中華民國第 57 屆中小學科學展覽會
作品說明書

高級中等學校組　數學科

佳作

050406

面積最大值定點

學校名稱：國立鳳山高級中學

作者：	指導老師：
高二 姜文闕 高二 王睿紳 高二 陳永紳	鍾永鴻 許純瑋

關鍵詞：面積最大值、定點

摘　　要

此篇作品旨在探討兩動點 P、Q 同時由原點 O 出發，沿直角 ΔOAB 的邊界運動，Q 點以每秒 1 單位的速率順時針方向運動，P 點以每秒 $v(\geq 1)$單位的速率逆時針方向運動時，在 P、Q 兩點相遇之前，ΔOPQ 面積的最大值為何？當面積達最大時，P、Q 兩點的位置是否有特殊現象或性質。更進一步，將其推廣到一般三角形，當 ΔOPQ 面積達最大時，P、Q 兩點的位置是否也有這樣的現象或性質。再者，探討在任意三角形中，以速率 v 為變數時，ΔOPQ 的最大面積函數 $F(v)$的圖形。最後，則將其推廣到正 n 邊形，其中 $n=4$，5，6，8。

壹、研究動機

在專題研究的課程中，老師給我們第十三屆 JHMC 國中數學競賽中，個人賽第四回第 7 題的題目：「直線 $y=-\frac{4}{3}x+8$ 與 x、y 軸分別交於 A、B 兩點，動點 P、Q 分別從原點 O 同時出發，P 點以每秒 2 單位的速率沿著 ΔOAB 的邊界逆時針運動，Q 點沿著 ΔOAB 的邊界順時針以每秒 1 單位的速率運動，一直到 P、Q 兩點移動到 B 點相遇時就停止。試問 P、Q 的運動過程中，面積的最大值為 _____ 。」

當我們將 P 點的速率改為每秒 1 單位或 3 單位時，發現其面積最大值與速率 v 成反比，當面積達最大時，P 點位置竟然不受速率 v 的影響，這樣特殊的點，我們稱它為面積最大值定點，或簡稱為定點。這是一道簡單又有趣的題目，經網路查詢之後，無相關的文獻資料。於是，我們就以「面積最大值定點」為題目，開始我們的研究。

貳、研究目的

一、在直角 ΔOAB 中，探討 P 點在不同速率下，於 P、Q 兩點相遇之前，ΔOPQ 面積的最大值、此時 P、Q 的坐標及其幾何意義。

二、在一般 ΔOAB 中，探討 P 點在不同速率下，於 P、Q 兩點相遇之前，ΔOPQ 面積的最大值、此時 P、Q 的坐標及其幾何意義。

三、在任意 ΔOAB 中，以速率 v 為變數，探討最大面積函數 $F(v)$的圖形，並且比較其差異性。

四、在正 n 邊形中，$n=4$、5、6、8，探討 P 點在不同速率下，於 P、Q 兩點相遇之前，ΔOPQ 面積的最大值、此時 P、Q 的坐標及其幾何意義。

參、研究設備及器材

電腦、Word、Geogebra、Gsp 數學繪圖軟體、紙、筆。

肆、研究過程及方法

研究一：直角三角形 *OAB*

【範例 1】

在直角 ΔOAB 中，$O(0,0)$，$A(6,0)$，$B(0,8)$，兩動點 P、Q 同時由原點 O 出發，沿 ΔOAB 的邊界運動，Q 點以每秒 1 單位的速率順時針方向運動，P 點以每秒 $v(\geq 1)$單位的速率逆時針方向運動。若 P 在 $\overline{OA}$ 上且 Q 在 $\overline{OB}$ 上，則 ΔOPQ 面積為遞增；若 P、Q 同時在 $\overline{AB}$ 上，則 ΔOPQ

面積為遞減。故考慮 P 在 $\overline{AB}$ 上且 Q 在 $\overline{OB}$ 上，如圖 1-1。則在時間 t 秒時，

$P(\frac{48}{5}-\frac{3}{5}vt,\frac{4}{5}(vt-6))$ ，$Q(0,t)$ ，此時 ΔOPQ 面積為

$f(t)=\frac{1}{2}t\cdot\frac{48-3vt}{5}=-\frac{3v}{10}\left[(t-\frac{8}{v})^2-\frac{64}{v^2}\right]$，其中 $\frac{6}{v}\le t\le 8$ 。$\cdots(a)$

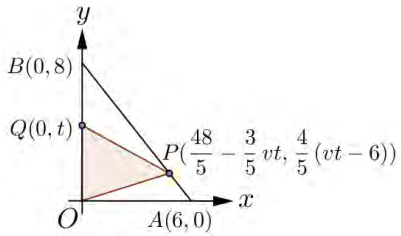


圖 1-1

因對 $v\ge 1$ ，頂點的橫坐標 $\frac{8}{v}$ 恆滿足 $\frac{6}{v}<\frac{8}{v}\le 8$ ，故由(a)得在 $t=\frac{8}{v}$ 時，

$f(t)$有最大值 $\frac{96}{5v}$ 。此時 $Q(0,\frac{8}{v})$ ，而 $P(\frac{24}{5},\frac{8}{5})$ 與速率 v 無關，故 P 點為面積最大值定點。

【範例 2】

在範例 1 中，若 $v=1$ 且 $\overline{AB}<8$，則 P 點到 $(\frac{24}{5},\frac{8}{5})$ 時，Q 點已繞過 B 點，面積開始遞減。

因此考慮將 B 點坐標改為 $B(0,7)$，$\overline{AB}=\sqrt{85}=c$ ，若 P 在 $\overline{AB}$ 上且 Q 在 $\overline{OB}$ 上，則在時間 t 秒時，$P(\frac{6}{c}(6+c-vt),\frac{7}{c}(vt-6))$ ，$Q(0,t)$ ，此時 ΔOPQ 面積為

$$f(t)=\frac{1}{2}t\cdot\frac{6(6+c-vt)}{c}=-\frac{3v}{c}\left[(t-\frac{6+c}{2v})^2-\frac{(6+c)^2}{4v^2}\right]，其中\frac{6}{v}\le t\le 7 。\cdots\cdots\cdots\cdots(b)$$

(1)若 $\frac{6+c}{2v}\ge 7$ ，即 $1\le v\le\frac{6+c}{14}$ 時，由(b)得 $f(t)$在 $t=7$ 時有最大值 $\frac{21(6+c-7v)}{c}$ 。

此時 $P(\frac{36+6c-42v}{c},\frac{49v-42}{c})$ ，而 $Q(0,7)$為面積最大值定點。

(2)若 $\frac{6}{v}\le\frac{6+c}{2v}\le 7$ ，即 $v\ge\frac{6+c}{14}$ 時，由(b)得 $f(t)$在 $t=\frac{6+c}{2v}$ 時有最大值 $\frac{3(6+c)^2}{4cv}$ 。

此時 $Q(0,\frac{6+c}{2v})$ ，而 $P(\frac{3(6+c)}{c},\frac{7(c-6)}{2c})$ 為面積最大值定點。

【幾何觀點】

在範例 1 中，我們發現：「對於 $v\ge 1$ ，當 $vt=8$ 時，即 P 點走到 $\overline{OA}+\overline{AB}$ 路徑的中點時，ΔOPQ 面積會有最大值。」如何解釋此現象呢？

因 P 點速率較快，故在 P 點由 O 往 A 走的過程中，Q 點尚未到達 B，因此，在不影響結果的情況下，我們不妨設 P 點是由 C 出發，其中 B、A、C 三點共線且 $\overline{CA}=\overline{OA}=6$ 。以 $v=2$ 為例，如圖 1-2，Q 點每走 1 單位，ΔOPQ 的高就減少 1.2 單位，當 Q 點走了 t 單位時，ΔOPQ 的面積為

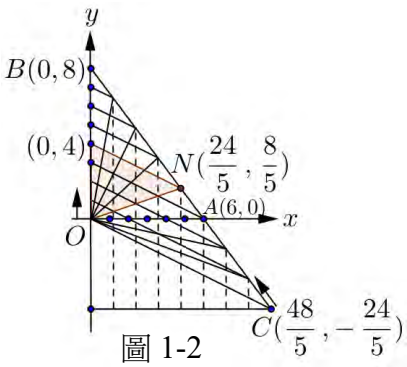


圖 1-2

$$\frac{1}{2}\cdot t\cdot(\frac{48}{5}-\frac{6}{5}t)=\frac{1}{2}\cdot t\cdot\frac{6}{5}(8-t)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(c)$$

由算幾不等式得

$$\frac{t+(8-t)}{2}\geq\sqrt{t(8-t)}$$

當 $t=8-t=4$ 時，ΔOPQ 的面積有最大值，此時，P 點恰走到 $\overline{OA}+\overline{AB}$ 路徑的中點 N。

一般而言，若邊長 $k=\overline{OB}\geq\overline{OA}=h$，$\overline{AB}=c$，速率 $v\geq 1$，則 ΔOPQ 的面積為

$$\frac{1}{2}\cdot t\cdot\frac{h}{c}(h+c-vt)=\frac{h}{2cv}\cdot vt\cdot(h+c-vt)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(d)$$

由算幾不等式得

$$\frac{vt+(h+c-vt)}{2}\geq\sqrt{vt(h+c-vt)}$$

當 $vt=h+c-vt=\frac{h+c}{2}$ 時，ΔOPQ 的面積有最大值，此時 P 點恰走到 N。於是可得：「只要 $\overline{OB}\geq\frac{\overline{OA}+\overline{AB}}{2}$，則對 $v\geq 1$，在 Q 走到 B 點之前，P 都會先走到 N，而且在此時面積有最大值。」

在範例 2 中，因為 $\overline{OB}=7<\frac{\overline{OA}+\overline{AB}}{2}=\frac{6+\sqrt{85}}{2}$，因此當 P 點速率較慢時，$1\leq v\leq\frac{6+c}{14}$，$P$ 點尚未走到 N，Q 點已先(含同時)走到 B 點，故 ΔOPQ 的面積最大值產生在 $P(\frac{36+6c-42v}{c},\frac{49v-42}{c})$，$Q(0,7)$的位置；但是，當 P 點速率夠快時，$v\geq\frac{6+c}{14}$，Q 點尚未走到 B 點，P 點已先(含同時)走到 N，故 ΔOPQ 的面積最大值產生在 $P(\frac{3(6+c)}{c},\frac{7(c-6)}{2c})$，$Q(0,\frac{6+c}{2v})$ 的位置。於是，將範例 1 與範例 2 一般化之後，我們得到定理 1.1 與定理 1.2。

定理 1.1：

直角 ΔOAB 中，$O(0,0)$，$A(h,0)$，$B(0,k)$，$k\geq h>0$，$\overline{AB}=c$，兩動點 P、Q 同時由原點 O 出發，沿 ΔOAB 的邊界運動，Q 點以每秒 1 單位的速率順時針方向運動，P 點以每秒 $v(\geq 1)$單位的速率逆時針方向運動。

(1)若 $2k\geq h+c$，則 P、Q 兩點在相遇之前，ΔOPQ 面積的最大值為 $\frac{h(h+c)^2}{8cv}$，

此時 $P(\frac{h(h+c)}{2c},\frac{k(c-h)}{2c})$ 為面積最大值定點，而 $Q(0,\frac{h+c}{2v})$。

(2)若 $2k<h+c$，

①當 $1\leq v\leq\frac{h+c}{2k}$ 時，則 P、Q 兩點在相遇之前，ΔOPQ 面積的最大值為 $\frac{hk(h+c-kv)}{2c}$，

