_i'G_i'$內部及外部兩種圖示，但其證法皆同，如下：

以 E_1'為伸縮中心作$\overline{E_2'F_2'}/\overline{E_1'F_1'}$倍的伸縮變換，將 F_1'變換到 F_1''，G_1'變換到 G_1''，R_1 變換到 R_1'

則$\Delta E_1'F_1''G_1'' \cong \Delta E_2'F_2'G_2'$

且$\angle E_1'R_1'F_1''=\angle E_1'R_1F_1'=\angle E_2'R_2F_2'$，$\angle E_1'R_1'G_1''=\angle E_1'R_1G_1'=\angle E_2'R_2G_2'$

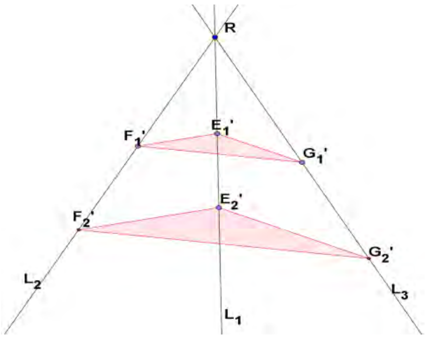
將$\Delta E_2'F_2'G_2'$疊到$\Delta E_1'F_1''G_1''$上時

因 R_2 必在Δ $E_1'R_1'F_1''$與 $E_1'R_1'G_1''$的外接圓上

所以 R_2 會正好疊在 R_1'的位置上

得$\angle R_2E_2'F_2'=\angle R_1'E_1'F_1''=\angle R_1E_1'F_1'$

(二)<型 b>中 R 具伸縮中心功能



[證明]設$\Delta E_1'F_1'G_1'$, $\Delta E_2'F_2'G_2' \in \{$同$\Delta EFG(L_1 \times L_2 \times L_3)\}$

則$\angle E_1'RF_1' = \angle E_2'RF_2'$，$\angle F_1'RG_1' = \angle F_2'RG_2'$，$\angle G_1'RE_1' = \angle G_2'RE_2'$

由<引理三>得$\angle RE_1'F_1' = \angle R_2E_2'F_2'$

即$\Delta RE_1'F_1' \sim \Delta RE_2'F_2'$(AA 相似)

所以$\overline{RE_1'}$：$\overline{RE_2'}$=$\overline{RF_1'}$：$\overline{RF_2'}$

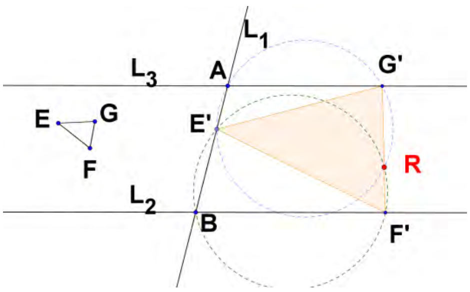
同理得$\overline{RE_1'}$：$\overline{RE_2'}$=$\overline{RG_1'}$：$\overline{RG_2'}$

因此$\Delta E_1'F_1'G_1'$是以 R 為伸縮中心變換到$\Delta E_2'F_2'G_2'$

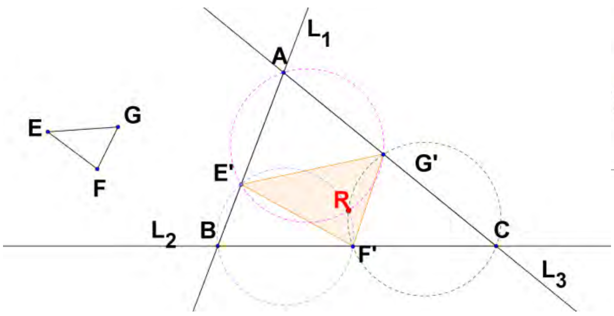
(三)<型 c、d>中 R 的存在性證明與具旋轉、伸縮中心功能確認

1.R 的找法

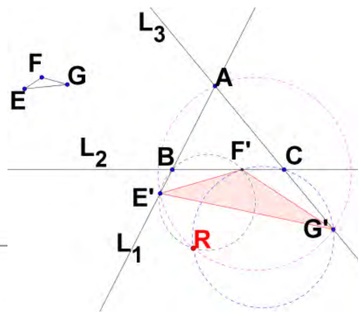
<型 c>



<型 d 內>



<型 d 側>



[作法] (1)先作一同子$\Delta E'F'G'$

(2)分別作$\Delta AE'G'$、$\Delta BE'F'$、$\Delta CF'G'$的外接圓(<型 c>沒有$\Delta CF'G'$的外接圓)，則三圓會交於一點 R 即為所求

2.R 存在性證明

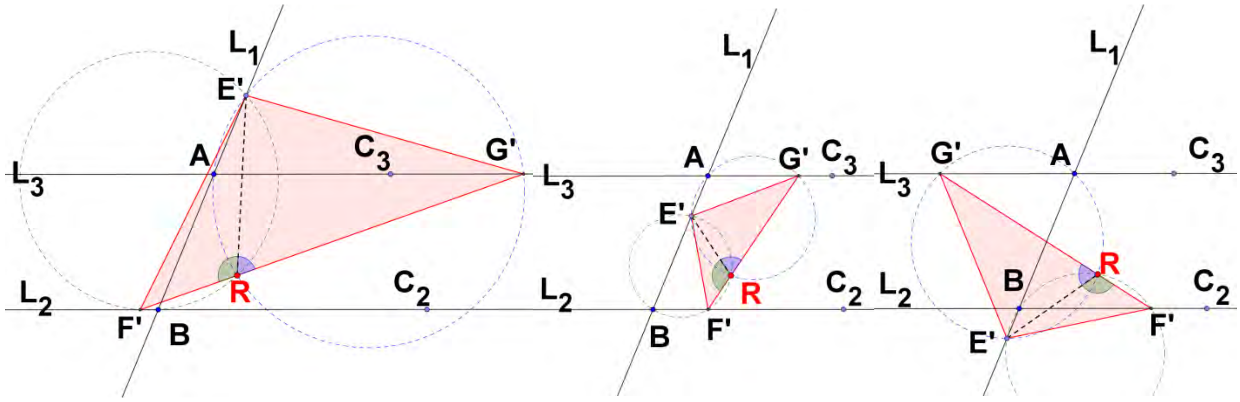
[證明](1)證明<型 c>兩外接圓交點在子三角形邊$\overline{F'G'}$所在直線上

設$\Delta AE'G'$與$\Delta BE'F'$兩外接圓異於 E′的交點為 R，觀察當頂點E′在 L_1 上由

遠端移近，依序經 A、B 再遠離的過程中，子$\Delta E'F'G'$的$\angle E'RG'$、$\angle E'RF'$ 值之變化，進而得證 R 亦在直線 $F'G'$上。

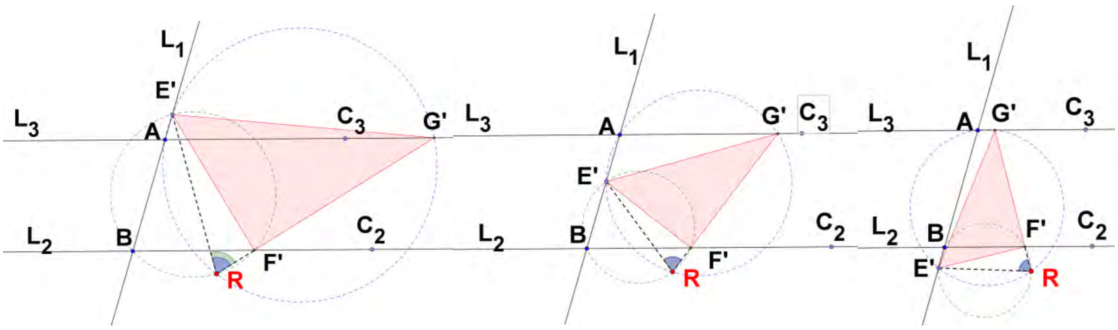
設$\angle C_3AB = A$，$\angle C_2BA = B$

①當 $F < 180^0 - A$ 且 $G < 180^0 - B$ 時：



R 在兩平行線內側，子$\Delta E'F'G'$變動過程中保持$\angle E'RG' = 180^0 - A$，$\angle E'RF' = 180^0 - B$，所以$\angle F'RG' = \angle E'RG' + \angle E'RF' = 180^0$。

②當 $F > 180^0 - A$ 且 $G < 180^0 - B$ 時：



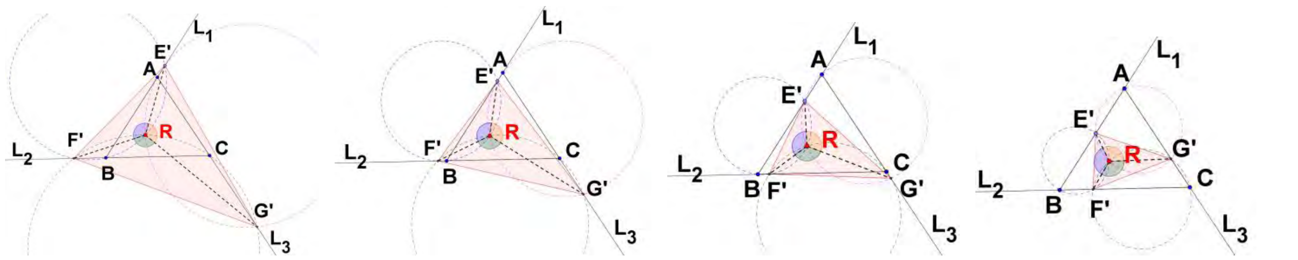
R 在兩平行線外側(過點 B 線 L_3 外側)，子$\Delta E'F'G'$變動過程中保持$\angle E'RG' = 180^0 - A$，$\angle E'RF' = B$，所以$\angle E'RG' = \angle E'RF'$ 。

(2)證明<型 d>三外接圓會交於一點：

設$\Delta AE'G'$與$\Delta BE'F'$兩外接圓異於 E'的交點為 R，觀察當頂點E'在 L_1 上由遠端移近，依序經 A、B 再遠離的過程中，子$\Delta E'F'G'$的$\angle E'RG'$、$\angle E'RF'$ 、$\angle F'RG'$值之變化，進而得證 R 亦在$\Delta CG'F'$外接圓上

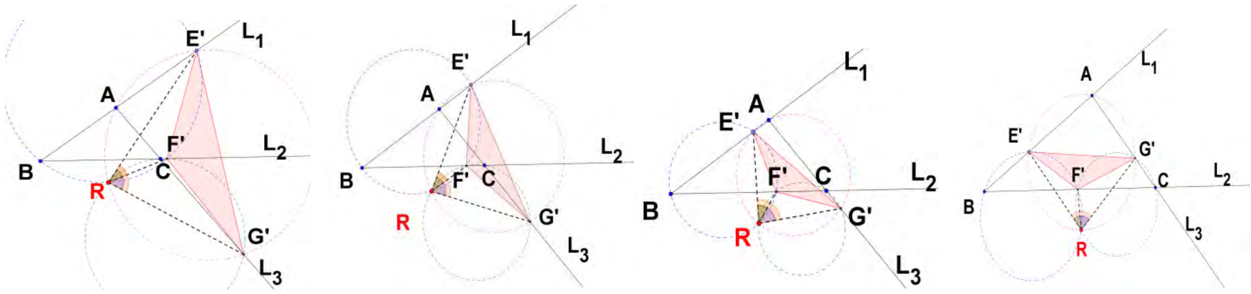
<型 d 內>

①當 $F < A_{外}$且 $G < B_{外}$且 $E < C_{外}$ 時：



R 在ΔABC 內，子$\Delta E'F'G'$變動過程中保持$\angle E'RG' = A_{外}$，$\angle E'RF' = B_{外}$，所以$\angle F'RG' = 360^0 - (\angle E'RG' + \angle E'RF') = C_{外}$。

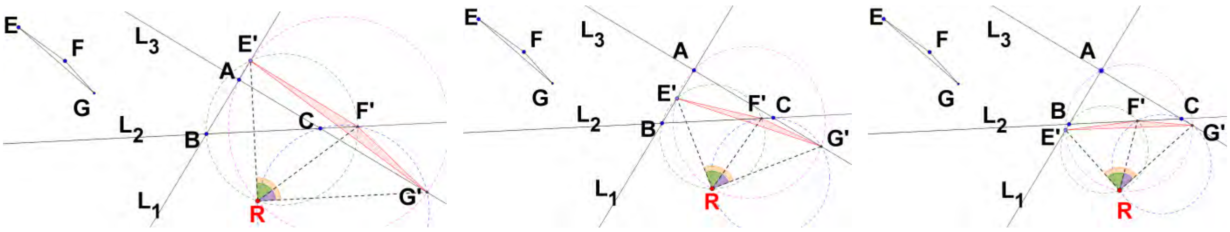
②當 $F > A_{外}$ 且 $G < B_{外}$ 且 $E < C_{外}$ 時：



R 在∠A 內與ΔABC 外，子ΔE'F'G'變動過程中保持∠E'RG' = $A_{外}$，∠E'RF' = B，所以∠F'RG' = ∠E′RG′ −∠E′RF′= C。

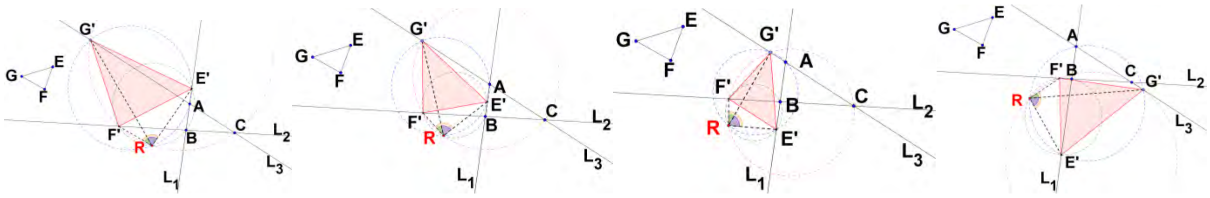
<型 d 側>

①當 F < A 且 G < B 且 E > C 時：



R 在∠C 內與ΔABC 外，子ΔE'F'G'變動過程中保持∠E'RG' = A，∠E'RF' = B，所以∠F'RG' = ∠E′RG′ +∠E′RF′= $C_{外}$。

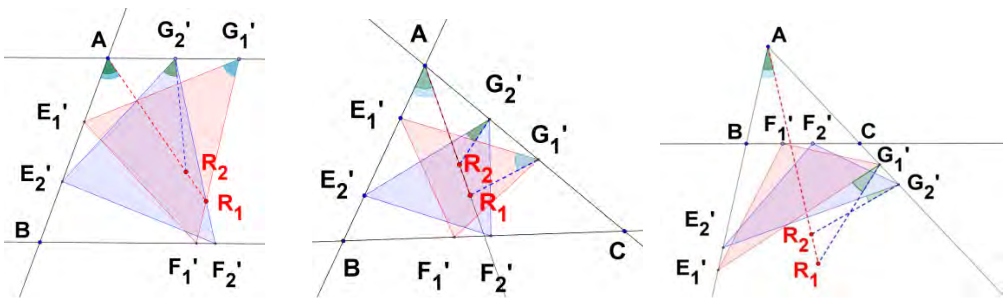
②當 F > A 且 G < B 且 E > C 時：



R 在∠B 的對頂角內，子ΔE'F'G'變動過程中保持∠E'RG' = A，∠E'RF' = $B_{外}$，所以∠F'RG' =∠E′RF′−∠E′RG′= C。

(3)證明同組子三角形作出的點 R 皆位在同一位置：

<型 c > <型 d 內> <型 d 側>



設$ΔE_1'F_1'G_1'$、$ΔE_2'F_2'G_2'$為同組兩個子三角形且各自仿 1.的作法作出 R_1、R_2

則$∠E_1'R_1F_1'=∠E_2'R_2F_2'$，$∠F_1'R_1G_1'=∠F_2'R_2G_2'$，$∠G_1'R_1E_1'=∠G_2'R_2E_2'$

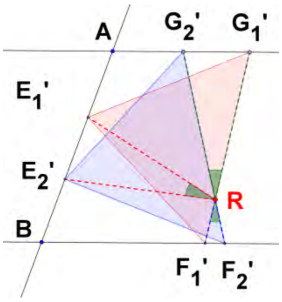
由<引理三>知$∠R_1G_1'E_1'=∠R_2G_2'E_2'$

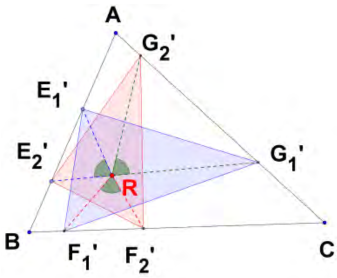
又 A、E_1'、R_1、G_1'共圓且 A、E_2'、R_2、G_2'共圓

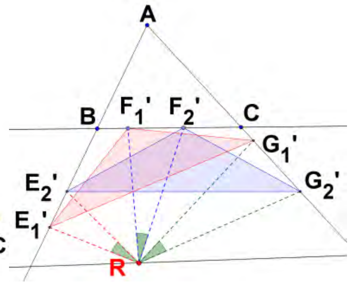
所以$\angle R_1AB=\angle R_1G_1'E_1'$，$\angle R_2AB=\angle R_2G_2'E_2'$
得$\angle R_1AB=\angle R_2AB$
即 R_2 在直線 AR_1 上
同理 R_2 亦在直線 BR_1 上
故 $R_1= R_2$

(4)證明同組子三角形皆對點 R 旋轉及伸縮：

<型 c > <型 d 內> <型 d 側>





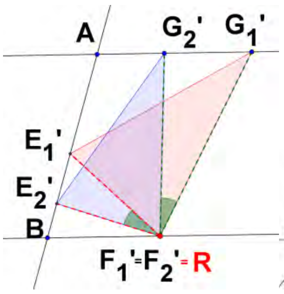


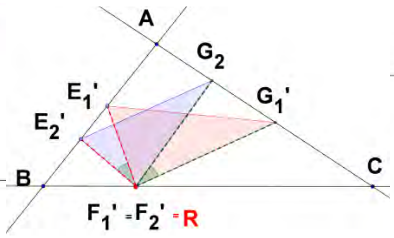
設$\Delta E_1'F_1'G_1'$、$\Delta E_2'F_2'G_2'$為同組兩個子三角形且仿 1.的方法作出 R
則$\angle E_1'RF_1'=\angle E_2'RF_2'$，$\angle F_1'RG_1'=\angle F_2'RG_2'$，$\angle G_1'RE_1'=\angle G_2'RE_2'$
在$\Delta RE_1'E_2'$ 與$\Delta RG_1'G_2'$中
因$\angle E_1'RE_2'=\angle E_2'RG_2'-\angle E_1'RG_1'=\angle E_1'RG_2'-\angle E_1'RG_2'=\angle G_1'RG_2'$
又由 A、E_1'、R、G_1'共圓得$\angle RE_1'E_2' =\angle RG_1'G_2'$
所以$\Delta RE_1E_2 \sim \Delta RG_1G_2$(AA 相似)
即$\overline{RE_1'}：\overline{RE_2'}=\overline{RG_1'}：\overline{RG_2'}$
同理得$\angle E_1'RE_2'=\angle F_1'RF_2'$與$\overline{RE_1'}：\overline{RE_2'}=\overline{RF_1'}：\overline{RF_2'}$
因$\angle E_1'RE_2'=\angle F_1'RF_2'=\angle G_1'RG_2'$
且$\overline{RE_1'}：\overline{RE_2'}=\overline{RF_1'}：\overline{RF_2'}=\overline{RG_1'}：\overline{RG_2'}$
得證$\Delta E_1'F_1'G_1'$是以 R 為旋轉及伸縮中心變換到$\Delta E_2'F_2'G_2'$

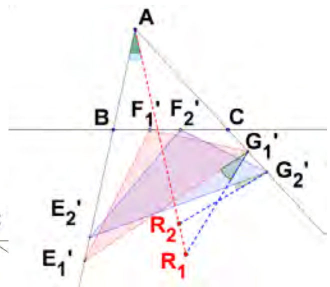
(5)仿第(3)(4)部分的證明可知 ，當

<型 c> <型 d 內> <型 d 側>：

當 $F= 180^0-A$ 時 當 $F = A_{外}$時 當 $E = C$ 時





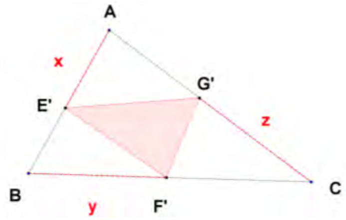


同組子$\Delta E'F'G'$在變動過程中，頂點 E'位置始終保持不變，且正好是旋伸中心 R 所在位置。

四、三角形三邊取點作內接子三角形的作法

欲在ΔABC中作$\Delta E'F'G'\in\{\Delta EFG(\overline{AB}\times\overline{BC}\times\overline{CA})\}$，由**引理<二>作法**可依序在$\overleftrightarrow{AB}$、$\overleftrightarrow{BC}$、$\overleftrightarrow{CA}$上取點作出$\Delta EFG$的同相似及反相似三角形，由<型 d>的觀察知必有一種經旋伸變換後會內接於ΔABC。問題是要如何確保作出的子$\Delta E'F'G'$三頂點皆能成功落在邊上而非邊外呢?所以要討論子$\Delta E'F'G'$成功內接時(<型 d 內>)，三頂點落下的範圍，然後在使用**引理<二>作法**的第 1 步驟時就直接將點取入範圍內，即可成功作出內接子三角形。但因最後要探討到作內接 *m* 邊形，所以<型 d 側>與<型 c>也一併討論。討論方式皆是觀察點 E′由遠處漸漸接近ΔABC，依序經點 A、B 後遠離，子$\Delta E'F'G'$變動過程中旋入我們預設範圍時，算出 E′、F′、G′確切落在哪。下以 *r* 表ΔABC外接圓半徑；A、B、C 表三內角；*a*、*b*、*c* 表三對邊；A 外、B 外、C 外表三外角。E、F、G 表標的ΔEFG三內角；*e*、*f*、*g* 表當下子$\Delta E'F'G'$三對邊。