此時 $P(\frac{h(h+c-kv)}{c},\frac{k(kv-h)}{c})$，而 $Q(0,k)$ 為面積最大值定點。

②當 $v\geq\frac{h+c}{2k}$ 時，則 P、Q 兩點在相遇之前，ΔOPQ 面積的最大值為 $\frac{h(h+c)^2}{8cv}$，此時

$P(\frac{h(h+c)}{2c},\frac{k(c-h)}{2c})$ 為面積最大值定點，而 $Q(0,\frac{h+c}{2v})$。

證明：

若 P 在 $\overline{OA}$ 上且 Q 在 $\overline{OB}$ 上時，ΔOPQ 面積為遞增；而若 P、Q 同時在 $\overline{AB}$ 上時，ΔOPQ 面積為遞減。故考慮 P 在 $\overline{AB}$ 上且 Q 在 $\overline{OB}$ 上，則在時間 t 秒時，$P(h-\frac{h}{c}(vt-h),\frac{k}{c}(vt-h))$，$Q(0,t)$。此時 ΔOPQ 面積為

$$f(t)=\frac{1}{2}\cdot t\cdot(h-\frac{h}{c}(vt-h))=-\frac{hv}{2c}(t^2-\frac{h+c}{v}t)=-\frac{hv}{2c}\left[(t-\frac{h+c}{2v})^2-\frac{(h+c)^2}{4v^2}\right]$$，其中 $\frac{h}{v}\le t\le k$ 。$\cdots(e)$

(1)若 $2k\ge h+c$，則對 $v\ge 1$，頂點的橫坐標 $\frac{h+c}{2v}$ 滿足

$\frac{h}{v}\le\frac{h+c}{2v}\le\frac{k}{v}\le k$，故由$(e)$得 $f(t)$在 $t=\frac{h+c}{2v}$ 時有

最大值 $\frac{h(h+c)^2}{8cv}$，此時 $Q(0,\frac{h+c}{2v})$，$P(\frac{h(h+c)}{2c},\frac{k(c-h)}{2c})$，

因 P 點坐標與速率 v 無關，故 P 點為面積最大值定點，

此 P 點位置恰為 $\overline{OA}+\overline{AB}$ 路徑的中點，如圖 1-3。

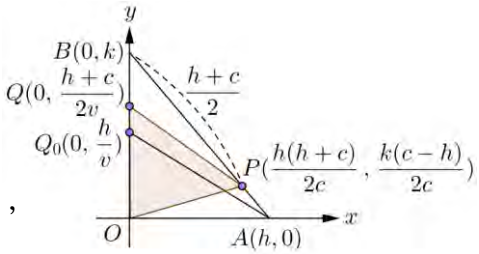


圖 1-3

(2)若 $2k<h+c$，則 $\frac{h+c}{2v}>\frac{k}{v}$

①當 $\frac{h+c}{2v}\ge k$，即 $1\le v\le\frac{h+c}{2k}$ 時，由(e)得 $f(t)$在 $t=k$ 時

有最大值 $\frac{hk(h+c-kv)}{2c}$，此時 $P(\frac{h(h+c-kv)}{c},\frac{k(kv-h)}{c})$，

而 $Q(0,k)$ 為面積最大值定點，如圖 1-4。

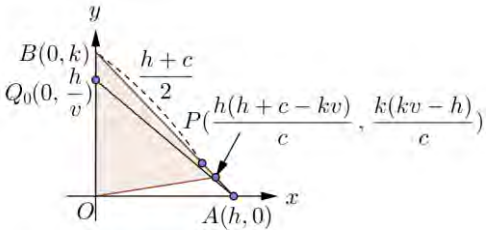


圖 1-4

②當 $\frac{h}{v}<\frac{h+c}{2v}\le k$，即時 $v\ge\frac{h+c}{2k}$，由(e)得 $f(t)$在

$t=\frac{h+c}{2v}$ 時有最大值 $\frac{h(h+c)^2}{8cv}$，此時 $Q(0,\frac{h+c}{2v})$，

而 $P(\frac{h(h+c)}{2c},\frac{k(c-h)}{2c})$ 面積最大值定點，此 P 點位置

恰為 $\overline{OA}+\overline{AB}$ 路徑的中點，如圖 1-5。 ■

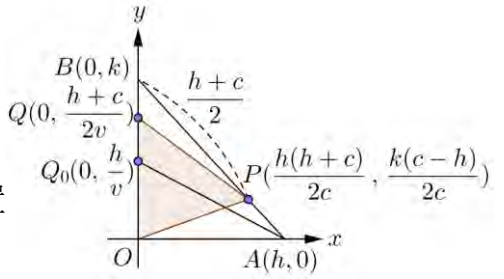


圖 1-5

定理 1.2：

直角 ΔOAB 中，$O(0,0)$，$A(h,0)$，$B(0,k)$，$h>k>0$，$\overline{AB}=c$，兩動點 P、Q 同時由原點 O 出發，沿 ΔOAB 的邊界運動，Q 點以每秒 1 單位的速率順時針方向運動，P 點以每秒 $v(\ge 1)$單位的速率逆時針方向運動。

(1)若 $2h\ge k+c$，

①當$1\le v\le \dfrac{2h}{k+c}$時，$P$、$Q$兩點在相遇之前，$\Delta OPQ$面積的最大值為$\dfrac{k(k+c)^2v}{8c}$，此時$P(\dfrac{k+c}{2}v,0)$，而$Q(\dfrac{h(c-k)}{2c},\dfrac{k(k+c)}{2c})$為面積最大值定點。

②當$\dfrac{2h}{k+c}\le v\le \dfrac{h}{k}$時，$P$、$Q$兩點在相遇之前，$\Delta OPQ$面積的最大值為$\dfrac{hk(kv+cv-h)}{2cv}$，此時$P(h,0)$為面積最大值定點，而$Q(\dfrac{h(h-kv)}{cv},\dfrac{k(kv+cv-h)}{cv})$。

③當$\dfrac{h}{k}\le v\le \dfrac{h+c}{2k}$時，$P$、$Q$兩點在相遇之前，$\Delta OPQ$面積的最大值為$\dfrac{hk(h+c-kv)}{2c}$，此時$P(\dfrac{h(h+c-kv)}{c},\dfrac{k(kv-h)}{c})$，而$Q(0,k)$為面積最大值定點。

④當$v\ge \dfrac{h+c}{2k}$時，P、Q兩點在相遇之前，ΔOPQ面積的最大值為$\dfrac{h(h+c)^2}{8cv}$，此時$P(\dfrac{h(h+c)}{2c},\dfrac{k(c-h)}{2c})$為面積最大值定點，而$Q(0,\dfrac{h+c}{2v})$。

(2)若$2h<k+c$，

①當$1\le v\le \dfrac{h}{k}$時，P、Q兩點在相遇之前，ΔOPQ面積的最大值為$\dfrac{hk(kv+cv-h)}{2cv}$，此時$P(h,0)$為面積最大值定點，而$Q(\dfrac{h(h-kv)}{cv},\dfrac{k(kv+cv-h)}{cv})$。

②當$\dfrac{h}{k}\le v\le \dfrac{h+c}{2k}$時，$P$、$Q$兩點在相遇之前，$\Delta OPQ$面積的最大值為$\dfrac{hk(h+c-kv)}{2c}$，此時$P(\dfrac{h(h+c-kv)}{c},\dfrac{k(kv-h)}{c})$，而$Q(0,k)$為面積最大值定點。

③當$v\ge \dfrac{h+c}{2k}$時，P、Q兩點在相遇之前，ΔOPQ面積的最大值為$\dfrac{h(h+c)^2}{8cv}$，此時$P(\dfrac{h(h+c)}{2c},\dfrac{k(c-h)}{2c})$為面積最大值定點，而$Q(0,\dfrac{h+c}{2v})$。

證明：

Case1.若在P點走到A之前，Q點先到B，則令$P_0(kv,0)$，在P點從P_0走到A之前，$P(vt,0)$，$Q(\dfrac{h(t-k)}{c},\dfrac{k(k+c-t)}{c})$，此時，$\Delta OBP_0$面積為$\dfrac{k^2v}{2}$，$\Delta OPQ$面積為

$g(t)=\dfrac{1}{2}\cdot vt\cdot\dfrac{k}{c}(k+c-t)=-\dfrac{kv}{2c}\left[(t-\dfrac{k+c}{2})^2-\dfrac{(k+c)^2}{4}\right]$，其中$k\le t\le \dfrac{h}{v}$。……$(f)$，如圖 1-6。

Case2.若在Q點走到B之前，P點先到A，則令$Q_0(0,\dfrac{h}{v})$，在Q點從Q_0走到B之前，若P點尚未到B，則$P(\dfrac{h(h+c-vt)}{c},\dfrac{k(vt-h)}{c})$，$Q(0,t)$，此時，$\Delta OAQ_0$面積為$\dfrac{h^2}{2v}$，$\Delta OPQ$面積為

$f(t)=\frac{1}{2}\cdot t\cdot\frac{h}{c}(h+c-vt)=-\frac{hv}{2c}\left[(t-\frac{h+c}{2v})^2-\frac{(h+c)^2}{4v^2}\right]$，其中 $\frac{h}{v}\le t\le k$ 。……(g)，如圖 1-7。

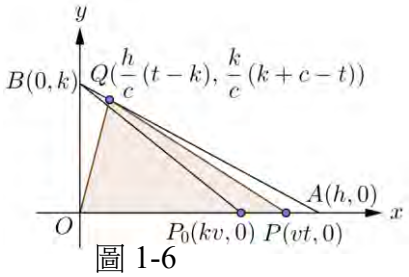


圖 1-6

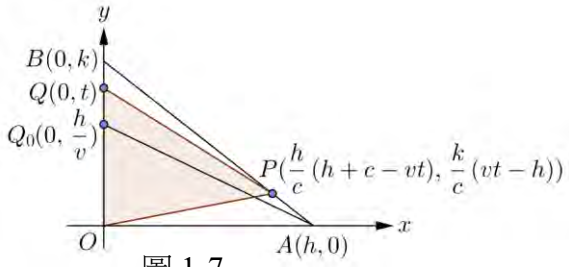


圖 1-7

(1)若 $2h\ge k+c$ ，則 $h\ge\frac{k+c}{2}$ 。

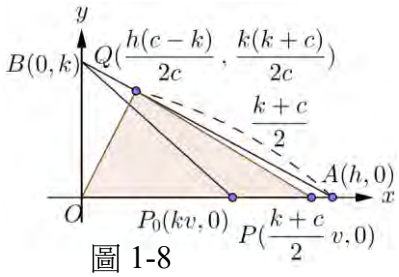


圖 1-8

①當 $k<\frac{k+c}{2}\le\frac{h}{v}$ ，即 $1\le v\le\frac{2h}{k+c}$ 時，由(f)得 $g(t)$在 $t=\frac{k+c}{2}$ 時有最大值 $\frac{kv(k+c)^2}{8c}$ ，此時 $P(\frac{k+c}{2}v,0)$ ，而 $Q(\frac{h(c-k)}{2c},\frac{k(k+c)}{2c})$ 為面積最大值定點，此 Q 點位置恰為 $\overline{OB}+\overline{BA}$ 路徑的中點，如圖 1-8。