(一)<型 d 內>：預設$E'\in\overline{AB}$、$F'\in\overline{BC}$、$G'\in\overline{CA}$；變動過程分別算出$x=\overline{E'A}, y=\overline{F'B}, z=\overline{G'C}$的變動區間（如圖 4-1）。



(圖 4-1)

1.R 在ΔABC內 (E<C 外且 F<A 外且 G<B 外)：$x\in[x_1, x_2]$、$y\in[y_1, y_2]$、$z\in[z_1, z_2]$

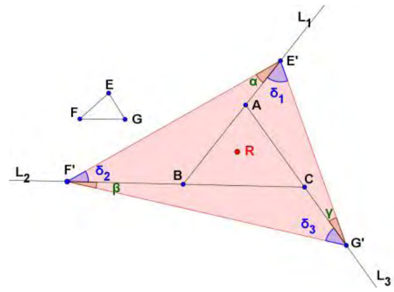
(1)旋入

設 E′、F′、G′旋入角度分別為 α、β、γ。

利用輔助角 δ_1、δ_2、δ_3列式：(如圖 4-2)

$$\begin{cases}\delta_1=A-\alpha=E-\beta\\ \delta_2=B-\beta=F-\gamma\\ \delta_3=C-\gamma=G-\alpha\end{cases}$$

$\Rightarrow E'$先$F'\leftrightarrow\alpha-\beta=A-E<0\leftrightarrow E>A$



(圖 4-2)

同理F'先$G'\leftrightarrow F>B$；G'先$E'\leftrightarrow G>C$

E′、F′、G′旋入的次序分六種：

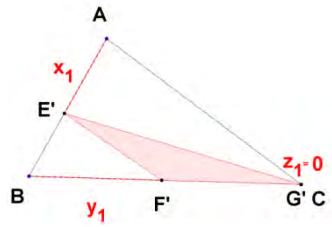
①$E'\to F'\to G'(E>A$ 且 $F>B$ 且 $G<C)$(如圖 4-3)

因點 G′位於點 C 上，所以 $z_1=0$

由正弦定理：

$$\frac{x_1}{b}=\frac{\sin(C-G)}{\sin(B+G)}\ \rightarrow\ x_1=\frac{\sin B\sin(C-G)}{\sin(B+G)}2r$$

$$\frac{y_1}{g}\times\frac{g}{f}\times\frac{f}{b}=\frac{\sin(F-B)}{\sin B}\times\frac{\sin G}{\sin F}\times\frac{\sin A}{\sin(B+G)}\ \rightarrow\ y_1=\frac{\sin A\sin G\sin(F-B)}{\sin F\sin(B+G)}2r$$



(圖 4-3)

② $E'\to G'\to F'(E>A$ 且 $F<B$ 且 $G<C)$

$$x_1=\frac{\sin C\sin F\sin(E-A)}{\sin E\sin(A+F)}2r,\ y_1=0,\ z_1=\frac{\sin A\sin(B-F)}{\sin(A+F)}2r$$

③F′→E′→G′ (E < A 且 F > B 且 G < C)

$x_1=\frac{\sin B\sin(C-G)}{\sin(B+G)}2r$, $y_1=\frac{\sin A\sin F\sin(F-B)}{\sin E\sin(B+G)}2r$,$z_1=0$

④ F′→G′→E′(E < A 且 F > B 且 G > C)

$x_1=0$, $y_1=\frac{\sin C\sin(A-E)}{\sin(C+E)}2r$,$z_1=\frac{\sin B\sin E\sin(G-C)}{\sin G\sin(C+E)}2r$

⑤ G′→E′→F′(E > A 且 F < B 且 G > C)

$x_1=\frac{\sin C\sin F\sin(E-A)}{\sin E\sin(A+F)}2r$, $y_1=0$,$z_1=\frac{\sin A\sin(B-F)}{\sin(A+F)}2r$

⑥ G′ → F′→E′ (E <A 且 F < B 且 G > C)

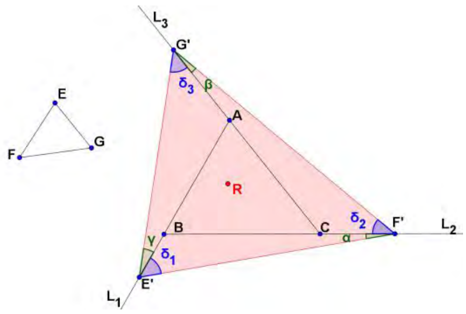
$x_1=0$, $y_1=\frac{\sin C\sin(A-E)}{\sin(C+E)}2r$,$z_1=\frac{\sin B\sin E\sin(G-C)}{\sin G\sin(C+E)}2r$

(2)旋出

設 E′、F′、G′已旋出角度分別為 α、β、γ。

利用輔助角 δ_1、δ_2、δ_3 列式：(如圖 4-4)

$$\begin{cases}\delta_1 = B-\alpha = E-\gamma \\ \delta_2 = C-\beta = F-\alpha \\ \delta_3 = A-\gamma = G-\beta\end{cases}$$

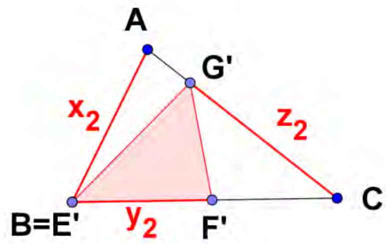


(圖 4-4)

$\Rightarrow$E′先F′$\leftrightarrow \alpha-\beta = F-C > 0 \leftrightarrow F > C$

同理F′先G′↔ G>A；G′先E′↔ E>B

E′、F′、G′旋出的次序分六種：



(圖 4-5)

① E′→F′→G′(E < B 且 F > C 且 G > A，如圖 4-5)

$x_2=2r\sin C$, $y_2=\frac{\sin A\sin C\sin G}{\sin F\sin(C+E)}2r$,$z_2=\frac{\sin A\sin E}{\sin(C+E)}2r$

②E′→G′→F′(E < B 且 F > C 且 G < A)

$x_2=2r\sin C$, $y_2=\frac{\sin A\sin C\sin G}{\sin F\sin(C+E)}2r$,$z_2=\frac{\sin A\sin E}{\sin(C+E)}2r$

③F′→E′→G′(E < B 且 F < C 且 G > A)

$x_2=\frac{\sin B\sin F}{\sin(A+F)}2r$, $y_2=2r\sin B$,$z_2=\frac{\sin A\sin B\sin E}{\sin G\sin(A+F)}2r$

④F′→G′ → E′(E > B 且 F < C 且 G > A)

$x_2=\frac{\sin B\sin F}{\sin(A+F)}2r$, $y_2=2r\sin B$,$z_2=\frac{\sin A\sin B\sin E}{\sin G\sin(A+F)}2r$

⑤G′ →E′→F′(E > B 且 F > C 且 G < A)

$x_2=\frac{\sin B\sin C\sin F}{\sin E\sin(G+B)}2r$, $y_2=\frac{\sin C\sin G}{\sin(B+G)}2r$,$z_2=2r\sin B$

⑥G′→F′→E′(E > B 且 F < C 且 G < A)

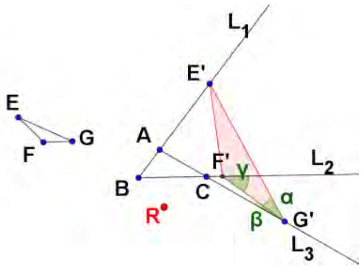
$$x_2=\frac{sinBsinCsinF}{sinEsin(G+B)}2r\ ,\ y_2=\frac{sinCsinG}{sin(B+G)}2r\ ,z_2=2rsinB$$

2.R 在 A 內且ΔABC 外 (E<C 外且 F>A 外且 G<B 外)：$x\in[x_1 , x_2]$、$y\in[y_2 , y_1]$、$z\in[z_1 , z_2]$

(1)旋入

設 E′、F′、G′旋入角度分別為 α、β、γ。

(如圖 4-6)

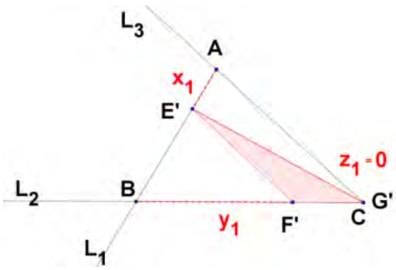


(圖 4-6)

$$\beta=\alpha-G=\gamma-C \Rightarrow \begin{cases} \alpha>\beta 且\ \gamma>\beta \rightarrow F'最先 \\ E'先G' \leftrightarrow \alpha-\gamma=G-C<0 \leftrightarrow G<C \end{cases}$$

E′、F′、G′旋入的次序分二種：

①F′→E′→G′(G < C，如圖 4-7)



(圖 4-7)

$$x_1=\frac{sinBsin(C-G)}{sin(B+G)}2r\ ,\ y_1=\frac{sinAsinFsin(F-B)}{sinEsin(B+G)}2r\ ,\ z_1=0$$

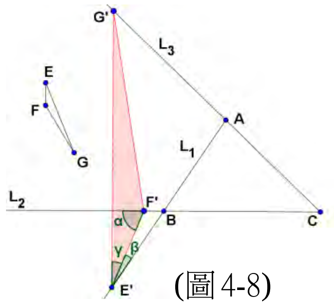
②F′→G′→E′ (G > C)

$$x_1=0\ ,\ y_1=\frac{sinCsin(A-E)}{sin(C+E)}2r\ ,z_1=\frac{sinBsinEsin(G-C)}{sinGsin(C+E)}2r$$

(2)旋出

設 E′、F′、G′已旋出角度分別為 α、β、γ。

(如圖 4-8)

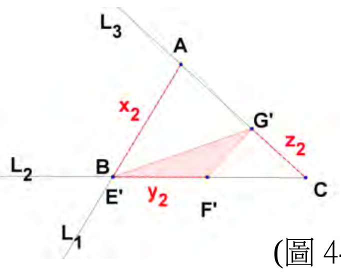


(圖 4-8)

$$\beta=\alpha-B=\gamma-E \Rightarrow \begin{cases} \alpha>\beta 且\ \gamma>\beta \rightarrow F'最後 \\ E'先G' \leftrightarrow \alpha-\gamma=B-E>0 \leftrightarrow E<B \end{cases}$$

E′、F′、G′旋出的次序分二種：

①E′→G′→F′(E < B，如圖 4-9)



(圖 4-9)

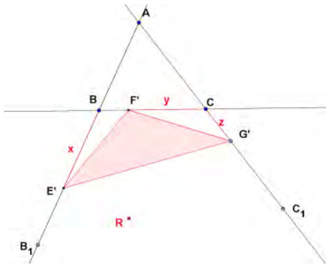
x_2=2rsinC ,

$$y_2=\frac{sinAsinCsinG}{sinFsin(A+E)}2r\ ,z_2=\frac{sinAsinEsin(E+G)}{sinFsin(C+E)}2r$$

②G′→E′→F′(E > B)

$$x_2=2rsinC\ ,\ y_2=\frac{sinAsinCsinG}{sinFsin(A+E)}2r\ ,z_2=\frac{sinAsinEsin(E+G)}{sinFsin(C+E)}2r$$

(二)<型 d 側>：預設 $E'\in\overrightarrow{BB_1}$、$F'\in\overline{BC}$、$G'\in\overrightarrow{CC_1}$；變動過程分別算出 $x=\overline{E'B}$, $y=\overline{F'C}$, $z=\overline{G'C}$ 的變動區間。(如圖 5-1)



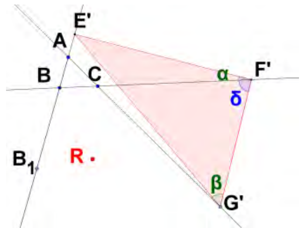
(圖 5-1)

1.R 在∠A 內且ΔABC 外 (E < C 且 F > A 且 G < B)：$x\in[x_1 , x_2]$、$y\in[y_1 , y_2]$、$z\in[z_2 , z_1]$

(1)旋入

G′已在預設範圍內，設 E′、F′旋入角度分別為 α、β。

利用輔助角 δ 列式：(如圖 5-2)



(圖 5-2)

$$\delta = C_{外} - \beta = F - \alpha \Rightarrow E'先F' \leftrightarrow \alpha - \beta = F - C_{外} < 0 \leftrightarrow F < C_{外}$$

E′、F′、G′旋入的次序分二種：

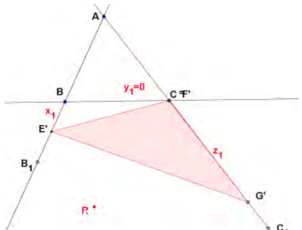
① G′→E′→F′($F<C_{外}$，如圖 5-3)

因點 F′位於點 C 上，所以 $y_1= 0$

由正弦定理：

$$\frac{x_1}{a} = \frac{sin(C_{外}-F)}{sin(F-A)} \rightarrow x_1 = \frac{sinAsin(C+F)}{sin(F-A)}2r$$

$$\frac{z_1}{g} \times \frac{g}{a} = \frac{sinE}{sinG} \times \frac{sin\,B}{sin(F-A)} \rightarrow z_1 = \frac{sinAsinBsinE}{sinGsin(F-A)}2r$$



(圖 5-3)

② G′→F′→E′(F > C 外)

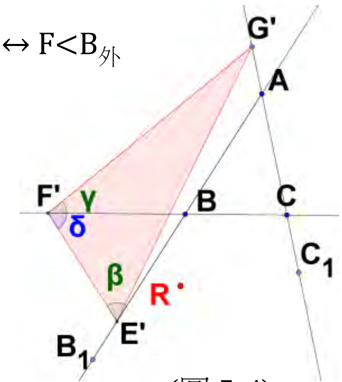
$$x_1 = 0 , y_1 = \frac{sinAsinEsin(F+C)}{sinFsin(C-E)}2r \quad , z_1 = \frac{sinAsinE}{sin(C-E)}2r$$

(2)旋出

E′在預設範圍內，設 F′、G′已旋出角度分別為 β、γ。利用輔助角 δ 列式：(如圖 5-4)

$$\delta = B_{外} - \beta = F \,□\, \gamma \Rightarrow F'先G' \leftrightarrow \beta - \gamma = B_{外} - F > 0 \leftrightarrow F < B_{外}$$

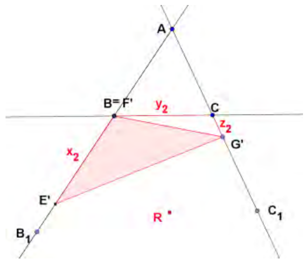
E′、F′、G′旋出的次序分二種：



(圖 5-4)

① $F'\to G'\to E'(F<B_{外}$，如圖 5-5)

$$x_2=\frac{\sin A\sin(B+E)}{\sin(A+F)}2r\ ,\ y_2=2r\sin A\ ,\ z_2=\frac{\sin A\sin C\sin G}{\sin E\sin(A+F)}2r$$



② $G'\to F'\to E'(F>B_{外})$

$$x_2=\frac{\sin A\sin G}{\sin(B-G)}2r\ ,\ y_2=\frac{\sin A\sin B\sin E}{\sin E\sin(B-G)}2r\ ,\ z_2=0$$

(圖 5-5)

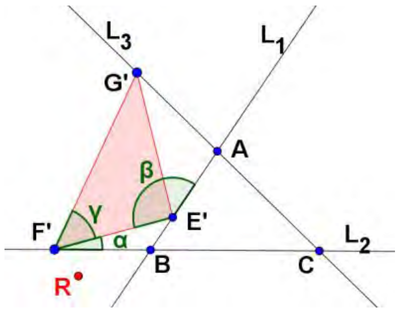
2.R 在∠B 的對頂角內部 (E > C 且 F > A 且 G < B)：$x\in[x_1, x_2]$、$y\in[y_1, y_2]$、$z\in[z_1, z_2]$

(1)旋入

設 E′、F′、G′旋入角度分別為 α、β、γ。(如圖 5-6)

$\alpha=\beta-B_{外}=\gamma-F$

$$\Rightarrow\begin{cases}\alpha<\beta\text{且}\ \alpha<\gamma\to E'\text{最先}\\ F'\text{先}G'\leftrightarrow\beta-\gamma=B_{外}-F<0\leftrightarrow F>B_{外}\end{cases}$$

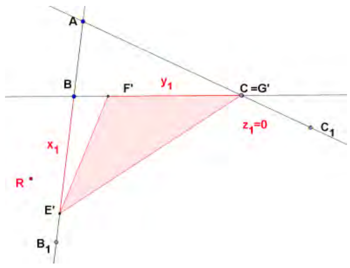


E′、F′、G′旋入的次序分二種：

① $E'\to F'\to G'(F>B_{外}$，如圖 5-7)

(圖 5-6)

$$x_1=\frac{\sin A\sin G}{\sin(B-G)}2r\ ,\ y_1=\frac{\sin A\sin B\sin E}{\sin F\sin(B-G)}2r\ ,\ z_1=0$$



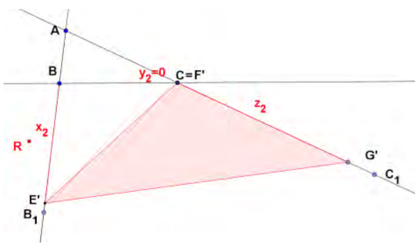
② $E'\to G'\to F'(F<B_{外})$

$$x_1=\frac{\sin A\sin C\sin G}{\sin E\sin(F-A)}2r\ ,\ y_1=2r\sin A\ ,\ z_1=\frac{\sin A\sin(F+B)}{\sin(F-A)}2r$$

(2)旋出

(圖 5-7)

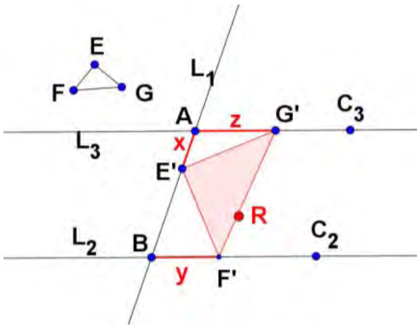
E′、G′在預設範圍內，只需考慮 F′旋出即可(如圖 5-8)



(圖 5-8)

$$x_2=\frac{\sin A\sin(C+F)}{\sin(F-A)}2r\ ,\ y_2=0\ ,\ z_2=\frac{\sin A\sin B\sin E}{\sin G\sin(F-A)}2r$$

(三)<型 c>兩線平行：預設 $E'\in\overline{\mathbf{AB}}$、$F'\in\overrightarrow{\mathbf{BC_2}}$、$G'\in\overrightarrow{\mathbf{AC_3}}$；變動過程分別算出 $x=\overline{\mathbf{E'A}}$、$y=\overline{\mathbf{F'B}}$、$z=\overline{\mathbf{G'A}}$的變動區間。設$\angle C_3AB=A$，$\angle C_2BA=B$ (如圖 6-1)



(圖 6-1)

1.R 在兩平行線 L_2、L_3 間($F < B$ 且 $G < A$)：$x\in[x_1, x_2]$、$y\in[y_1, y_2]$、$z\in[z_1, z_2]$

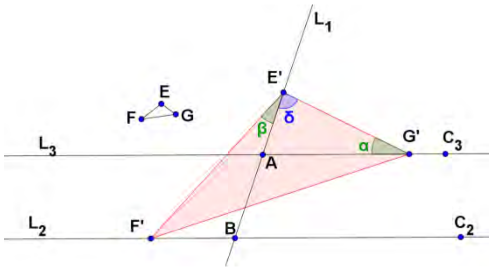
(1)旋入

G'已在預設範圍內，設 E'、F'旋入角度分別為 α、β。利用輔助角 δ 列式(如圖 6-2)：

$\delta=A-\alpha=E-\beta$

$\Rightarrow$ E'先$F'\leftrightarrow\alpha-\beta=A-E<0\leftrightarrow E>A$

E'、F'旋入的次序分兩種：



(圖 6-2)

① $G'\to E'\to F'$ ($E>A$，如圖 6-3)