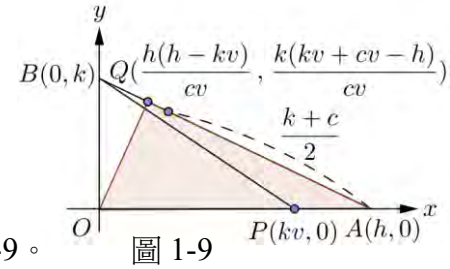


圖 1-9

②當 $\frac{k+c}{2}\ge\frac{h}{v}$ ，即 $\frac{2h}{k+c}\le v\le\frac{h}{k}$ 時，由(f)得 $g(t)$在 $t=\frac{h}{v}$ 時有最大值 $\frac{hk(kv+cv-h)}{2cv}$ ，此時 $P(h,0)$ 為面積最大值定點，而 $Q(\frac{h(h-kv)}{cv},\frac{k(kv+cv-h)}{cv})$ ，如圖 1-9。

③當 $\frac{h}{v}\le k$ 且 $\frac{h+c}{2v}\ge k$ ，即 $\frac{h}{k}\le v\le\frac{h+c}{2k}$ 時，由(g)得 $f(t)$在 $t=k$ 時有最大值 $\frac{hk(h+c-kv)}{2c}$ ，此時 $P(\frac{h(h+c-kv)}{c},\frac{k(kv-h)}{c})$ ，而 $Q(0,k)$ 為面積最大值定點，如圖 1-10。

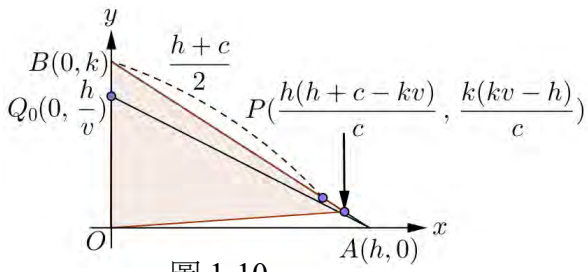


圖 1-10

④當 $\frac{h}{v}\le\frac{h+c}{2v}\le k$ ，即 $v\ge\frac{h+c}{2k}$ 時，由(g)得 $f(t)$在 $t=\frac{h+c}{2v}$ 時有最大值 $\frac{h(h+c)^2}{8cv}$ ，此時 $P(\frac{h(h+c)}{2c},\frac{k(c-h)}{2c})$ 為面積最大值定點，而 $Q(0,\frac{h+c}{2v})$ ，此 P 點位置恰為 $\overline{OA}+\overline{AB}$ 路徑的中點，如圖 1-11。

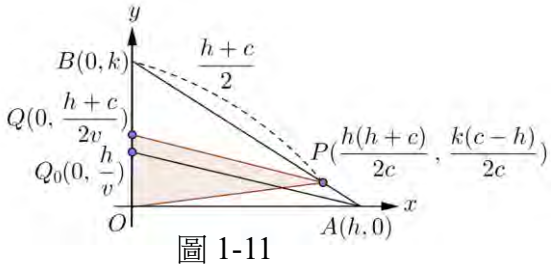


圖 1-11

(2)若 $2h<k+c$ ，則 $\frac{h}{v}\le h<\frac{k+c}{2}$ 。

①當 $\frac{h}{v}\ge k$，即 $1\le v\le\frac{h}{k}$ 時，由 (f) 得 $g(t)$ 在 $t=\frac{h}{v}$ 時有最大值 $\frac{hk(kv+cv-h)}{2cv}$，此時 $P(h,0)$ 為面積最大值定點，而 $Q(\frac{h(h-kv)}{cv},\frac{k(kv+cv-h)}{cv})$，如圖 1-9。

②當 $\frac{h}{v}\le k$ 且 $\frac{h+c}{2v}\ge k$，即 $\frac{h}{k}\le v\le\frac{h+c}{2k}$ 時，由 (g) 得 $f(t)$ 在 $t=k$ 時有最大值 $\frac{hk(h+c-kv)}{2c}$，此時 $P(\frac{h(h+c-kv)}{c},\frac{k(kv-h)}{c})$，而 $Q(0,k)$ 為面積最大值定點，如圖 1-10。

③當 $\frac{h+c}{2v}\le k$，即 $v\ge\frac{h+c}{2k}$ 時，由 (g) 得 $f(t)$ 在 $t=\frac{h+c}{2v}$ 時有最大值 $\frac{h(h+c)^2}{8cv}$，此時 $P(\frac{h(h+c)}{2c},\frac{k(c-h)}{2c})$ 為面積最大值定點 $Q(0,\frac{h+c}{2v})$，而，P 點位置為 $\overline{OA}+\overline{AB}$ 路徑的中點，如圖 1-11。■

【幾何觀點】如圖 1-12，其中 D、B、A、C 四點共線，且 $\overline{DB}=\overline{BO}=k$，$\overline{CA}=\overline{OA}=h$，$\overline{DA}$ 的中點為 M，$\overline{CB}$ 的中點為 N。

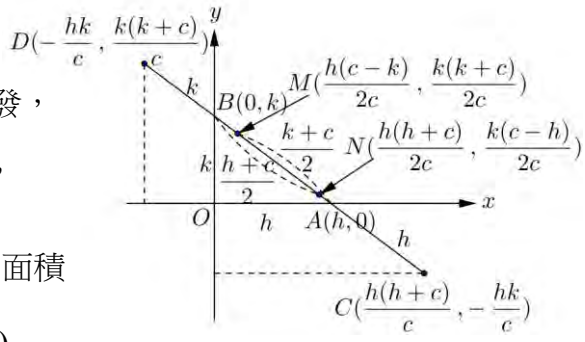


圖 1-12

(1)若 $2h\ge k+c$，

①當 P 點速率很慢時，我們不妨設 Q 是由 D 點出發，當 Q 走到 M，若 P 未到達 A 點，此時 $\frac{k+c}{2}\le\frac{h}{v}$，即 $1\le v\le\frac{2h}{k+c}$。因為 M 為 $\overline{DA}$ 的中點，故 ΔOPQ 面積有最大值時，$P(\frac{k+c}{2}v,0)$，而 $Q(\frac{h(c-k)}{2c},\frac{k(k+c)}{2c})$ 為定點。

②當 P 點速率稍快時，設 Q 由 D 點出發，當 P 到 A 點時，若 Q 已過 B 點但尚未到 M，則 $k\le\frac{h}{v}\le\frac{k+c}{2}$，即 $\frac{2h}{k+c}\le v\le\frac{h}{k}$。$\Delta OPQ$ 面積有最大值時，$Q(\frac{h(h-kv)}{cv},\frac{k(kv+cv-h)}{cv})$，而 $P(h,0)$ 為定點。

③當 P 點速率再快些，設 P 由 C 點出發，當 Q 到 B 點時，若 P 已過 A 點但未到 N，則 $\frac{h}{v}\le k\le\frac{h+c}{2v}$，即 $\frac{h}{k}\le v\le\frac{h+c}{2k}$。$\Delta OPQ$ 面積有最大值時，$P(\frac{h(h+c-kv)}{c},\frac{k(kv-h)}{c})$，而 $Q(0,k)$ 為定點。

④當 P 點速率夠快時，設 P 由 C 點出發，當 P 到 N 時，若 Q 未到 B 點，則 $\frac{h}{v}\le\frac{h+c}{2v}\le k$，即 $v\ge\frac{h+c}{2k}$。ΔOPQ 面積有最大值時，$Q(0,\frac{h+c}{2v})$，而 $P(\frac{h(h+c)}{2c},\frac{k(c-h)}{2c})$ 為定點。

(2)若 $2h<k+c$，

①當 P 點速率很慢時，設 Q 由 D 點出發，當 P 到 A 點時，若 Q 已過 B 點但未到 M，則 $k\le\frac{h}{v}$，

即$1 \le v \le \dfrac{h}{k}$。ΔOPQ面積有最大值時，$Q(\dfrac{h(h-kv)}{cv}, \dfrac{k(kv+cv-h)}{cv})$，而$P(h,0)$為定點。

②當P點速率稍快些，設P由C點出發，當Q到B點時，若P已過A點但未到N，則

$\dfrac{h}{v} \le k \le \dfrac{h+c}{2v}$，即$\dfrac{h}{k} \le v \le \dfrac{h+c}{2k}$。$\Delta OPQ$面積有最大值時，$P(\dfrac{h(h+c-kv)}{c}, \dfrac{k(kv-h)}{c})$，而$Q(0,k)$為定點。

③當P點速率夠快時，設P由C點出發，當P到N時，若Q未到B點，則$\dfrac{h+c}{2v} \le k$，即

$v \ge \dfrac{h+c}{2k}$。ΔOPQ面積有最大值時，$Q(0, \dfrac{h+c}{2v})$，而$P(\dfrac{h(h+c)}{2c}, \dfrac{k(c-h)}{2c})$為定點。

研究二：一般三角形 *OAB*

在推廣到一般的ΔOAB之前，我們先了解一個性質。

性質 1：
設兩個不平行的非零向量$\overrightarrow{u}=(a,b)$與$\overrightarrow{v}=(c,d)$的夾角為θ， 若由$\overrightarrow{u}$繞至$\overrightarrow{v}$為逆時針方向，則二階行列式$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} > 0$。

證明：
如圖 2-1，設$\overrightarrow{u}$的方向角為α，長度為r，則$a = r\cos\alpha$，$b = r\sin\alpha$，若$\overrightarrow{v}$的長度為m，則

$$c = m\cos(\alpha+\theta) = m\cos\alpha\cos\theta - m\sin\alpha\sin\theta$$
$$= \frac{m}{r}(r\cos\alpha\cos\theta - r\sin\alpha\sin\theta) = \frac{m}{r}(a\cos\theta - b\sin\theta),$$
$$d = m\sin(\alpha+\theta) = m\sin\alpha\cos\theta + m\cos\alpha\sin\theta$$
$$= \frac{m}{r}(r\sin\alpha\cos\theta + r\cos\alpha\sin\theta) = \frac{m}{r}(b\cos\theta + a\sin\theta),$$

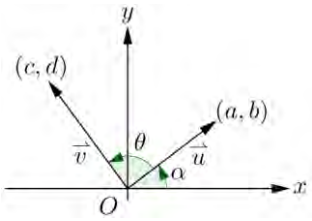


圖 2-1

此時$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ \frac{m}{r}(a\cos\theta - b\sin\theta) & \frac{m}{r}(b\cos\theta + a\sin\theta) \end{vmatrix} = \dfrac{m}{r}(a^2+b^2)\sin\theta > 0$ ■

在ΔOAB中，設$\angle AOB = \alpha$，$\angle OAB = \beta$，$\angle OBA = \theta$，$\overline{OA} = h$，$\overline{OB} = k$，$\overline{AB} = c$，如圖 2-2。兩動點P、Q同時由原點O出發，沿ΔOAB的邊界運動，Q點以每秒 1 單位的速率順時針方向運動，P點以每秒$v(\ge 1)$單位的速率逆時針方向運動。若P在$\overline{OA}$上且Q在$\overline{OB}$上時，ΔOPQ面積為遞增；而若P、Q同時在$\overline{AB}$上時，ΔOPQ面積為遞減。考慮在時間為t秒時，