因點 F'位於點 B 上，所以 $y_1=0$

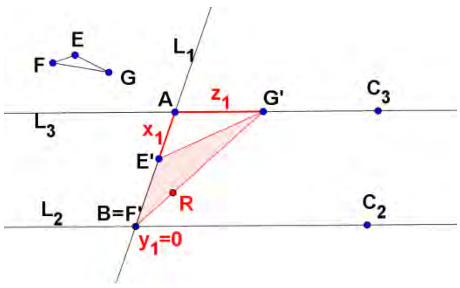
由正弦定理：

$$\frac{x_1}{f}\times\frac{f}{e}\times\frac{e}{c}=\frac{\sin(E-A)}{\sin A}\times\frac{\sin F}{\sin E}\times\frac{\sin A}{\sin(B-F)}\rightarrow x_1=\frac{\sin F\sin(E-A)}{\sin E\sin(B-F)}c$$

$$\frac{z_1}{e}\times\frac{e}{c}=\frac{\sin F}{\sin A}\times\frac{\sin A}{\sin(B-F)}\rightarrow z_1=\frac{\sin F}{\sin(B-F)}c$$

② $G'\to F'\to E'$ ($E<A$)

$x_1=0$, $y_1=\dfrac{\sin(A-E)}{\sin E}c$, $z_1=\dfrac{\sin B\sin F}{\sin E\sin G}c$



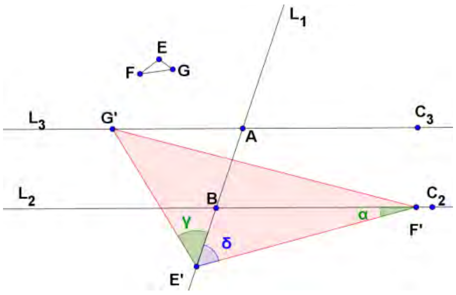
(圖 6-3)

(2)旋出

F′在預設範圍內，設 E′、G′已旋出角度分別為 α、γ。利用輔助角 δ 列式：(如圖 6-4)

$\delta = B - \alpha = E - \gamma \Rightarrow$ E′先G′$\leftrightarrow \alpha - \gamma = B - E > 0 \leftrightarrow E<B$

E′、G′旋出的次序分兩種：



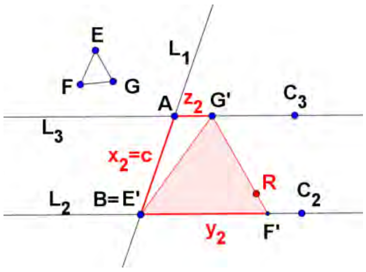
(圖 6-4)

①E′→G′→F′(E<B，如圖 6-5)

$$x_2 = c\ ,\ y_2 = \frac{\sin A \sin G}{\sin E \sin F}c\ \ ,\ z_2 = \frac{\sin(B-E)}{\sin E}c$$

②G′→E′→F′(E >B)

$$x_2 = \frac{\sin B \sin F}{\sin E \sin G}c\ \ ,\ y_2 = \frac{\sin G}{\sin(A-G)}c\ \ ,\ z_2 = 0$$



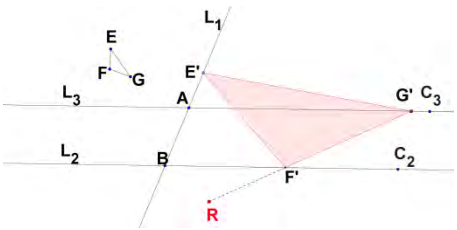
(圖 6-5)

2.R 在兩平行線 L₂ 外側 (F > B 且 G < A)：$x \in [x_1 , x_2]$、$y \in [y_1 , y_2]$、$z \in [z_1 , z_2]$

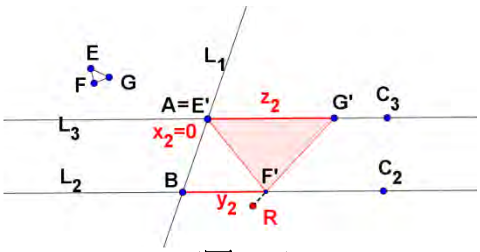
(1)旋入(如圖 6-6)

F′、G′在預設範圍內，只需考慮 E′旋入即可(如圖 6-7)

$$x_1 = 0\ ,\ y_1 = \frac{\sin(A-E)}{\sin E}c\ ,\ z_1 = \frac{\sin B \sin F}{\sin A \sin G}c$$



(圖 6-6)



(圖 6-7)

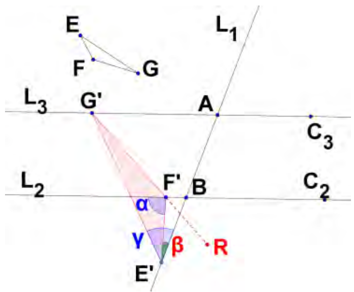
(2)旋出

設 E′、F′、G′已旋出角度分別為 α、β、γ。(如圖 6-8)

$\beta = \alpha - B = \gamma - E \ \Rightarrow$

$$\begin{cases} \alpha > \beta \text{且} \gamma > \beta \ \rightarrow \text{F}'\text{最後} \\ \text{E}'\text{先G}' \ \leftrightarrow \alpha - \gamma = B - E > 0 \ \leftrightarrow \ E < B \end{cases}$$

E′、F′、G′旋出的次序分兩種：



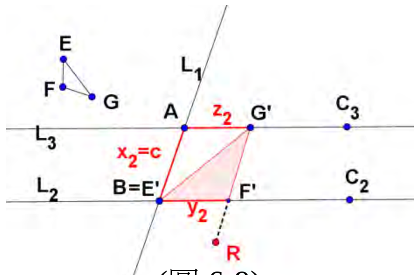
(圖 6-8)

①$E'\to G'\to F'$($E<B$，如圖 6-9)

$$x_2=c,\ y_2=\frac{\sin A\sin G}{\sin E\sin F}c\ ,\ z_2=\frac{\sin(F+G)}{\sin E}c$$

②$G'\to E'\to F'$($E>B$)

$$x_2=\frac{\sin B\sin F}{-\sin E\sin(A+E)}c,\ y_2=\frac{\sin G}{\sin(A-G)}c\ ,\ z_2=0$$



(圖 6-9)

五、*n* 邊形作內接子 *m* 邊形的作法($n\geq m$)

(一) <引理四>

任意三直線 L_1、L_2、L_3 不平行且不共點，若已知{同$\Delta EFG(L_1\times L_2\times L_3)$}或{反$\Delta EFG(L_1\times L_2\times L_3)$}旋伸中心 R 的位置，則可作出該組所有子三角形。而細部取點方式分成:

1.若 R 不在 L_i 上，則在 L_i 上任取一點為頂點皆可作出該組所有子三角形

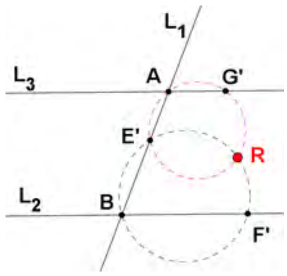
2.若 R 在 L_i 上，則在 L_i 上須取 R 為頂點方可作出該組所有子三角形

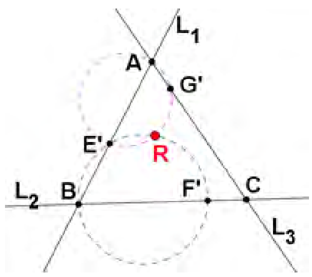
底下以{同$\Delta EFG(L_1\times L_2\times L_3)$}作證明，並設點 A、B、C 依序為 L_1 與 L_2、L_2 與 L_3、L_3 與 L_1 的交點(若 L_2 與 L_3 平行，則不設點 C)

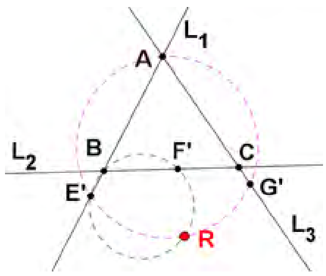
[作法]1.設 R 不在 L_1 上且在 L_1 上任取一點，設為E'：

分別作$\Delta RE'A$、$\Delta RE'B$ 的外接圓交 L_3、L_2 於G'、F'，則$\Delta E'F'G'$即為所求。

<型 d 內> <型 d 側> <型 c>



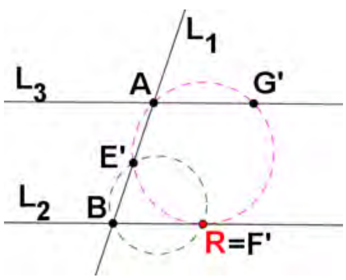


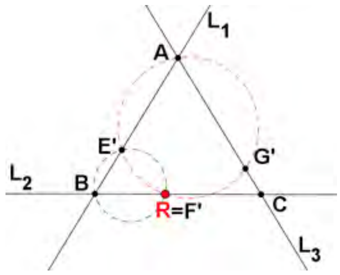


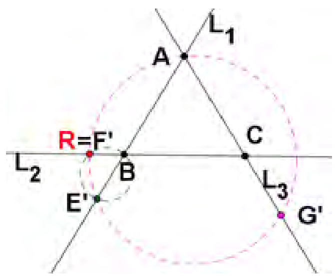
2.因<型 c>R 不會在 L_1 上，所以設 R 在 L_2 上且在 L_2 上取 R 為頂點，設為 F'：

任作一圓過點 R 與 A 且分別交 L_1、L_3 於E'、G'，則$\Delta E'F'G'$即為所求。

<型 d 內> <型 d 側> <型 c>

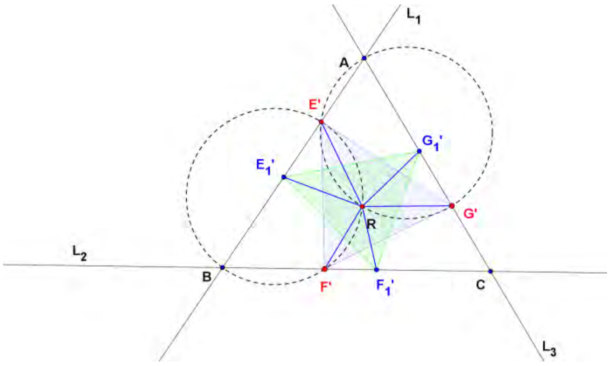




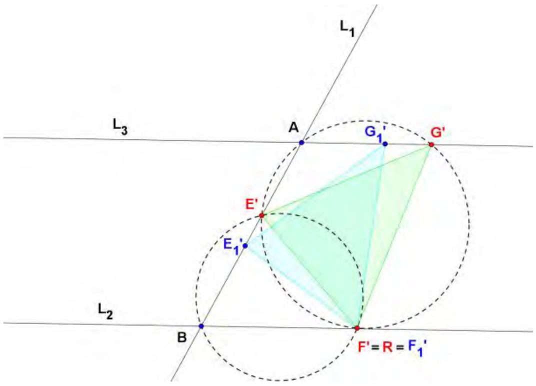


[證明]

<型 d 側>



<型 c>



設$\Delta E_1'F_1'G_1' \in \{$同$\Delta EFG(L_1 \times L_2 \times L_3)\}$

在$\Delta RE'G'$與$\Delta RE_1'G_1'$中

因 A、E′、R、G′共圓且 A、E_1'、R、G_1'共圓

(R 為{同$\Delta EFG(L_1 \times L_2 \times L_3)$}旋伸中心)

所以$\angle RE'G' = \angle RAC = \angle RE_1'G_1'$且$\angle RG'E' = \angle RAB = \angle RG_1'E_1'$

得$\Delta RE'G' \sim \Delta RE_1'G_1'$(AA 相似) (至此已證出情形 2)

即$\overline{E'G'} : \overline{E_1'G_1'} = \overline{RE'} : \overline{RE_1'}$

同理$\overline{E'F'} : \overline{E_1'F_1'} = \overline{RE'} : \overline{RE_1'}$

由上兩式得$\overline{E'G'} : \overline{E_1'G_1'} = \overline{E'F'} : \overline{E_1'F_1'}$

同理$\overline{E'G'} : \overline{E_1'G_1'} = \overline{F'G'} : \overline{F_1'G_1'}$

得$\overline{E'G'} : \overline{E_1'G_1'} = \overline{E'F'} : \overline{E_1'F_1'} = \overline{F'G'} : \overline{F_1'G_1'}$

故$\Delta E'F'G' \sim \Delta E_1'F_1'G_1'$(SSS 相似)

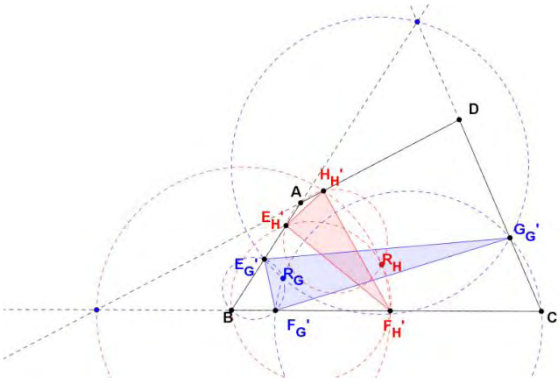
(二)四邊形作內接子四邊形的作法與解法數判斷

1.[已知]標的四邊形 EFGH 與四邊形 ABCD

[求作]四邊形 E′F′G′H′∈{同四邊形 EFGH($\overline{AB} \times \overline{BC} \times \overline{CD} \times \overline{DA}$)}

[作法] (1)作子$\Delta E_G'F_G'G_G' \in \{$同$\Delta EFG(\overleftrightarrow{AB} \times \overleftrightarrow{BC} \times \overleftrightarrow{CD})\}$，再利用$\Delta E_G'F_G'G_G'$作出{同$\Delta EFG(\overleftrightarrow{AB} \times \overleftrightarrow{BC} \times \overleftrightarrow{CD})$}的旋伸中心 R_G (如圖 7-1)

(2)作子$\Delta E_H'F_H'H_H' \in \{$同$\Delta EFG(\overleftrightarrow{AB} \times \overleftrightarrow{BC} \times \overleftrightarrow{DA})\}$，再利用$\Delta E_H'F_H'H_H'$作出{同$\Delta EFG(\overleftrightarrow{AB} \times \overleftrightarrow{BC} \times \overleftrightarrow{DA})$}的旋伸中心 R_H (如圖 7-1)



(圖 7-1)

(3)R_G、R_H所在位置區分三種： $\overline{A+B}$

並令 $S=S_1\{$同$\Delta EFG(\overline{AB}\times\overline{BC}\times\overline{CD})\}\cap S_1\{$同$\Delta EFG(\overline{AB}\times\overline{BC}\times\overline{DA})\}$

<情形 1>R_G與 R_H在同一位置(設為 R，如圖 7-2)

①若 $S=\phi$，則無法作出。

②若 $S\neq\phi$，則取 $E'\in S$，

再利用<引理四>作法作$\Delta E'F'G'\in\{$同$\Delta EFG(\overline{AB}\times\overline{BC}\times\overline{CD})\}$，與$\Delta E'F'H'\in\{$同$\Delta EFH(\overline{AB}\times\overline{BC}\times\overline{DA})\}$，則四邊形 $E'F'G'H'$即為所求。

<情形 2>三相異點 B、R_G、R_H共圓(設此圓為 Γ，如圖 7-3)

設 Γ 與$\overline{AB}$的交點 E'

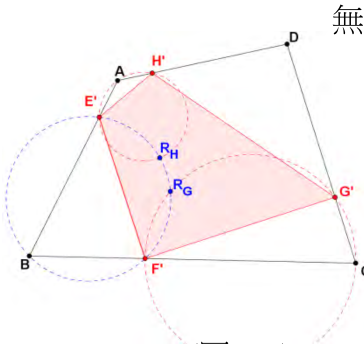
①若 $E'\notin S$，則無法作出。

②若 $E'\in S$，

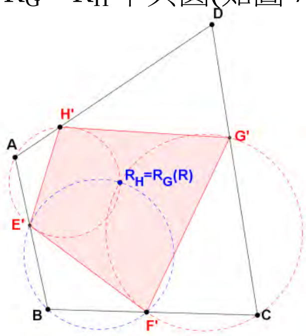
則利用<引理四>作法作$\Delta E'F'G'\in\{$同$\Delta EFG(\overline{AB}\times\overline{BC}\times\overline{CD})\}$，與$\Delta E'F'H'\in\{$同$\Delta EFH(\overline{AB}\times\overline{BC}\times\overline{DA})\}$，得四邊形 $E'F'G'H'$即為所求。

<情形 3>三相異點 B、R_G、R_H不共圓(如圖 7-4)

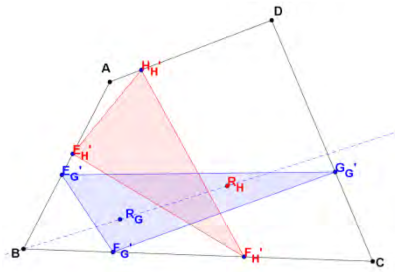
無法作出



(圖 7-2)



(圖 7-3)



(圖 7-4)

[證明] <情形 1>與<情形 2>可作出的狀況下，因作$\Delta E'F'G'\sim\Delta EFG$與$\Delta E'F'H'\sim\Delta EFH$，所以得四邊形 $E'F'G'H'\sim$四邊形 EFGH

2.由上述作法中我們得到$\{$同四邊形 $EFGH(\overline{AB}\times\overline{BC}\times\overline{CD}\times\overline{DA})\}$中子四邊形解法數判斷方法：

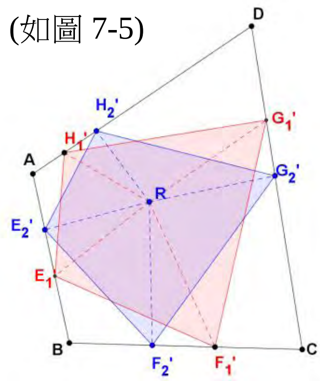
(1)若 $R_G=R_H$(設為 R)且 $S\neq\phi$，則有無限多解且 R 為此組子四邊形的旋伸中心

(2)若三相異點 B、R_G、R_H共圓且此圓與 S 有交點，則有唯一解

(3)若三相異點 B、R_G、R_H不共圓或非(1)(2)情形，則無解

[證明] (1)①在<情形 1>有解狀況下，由<引理四>知作出的子$\Delta E'F'G'$會有無限多個選擇，所以 E'位置或 F'位置有無限多個選擇、後在 E'、F'固定下才作出 G'、H'，所以子四邊形 $E'F'G'H'$會有無限多解

②證明 R 為此組子四邊形的旋伸中心：(如圖 7-5)



(圖 7-5)

設四邊形 $E_1'F_1'G_1'H_1'$與四邊形 $E_2'F_2'G_2'H_2'$為此組兩個子四邊形

則$\Delta E_1'F_1'G_1'$、$\Delta E_2'F_2'G_2' \in$\{同$\Delta EFG(\overline{AB} \times \overline{BC} \times \overline{CD})$\}

因 R 為\{同$\Delta EFG(\overline{AB} \times \overline{BC} \times \overline{CD})$\}旋伸中心

所以$\angle E_1'RE_2' = \angle F_1'RF_2' = \angle G_1'RG_2'$且$\overline{RE_1'} : \overline{RE_2'} = \overline{RF_1'} : \overline{RF_2'} = \overline{RG_1'} : \overline{RG_2'}$

又$\Delta E_1'F_1'H_1'$、$\Delta E_2'F_2'H_2' \in$\{同$\Delta EFH(\overline{AB} \times \overline{BC} \times \overline{DA})$\}

且 R 為\{同$\Delta EFH(\overline{AB} \times \overline{BC} \times \overline{DA})$\}旋伸中心

所以$\angle E_1'RE_2' = \angle F_1'RF_2' = \angle H_1'RH_2'$且$\overline{RE_1'} : \overline{RE_2'} = \overline{RF_1'} : \overline{RF_2'} = \overline{RH_1'} : \overline{RH_2'}$

可得$\angle E_1'RE_2' = \angle F_1'RF_2' = \angle G_1'RG_2' = \angle H_1'RH_2'$

且$\overline{RE_1'} : \overline{RE_2'} = \overline{RF_1'} : \overline{RF_2'} = \overline{RG_1'} : \overline{RG_2'} = \overline{RH_1'} : \overline{RH_2'}$

得證 R 為四邊形 $E_1'F_1'G_1'H_1'$與四邊形 $E_2'F_2'G_2'H_2'$的旋縮中心

(2)在<情形 2>有解狀況下，E'位置取自圓 Γ 與$\overline{AB}$的交點，僅一選擇，後在 E'固定下才作出 F'、G'、H'，所以同子四邊形 $E'F'G'H'$會有唯一解

(3)用反證法證之：

設可作出子四邊形 $E'F'G'H' \in$ \{同四邊形 EFGH$(\overline{AB} \times \overline{BC} \times \overline{CD} \times \overline{DA})$\}

則子$\Delta E'F'G' \in$\{同$\Delta EFG(\overline{AB} \times \overline{BC} \times \overline{CD})$\}

所以此組旋伸中心 R_G 必在$\Delta BE'F'$的外接圓上

同理 R_H 亦在$\Delta BE'F'$的外接圓上

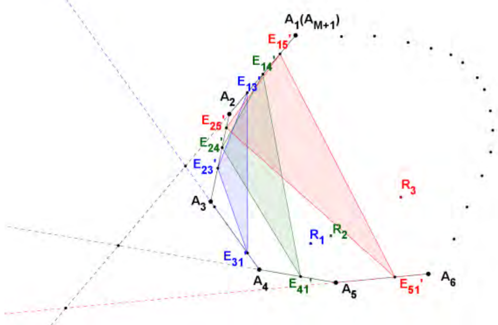
可得 B、R_G、R_H 共圓

(三)*m* 邊形作內接子 *m* 邊形的作法與解法數判斷

1.[已知]標的 *m* 邊形 $E_1E_2 \cdots E_m$與 *m* 邊形 $A_1A_2 \cdots A_m$

[求作]*m* 邊形 $E_1'E_2' \cdots E_m' \in$\{同 *m* 邊形 $E_1E_2 \cdots E_m$ $(\prod_{k=1}^{m} \overline{A_kA_{k+1}})$\},其中 $A_{m+1} = A_1$

[作法] (1)依序作子$\Delta E_{1k}'E_{2k}'E_{k1}' \in$\{同$\Delta E_1E_2E_k(\overleftrightarrow{A_1A_2} \times \overleftrightarrow{A_2A_3} \times \overleftrightarrow{A_kA_{k+1}})$\}，$3 \le k \le m$，再利用$\Delta E_{1k}'E_{2k}'E_{k1}'$作出\{同$\Delta E_1E_2E_k(\overleftrightarrow{A_1A_2} \times \overleftrightarrow{A_2A_3} \times \overleftrightarrow{A_kA_{k+1}})$\}的旋伸中心 R_k (如圖 7-6)



(圖 7-6)

(2)R_3、R_4、⋯、R_m所在位置區分三種：

並令 $S=\bigcap_{k=3}^{m} S_1$ {同$\Delta E_1E_2E_{3k}(\overline{A_1A_2}\times\overline{A_2A_3}\times\overline{A_kA_{k+1}})$}

<情形 1>所有 R_k 在同一位置(設為 R，如圖 7-7)

①若 $S=\phi$ ，則無法作出。

②若 $S\neq\phi$ ，則取 $E_1'\in S$，再利用<引理四>作法依序作

$\Delta E_1'E_2'E_k'\in$\{同$\Delta E_1E_2E_k(\overline{A_1A_2}\times\overline{A_2A_3}\times\overline{A_kA_{k+1}})$\}，$3\leq k\leq m$，

則 m 邊形 $E_1'E_2'\cdots E_m'$即為所求

<情形 2>非所有 R_k 在同一位置且 A_2 與所有 R_k 共圓(設此圓為 Γ，如圖 7-8)

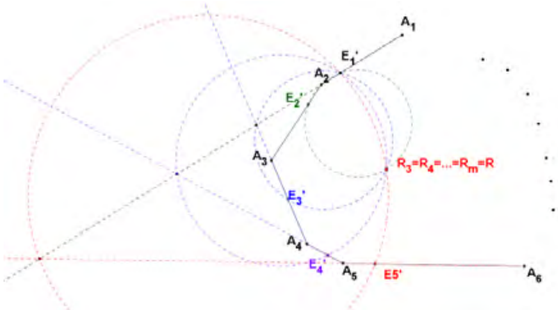
設 Γ 與$\overline{A_1A_2}$的交點 E_1'

①若 $E_1'\notin S$，則無法作出。

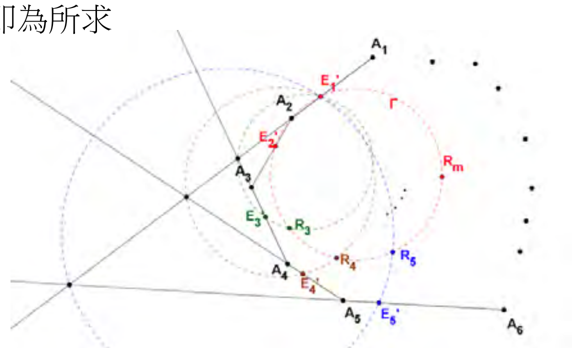
②若 $E_1'\in S$，則利用<引理四>作法依序作

$\Delta E_1'E_2'E_k'\in\{\Delta E_1E_2E_k(\overline{A_1A_2}\times\overline{A_2A_3}\times\overline{A_kA_{k+1}})\}$，$3\leq k\leq m$，

得 m 邊形 $E_1'E_2'\cdots E_m'$即為所求



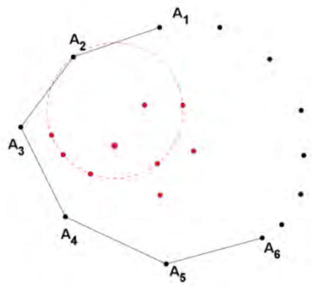
(圖 7-7)



(圖 7-8)

<情形 3>非所有 R_k 在同一位置且 A_2 與所有 R_k 不共圓(如圖 7-9)

無法作出



(圖 7-9)

<情形 1>與<情形 2>，因作$\Delta E'F'G'\sim\Delta EFG$與$\Delta E'F'H'\sim\Delta EFH$，

所以得四邊形 $E'F'G'H'\sim$四邊形 EFGH

[證明] <情形 1>與<情形 2>可作出的狀況下，

因依序作$\Delta E_1'E_2'E_k'\sim\Delta E_1E_2E_k$

所以得 m 邊形 $E_1'E_2'\cdots E_m'\sim m$ 邊形 $E_1E_2\cdots E_m$

2.由上述作法中我們得到{同 m 邊形 $E_1E_2\cdots E_m(\prod_{k=1}^{m}\overline{A_kA_{k+1}})$}中子 m 邊形解法數判斷方法：

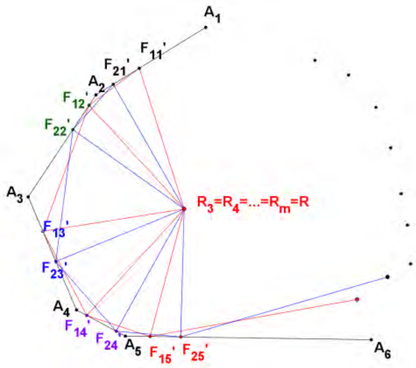
(1)若所有 R_k $(3\leq k\leq m)$在同一位置(設為 R)且 $S\neq\phi$，則有無限多解且 R 為此組子 m 邊形的旋伸中心

(2)非所有 $R_k$$(3\leq k\leq m)$在同一位置時，若 A_2 與所有 R_k 共圓且此圓與 S 有交點，則有唯一解

(3)若非所有 $R_k(3\le k\le m)$在同一位置且 A_2 不與所有 R_k 共圓或非(1)(2)情形，則無解

[證明] (1)①在<情形 1>有解狀況下，由<引理四>知作出的子$\Delta E_1'E_2'E_3'$會有無限多個選擇，所以 E_1'位置或 E_2'位置有無限多個選擇，後在 E_1'、E_2'固定下才作出 $E_k'(3\le k\le m)$，所以子 m 邊形 $E_1'E_2'\cdots E_m'$會有無限多解

②證明 R 為此組子 m 邊形的旋伸中心：(如圖 7-10)



(圖 7-10)

設 m 邊形 $F_{11}'F_{12}'\cdots F_{1m}'$與 m 邊形 $F_{21}'F_{22}'\cdots F_{2m}'$為此組兩個子 m 邊形

則對每一 $k=3,4,\cdots,m$ 而言

$\Delta F_{11}'F_{12}'F_{1k}'$、$\Delta F_{21}'F_{22}'F_{2k}'\in\{$同$\Delta E_1E_2E_k\,(\overline{A_1A_2}\times\overline{A_2A_3}\times\overline{A_kA_{k+1}})\}$，

且因 R 為$\{$同$\Delta E_1E_2E_k\,(\overline{A_1A_2}\times\overline{A_2A_3}\times\overline{A_kA_{k+1}})\}$旋伸中心

所以$\angle F_{11}'RF_{21}'=\angle F_{12}'RF_{22}'=\angle F_{k1}'RF_{k2}'$

且$\overline{RF_{11}'}:\overline{RF_{21}'}=\overline{RF_{12}'}:\overline{RF_{22}'}=\overline{RF_{1k}'}:\overline{RF_{2k}'}$

合併可得對每一 $k=1,2,\cdots,m$

$\angle F_{1k}'RF_{2k}'$皆相等且$\overline{RF_{1k}'}:\overline{RF_{2k}'}$比值皆相等

得證 R 為 m 邊形 $F_{11}'F_{12}'\cdots F_{1m}'$與 m 邊形 $F_{21}'F_{22}'\cdots F_{2m}'$的旋縮中心

(2)在<情形 2>有解狀況下，E_1'位置取自圓 Γ 與$\overline{A_1A_2}$的交點，僅一選擇，後在 E_1'固定下才作出 $E_k'(2\le k\le m)$，所以子 m 邊形 $E_1'E_2'\cdots E_m'$會有唯一解

(3)用反證法證之：

設可作出子 m 邊形 $E_1'E_2'\cdots E_m'\in\{$同 m 邊形 $E_1E_2\cdots E_m(\prod_{k=1}^{m}\overline{A_kA_{k+1}})\}$

則子$\Delta E_1'E_2'E_3'\in\{$同$\Delta E_1E_2E_3(\overline{A_1A_2}\times\overline{A_2A_3}\times\overline{A_3A_4})\}$，

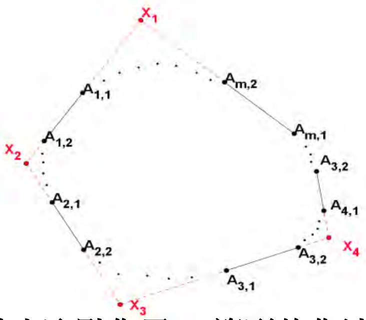
所以此組旋伸中心 R_3 必在$\Delta A_2E_1'E_2'$的外接圓上

同理 $R_k(4\le k\le m)$亦在$\Delta A_2E_1'E_2'$的外接圓上

可得 A_2 與所有 R_k 共圓

(四) n 邊形作內接子 m 邊形的作法($n\ge m$)

欲在 n 邊形 $A_1A_2\cdots A_n$ 中作子 m 邊形 $E_1'E_2'\cdots E_m'\in\{$同 m 邊形 $E_1E_2\cdots E_m(\prod_{k=1}^{m}\overline{A_{k,1}A_{k,2}})$，可先將被選定的 m 個邊延長使相鄰兩邊$\overline{A_{k,1}A_{k,2}}$、$\overline{A_{k+1,1}A_{k+1,2}}$的延長線交於 X_{k+1} (如圖 7-11)，令 $X_{m+1}=X_1$。再由(三)的方法在 m 邊形 $X_1X_2\cdots X_m$ 中作內接子 m 邊形 $E_1'E_2'\cdots E_m'\in\{$同 m 邊形 $E_1E_2\cdots E_m\,(\prod_{k=1}^{m}\overline{A_{k,1}A_{k,2}})\}$即可。



(圖 7-11)

六、任意 *m* 條直線上取點作子 *m* 邊形的作法與解法數判斷

給定標的 m 邊形 $E_1E_2\cdots E_m$ 及任意 m 條直線 L_1、L_2、L_3、…、L_m，欲作子 m 邊形 $E_1'E_2'\cdots E_m'\in\{m$ 邊形 $E_1E_2\cdots E_m(\prod_{k=1}^{m}L_k)\}$。因同子 m 邊形與反子 m 邊形的作法與討論方式一樣，以下只討論同子 m 邊形，分三情形:

(一)沒有三條以上直線平行且沒有三條以上直線共點

將「**五(三).*m* 邊形作內接子 *m* 邊形的作法與解個數判斷**」中取 $E_1'\in S=\bigcap_{k=3}^{m}S_1\{同\Delta E_1E_2E_k(\overline{A_1A_2}\times\overline{A_2A_3}\times\overline{A_kA_{k+1}})\}$的條件去掉，就可得到作法與解法數。

(二)有三條以上直線平行

不失一般性設平行直線為 L_1、L_2、L_3，另設其他與 L_1 平行的直線為 $L_\alpha(\alpha\in N_1)$；其他與 L_1 不平行的直線為 $L_\beta(\beta\in N_2)$。

先作子$\Delta D_1'D_2'D_3'\in\{同\Delta E_1E_2E_3(L_1\times L_2\times L_3)\}$，再依序作$\Delta D_1'D_2'D_\alpha'$同相似於$\Delta E_1E_2E_\alpha$ $(\alpha\in N_1)$

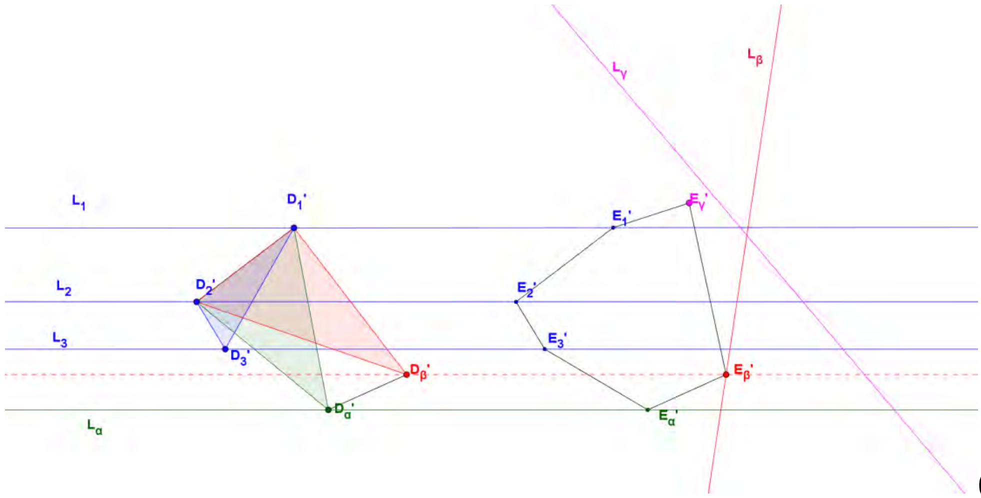
1.有一 $D_\alpha'(\alpha\in N_1)$不在 L_α 上時，則無解。

2.所有 $D_\alpha'(\alpha\in N_1)$皆在 L_α 上且 $N_2=\phi$ 時，則作出的 m 邊形 $D_1'D_2'\cdots D_m'$即為所求。且無限多解。(如圖 8-1)

3.所有 $D_\alpha'(\alpha\in N_1)$皆在 L_α 上且 $N_2\neq\phi$時，先取一 $\beta\in N_2$，作$\Delta D_1'D_2'D_\beta'$同相似於$\Delta E_1E_2E_\beta$；接著過 D_β'作 L_1 的平行線交 L_β 於 E_β'；再過 E_β'依序作直線平行於$\overline{D_\beta'D_\alpha'}$且交 L_α 於 $E_\alpha'(\alpha\in N_1)$；最後依序作$\Delta E_1'E_2'E_\gamma'$同相似於$\Delta E_1E_2E_\gamma(\gamma\in N_2-\{\beta\})$

(1)所有 E_γ' $(\gamma\in N_2-\{\beta\})$皆在 L_γ 上時，作出的 m 邊形 $E_1'E_2'\cdots E_m'$即為所求。且有唯一解。

(2)有一 E_γ' $(\gamma\in N_2-\{\beta\})$不在 L_γ 上時，無解。(如圖 8-1)



(圖 8-1)

(三)有三條以上直線共點

不失一般性設共點 R 的直線為 L_1、L_2、L_3，另設其他通過 R 的直線為 $L_\alpha\,(\alpha\in N_1)$；其他不通過 R 的直線為 $L_\beta\,(\beta\in N_2)$。

先作子$\Delta D_1'D_2'D_3'\in\{$同$\Delta E_1E_2E_3(L_1\times L_2\times L_3)\}$，再依序作$\Delta D_1'D_2'D_\alpha'$同相似於$\Delta E_1E_2E_\alpha$ $(\alpha\in N_1)$

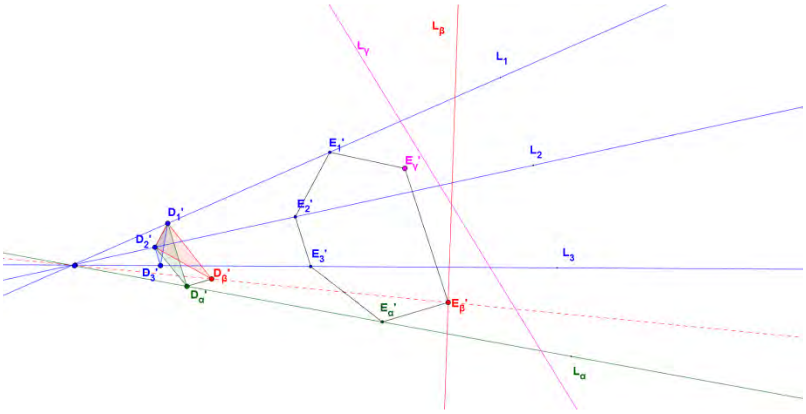
1.有一 D_α'不在 L_α 上時，則無解。

2.所有 $D_\alpha'(\alpha\in N_1)$皆在 L_α 上且 $N_2=\phi$ 時，則作出的 m 邊形 $D_1'D_2'\cdots D_m'$即為所求。且有無限多解。(如圖 8-2)

3.所有 $D_\alpha'(\alpha\in N_1)$皆在 L_α 上且 $N_2\neq\phi$時，先取一 $\beta\in N_2$，作$\Delta D_1'D_2'D_\beta'$同相似於$\Delta E_1E_2E_\beta$；接著作直線 RD_β'交 L_β 於 E_β'；再過 E_β'依序作直線平行於$\overline{D_\beta'D_\alpha'}$且交 L_α 於 $E_\alpha'(\alpha\in N_1)$；最後依序作$\Delta E_1'E_2'E_\gamma'$同相似於$\Delta E_1E_2E_\gamma\,(\gamma\in N_2-\{\beta\})$

(1)所有 $E_\gamma'(\gamma\in N_2-\{\beta\})$皆在 L_γ 上時，作出的 m 邊形 $E_1'E_2'\cdots E_m'$即為所求。且有唯一解。

(2)有一 $E_\gamma'(\gamma\in N_2-\{\beta\})$不在 L_γ 上時，無解。(如圖 8-2)

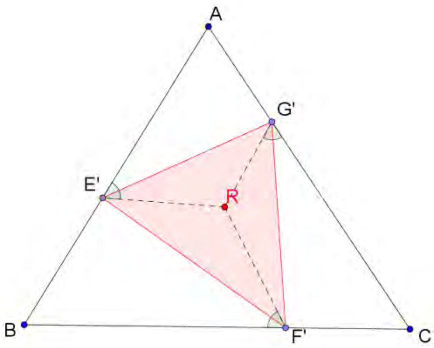


(圖 8-2)

七、探討同組子三角形旋伸中心 R 的一些性質

不失一般性對<型 d 內>作研究。以下皆以 A、B、C 表ΔABC 三內角，E、F、G 表標的ΔEFG 三內角。

(一) 子$\Delta E'F'G'$在變動過程中，R 到三頂點 E'、F'、G'連線依序與 L_1、L_2、L_3 夾等角。(如圖 9-1)

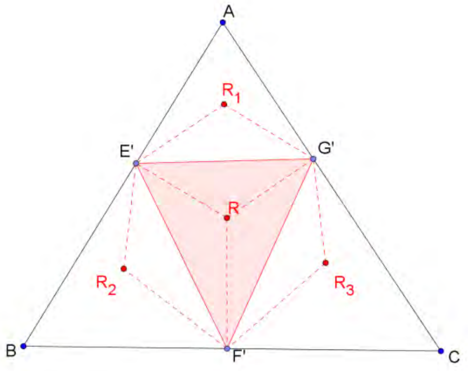


(圖 9-1)

[證明]因 AE'RG'、BF'RE'、CG'RF'分別四點共圓，

所以$\angle RE'B=\angle RF'C=\angle RG'A$

(二)R 到子ΔE'F'G'三頂點的距離比 $\overline{RE'}:\overline{RF'}:\overline{RG'}=\frac{\sin(C+E)}{\sin E}:\frac{\sin(A+F)}{\sin F}:\frac{\sin(B+G)}{\sin G}$。 (如圖 9-2)



(圖 9-2)

[證明]設 R 關於$\overleftrightarrow{E'G'}$、$\overleftrightarrow{E'F'}$、$\overleftrightarrow{F'G'}$的對稱點分別為 R_1、R_2、R_3

設$\overline{RE'}=\overline{R_1E'}=\overline{R_2E'}=e$，$\overline{RF'}=\overline{R_2F'}=\overline{R_3F'}=f$，$\overline{RG'}=\overline{R_1G'}=\overline{R_3G'}=g$

因$\angle R_1E'R_2=2E$，$\angle R_2F'R_3=2F$，$\angle R_1G'R_3=2G$

所以$\overline{R_1R_2}=2e\sin E$，$\overline{R_2R_3}=2f\sin F$，$\overline{R_1R_3}=2g\sin G$