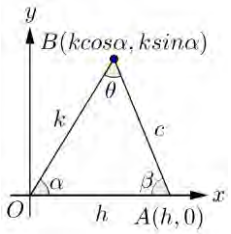


圖 2-2

Case1.若P點在$\overline{AB}$上，Q點在$\overline{OB}$上，則其坐標為

$P(h-(vt-h)\cos\beta,\ (vt-h)\sin\beta)$，$Q(t\cos\alpha,\ t\sin\alpha)$，如圖 2-3。此時$\Delta OPQ$面積為

$$f(t)=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} h-(vt-h)\cos\beta & (vt-h)\sin\beta \\ t\cos\alpha & t\sin\alpha \end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}(ht\sin\alpha-vt^2\sin\alpha\cos\beta+ht\sin\alpha\cos\beta-vt^2\cos\alpha\sin\beta+ht\cos\alpha\sin\beta)\text{，}$$

由和角公式及補角關係得：$\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\sin(\alpha+\beta)=\sin(180^0-\theta)=\sin\theta$，

由正弦定理：$\dfrac{c}{\sin\alpha}=\dfrac{h}{\sin\theta}\Rightarrow h\sin\alpha=c\sin\theta$。

故 $f(t)=\dfrac{1}{2}\left[(-v\sin\theta)t^2+(h+c)\sin\theta\cdot t\right]=-\dfrac{vh\sin\alpha}{2c}\left[(t-\dfrac{h+c}{2v})^2-\dfrac{(h+c)^2}{4v^2}\right]$，其中 $\dfrac{h}{v}\le t\le k\cdots(h)$

Case2.若 P 點在 $\overline{OA}$ 上，Q 點在 $\overline{AB}$ 上，則 $P(vt,0)$，$Q(k\cos\alpha+(t-k)\cos\beta,\ k\sin\alpha-(t-k)\sin\beta)$，如圖 2-4。此時 ΔOPQ 面積為 $g(t)=\dfrac{1}{2}vt\left[k\sin\alpha-(t-k)\sin\beta\right]$，由正弦定理：$\dfrac{c}{\sin\alpha}=\dfrac{k}{\sin\beta}$，

故 $g(t)=-\dfrac{kv\sin\alpha}{2c}\left[t^2-(k+c)t\right]=-\dfrac{kv\sin\alpha}{2c}\left[(t-\dfrac{k+c}{2})^2-\dfrac{(k+c)^2}{4}\right]$，其中 $k\le t\le\dfrac{h}{v}\cdots\cdots\cdots(i)$

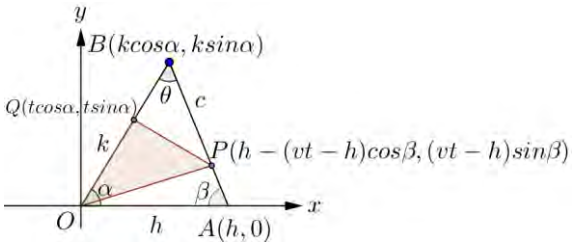


圖 2-3

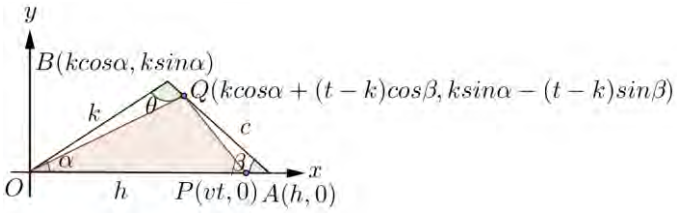


圖 2-4

定理 2.1：

在 ΔOAB 中，設 $\angle AOB=\alpha$，$\angle OAB=\beta$，$\angle OBA=\theta$，$\overline{OA}=h$，$\overline{OB}=k$，$\overline{AB}=c$，$k\ge h>0$。兩動點 P、Q 同時由原點 O 出發，沿 ΔOAB 的邊界運動，Q 點以每秒 1 單位的速率順時針方向運動，P 點以每秒 $v(\ge 1)$ 單位的速率逆時針方向運動。

(1)若 $k\ge h>c$，P、Q 兩點在相遇之前，ΔOPQ 面積的最大值為 $\dfrac{h^2\sin\alpha}{2v}$，

此時 $P(h,0)$ 為面積最大值定點，而 $Q(\dfrac{h\cos\alpha}{v},\dfrac{h\sin\alpha}{v})$。

(2)若 $k\ge c\ge h$，P、Q 兩點在相遇之前，ΔOPQ 面積的最大值為 $\dfrac{h(h+c)^2}{8cv}\sin\alpha$，

此時 $P(h-\dfrac{c-h}{2}\cos\beta,\dfrac{k(c-h)}{2c}\sin\alpha)$ 為面積最大值定點，而 $Q(\dfrac{h+c}{2v}\cos\alpha,\dfrac{h+c}{2v}\sin\alpha)$。

(3)若 $c>k\ge h$ 且 $2k\ge h+c$，P、Q 兩點在相遇之前，ΔOPQ 面積的最大值為 $\dfrac{h(h+c)^2}{8cv}\sin\alpha$，此時 $P(h-\dfrac{c-h}{2}\cos\beta,\dfrac{k(c-h)}{2c}\sin\alpha)$ 為面積最大值定點，而 $Q(\dfrac{h+c}{2v}\cos\alpha,\dfrac{h+c}{2v}\sin\alpha)$。

(4)若 $c>k\ge h$ 且 $2k<h+c$，

①當 $1\le v\le \dfrac{h+c}{2k}$ 時，P、Q 兩點在相遇之前，ΔOPQ 面積的最大值為 $\dfrac{hk(h+c-kv)}{2c}\sin\alpha$，

此時 $P(h-(kv-h)\cos\beta,\dfrac{k(kv-h)}{c}\sin\alpha)$，而 $Q(k\cos\alpha,k\sin\alpha)$ 為面積最大值定點。

②當 $v\ge \dfrac{h+c}{2k}$ 時，P、Q 兩點在相遇之前，ΔOPQ 面積的最大值為 $\dfrac{h(h+c)^2}{8cv}\sin\alpha$，

此時 $P(h-\dfrac{c-h}{2}\cos\beta,\dfrac{k(c-h)}{2c}\sin\alpha)$ 為面積最大值定點，而 $Q(\dfrac{h+c}{2v}\cos\alpha,\dfrac{h+c}{2v}\sin\alpha)$。

證明：

(1)若 $k\ge h>c$，則對所有 $v\ge 1$，$\dfrac{h+c}{2v}<\dfrac{h+h}{2v}=\dfrac{h}{v}$，由(h)得 $f(t)$ 在 $t=\dfrac{h}{v}$ 時有最大值 $\dfrac{h^2\sin\alpha}{2v}$，

此時 $P(h,0)$ 為面積最大值定點，而 $Q(\dfrac{h\cos\alpha}{v},\dfrac{h\sin\alpha}{v})$。

(2)若 $k\ge c\ge h$，則對所有 $v\ge 1$，$\dfrac{h}{v}\le\dfrac{h+c}{2v}\le\dfrac{k}{v}\le k$，由(h)得 $f(t)$ 在 $t=\dfrac{h+c}{2v}$ 時有最大值

$\dfrac{h(h+c)^2}{8cv}\sin\alpha$，此時 $P(h-\dfrac{c-h}{2}\cos\beta,\dfrac{k(c-h)}{2c}\sin\alpha)$ 為面積最大值定點，而

$Q(\dfrac{h+c}{2v}\cos\alpha,\dfrac{h+c}{2v}\sin\alpha)$。此 P 點位置恰為 $\overline{OA}+\overline{AB}$ 路徑的中點。

(3)若 $c>k\ge h$ 且 $2k\ge h+c$，則 $\dfrac{h}{v}<\dfrac{h+c}{2v}\le\dfrac{k}{v}\le k$，由(h)得 $f(t)$ 在 $t=\dfrac{h+c}{2v}$ 時有最大值

$\dfrac{h(h+c)^2}{8cv}\sin\alpha$，此時 $P(h-\dfrac{c-h}{2}\cos\beta,\dfrac{k(c-h)}{2c}\sin\alpha)$ 為面積最大值定點，而

$Q(\dfrac{h+c}{2v}\cos\alpha,\dfrac{h+c}{2v}\sin\alpha)$。此 P 點位置恰為 $\overline{OA}+\overline{AB}$ 路徑的中點。

(4)若 $c>k\ge h$ 且 $2k<h+c$，

①當 $1\le v\le \dfrac{h+c}{2k}$ 時，則 $\dfrac{h+c}{2v}\ge k$，由(h)得 $f(t)$ 在 $t=k$ 時有最大值 $\dfrac{hk(h+c-kv)}{2c}\sin\alpha$，

此時 $P(h-(kv-h)\cos\beta,\dfrac{k(kv-h)}{c}\sin\alpha)$，而 $Q(k\cos\alpha,k\sin\alpha)$ 為面積最大值定點。

②當 $v\ge \dfrac{h+c}{2k}$ 時，則 $\dfrac{h}{v}<\dfrac{h+c}{2v}\le k$，由(h)得 $f(t)$ 在 $t=\dfrac{h+c}{2v}$ 時有最大值 $\dfrac{h(h+c)^2}{8cv}\sin\alpha$，

此時 $P(h-\dfrac{c-h}{2}\cos\beta,\dfrac{k(c-h)}{2c}\sin\alpha)$ 為面積最大值定點，而 $Q(\dfrac{h+c}{2v}\cos\alpha,\dfrac{h+c}{2v}\sin\alpha)$。

此 P 點位置恰為 $\overline{OA}+\overline{AB}$ 路徑的中點。 ■

【幾何觀點】在不影響結果的情況下，我們不妨設 P 是由 C 點出發，其中 C、A、B 三點共線且 $\overline{CA}=\overline{OA}=h$，$\overline{CB}$ 的中點為 N。

(1)若 $k \ge h > c$，則 P 走到 N 時，尚未到 A 點，因此當 P 過 A 點之後，ΔOPQ 面積遞減，故 $P(h,0)$ 為定點。如圖 2-5。

(2)若 $k \ge c \ge h$，則 $k \ge \dfrac{h+c}{2} \ge h$，$P$ 走到 N 時，Q 未到達 B 點，

故 $P(h-\dfrac{c-h}{2}\cos\beta, \dfrac{k(c-h)}{2c}\sin\alpha)$ 為定點。如圖 2-6。

(3)若 $c > k \ge h$ 且 $2k \ge h+c$，則同(2)的討論。如圖 2-7。

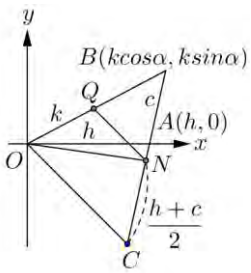


圖 2-5

(4)若 $c > k \ge h$ 且 $2k < h+c$，

①當 P 點速率較慢時，$1 \le v \le \dfrac{h+c}{2k}$，$Q$ 到 B 點時，P 已過 A 點但未到 N。因此 ΔOPQ 面積有最大值時，$Q(k\cos\alpha, k\sin\alpha)$ 為定點。如圖 2-8。

②當 P 點速率夠快時，$v \ge \dfrac{h+c}{2k}$，P 到 N 時，Q 未到 B 點，因此 ΔOPQ 面積有最大值時，$P(h-\dfrac{c-h}{2}\cos\beta, \dfrac{k(c-h)}{2c}\sin\alpha)$ 為面積最大值定點。如圖 2-9。