又$\angle R_2R_1R_3=\angle F'R_1G'-\angle E'R_1R_2-\angle G'R_1R_3$

$=\angle F'RG'-\angle E'R_1R_2-\angle G'R_1R_3$

$=(180^0-A)-(90^0-E)-(90^0-G)$

$=E+G-A$

$=180^0-F-A$

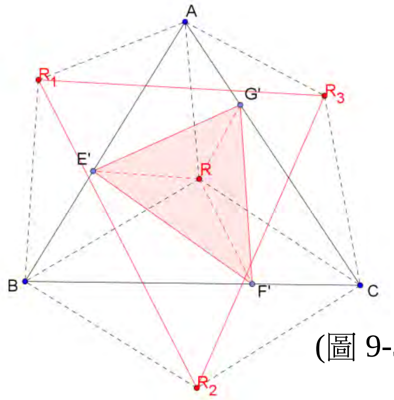
同理$\angle R_1R_2R_3=180^0-G-B$，$\angle R_1R_3R_2=180^0-E-C$

由正弦定理$\overline{R_1R_2}:\overline{R_2R_3}:\overline{R_1R_3}:=\sin\angle R_1R_3R_2:\sin\angle R_2R_1R_3:\sin\angle R_1R_2R_3$

得 $2e\sin E:2f\sin F:2g\sin G=\sin(C+E):\sin(A+F):\sin(B+G)$;

整理得 $e:f:g=\frac{\sin(C+E)}{\sin E}:\frac{\sin(A+F)}{\sin F}:\frac{\sin(B+G)}{\sin G}$

(三)若 R 關於ΔABC 三邊$\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CA}$的對稱點分別為 R_1、R_2、R_3，則$\Delta R_1R_2R_3\sim\Delta EFG$ (如圖 9-3)



(圖 9-3)

[證明]$\angle R_1AR_3=2A$，$\angle R_1BR_2=2B$，$\angle R_2CR_3=2C$

$\angle BR_2C=\angle BRC$

$=\angle BRF'+\angle F'RC$

$=\angle BE'F'+\angle F'G'C$ (因 BE'RF'、CF'RG'皆分別四點共圓)

$=(180^0-\angle AE'F')+(180^0-\angle AG'F')$

$=360^0-(\angle AE'F'+\angle AG'F')$

$=\angle BAC+\angle E'F'G'$

$=A+F$

因$\overline{RB}=\overline{R_1B}=\overline{R_2B}$，$\overline{RC}=\overline{R_2C}=\overline{R_3C}$

所以$\angle R_1R_2B = 90^0 - B$，$\angle R_3R_2C = 90^0 - C$

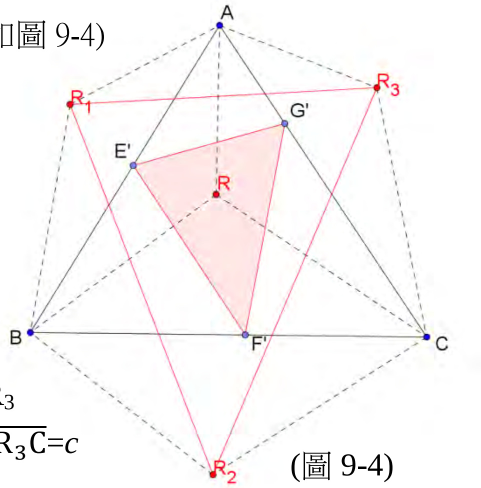
即$\angle R_1R_2R_3 = \angle BR_2C - \angle R_1R_2B - \angle R_3R_2C$

$= (A + F) - (90^0 - B) - (90^0 - C)$

$= F$

同理$\angle R_2R_1R_3=E$，得證 $\Delta R_1R_2R_3 \sim \Delta EFG$

(四)R 到ΔABC 三頂點的距離比$\overline{RA}:\overline{RB}:\overline{RC}=\frac{\sin F}{\sin A}:\frac{\sin G}{\sin B}:\frac{\sin E}{\sin C}$ (如圖 9-4)



(圖 9-4)

[證明] R 三邊$\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CA}$的對稱點分別為 R_1、R_2、R_3

且$\overline{RA}=\overline{R_1A}=\overline{R_3A}=a$，$\overline{RB}=\overline{R_1B}=\overline{R_2B}=b$，$\overline{RC}=\overline{R_2C}=\overline{R_3C}=c$

因$\angle R_1AR_3 = 2A$，$\angle R_1BR_2 = 2B$，$\angle R_2CR_3 = 2C$

且ΔAR_1R_3、ΔBR_1R_2、ΔCR_2R_3 皆為等腰三角形

所以$\overline{R_1R_3}= 2a\sin A$，$\overline{R_1R_2} = 2b\sin B$，$\overline{R_2R_3} =2c\sin C$

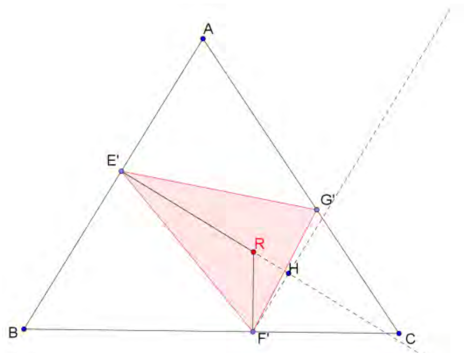
又$\angle R_2R_1R_3 = E$，$\angle R_1R_2R_3 = F$，$\angle R_1R_3R_2 = G$

由正弦定理$\overline{R_1R_3}: \overline{R_1R_2}: \overline{R_2R_3} =\sin\angle R_1R_2R_3 : \sin\angle R_1R_3R_2 : \sin\angle R_2R_1R_3$

得$2a\sin A : 2b\sin B : 2c\sin C = \sin F: \sin G: \sin E$

因此 $a : b : c = \frac{\sin F}{\sin A}:\frac{\sin G}{\sin B}:\frac{\sin E}{\sin C}$

(五) $\tan\angle RE'F'= \frac{\sin E\sin B\sin(A+F)}{\sin F\sin(C+E)+\sin E\cos B\sin(A+F)}$。(如圖 9-5)



(圖 9-5)

[證明]設F'在$\overleftrightarrow{E'R}$的垂足為 H

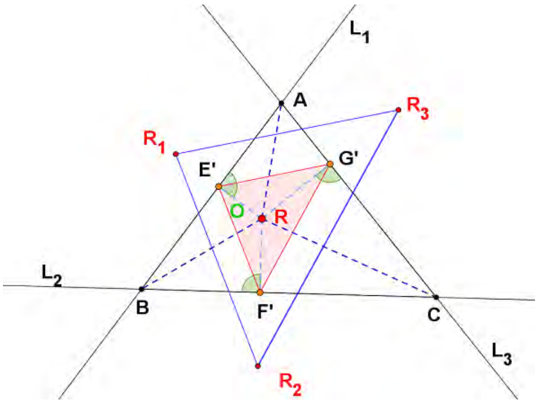
因$\angle E'RF'=180^0-B$，所以$\angle HRF'= B$

又$\overline{E'H}=\overline{E'R}+ \overline{RH}=\overline{E'R} + \overline{RF'}\cos B$且 $\overline{HF'}=\overline{RF'}\sin B$

$\tan\angle RE'F' = \frac{\overline{HF'}}{\overline{E'H}} = \frac{\overline{RF'}\sin B}{\overline{RE'}+\overline{RF'}\cos B}$

將(二)的結論$\overline{RE'}:\overline{RF'}= \frac{\sin(C+E)}{\sin E}:\frac{\sin(A+F)}{\sin F}$代入

得 $\tan\angle RE'F'= \frac{\frac{\sin B\sin(A+F)}{\sin F}}{\frac{\sin(C+E)}{\sin E}+\frac{\cos B\sin(A+F)}{\sin F}} = \frac{\sin E\sin B\sin(A+F)}{\sin F\sin(C+E)+\sin E\cos B\sin(A+F)}$



(圖 9-6，為綜合上述五點之圖)

伍、結論

一、給定標的ΔEFG 及任意三直線 L_1、L_2、L_3，一定可以作出同相似與反相似的子$\Delta E'F'G'$

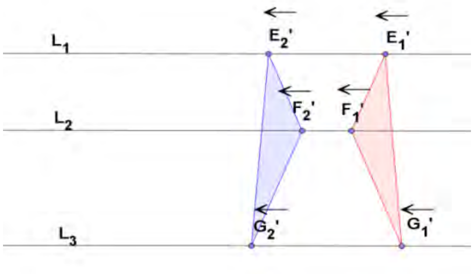
$\in \{\Delta EFG(L_1 \times L_2 \times L_3)\}$，詳見<**引理二**>。且各自同子$\Delta E_1'F_1'G_1'$與反子

$\Delta E_2'F_2'G_2'$的同組子三角形會因三直線位置關係而產生不同連結：

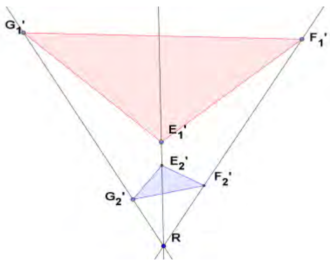
<型 a>三線平行：兩組皆各自以平移作連結。(如圖 10-1)

<型 b>三線共點：兩組皆各自以伸縮作連結，且伸縮中心 R 在三線交點。(如圖 10-2)

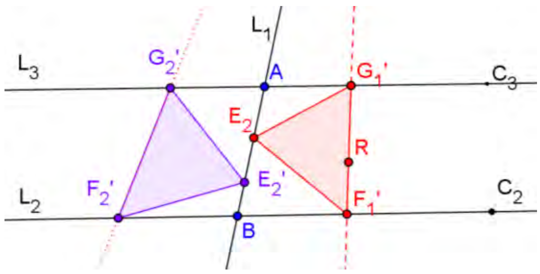
<型 c>兩線平行：兩組皆各自以旋轉及伸縮作連結，且旋伸中心 R 在任一個同組子三角形兩平行線上之頂點的連線上。(如圖 10-3)



(圖 10-1)

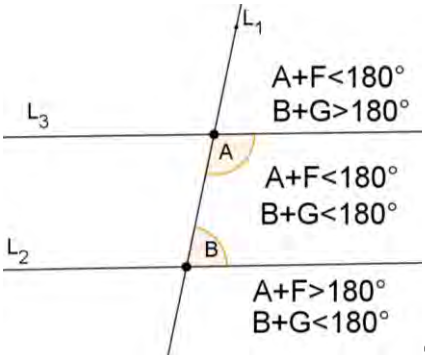


(圖 10-2)



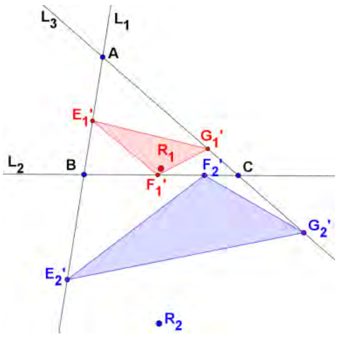
(圖 10-3)

至於 R 細部位置則可由標的ΔEFG 三內角與三直線夾角(令$\angle C_3AB$ = A，$\angle C_2BA$= B)比較後確認。以子$\Delta E_1'F_1'G_1'$組為例(如圖 10-4)



(圖 10-4)

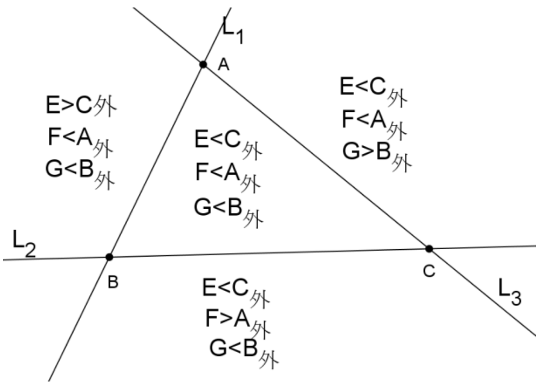
<型 d>圍三角形：兩組皆各自以旋轉及伸縮作連結。有一組($\Delta E_1'F_1'G_1'$)在旋伸過程中會內接於三直線所圍成三角形(ΔABC)；另一組($\Delta E_2'F_2'G_2'$)則會側接ΔABC 一邊或兩邊。(如圖 10-5)



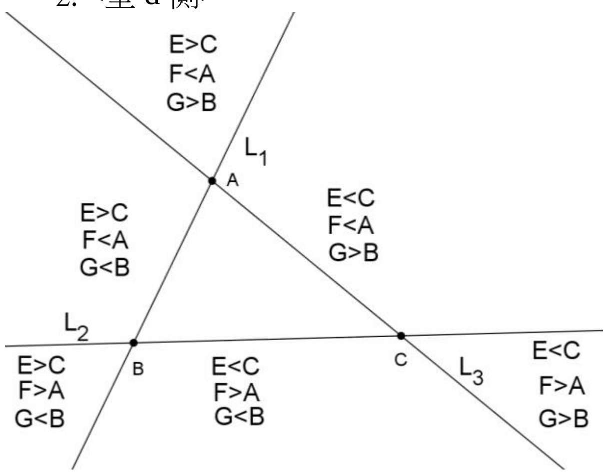
(圖 10-5)

至於R細部位置則可由標的ΔEFG三內角與三直線夾角(令ΔABC三內角為 A、B、C；三外角為 A 外、B 外、C 外)比較後確認：

1. <型 d 內>



2. <型 d 側>



二、比較標的ΔEFG三內角與三直線夾角可得到子$\Delta E'F'G'$在<型 c>、<型 d 內>、<型 d 側>的極限情況，進而算出三頂點 E'、F'、G'變動範圍，詳見**「肆、四」**的研究。<型 d 內>的部份可幫我們第一步就成功取對點，作出子 m 邊形成功內接於ΔABC。而<型 c>、<型 d 側>的研究更可為我們如何能成功取對點，作出子 m 邊形成功內接於 n 邊形做準備。

三、給定標的 m 邊形 $E_1E_2\cdots E_m$ 及任意 m 條直線 L_1、L_2、…、L_m(無三條以上平行且無三條以上共點)，作子 m 邊形 $E_1'E_2'\cdots E_m' \in \{$ m 邊形 $E_1E_2\cdots E_m$ ($\prod_{k=1}^{m} L_k$)$\}$的方法，就是先將 m 邊形 $E_1E_2\cdots E_m$ 分開成$(m-2)$個共用邊 $\overline{E_1E_2}$ 的標的$\Delta E_1E_2E_k$ $(3 \le k \le m)$，在對應的直線上作出$\Delta E_1E_2E_k$的一個同子三角形就可作出該組子三角形的旋伸中心，並由這$(m-2)$個旋伸中心的位置作判斷：

(一) 皆重合時：用**<引理四>**作法可在每條直線上成功取到子三角形頂點，且$(m-2)$個旋伸中心所在的位置上就是該組子 m 邊形旋伸中心，所以有無限多解。

(二) 與 L_1、L_2 交點共圓時：此圓與 L_1、L_2 交點位置就必須拿來當子 m 邊形對應於 E_1、E_2 的頂點，再用**<引理四>**作法在每條直線上成功取到子三角形頂點，得唯一解。

(三)與 L_1、L_2 交點不共圓時：無解。

四、給定標的 m 邊形 $E_1E_2\cdots E_m$ 及 m 邊形 $A_1A_2\cdots A_m$，作子 m 邊形 $E_1'E_2'\cdots E_m'$ $\in\{$$m$ 邊形 $E_1E_2\cdots E_m$ ($\prod_{k=1}^{m} \overline{A_kA_{k+1}}$)$\}$(其中 $A_{m+1}= A_1$)的方法與在 m 條直線上取點作是一樣的意思，但須利用**「肆、四」**的研究控制好取點範圍方能確認有解與否及順利作出。

五、給定標的 m 邊形 $E_1E_2\cdots E_m$ 及 n 邊形 $A_1A_2\cdots A_n$ $(n\ge m)$ 的方法，就是延長預定要取點的 m 個邊接成 m 邊形，然後利用作 m 邊形內接 m 邊形方法即可成功。

六、要完成任意 m 條直線上取點作子 m 邊形的方法尚須討論：

(一)有三條以上平行：在此平形線組先選其中三條作對應的子三角形當作基準點，再確認這組平行線的其他對應頂點能否成功落在對應的直線上，若可以才再利用在這組平行的平移去確認第一個非這組平行線的對應點位置，此時子 m 邊形的位置完全被鎖住，其他剩下的對應頂點須正好在對應的直線上方有解。

(二)有三條以上共點：在此共點線組先選其中三條作對應的子三角形當作基準點，再確認這組共點線的其他對應頂點能否成功落在對應的直線上，若可以才再利用伸縮去確認第一個非這組共點線的對應點位置，此時子 m 邊形的位置完全被鎖住，其他剩下的對應頂點須正好在對應的直線上方有解。

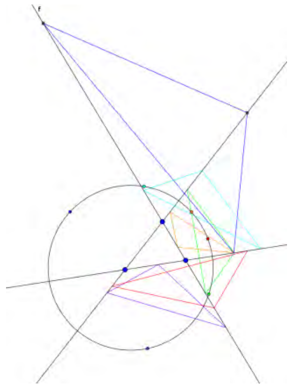
七、同組子三角形旋伸中心 R 的一些性質與幾何量計算如**「肆、七」**的研究。

陸、展望

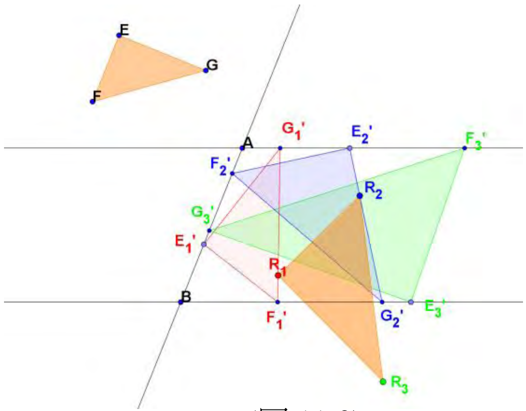
一、曾在其他報告中看見在三直線取不同對應點及將同、反兩種相似三角形都考慮進來，共得六個同組子三角形，其六個旋伸中心會共圓，但沒詳細解釋這個現象。(如圖 11-1)

我們希望作更深入研究:

(一)改變三直線相對位置，例如兩線平行。在三直線取不同對應點並只考慮同或反相似得三個同組子三角形，其三個旋伸中心會與標的三角形相似。(如圖 11-2)



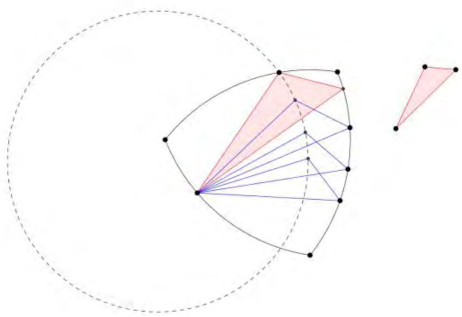
(圖 11-1)



(圖 11-2)

(二)提高直線數 *m*，且在直線取不同對應點及將同、反兩種相似子 *m* 邊形都考慮進來。在甚麼條件下才可能使不同組子 *m* 邊形有旋伸中心?若有時間再研究其相對位置關係。

二、在三角形作內接相似於標的三角形的子三角形發展成在勒洛三角形作內接子三角形，我們已掌握作法。(如圖 11-3)



(圖 11-3)

進一步想研究:

(一)同組子三角形旋伸中心的存在性與性質

(二)如何在任意給定的 *m* 條圓弧線上取點作相似於標的 *m* 邊形的作法

柒、參考資料

一、100 個著名初等數學問體歷史和解答(凡異出版社)
二、臺北市第三七屆中小學科學展覽會數學科作品大海撈針
三、2015 年臺灣國際科學展覽會探討正 n 邊形的內接正三角形

【評語】050408

優點：

1. 本文給出在任意三角形中內接相似於某標的三角形之子三角形作法，並發現這無限多個子三角形都繞同一個中心旋轉及伸縮；接下來證明旋伸中心的存在及找到它的方法，並研究出與它有關的諸多性質。然後為將問題延伸到 n 邊形內接相似於某標的三角形、n 邊形內接相似於某標的 m 邊形的作法與解法數討論，最後發展到在 m 條直線上取點作相似於與某標的 m 邊形的子 m 邊形作法。有一定程度的結果。
2. 本作品主要將一三角形內接小三角問題作一般性推廣，及探討其相關數學性質，內容架構尚稱完整。
3. 雖然本作品作推廣，基本上還是利用三角形的性質來探討。

建議：

1. 未交代本作品引用參考資料哪些相關性資料，且須作文獻探討，藉以了解是否有相關文獻題及相關內容。
2. 本作品主要對相似多邊形幾何作圖探討，主要利用三角形的處理，題材內容缺乏創新。
3. 未交代可以求解之條件為何。