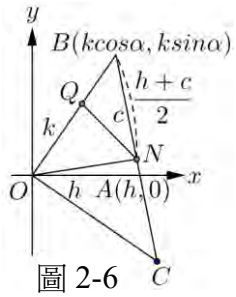


圖 2-6

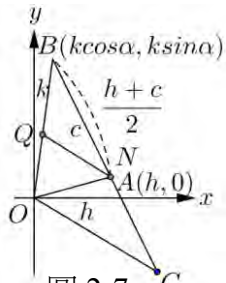


圖 2-7

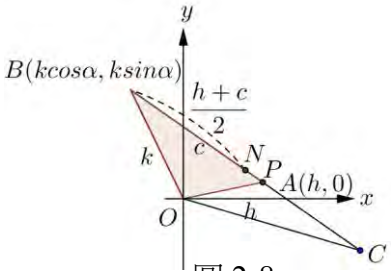


圖 2-8

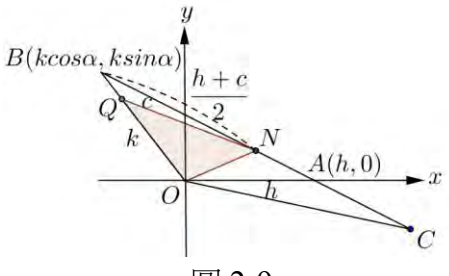


圖 2-9

定理 2.2：

在 ΔOAB 中，設 $\angle AOB = \alpha$，$\angle OAB = \beta$，$\angle OBA = \theta$，$\overline{OA} = h$，$\overline{OB} = k$，$\overline{AB} = c$，$h > k > 0$。兩動點 P、Q 同時由原點 O 出發，沿 ΔOAB 的邊界運動，Q 點以每秒 1 單位的速率順時針方向運動，P 點以每秒 $v(\ge 1)$ 單位的速率逆時針方向運動。

(1)若 $h > k \ge c$，

①當 $1 \le v \le \dfrac{h}{k}$ 時，P、Q 兩點在相遇之前，ΔOPQ 面積的最大值為 $\dfrac{k^2 v\sin\alpha}{2}$，

此時 $P(kv,0)$，而 $Q(k\cos\alpha, k\sin\alpha)$ 為面積最大值定點。

②當 $v \ge \dfrac{h}{k}$ 時，P、Q 兩點在相遇之前，ΔOPQ 面積的最大值為 $\dfrac{h^2\sin\alpha}{2v}$，

此時 $P(h,0)$ 為面積最大值定點，而 $Q(\dfrac{h\cos\alpha}{v}, \dfrac{h\sin\alpha}{v})$。

(2)若 $h \ge c > k$，

①當 $1 \le v \le \dfrac{2h}{k+c}$ 時，P、Q 兩點在相遇之前，ΔOPQ 面積的最大值為 $\dfrac{k(k+c)^2 v}{8c}\sin\alpha$，

此時 $P(\dfrac{k+c}{2}v, 0)$，而 $Q(k\cos\alpha + \dfrac{c-k}{2}\cos\beta, \dfrac{k(k+c)}{2c}\sin\alpha)$ 為面積最大值定點。

②當 $\frac{2h}{k+c} \le v \le \frac{h}{k}$ 時，P、Q 兩點在相遇之前，ΔOPQ 面積的最大值為 $\frac{hk(kv+cv-h)}{2cv}\sin\alpha$，

此時 $P(h,0)$ 為面積最大值定點，而 $Q(k\cos\alpha+\frac{h-kv}{v}\cos\beta,\frac{k(kv+cv-h)}{cv}\sin\alpha)$。

③當 $v \ge \frac{h}{k}$ 時，P、Q 兩點在相遇之前，ΔOPQ 面積的最大值為 $\frac{h^2\sin\alpha}{2v}$，

此時 $P(h,0)$ 為面積最大值定點，而 $Q(\frac{h\cos\alpha}{v},\frac{h\sin\alpha}{v})$。

(3)若 $c>h>k$，且 $2h \ge k+c$，

①當 $1 \le v \le \frac{2h}{k+c}$ 時，P、Q 兩點在相遇之前，ΔOPQ 面積的最大值為 $\frac{k(k+c)^2 v}{8c}\sin\alpha$，

此時 $P(\frac{k+c}{2}v,0)$，而 $Q(k\cos\alpha+\frac{c-k}{2}\cos\beta,\frac{k(k+c)}{2c}\sin\alpha)$ 為面積最大值定點。

②當 $\frac{2h}{k+c} \le v \le \frac{h}{k}$ 時，P、Q 兩點在相遇之前，ΔOPQ 面積的最大值為 $\frac{hk(kv+cv-h)}{2cv}\sin\alpha$，

此時 $P(h,0)$ 為面積最大值定點，而 $Q(k\cos\alpha+\frac{h-kv}{v}\cos\beta,\frac{k(kv+cv-h)}{cv}\sin\alpha)$。

③當 $\frac{h}{k} \le v \le \frac{h+c}{2k}$ 時，P、Q 兩點在相遇之前，ΔOPQ 面積的最大值為 $\frac{hk(h+c-kv)}{2c}\sin\alpha$，

此時 $P(h-(kv-h)\cos\beta,\frac{k(kv-h)}{c}\sin\alpha)$，而 $Q(k\cos\alpha,k\sin\alpha)$ 為面積最大值定點。

④當 $v \ge \frac{h+c}{2k}$ 時，P、Q 兩點在相遇之前，ΔOPQ 面積的最大值為 $\frac{h(h+c)^2}{8cv}\sin\alpha$，

此時 $P(h-\frac{c-h}{2}\cos\beta,\frac{k(c-h)}{2c}\sin\alpha)$ 為面積最大值定點，而 $Q(\frac{h+c}{2v}\cos\alpha,\frac{h+c}{2v}\sin\alpha)$。

(4)若 $c>h>k$，且 $2h<k+c$，

①當 $1 \le v \le \frac{h}{k}$ 時，P、Q 兩點在相遇之前，ΔOPQ 面積的最大值為 $\frac{hk(kv+cv-h)}{2cv}\sin\alpha$，

此時 $P(h,0)$ 為面積最大值定點，而 $Q(k\cos\alpha+\frac{h-kv}{v}\cos\beta,\frac{k(kv+cv-h)}{cv}\sin\alpha)$。

②當 $\frac{h}{k} \le v \le \frac{h+c}{2k}$ 時，P、Q 兩點在相遇之前，ΔOPQ 面積的最大值為 $\frac{hk(h+c-kv)}{2c}\sin\alpha$，

此時 $P(h-(kv-h)\cos\beta,\frac{k(kv-h)}{c}\sin\alpha)$，而 $Q(k\cos\alpha,k\sin\alpha)$ 為面積最大值定點。

③當 $v \ge \frac{h+c}{2k}$ 時，P、Q 兩點在相遇之前，ΔOPQ 面積的最大值為 $\frac{h(h+c)^2}{8cv}\sin\alpha$，

此時 $P(h-\frac{c-h}{2}\cos\beta,\frac{k(c-h)}{2c}\sin\alpha)$ 為面積最大值定點，而 $Q(\frac{h+c}{2v}\cos\alpha,\frac{h+c}{2v}\sin\alpha)$。

證明：

(1)若 $h>k\ge c$，

①當 $1\le v\le \frac{h}{k}$ 時，則 $\frac{k+c}{2}\le k$，由(i)得 $g(t)$在 $t=k$ 時有最大值 $\frac{k^2v\sin\alpha}{2}$，此時 $P(kv,0)$，而 $Q(k\cos\alpha,k\sin\alpha)$ 為面積最大值定點。

②當 $v\ge \frac{h}{k}$ 時，則 $\frac{h+c}{2v}<\frac{h}{v}$，由$(h)$得 $f(t)$在 $t=\frac{h}{v}$ 時有最大值 $\frac{h^2\sin\alpha}{2v}$，

此時 $P(h,0)$ 為面積最大值定點，而 $Q(\frac{h\cos\alpha}{v},\frac{h\sin\alpha}{v})$。

(2)若 $h\ge c>k$，

①當 $1\le v\le \frac{2h}{k+c}$ 時，則 $k\le \frac{k+c}{2}\le \frac{h}{v}$，由$(i)$得 $g(t)$在 $t=\frac{k+c}{2}$ 時有最大值 $\frac{k(k+c)^2v}{8c}\sin\alpha$，

此時 $P(\frac{k+c}{2}v,0)$，而 $Q(k\cos\alpha+\frac{c-k}{2}\cos\beta,\frac{k(k+c)}{2c}\sin\alpha)$ 為面積最大值定點。此 Q 點位置恰為 $\overline{OB}+\overline{BA}$ 路徑的中點。

②當 $\frac{2h}{k+c}\le v\le \frac{h}{k}$ 時，則 $\frac{k+c}{2}\ge \frac{h}{v}$，由$(i)$得 $g(t)$在 $t=\frac{h}{v}$ 時有最大值 $\frac{hk(kv+cv-h)}{2cv}\sin\alpha$，

此時 $P(h,0)$ 為面積最大值定點，而 $Q(k\cos\alpha+\frac{h-kv}{v}\cos\beta,\frac{k(kv+cv-h)}{cv}\sin\alpha)$。

③當 $v\ge \frac{h}{k}$ 時，則 $\frac{h+c}{2v}\le \frac{h}{v}$，由$(h)$得 $f(t)$在 $t=\frac{h}{v}$ 時有最大值為 $\frac{h^2\sin\alpha}{2v}$，

此時 $P(h,0)$ 為面積最大值定點，而 $Q(\frac{h\cos\alpha}{v},\frac{h\sin\alpha}{v})$。

(3)若 $c>h>k$，且 $2h\ge k+c$，

①當 $1\le v\le \frac{2h}{k+c}$ 時，則 $k\le \frac{k+c}{2}\le \frac{h}{v}$，由$(i)$得 $g(t)$在 $t=\frac{k+c}{2}$ 時有最大值 $\frac{k(k+c)^2v}{8c}\sin\alpha$，

此時 $P(\frac{k+c}{2}v,0)$，而 $Q(k\cos\alpha+\frac{c-k}{2}\cos\beta,\frac{k(k+c)}{2c}\sin\alpha)$ 為面積最大值定點。此 Q 點位置恰為 $\overline{OB}+\overline{BA}$ 路徑的中點。

②當 $\frac{2h}{k+c}\le v\le \frac{h}{k}$ 時，則 $\frac{k+c}{2}\ge \frac{h}{v}$，由$(i)$得 $g(t)$在 $t=\frac{h}{v}$ 時有最大值 $\frac{hk(kv+cv-h)}{2cv}\sin\alpha$，

此時 $P(h,0)$ 為面積最大值定點，而 $Q(k\cos\alpha+\frac{h-kv}{v}\cos\beta,\frac{k(kv+cv-h)}{cv}\sin\alpha)$。

③當 $\frac{h}{k}\le v\le \frac{h+c}{2k}$ 時，則 $\frac{h+c}{2v}\ge k$，由(h)得 $f(t)$在 $t=k$ 時有最大值 $\frac{hk(h+c-kv)}{2c}\sin\alpha$，

此時 $P(h-(kv-h)\cos\beta,\frac{k(kv-h)}{c}\sin\alpha)$，而 $Q(k\cos\alpha,k\sin\alpha)$ 為面積最大值定點。