作品海報

壹、研究動機

我們在書中看到一個與探討三角形內接三角形性質有關的問題而產生興趣，便著手研究內接三角形作法。在翻閱一些資料後發現大多限制在三角形內接三角形的框架，於是我們試著將方向延伸到多邊形內接三角形，甚至多邊形內接多邊形，並推廣到在多條直線上取點作相似多邊形。

貳、研究目的

一、在三直線上取點作與標的三角形相似之子三角形作法研究與同組子三角形旋伸中心探討

二、內接於三角形且與標的三角形相似之子三角形作法研究

三、內接於 m 邊形且與標的 m 邊形相似之子 m 邊形作法研究與解法數討論

四、內接於 n 邊形且與標的 m 邊形相似之子 m 邊形作法研究

五、在 m 條直線上取點作與標的 m 邊形相似之子 m 邊形作法研究與解法數討論

六、內接於三角形且與標的三角形相似之同組子三角形旋伸中心相關性質研究與幾何、代數量計算

參、研究過程

一、名詞定義

(一)先任意給定一個 m 邊形作為接下來所要作的相似形對象，稱為「**標的 m 邊形**」。

(二)依序(i =1, 2,⋯, m)設定範圍 L_i (可為直線或直線上的部分圖形)後，在每一 L_i 上取出點 E_i'，作出與標的 m 邊形 $E_1E_2\cdots E_m$ 相似的 m 邊形 $E_1'E_2'\cdots E_m'$(其中 E_i' 為 E_i 之對應點)， 稱為「**子 m 邊形**」。收集所有子 m 邊形而成之集合表示成「**{m 邊形 $E_1E_2\cdots E_m$ ($L_1\times L_2\times\cdots\times L_m$)}**」。

(三)兩個相似多邊形對應頂點繞行時針方向，若相同則稱「**同相似**」；若相反則稱「**反相似**」。

(四){m 邊形 $E_1E_2\cdots E_m$ ($L_1\times L_2\times\cdots\times L_m$)}中的子 m 邊形 $E_1'E_2'\cdots E_m'$ 與 m 邊形 $E_1E_2\cdots E_m$ 同相似者稱為「**同子 m 邊形**」；反相似者稱為「**反子 m 邊形**」。而收集所有同子 m 邊形之集合 表成「**{同 m 邊形 $E_1E_2\cdots E_m$ ($L_1\times L_2\times\cdots\times L_m$)}**」；收集所有反子 m 邊形之集合表成「**{反 m 邊形 $E_1E_2\cdots E_m$ ($L_1\times L_2\times\cdots\times L_m$)}**」。

(五)元素屬於同一個{同 m 邊形 $E_1E_2\cdots E_m$($L_1\times L_2\times\cdots\times L_m$)}或屬於同一個{反 m 邊形 $E_1E_2\cdots E_m$ ($L_1\times L_2\times\cdots\times L_m$)}者，稱為「**同組子 m 邊形**」。

(六)同一個{同 m 邊形 $E_1E_2\cdots E_m$($L_1\times L_2\times\cdots\times L_m$)}或同一個{反 m 邊形 $E_1E_2\cdots E_m$ ($L_1\times L_2\times\cdots\times L_m$)}中的所有同組子 m 邊形有時會繞同一點旋轉及伸縮、有時只有伸縮，稱此點為該同組子 m 邊形的「**旋伸中心**」，底下習慣以 R 表之。

(七)同一個{同 m 邊形 $E_1E_2\cdots E_m$($L_1\times L_2\times\cdots\times L_m$)}或同一個{反 m 邊形 $E_1E_2\cdots E_m$ ($L_1\times L_2\times\cdots\times L_m$)}中的所有同組子 m 邊形 $E_1'E_2'\cdots E_m'$，其頂點 E_i' 在 L_i 上的變動範圍以「**S_i{同 m 邊形 $E_1E_2\cdots E_m$($L_1\times L_2\times\cdots\times L_m$)}**」或「**$S_i${反 m 邊形 $E_1E_2\cdots E_m$($L_1\times L_2\times\cdots\times L_m$)}**」表之。

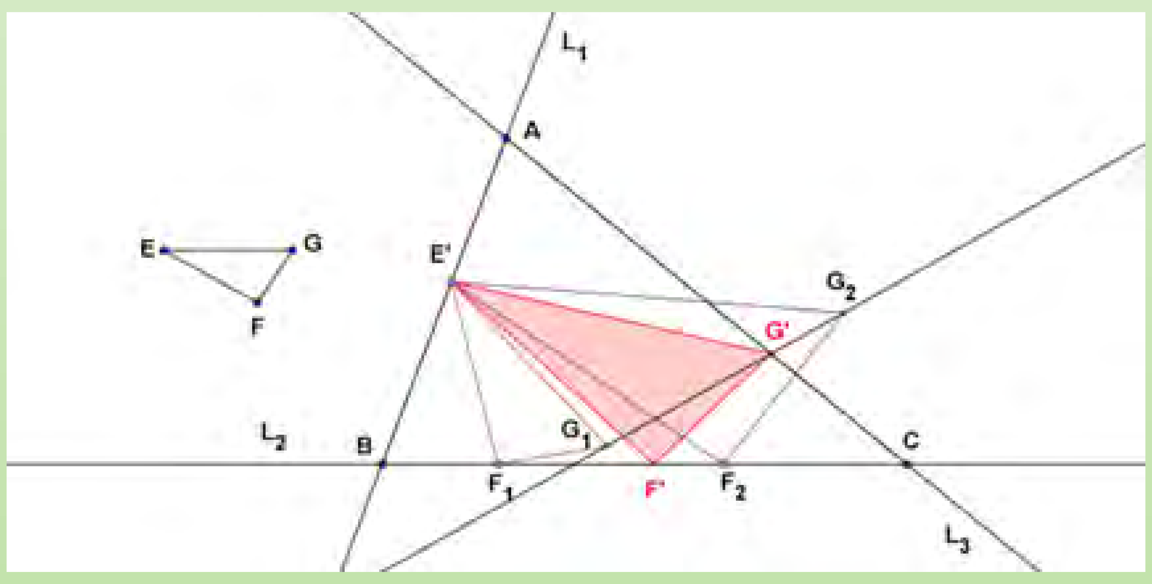
二、<引理二> 依序在任意三相異直線上取點作子三角形方法

[作法] 1.在 L_1 上取一點 E'

2.在 L_2 上任取兩點 F_1、F_2，分別作$\Delta E'F_1G_1$、$\Delta E'F_2G_2$ 相似於ΔEFG

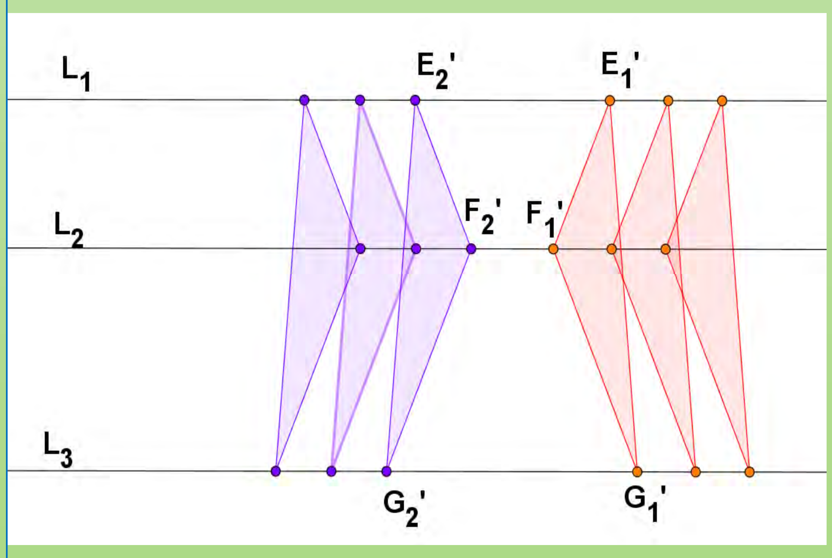
3.設直線 G_1G_2 交 L_3 於 G'

4.作$\Delta E'G'F'$ 相似於ΔEGF，則$\Delta E'F'G'$ 即為所求



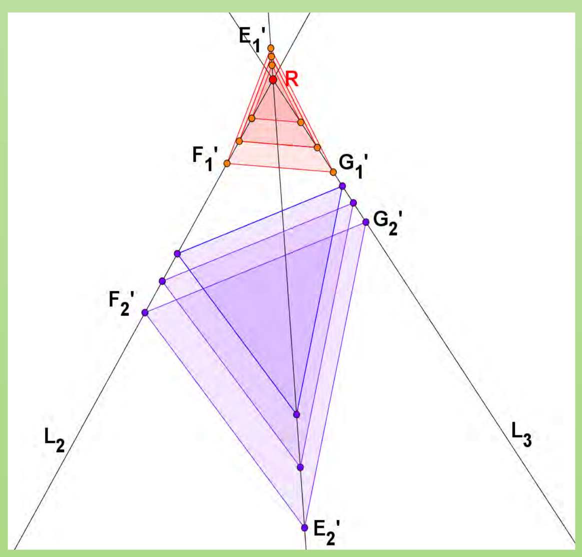
三、各型同組子三角型變動方式

<型 a>三線平行：



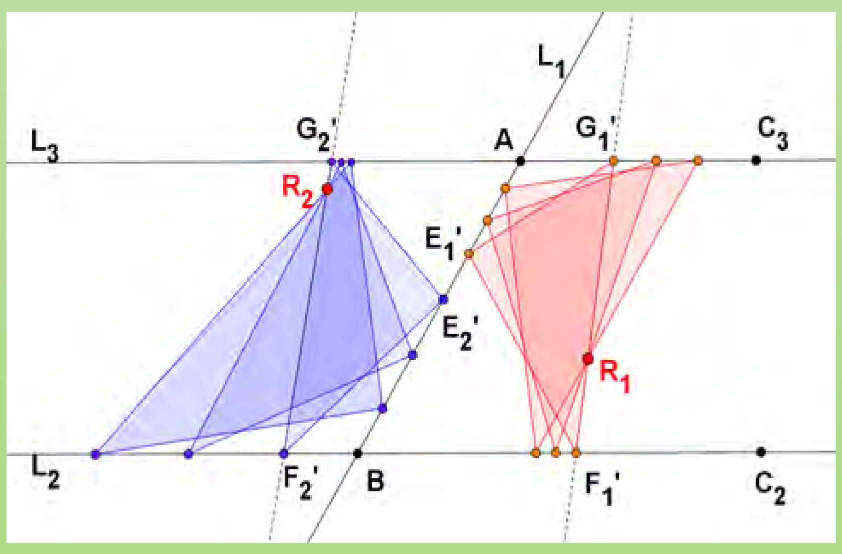
僅平移。

<型 b>三線共點：



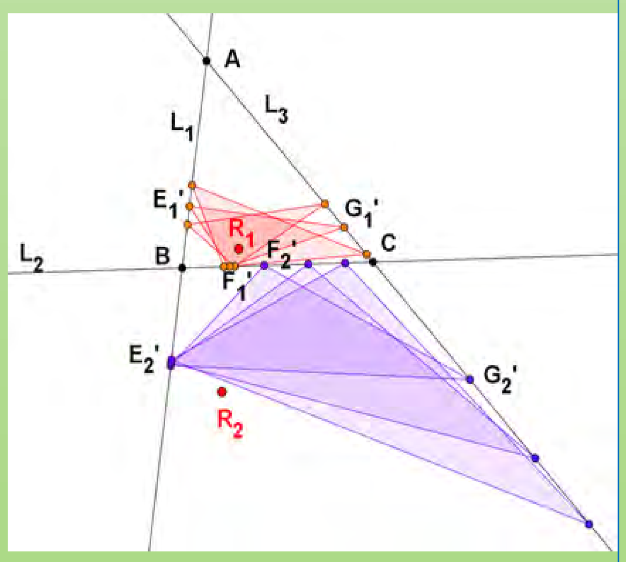
僅伸縮，伸縮中心(R)在三直線交點。

<型 c>兩線平行：



會旋轉及伸縮，旋轉中心(R_1、R_2)在子三角形兩平行線上之頂點的連線上。

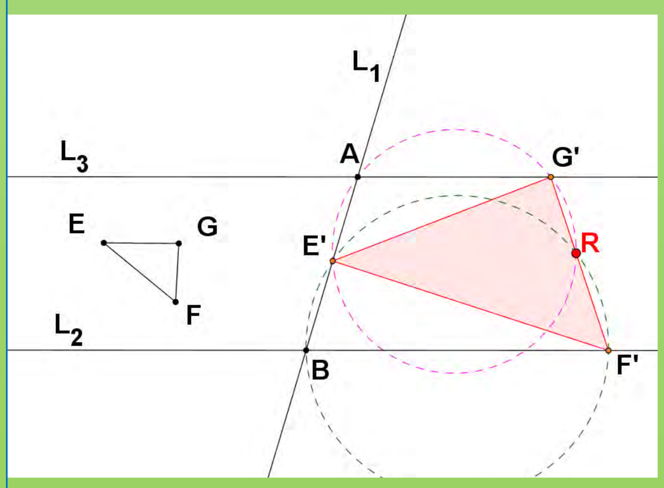
<型 d>圍三角形：



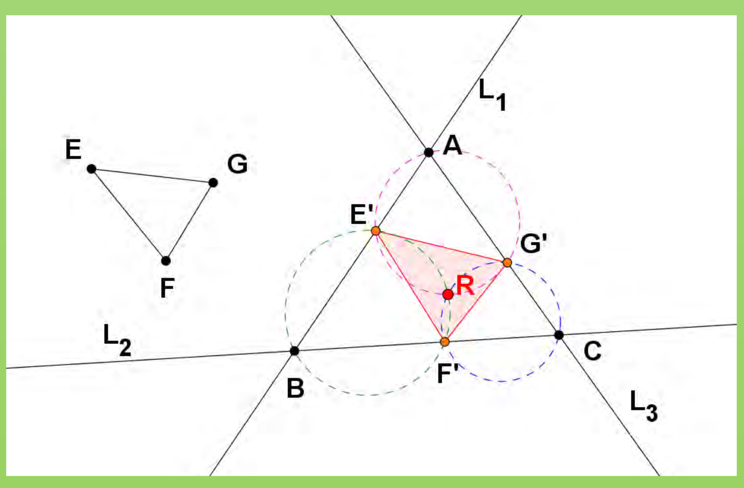
會旋轉及伸縮，旋伸中心為 R_1、R_2。

(一)<型 c>、<型 d>旋伸中心 R 找法

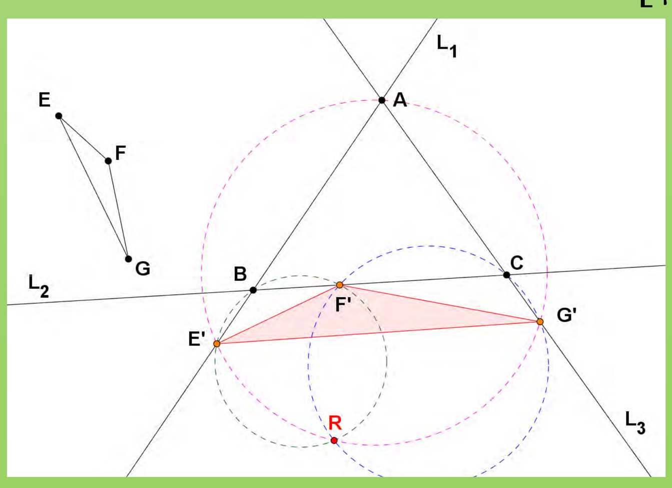
<型 c>



<型 d 內>



<型 d 側>

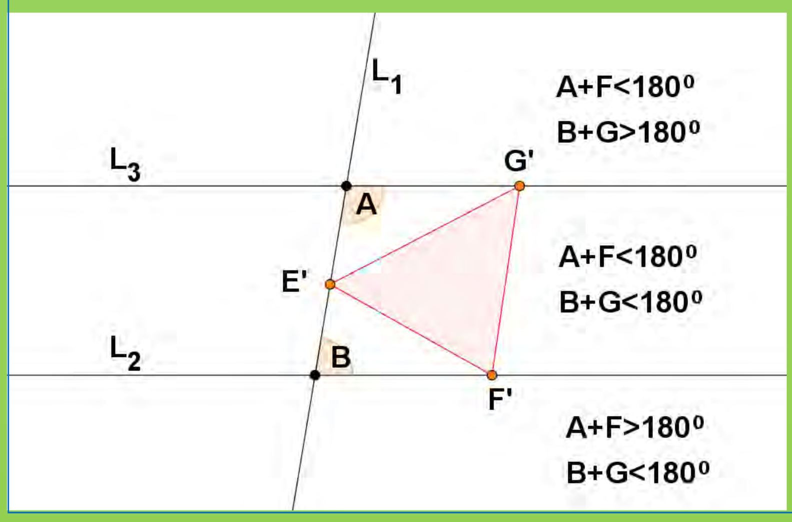


[作法] (1)先作一子$\Delta E'F'G'$

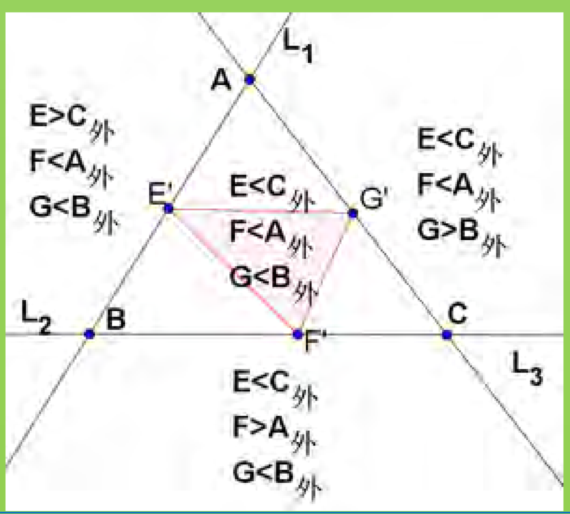
(2)分別作$\Delta AE'G'$、$\Delta BE'F'$、$\Delta CF'G'$ 的外接圓(<型 c>沒有$\Delta CF'G'$ 的外接圓)，則三圓會交於 一點 R 即為所求

(二)<型 c>、<型 d>旋伸中心 R 位置

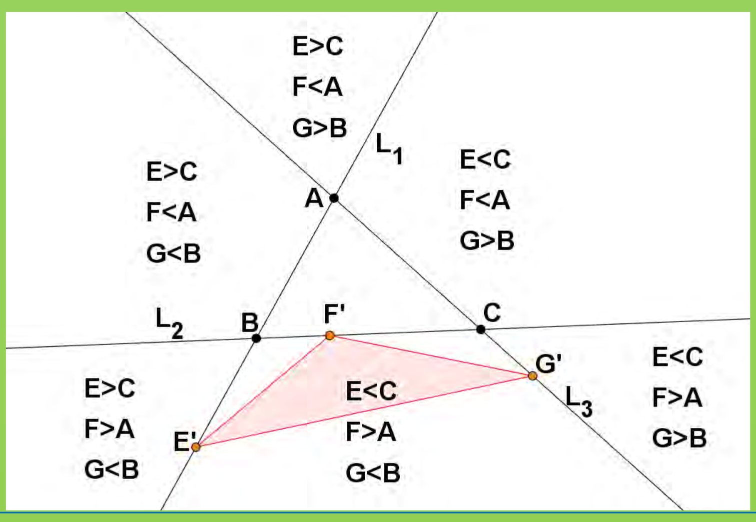
<型 c>



<型 d 內>

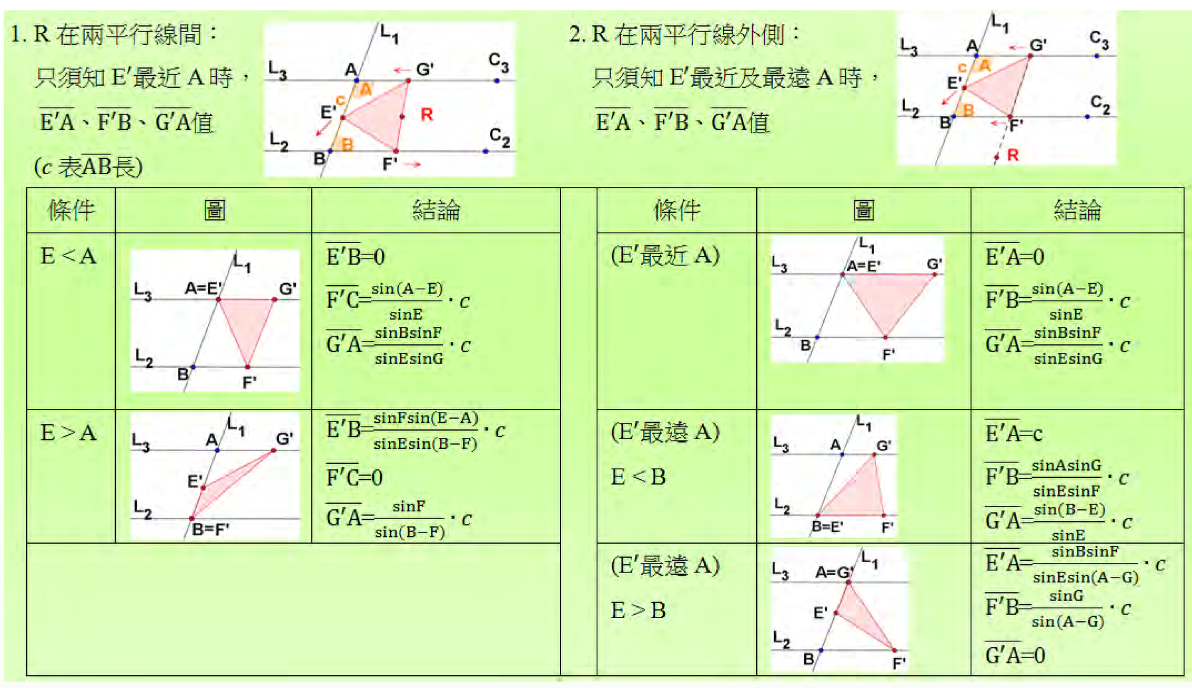


<型 d 側>



(三)<型 c>、<型 d>指定取點範圍時子三角形變動界限

<型 c> $E'\in\overline{AB}$、$F'\in\overrightarrow{BC_2}$、$G'\in\overrightarrow{AC_3}$