④當 $v\ge \frac{h+c}{2k}$ 時，則 $\frac{h}{v}\le \frac{h+c}{2v}\le k$，由$(h)$得 $f(t)$在 $t=\frac{h+c}{2v}$ 時有最大值 $\frac{h(h+c)^2}{8cv}\sin\alpha$，

此時 $P(h-\frac{c-h}{2}\cos\beta,\frac{k(c-h)}{2c}\sin\alpha)$ 為面積最大值定點，而 $Q(\frac{h+c}{2v}\cos\alpha,\frac{h+c}{2v}\sin\alpha)$ 。

此 P 點位置恰為 $\overline{OA}+\overline{AB}$ 路徑的中點。

(4)若 $c>h>k$ ，且 $2h<k+c$ ，

①當 $1\le v\le\frac{h}{k}$ 時，則 $\frac{k+c}{2}>h\ge\frac{h}{v}$ ，由(i)得 $g(t)$在 $t=\frac{h}{v}$ 時有最大值 $\frac{hk(kv+cv-h)}{2cv}\sin\alpha$ ，

此時 $P(h,0)$ 為面積最大值定點，而 $Q(k\cos\alpha+\frac{h-kv}{v}\cos\beta,\frac{k(kv+cv-h)}{cv}\sin\alpha)$ 。

②當 $\frac{h}{k}\le v\le\frac{h+c}{2k}$ 時，則 $\frac{h+c}{2v}\ge k$ ，由(h)得 $f(t)$在 $t=k$ 時有最大值 $\frac{hk(h+c-kv)}{2c}\sin\alpha$ ，

此時 $P(h-(kv-h)\cos\beta,\frac{k(kv-h)}{c}\sin\alpha)$ ，而 $Q(k\cos\alpha,k\sin\alpha)$ 為面積最大值定點。

③當 $v\ge\frac{h+c}{2k}$ 時，則 $\frac{h}{v}<\frac{h+c}{2v}\le k$ ，由(h)得 $f(t)$在 $t=\frac{h+c}{2v}$ 時有最大值 $\frac{h(h+c)^2}{8cv}\sin\alpha$ ，

此時 $P(h-\frac{c-h}{2}\cos\beta,\frac{k(c-h)}{2c}\sin\alpha)$ 為面積最大值定點，而 $Q(\frac{h+c}{2v}\cos\alpha,\frac{h+c}{2v}\sin\alpha)$ 。

此 P 點位置恰為 $\overline{OA}+\overline{AB}$ 路徑的中點。 ■

【幾何觀點】其中 D、B、A、C 四點共線，且 $\overline{DB}=\overline{BO}=k$ ，$\overline{CA}=\overline{OA}=h$ ，$\overline{DA}$ 的中點為 M，$\overline{CB}$ 的中點為 N。

(1)若 $h>k\ge c$ ，如圖 2-10。

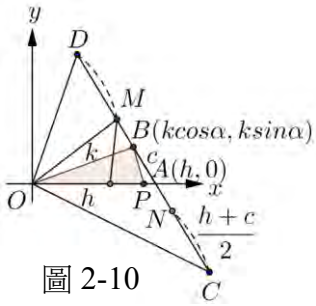


圖 2-10

①當 P 點速率很慢時，$1\le v\le\frac{h}{k}$ ，我們不妨設 Q 由 D 點出發，

當 Q 到 B 點時，已過了 M，但 P 未到 A 點，往後面積開始遞減，

故 $Q(k\cos\alpha,k\sin\alpha)$ 為定點。

②當 P 點速率較快時，$v\ge\frac{h}{k}$ ，設 P 由 C 點出發，當 P 到 A 點時，已過了 N，Q 未到 B 點，

往後面積開始遞減，故 $P(h,0)$ 為定點。

(2)若 $h\ge c>k$ ，如圖 2-11。

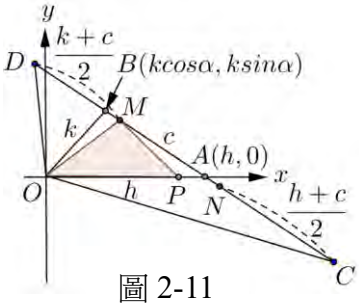


圖 2-11

①當 P 點速率很慢時，$1\le v\le\frac{2h}{k+c}$ ，設 Q 由 D 點出發，

當 Q 到了 M，P 點尚未到 A，故

$Q(k\cos\alpha+\frac{c-k}{2}\cos\beta,\frac{k(k+c)}{2c}\sin\alpha)$ 為定點。

②當 P 點速率稍快時，$\frac{2h}{k+c}\le v\le\frac{h}{k}$ ，設 Q 由 D 點出發，P 到 A 點時，Q 已過 B 點但未到 M，故 $P(h,0)$ 為定點。

③當 P 點速率更快時，$v\ge\frac{h}{k}$ ，設 P 由 C 點出發，當 P 到 A 點時，已過了 N，Q 未到 B 點，

往後面積開始遞減，故 $P(h,0)$ 為定點。

(3)若 $c>h>k$ ，且 $2h\ge k+c$ ，如圖 2-12。

①當 P 點速率很慢時，$1\le v\le \dfrac{2h}{k+c}$ ，設 Q 由 D 點出發，

Q 到 M 時，P 未到 A 點，

故 $Q(k\cos\alpha+\dfrac{c-k}{2}\cos\beta,\dfrac{k(k+c)}{2c}\sin\alpha)$ 為定點。

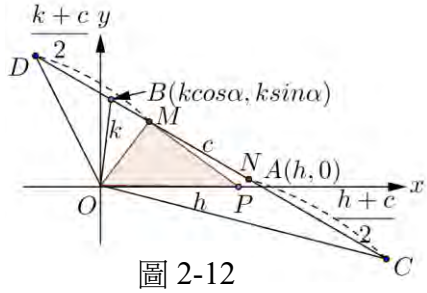


圖 2-12

②當 P 點速率稍快時，$\dfrac{2h}{k+c}\le v\le \dfrac{h}{k}$ ，設 Q 由 D 點出發，

P 到 A 點時，Q 已過 B 點但未到 M，故 $P(h,0)$ 為定點。

③當 P 點速率再快些，$\dfrac{h}{v}\le k\le \dfrac{h+c}{2v}$ ，設 P 由 C 點出發，Q 到 B 點時，P 已過 A 點但未到 N，故 $Q(k\cos\alpha,k\sin\alpha)$ 為定點。

④當 P 點速率夠快時，$v\ge \dfrac{h+c}{2k}$ ，設 P 由 C 點出發，P 已到 N，Q 未到 B 點，故

$P(h-\dfrac{c-h}{2}\cos\beta,\dfrac{k(c-h)}{2c}\sin\alpha)$ 為定點。

(4)若 $c>h>k$ ，且 $2h<k+c$ ，如圖 2-13。

①當 P 點速率很慢時，$1\le v\le \dfrac{h}{k}$ ，設 Q 由 D 點出發，

P 到 A 點時，Q 已過 B 點但未到 M，故 $P(h,0)$ 為定點。

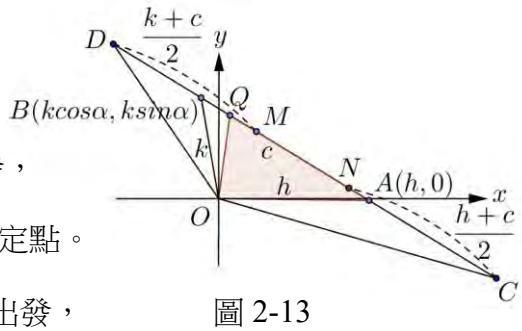


圖 2-13

②當 P 點速率稍快些，$\dfrac{h}{k}\le v\le \dfrac{h+c}{2k}$ ，設 P 由 C 點出發，

Q 到 B 點時，P 已過 A 點但未到 N，故 $Q(k\cos\alpha,k\sin\alpha)$ 為定點。

③當 P 點速率夠快時，設 P 由 C 點出發，P 到 N 時，Q 未到 B 點，故

$P(h-\dfrac{c-h}{2}\cos\beta,\dfrac{k(c-h)}{2c}\sin\alpha)$ 為定點。

研究三：探討 $F(v)$的圖形

再者，以速率 v 為變數，以 $F(v)$表示最大面積函數，底下我們探討並解讀 $F(v)$的圖形與定點位置的關係。

(一)若 ΔOAB 為任意(含直角與一般)三角形且 $h>k$。

1. $h>k\ge c$ ：

(1)當 $1\le v\le \dfrac{h}{k}$ 時，定點位置在 $Q(k\cos\alpha,k\sin\alpha)$ ，$t=k$，

P 點由 $P_1(kv,0)$ 往 A 點移動。如圖 3-1，$F(v)$遞增。

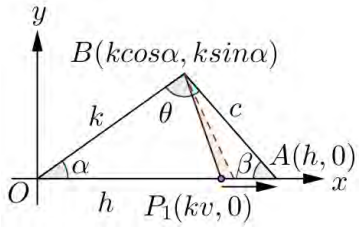


圖 3-1

(2)當 $\dfrac{h}{k}\le v<\infty$ 時，定點位置在 $P(h,0)$ ，$t=\dfrac{h}{v}$ ，Q 點由 B 往 O 點移動。如圖 3-2，$F(v)$遞減。

$$F(v)=\begin{cases}\dfrac{vk^2}{2}\sin\alpha, & 1\le v\le \dfrac{h}{k}\\[2mm] \dfrac{h^2}{2v}\sin\alpha, & \dfrac{h}{k}\le v<\infty\end{cases}$$ 的圖形如圖 3-3 。

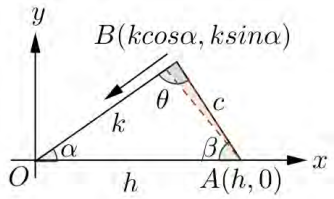


圖 3-2

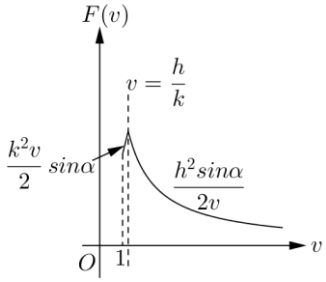


圖 3-3

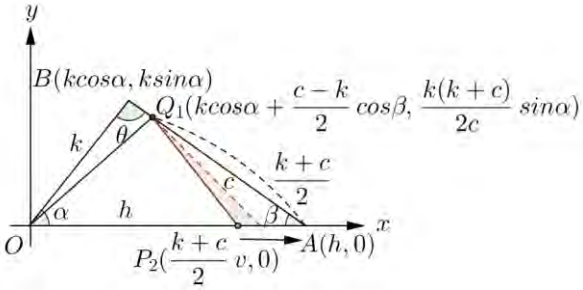


圖 3-4

2. $h\ge c>k$ ：

(1)當 $1\le v\le \dfrac{2h}{k+c}$ 時，定點位置在

$Q_1(k\cos\alpha+\dfrac{c-k}{2}\cos\beta,\dfrac{k(k+c)}{2c}\sin\alpha)$ ， $t=\dfrac{k+c}{2}$ ，