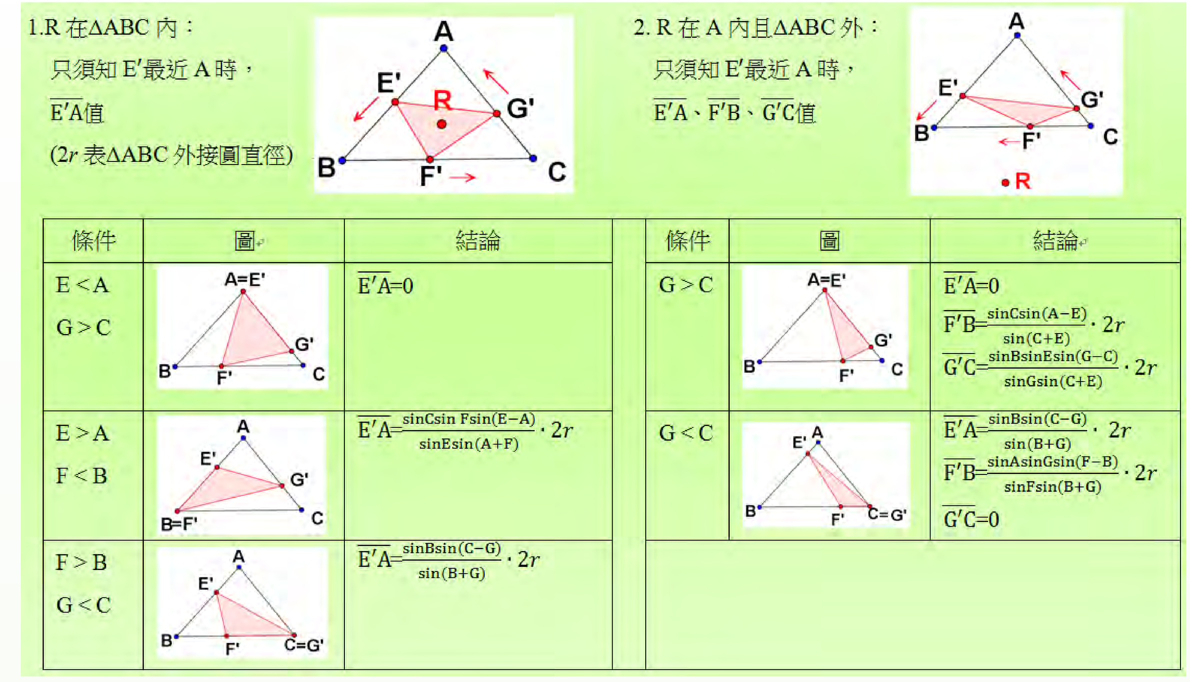
1. R 在兩平行線間：只須知 E'最近 A 時，$\overline{E'A}$、$\overline{F'B}$、$\overline{G'A}$值（c 表$\overline{AB}$長）

條件	圖	結論
E＜A		$\overline{E'B}=0$ $\overline{F'C}=\frac{\sin(A-E)}{\sin E}\cdot c$ $\overline{G'A}=\frac{\sin B\sin F}{\sin E\sin G}\cdot c$
E＞A		$\overline{E'B}=\frac{\sin F\sin(E-A)}{\sin E\sin(B-F)}\cdot c$ $\overline{F'C}=0$ $\overline{G'A}=\frac{\sin F}{\sin(B-F)}\cdot c$

2. R 在兩平行線外側：只須知 E'最近及最遠 A 時，$\overline{E'A}$、$\overline{F'B}$、$\overline{G'A}$值

條件	圖	結論
(E'最近 A)		$\overline{E'A}=0$ $\overline{F'B}=\frac{\sin(A-E)}{\sin E}\cdot c$ $\overline{G'A}=\frac{\sin B\sin F}{\sin E\sin G}\cdot c$
(E'最遠 A) E＜B		$\overline{E'A}=c$ $\overline{F'B}=\frac{\sin A\sin G}{\sin E\sin F}\cdot c$ $\overline{G'A}=\frac{\sin(B-E)}{\sin E}\cdot c$
(E'最遠 A) E＞B		$\overline{E'A}=\frac{\sin B\sin F}{\sin E\sin(A-G)}\cdot c$ $\overline{F'B}=\frac{\sin G}{\sin(A-G)}\cdot c$ $\overline{G'A}=0$

<型 d 內> $E'\in\overline{AB}$、$F'\in\overline{BC}$、$G'\in\overline{CA}$



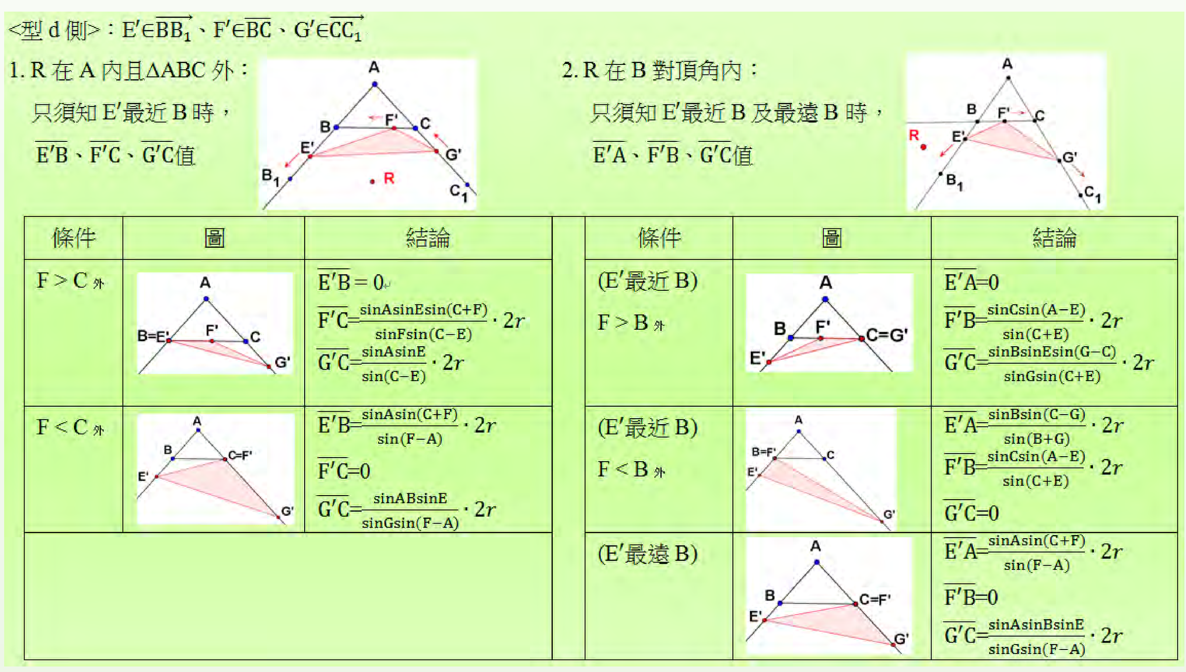
1.R 在ΔABC 內：只須知 E'最近 A 時，$\overline{E'A}$值（$2r$ 表ΔABC 外接圓直徑）

條件	圖	結論
E＜A G＞C		$\overline{E'A}=0$
E＞A F＜B		$\overline{E'A}=\frac{\sin C\sin F\sin(E-A)}{\sin E\sin(A+F)}\cdot 2r$
F＞B G＜C		$\overline{E'A}=\frac{\sin B\sin(C-G)}{\sin(B+G)}\cdot 2r$

2. R 在 A 內且ΔABC 外：只須知 E'最近 A 時，$\overline{E'A}$、$\overline{F'B}$、$\overline{G'C}$值

條件	圖	結論
G＞C		$\overline{E'A}=0$ $\overline{F'B}=\frac{\sin C\sin(A-E)}{\sin(C+E)}\cdot 2r$ $\overline{G'C}=\frac{\sin B\sin E\sin(G-C)}{\sin G\sin(C+E)}\cdot 2r$
G＜C		$\overline{E'A}=\frac{\sin B\sin(C-G)}{\sin(B+G)}\cdot 2r$ $\overline{F'B}=\frac{\sin A\sin G\sin(F-B)}{\sin F\sin(B+G)}\cdot 2r$ $\overline{G'C}=0$

<型 d 側> $E'\in\overrightarrow{BB_1}$、$F'\in\overline{BC}$、$G'\in\overrightarrow{CC_1}$



<型 d 側>：$E'\in\overrightarrow{BB_1}$、$F'\in\overline{BC}$、$G'\in\overrightarrow{CC_1}$

1. R 在 A 內且ΔABC 外：只須知 E'最近 B 時，$\overline{E'B}$、$\overline{F'C}$、$\overline{G'C}$值

條件	圖	結論
F＞C 外		$\overline{E'B}=0$ $\overline{F'C}=\frac{\sin A\sin E\sin(C+F)}{\sin F\sin(C-E)}\cdot 2r$ $\overline{G'C}=\frac{\sin A\sin E}{\sin(C-E)}\cdot 2r$
F＜C 外		$\overline{E'B}=\frac{\sin A\sin(C+F)}{\sin(F-A)}\cdot 2r$ $\overline{F'C}=0$ $\overline{G'C}=\frac{\sin AB\sin E}{\sin G\sin(F-A)}\cdot 2r$

2. R 在 B 對頂角內：只須知 E'最近 B 及最遠 B 時，$\overline{E'A}$、$\overline{F'B}$、$\overline{G'C}$值

條件	圖	結論
(E'最近 B) F＞B 外		$\overline{E'A}=0$ $\overline{F'B}=\frac{\sin C\sin(A-E)}{\sin(C+E)}\cdot 2r$ $\overline{G'C}=\frac{\sin B\sin E\sin(G-C)}{\sin G\sin(C+E)}\cdot 2r$
(E'最近 B) F＜B 外		$\overline{E'A}=\frac{\sin B\sin(C-G)}{\sin(B+G)}\cdot 2r$ $\overline{F'B}=\frac{\sin C\sin(A-E)}{\sin(C+E)}\cdot 2r$ $\overline{G'C}=0$
(E'最遠 B)		$\overline{E'A}=\frac{\sin A\sin(C+F)}{\sin(F-A)}\cdot 2r$ $\overline{F'B}=0$ $\overline{G'C}=\frac{\sin A\sin B\sin E}{\sin G\sin(F-A)}\cdot 2r$

四、<引理四>任意三直線 L_1、L_2、L_3不平行且不共點，若已知{同Δ$EFG(L_1\times L_2\times L_3)$}或{反Δ$EFG(L_1\times L_2\times L_3)$}旋伸中心 R 的位置，則可作出該組所有子三角形。而細部取點方式分成:

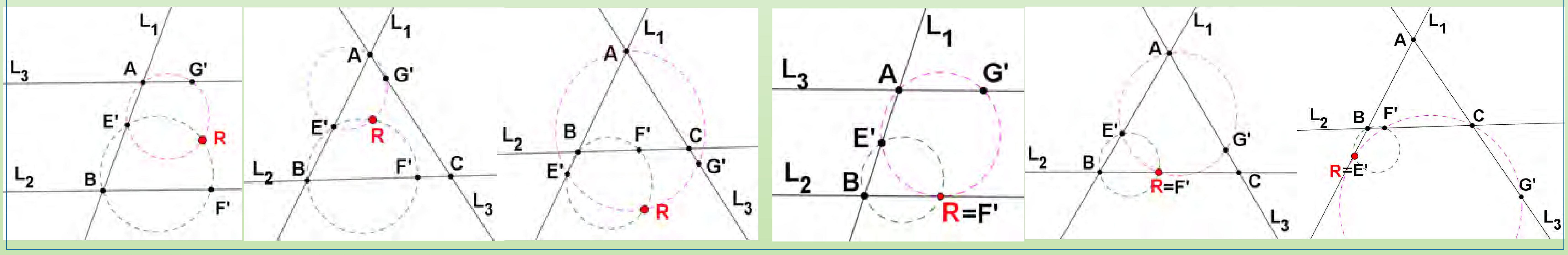
(一)若 R 不在 L_i上，則在 L_i上任取一點為頂點皆可作出該組所有子三角形

(二)若 R 在 L_i上，則在 L_i上須取 R 為頂點方可作出該組所有子三角形

底下以{同Δ$EFG(L_1\times L_2\times L_3)$}作說明，並設點 A、B、C 依序為 L_1與 L_2、L_2與 L_3、L_3與 L_1的交點(若 L_2與 L_3平行，則不設點 C)

[作法]1.設 R 不在 L_1上且在 L_1上任取一點，設為 E'：分別作ΔRE'A、ΔRE'B 的外接圓交 L_3、L_2於 G'、F'，則ΔE'F'G' 即為所求。

2.因<型 c>R 不會在 L_1上，所以統一設 R 在 L_2上且在 L_2上取 R 為頂點，設為 F'：任作一圓過點 R 與 A 且分別交 L_1、L_3於 E'、G'，則ΔE'F'G' 即為所求。



五、*m* 邊形作內接子 *m* 邊形的作法與解法數判斷

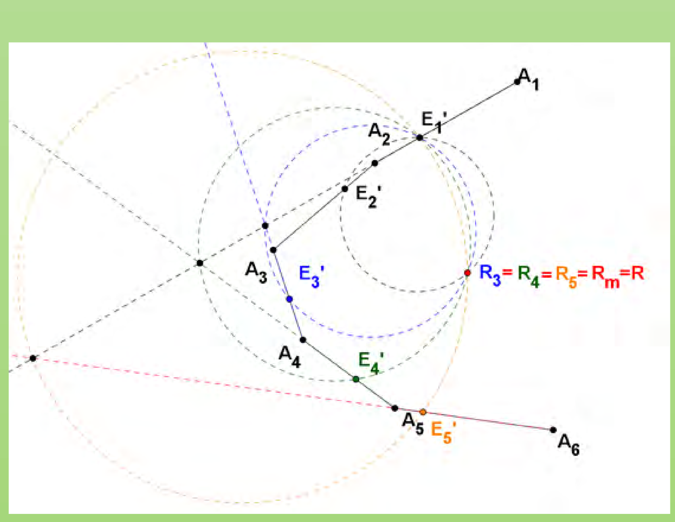
(一)[已知]標的 m 邊形 $E_1E_2\cdots E_m$與 m 邊形 $A_1A_2\cdots A_m$

[求作]m 邊形 $E_1'E_2'\cdots E_m'\in${同 m 邊形 $E_1E_2\cdots E_m(\prod_{k=1}^{m}\overline{A_kA_{k+1}})$}，其中 $A_{m+1}=A_1$

[作法] 1.依序作子 $\Delta E_{1k}'E_{2k}'E_k'\in${同$\Delta E_1E_2E_k(\overleftrightarrow{A_1A_2}\times\overleftrightarrow{A_2A_3}\times\overleftrightarrow{A_kA_{k+1}})$}，$3\le k\le m$， 再利用 $\Delta E_{1k}'E_{2k}'E_{k1}'$作出{同$\Delta E_1E_2E_k(\overleftrightarrow{A_1A_2}\times\overleftrightarrow{A_2A_3}\times\overleftrightarrow{A_kA_{k+1}})$}的旋伸中心 R_k

2.R_3、R_4、…、R_m所在位置區分三種，設 $S=\bigcap_{k=3}^{m}S_1${同$\Delta E_1E_2E_k(\overline{A_1A_2}\times\overline{A_2A_3}\times\overline{A_kA_{k+1}})$}

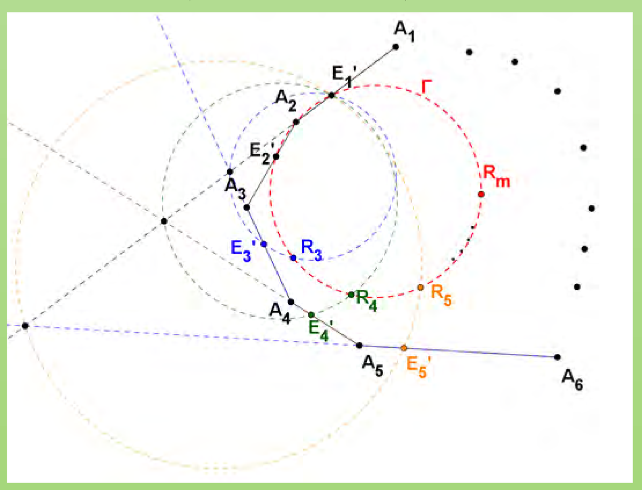
<情形 1>所有 R_k在同一位置(設為 R)



(1)若 $S=\phi$，則無法作出。

(2)若 $S\neq\phi$，則取 $E_1'\in S$，利用<引理四>依序做出 E_2'、E_3'、…、E_m'，可得 m 邊形 $E_1'E_2'\cdots E_m'$

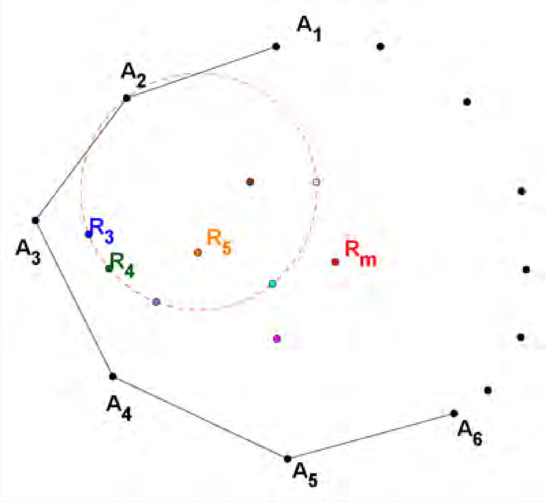
<情形 2>非所有 R_k在同一位置且 A_2與所有 R_k共圓(設此圓為Γ)



(1)若 $E_1'\notin S$，則無法作出。

(2)若 $E_1'\in S$，則利用<引理四>依序做出 E_2'、E_3'、…、E_m'，可得 m 邊形 $E_1'E_2'\cdots E_m'$

<情形 3>非所有 R_k在同一位置且 A_2與所有 R_k不共圓



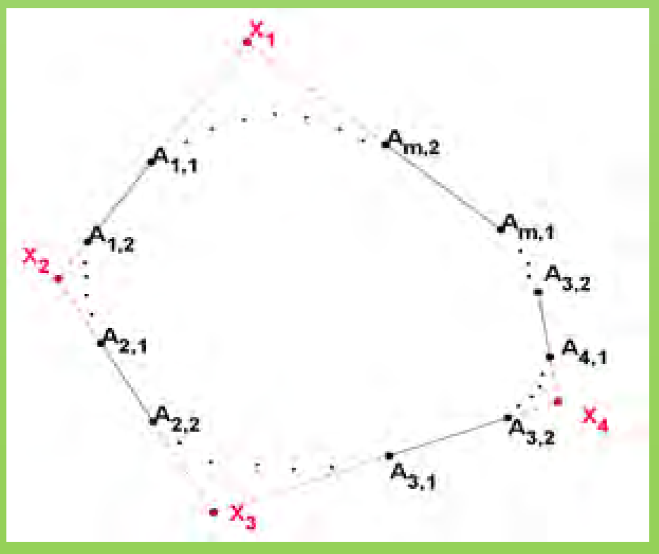
無法作出

由上述作法中我們得到{同 m 邊形 $E_1E_2\cdots E_m(\prod_{k=1}^{m}\overline{A_kA_{k+1}})$}中子 m 邊形解法數判斷方法：

(1)若所有 $R_k(3\le k\le m)$在同一位置(設為 R)且 $S\neq\phi$，則有無限多解且 R 為此組子 m 邊形的旋伸中心

(2)非所有 $R_k(3\le k\le m)$在同一位置時，若 A_2與所有 R_k共圓且此圓與 S 有交點，則有唯一解

(3)若非所有 $R_k(3\le k\le m)$在同一位置且 A_2不與所有 R_k共圓或非(1)(2)情形，則無解



(二)*n* 邊形作內接子 *m* 邊形的作法(*n*≥*m*)

欲在 n 邊形 $A_1A_2\cdots A_n$中作子 m 邊形 $E_1'E_2'\cdots E_m'\in${同 m 邊形 $E_1E_2\cdots E_m(\prod_{k=1}^{m}\overline{A_{k,1}A_{k,2}})$}

可先將被選定的 m 個邊延長使相鄰兩邊$\overline{A_{k,1}A_{k,2}}$、$\overline{A_{k+1,1}A_{k+1,2}}$的延長線交於 X_{k+1}，令 $X_{m+1}=X_1$。

再由**五、(一)**的方法在 m 邊形 $X_1X_2\cdots X_m$中作內接子 m 邊形 $E_1'E_2'\cdots E_m'\in${同 m 邊形 $E_1E_2\cdots E_m(\prod_{k=1}^{m}\overline{A_{k,1}A_{k,2}})$} 即可。

六、任意 m 條直線上取點作子 m 邊形的作法與解法數判斷

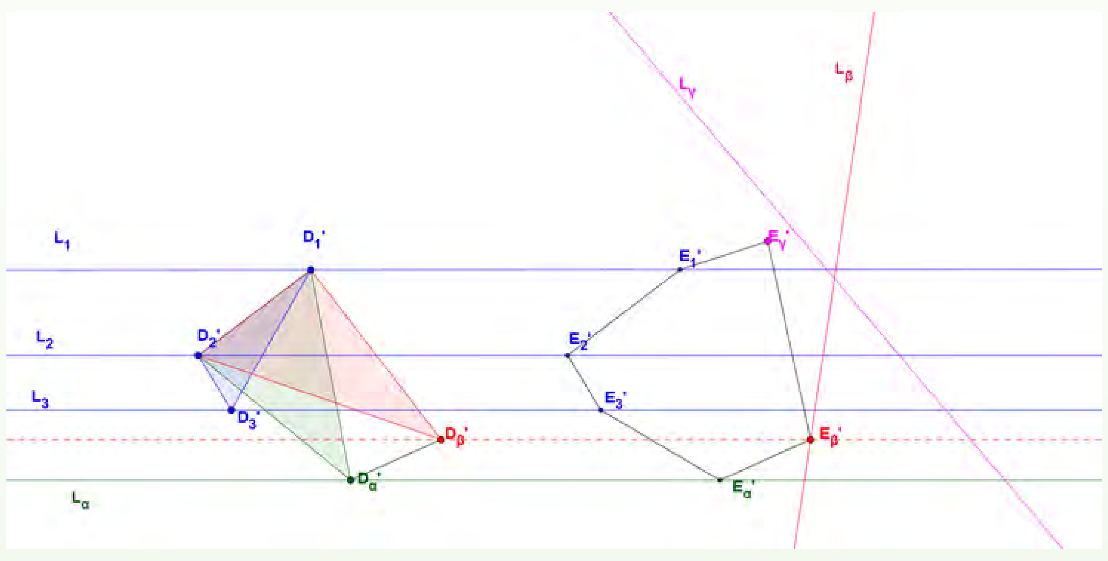
給定標的 m 邊形 $E_1E_2\cdots E_m$ 及任意 m 條直線 L_1、L_2、L_3、…、L_m，欲作子 m 邊形 $E_1'E_2'\cdots E_m'\in\{m$ 邊形 $E_1E_2\cdots E_m(\prod_{k=1}^{m} L_k)\}$。因同子 m 邊形與反子 m 邊形的作法與討論方式一樣，以下只討論同子 m 邊形，分三情形:

(一)沒有三條以上直線平行且沒有三條以上直線共點

仿**五、m 邊形作內接子 m 邊形的作法** 且不需考慮 S 在線上的位置。

(二)有三條以上直線平行

不失一般性設平行直線為 L_1、L_2、L_3，另設其他與 L_1 平行的直線為 $L_\alpha(\alpha\in N_1)$；其他與 L_1 不平行的直線為 $L_\beta(\beta\in N_2)$。先作子$\Delta D_1'D_2'D_3'\in\{$同$\Delta E_1E_2E_3(L_1\times L_2\times L_3)\}$，再依序作$\Delta D_1'D_2'D_\alpha'$ 同相似於$\Delta E_1E_2E_\alpha$ $(\alpha\in N_1)$



1.有一 $D_\alpha'(\alpha\in N_1)$不在 L_α上時，則無解。

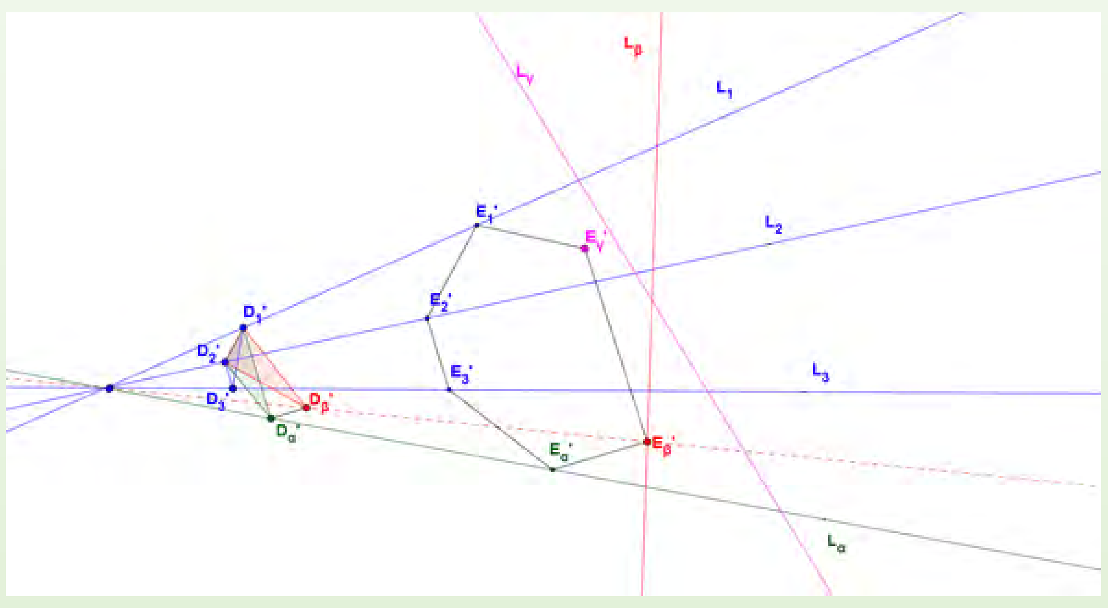
2.所有 $D_\alpha'(\alpha\in N_1)$皆在 L_α上且 $N_2=\phi$ 時，則作出的 m 邊形 $D_1'D_2'\cdots D_m'$ 即為求。且無限多解。

3.所有 $D_\alpha'(\alpha\in N_1)$皆在 L_α上且 $N_2\neq\phi$ 時，先取一$\beta\in N_2$，作$\Delta D_1'D_2'D_\beta'$ 同相似於$\Delta E_1E_2E_\beta$；接著過 D_β' 作 L_1 的平行線交 L_β 於 E_β'；再過 E_β' 依序作直線平行於 $\overline{D_\beta'D_\alpha'}$ 且交 L_α於 $E_\alpha'(\alpha\in N_1)$；最後依序作$\Delta E_1'E_2E_\gamma'$ 同相似於$\Delta E_1E_2E_\gamma(\gamma\in N_2-\{\beta\})$

(1)所有 $E_\gamma'(\gamma\in N_2-\{\beta\})$皆在 L_γ上時，作出的 m 邊形 $E_1'E_2'\cdots E_m'$ 即為所求。且有唯一解。

(2)有一 $E_\gamma'(\gamma\in N_2-\{\beta\})$不在 L_γ上時，無解。

(三)有三條以上直線共點



不失一般性設共點 R 的直線為 L_1、L_2、L_3，另設其他通過 R 的直線為 $L_\alpha(\alpha\in N_1)$；其他不通過 R 的直線為 $L_\beta(\beta\in N_2)$。先作子$\Delta D_1'D_2'D_3'\in\{$同$\Delta E_1E_2E_3(L_1\times L_2\times L_3)\}$，再依序作$\Delta D_1'D_2'D_\alpha'$ 同相似於$\Delta E_1E_2E_\alpha$ $(\alpha\in N_1)$

1.有一 D_α' 不在 L_α上時，則無解。

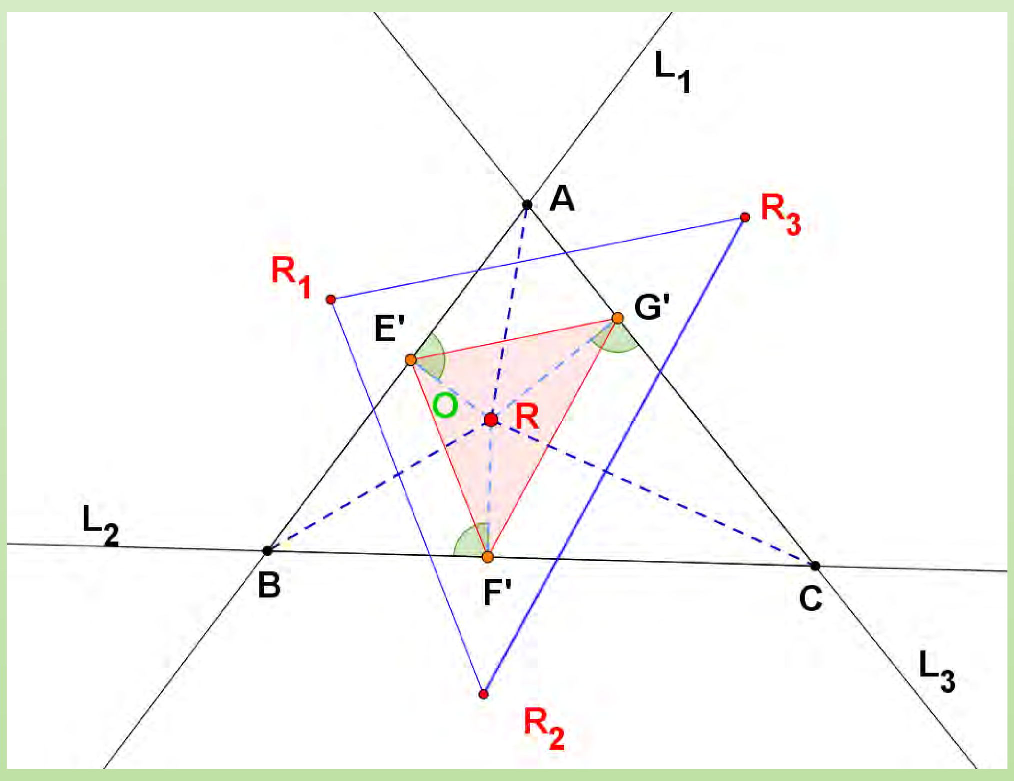
2.所有 $D_\alpha'(\alpha\in N_1)$皆在 L_α上且 $N_2=\phi$ 時，則作出的 m 邊形 $D_1'D_2'\cdots D_m'$ 即為所求。且有無限多解。

3.所有 $D_\alpha'(\alpha\in N_1)$皆在 L_α上且 $N_2\neq\phi$ 時，先取一$\beta\in N_2$，作$\Delta D_1'D_2'D_\beta'$ 同相似於$\Delta E_1E_2E_\beta$；接著作直線 RD_β' 交 L_β於 E_β'；再過 E_β' 依序作直線平行於 $\overline{D_\beta'D_\alpha'}$ 且交 L_α於 $E_\alpha'(\alpha\in N_1)$；最後依序作$\Delta E_1'E_2'E_\gamma'$ 同相似於$\Delta E_1E_2E_\gamma(\gamma\in N_2-\{\beta\})$

(1)所有 $E_\gamma'(\gamma\in N_2-\{\beta\})$皆在 L_γ上時，作出的 m 邊形 $E_1'E_2'\cdots E_m'$ 即為所求。且有唯一解。

(2)有一 $E_\gamma'(\gamma\in N_2-\{\beta\})$不在 L_γ上時，無解。

七、探討同組子三角形旋伸中心 R 的一些性質



(一)子$\Delta E'F'G'$ 在變動過程中，R 到三頂點 E'、F'、G' 連線依序與 L_1、L_2、L_3夾等角。

(二)R 到子$\Delta E'F'G'$三頂點的距離比 $\overline{RE'}:\overline{RF'}:\overline{RG'}=\frac{\sin(C+E)}{\sin E}:\frac{\sin(A+F)}{\sin F}:\frac{\sin(B+G)}{\sin G}$。

(三)若 R 關於ΔABC 三邊 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CA}$的對稱點分別為 R_1、R_2、R_3，則$\Delta R_1R_2R_3\sim\Delta EFG$

(四)R 到ΔABC 三頂點的距離比$\overline{RA}:\overline{RB}:\overline{RC}=\frac{\sin F}{\sin A}:\frac{\sin G}{\sin B}:\frac{\sin E}{\sin C}$

(五) $\tan\angle RE'F'=\frac{\sin E\sin B\sin(A+F)}{\sin F\sin(C+E)+\sin E\cos B\sin(A+F)}$。

(六)座標化公式

令ΔABC 之頂點座標為$(X_A, Y_A)(X_B, Y_B)(X_C, Y_C)$

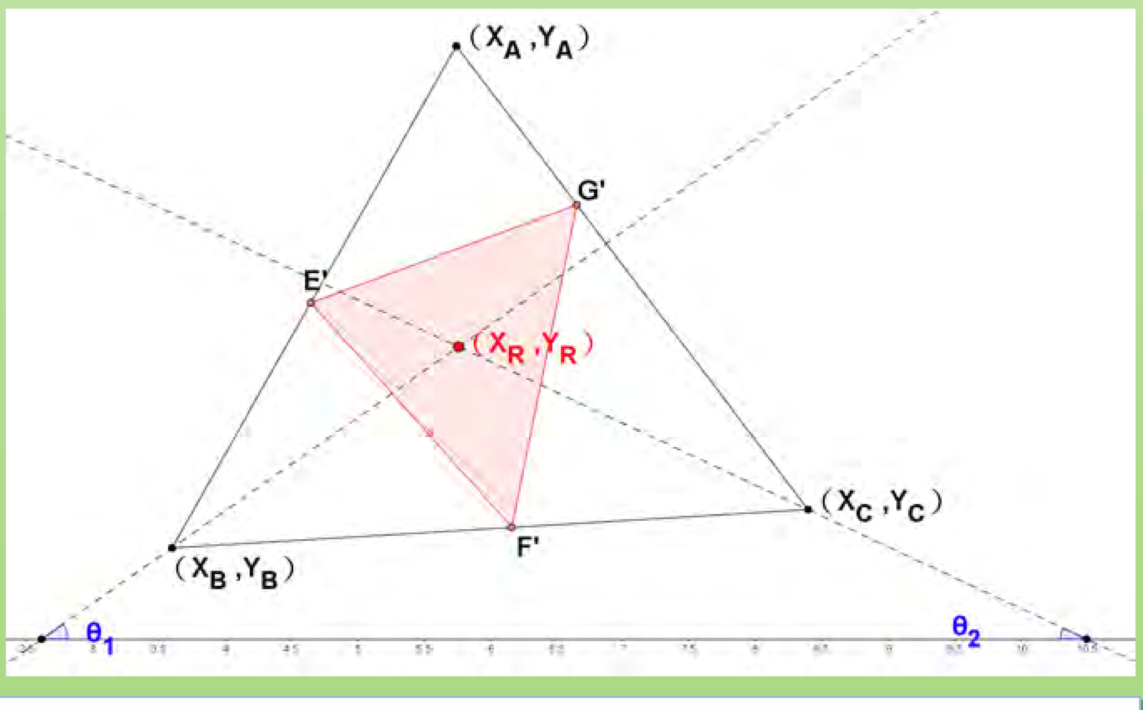
R 之座標為(X_R, Y_R)

$$X_R=\frac{(Y_C-Y_B)+(\tan\theta_1X_B+\tan\theta_2X_C)}{\tan\theta_1+\tan\theta_2}$$

$$Y_R=\frac{(\tan\theta_1Y_C+\tan\theta_2Y_B)+\tan\theta_1\tan\theta_2(X_C-X_B)}{\tan\theta_1+\tan\theta_2}$$

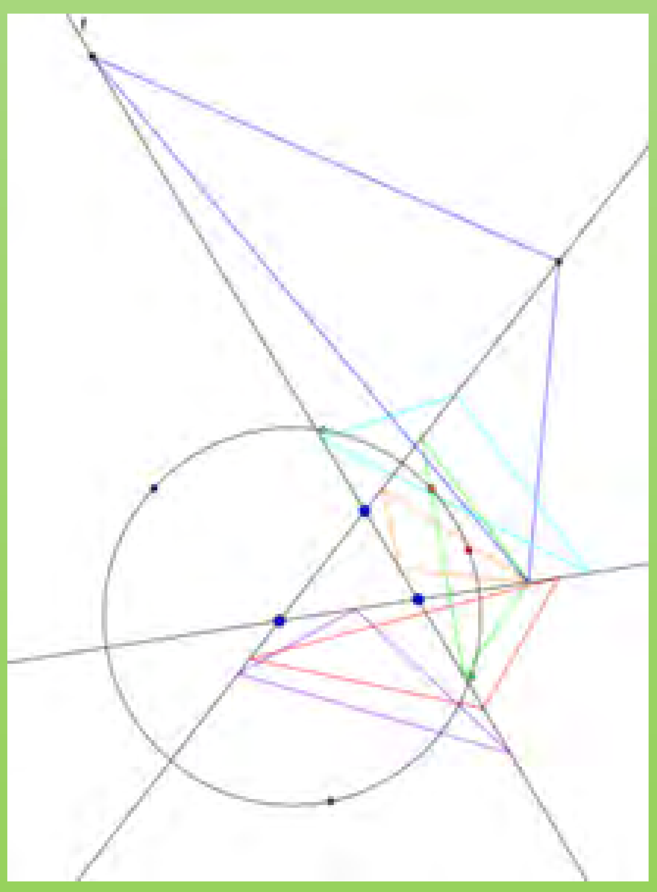
$$\tan\theta_1=\frac{[\sin F\sin(C+E)+\sin E\cos B\sin(A+F)](Y_C-Y_B)-\sin E\sin B\sin(A+F)(X_C-X_B)}{[\sin F\sin(C+E)+\sin E\cos B\sin(A+F)](X_C-X_B)-\sin E\sin B\sin(A+F)(Y_C-Y_B)}$$

$$\tan\theta_2=\frac{[\sin F\sin(B+G)+\sin G\cos C\sin(A+F)](Y_B-Y_C)-\sin G\sin C\sin(A+F)(X_B-X_C)}{[\sin F\sin(B+G)+\sin G\cos C\sin(A+F)](X_B-X_C)-\sin G\sin C\sin(A+F)(Y_B-Y_C)}$$



肆、展望

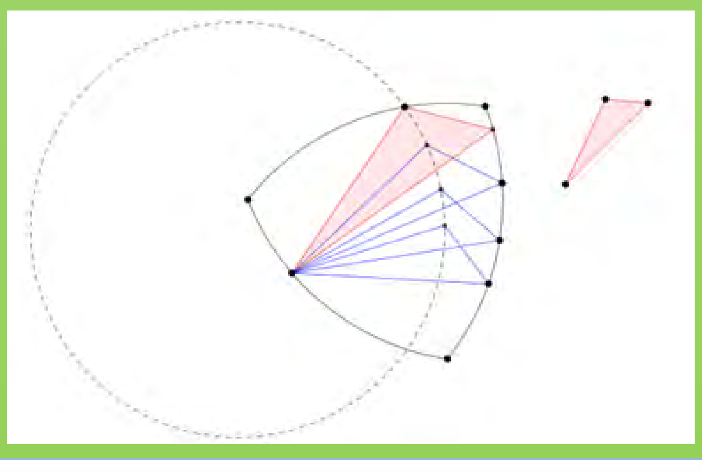
一、曾在其他報告中看見在三直線取不同對應點及將同、反兩種相似三角形都考慮進來，共得六個同組子三角形，其六個旋伸中心會共圓，但沒詳細解釋這個現象。



(一)改變三直線相對位置，例如兩線平行。在三直線取不同對應點並只考慮同或反相似得三個同組子三角形，其三個旋伸中心會與標的三角形相似。

(二)提高直線數 m，且在直線取不同對應點及將同、反兩種相似子 m 邊形都考慮進來。在甚麼條件下才可能使不同組子 m 邊形有旋伸中心?若有時間再研究其相對位置關係。

二、在三角形作內接相似於標的三角形的子三角形發展成在勒洛三角形作內接子三角形，我們已掌握作法。



(一)同組子三角形旋伸中心的存在性與性質

(二)如何在任意給定的 m 條圓弧線上取點作相似於標的 m 邊形的作法

伍、參考資料

一、100 個著名初等數學問體歷史和解答(凡異出版社)

二、臺北市第三七屆中小學科學展覽會數學科作品大海撈針

三、2015 年臺灣國際科學展覽會探討正 n 邊形的內接正三角形