P 點由 $P_2(\dfrac{k+c}{2},0)$ 往 A 點移動。如圖 3-4，$F(v)$遞增。

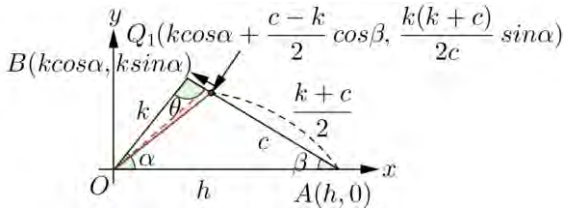


圖 3-5

(2)當 $\dfrac{2h}{k+c}\le v\le \dfrac{h}{k}$ 時，定點位置在 $P(h,0)$ ， $t=\dfrac{h}{v}$ ，Q 點由 Q_1 往 B 點移動。如圖 3-5，$F(v)$遞增。

(3)當 $\dfrac{h}{k}\le v<\infty$ 時，定點位置在 $P(h,0)$ ， $t=\dfrac{h}{v}$ ，Q 點由 B 往 O 點移動。如圖 3-6，$F(v)$遞減。

$$F(v)=\begin{cases}\dfrac{k(k+c)^2v}{8c}\sin\alpha, & 1\le v\le \dfrac{2h}{k+c}\\[2mm] \dfrac{hk(kv+cv-h)}{2cv}\sin\alpha, & \dfrac{2h}{k+c}\le v\le \dfrac{h}{k}\\[2mm] \dfrac{h^2}{2v}\sin\alpha, & \dfrac{h}{k}\le v<\infty\end{cases}$$ 的圖形如圖 3-7。

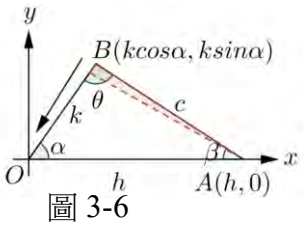


圖 3-6

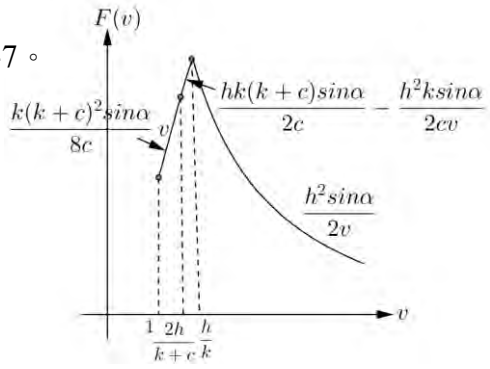


圖 3-7

3. $c>h>k$ 且 $2h\ge k+c$ ：

(1)當 $1\le v\le \dfrac{2h}{k+c}$ 時，定點位置在

$Q_1(k\cos\alpha+\dfrac{c-k}{2}\cos\beta,\dfrac{k(k+c)}{2c}\sin\alpha)$ ， $t=\dfrac{k+c}{2}$ ，

P 點由 P_2 往 A 點移動。如圖 3-8，$F(v)$遞增。

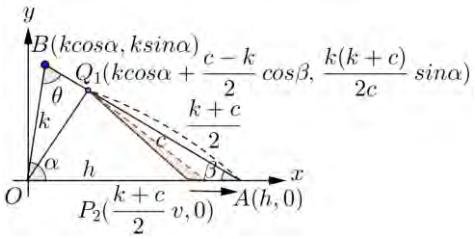


圖 3-8

(2)當 $\frac{2h}{k+c} \le v \le \frac{h}{k}$ 時，定點位置在 $P(h,0)$ ，$t=\frac{h}{v}$ ，

Q 點由 Q_1 往 B 點移動。如圖 3-9，$F(v)$遞增。

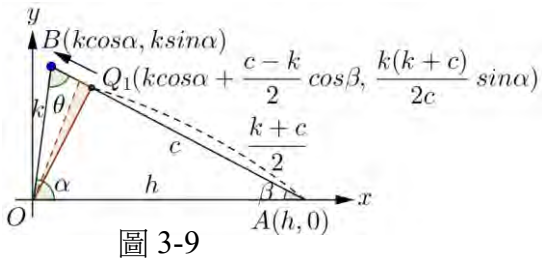


圖 3-9

(3)當 $\frac{h}{k} \le v \le \frac{h+c}{2k}$ 時，定點位置在 $Q(k\cos\alpha, k\sin\alpha)$ ，

$t=k$，P 點由 A 往 P_3 點移動。如圖 3-10，$F(v)$遞減。

(4)當 $\frac{h+c}{2k} \le v < \infty$ 時，定點位置在

$P_3(h-\frac{c-h}{2}\cos\beta, \frac{k(c-h)}{2c}\sin\alpha)$ ，$t=\frac{h+c}{2v}$ ，

Q 點由 B 往 O 點移動。如圖 3-11，$F(v)$遞減。

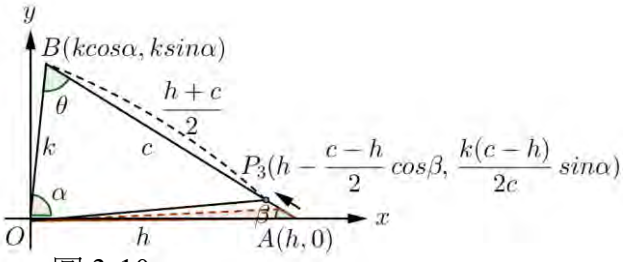


圖 3-10

$$F(v)=\begin{cases} \frac{k(k+c)^2 v}{8c}\sin\alpha, & 1 \le v \le \frac{2h}{k+c} \\ \frac{hk(kv+cv-h)}{2cv}\sin\alpha, & \frac{2h}{k+c} \le v \le \frac{h}{k} \\ \frac{hk(h+c-kv)}{2c}\sin\alpha, & \frac{h}{k} \le v \le \frac{h+c}{2k} \\ \frac{h(h+c)^2}{8cv}\sin\alpha, & \frac{h+c}{2k} \le v < \infty \end{cases}$$

的圖形如圖 3-12。

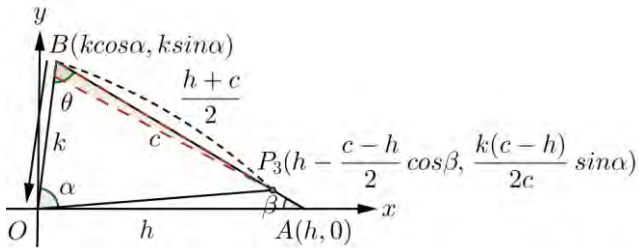


圖 3-11

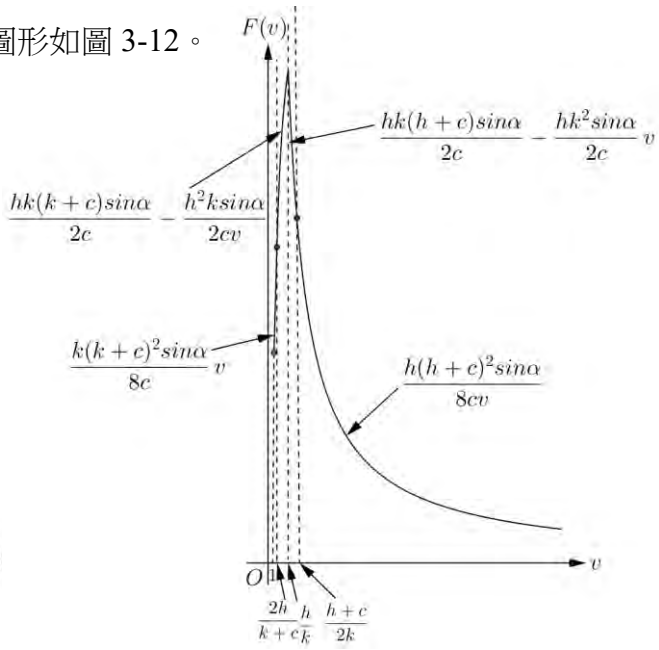


圖 3-12

4. $c>h>k$ 且 $2h<k+c$ ：

(1)當 $1 \le v \le \frac{h}{k}$ 時，定點位置在 $P(h,0)$，$t=\frac{h}{v}$，Q 點由 $Q_2(k\cos\alpha+\frac{h-kv}{v}\cos\beta, \frac{k(kv+cv-h)}{cv}\sin\alpha)$

往 B 點移動。如圖 3-13，$F(v)$遞增。

(2)當 $\frac{h}{k} \le v \le \frac{h+c}{2k}$ 時，定點位置在 $Q(k\cos\alpha, k\sin\alpha)$ ，$t=k$，P 點由 A 往 P_3 點移動。如圖 3-14，

$F(v)$遞減。

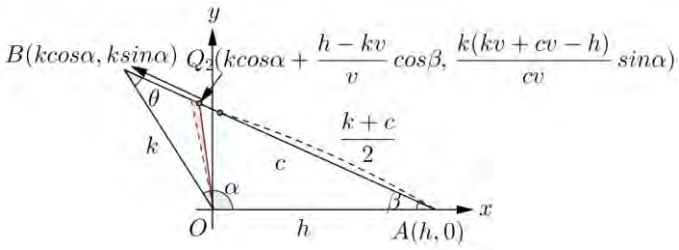


圖 3-13

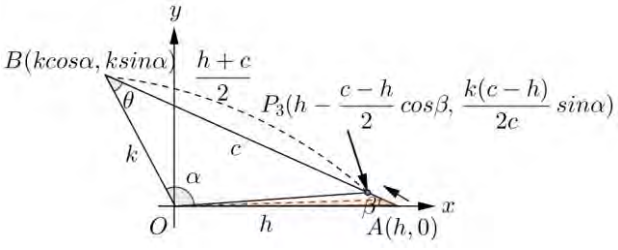


圖 3-14

(3)當 $\frac{h+c}{2k} \le v < \infty$ 時，定點位置在 $P_3(h-\frac{c-h}{2}\cos\beta, \frac{k(c-h)}{2c}\sin\alpha)$，$t=\frac{h+c}{2v}$，$Q$ 點由 B 往 O 點移動。如圖 3-15，$F(v)$遞減。

$$F(v)=\begin{cases} \frac{hk(kv+cv-h)}{2cv}\sin\alpha, & 1\le v\le \frac{h}{k} \\ \frac{hk(h+c-kv)}{2c}\sin\alpha, & \frac{h}{k}\le v\le \frac{h+c}{2k} \\ \frac{h(h+c)^2}{8cv}\sin\alpha, & \frac{h+c}{2k}\le v<\infty \end{cases}$$

的圖形如圖 3-16。

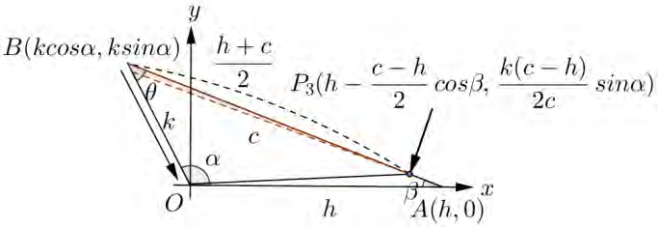


圖 3-15

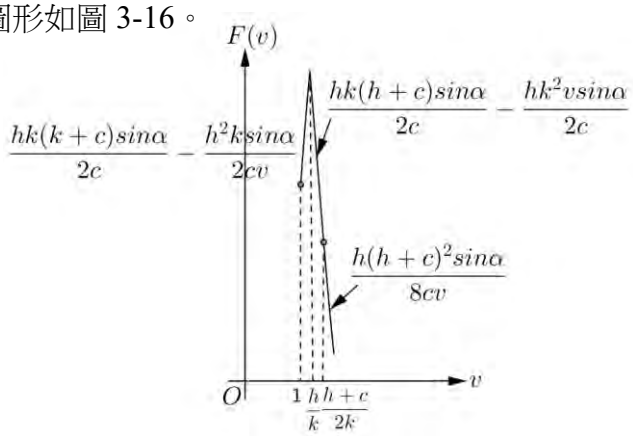


圖 3-16

(二)若 ΔOAB 為任意(含直角與一般)三角形且 $k \ge h$。

1. $k \ge h > c$：

當 $1 \le v < \infty$ 時，定點位置在 $P(h,0)$，$t=\frac{h}{v}$，

Q 點由 $Q_3(\frac{h}{v}\cos\alpha, \frac{h}{v}\sin\alpha)$ 往 B 點移動。

如圖 3-17，$F(v)$遞減。

$F(v)=\frac{h^2}{2v}\sin\alpha$，$1 \le v < \infty$ 的圖形如圖 3-18。

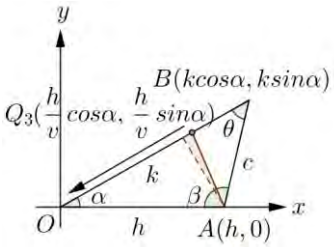


圖 3-17

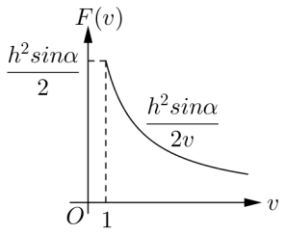


圖 3-18

2. $k \ge c \ge h$：

當 $1 \le v < \infty$ 時，定點位置在

$P_3(h-\frac{c-h}{2}\cos\beta, \frac{k(c-h)}{2c}\sin\alpha)$，$t=\frac{h+c}{2v}$，

Q 點由 $Q_4(\frac{h+c}{2v}\cos\alpha, \frac{h+c}{2v}\sin\alpha)$ 往 O 點移動。

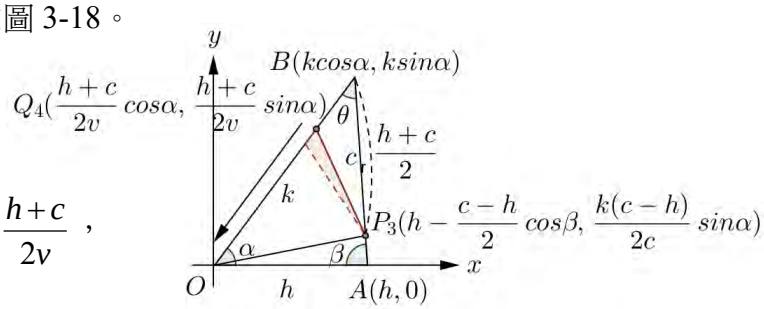


圖 3-19

如圖 3-19， $F(v)$遞減。$F(v)=\frac{h(h+c)^2}{8cv}\sin\alpha$，$1 \le v < \infty$ 的圖形如圖 3-20。

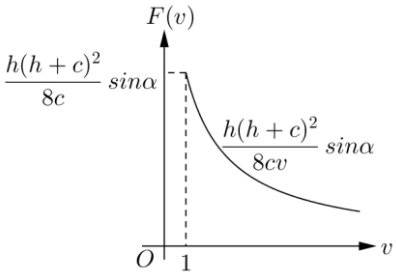


圖 3-20

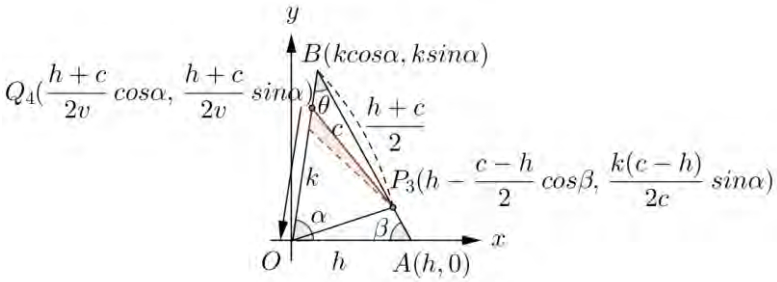


圖 3-21

3. $c>k\ge h$ 且 $2k\ge h+c$：

當 $1\le v<\infty$ 時，定點位置在 $P_3(h-\frac{c-h}{2}\cos\beta, \frac{k(c-h)}{2c}\sin\alpha)$，$t=\frac{h+c}{2v}$，$Q$ 點由 Q_4 往 O 點移動。

如圖 3-21，$F(v)$遞減。$F(v)=\frac{h(h+c)^2}{8cv}\sin\alpha,\ 1\le v<\infty$ 的圖形如圖 3-20。

4. $c>k\ge h$ 且 $2k<h+c$：

(1)當 $1\le v\le\frac{h+c}{2k}$ 時，定點位置在 $Q(k\cos\alpha, k\sin\alpha)$，$t=k$，$P$ 點由 $P_4(h-(kv-h)\cos\beta, \frac{k(kv-h)}{c}\sin\alpha)$ 往 P_3 移動。如圖 3-22，$F(v)$遞減。

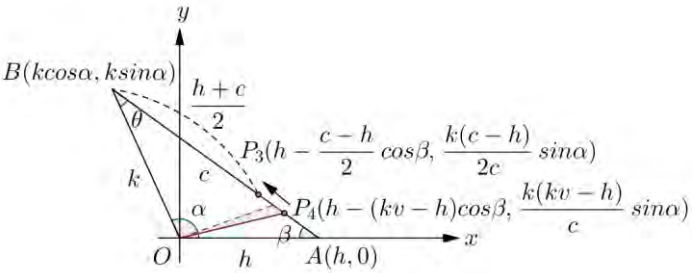


圖 3-22

(2)當 $\frac{h+c}{2k}\le v<\infty$ 時，定點位置在 $P_3(h-\frac{c-h}{2}\cos\beta, \frac{k(c-h)}{2c}\sin\alpha)$，$t=\frac{h+c}{2v}$，$Q$ 點由 B 往 O 點移動。如圖 3-23，$F(v)$遞減。

$$F(v)=\begin{cases}\frac{hk(h+c-kv)}{2c}\sin\alpha, & 1\le v\le\frac{h+c}{2k}\\ \frac{h(h+c)^2}{8cv}\sin\alpha, & \frac{h+c}{2k}\le v<\infty\end{cases}$$ 的圖形。如圖 3-24。

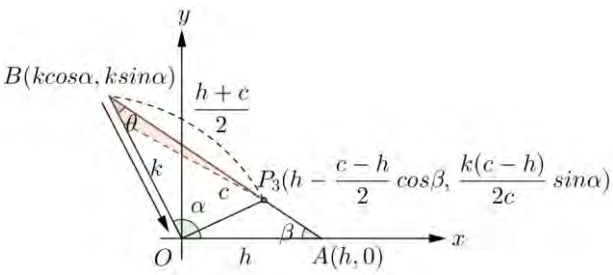


圖 3-23

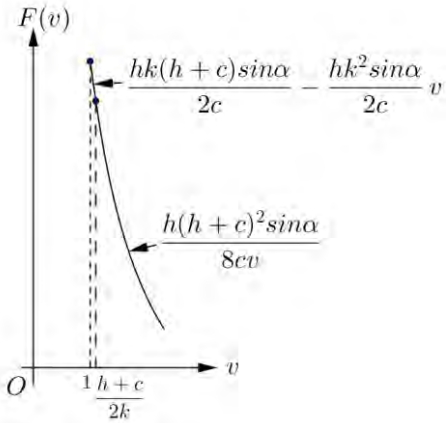


圖 3-24

(三)探討 $F(v)$的圖形：

在(一)的討論中，因為 $h>k$，即速率快的 P 點走長邊，速率慢的 Q 點走短邊，所以，當 $v=\frac{h}{k}(>1)$ 時，ΔOPQ 面積的最大值恰為整個 ΔOAB 的面積，$F(v)$的圖形先遞增再遞減。

因此在實際應用上，我們可以取 $v=\dfrac{h}{k}$ 以達到最佳的結果。

而在(二)的討論中，因為 $k\ge h$，即速率快的 P 點走短邊，速率慢的 Q 點走長邊，所以，當 P 點繞過 A 點時，Q 點尚未到 B 點。但 $v\ge 1\ge \dfrac{h}{k}$，故 $F(v)$的圖形都是在遞減。

研究四：推廣到正 n 邊形，$n=4$，5，6，8

最後，我們將三角形的情況推廣到正 n 邊形，其中 $n=4$，5，6，8。因為篇幅的關係，在此僅列出正六邊形的討論，正四、五、八邊形的結果則整理於結論 P.29 – P.30 之表中。

若 $OABCDE$ 為邊長 k 的正六邊形：

$A(k,0)$，$B(\dfrac{3k}{2},\dfrac{\sqrt{3}k}{2})$，$C(k,\sqrt{3}k)$，

$D(0,\sqrt{3}k)$，$E(-\dfrac{k}{2},\dfrac{\sqrt{3}k}{2})$。

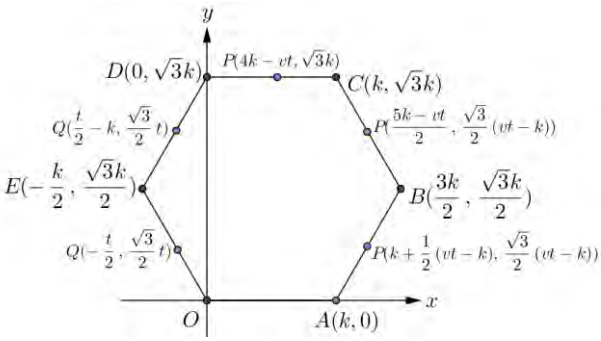


圖 4-1

1.若 $1\le v\le \dfrac{3}{2}$，P，Q 相遇在 $\overline{CD}$ 上。

(1)當 $0\le t\le k$ 時，$f(t)$有最大值 $=f(k)=\dfrac{1}{2}\begin{vmatrix} k+\dfrac{1}{2}(vk-k) & \dfrac{\sqrt{3}}{2}(vk-k) \\ -\dfrac{1}{2}k & \dfrac{\sqrt{3}}{2}k \end{vmatrix}=\dfrac{\sqrt{3}vk^2}{4}$。

(2)當 $k\le t\le \dfrac{2k}{v}$ 時，$f(t)=\dfrac{1}{2}\begin{vmatrix} \dfrac{k+vt}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2}(vt-k) \\ \dfrac{1}{2}t-k & \dfrac{\sqrt{3}}{2}t \end{vmatrix}=\dfrac{\sqrt{3}}{8}\begin{vmatrix} vt+k & vt-k \\ t-2k & t \end{vmatrix}=\dfrac{\sqrt{3}}{8}\left[2k(1+v)t-2k^2\right]$，

在 $t=\dfrac{2k}{v}$ 時，$f(t)$有最大值 $\dfrac{\sqrt{3}(v+2)k^2}{4v}$。

(3)當 $\dfrac{2k}{v}\le t\le 2k$ 時，$f(t)=\dfrac{1}{2}\begin{vmatrix} \dfrac{5k-vt}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2}(vt-k) \\ \dfrac{1}{2}t-k & \dfrac{\sqrt{3}}{2}t \end{vmatrix}=\dfrac{\sqrt{3}v}{4}\left[-(t-\dfrac{k(3+v)}{2v})^2+\dfrac{k^2(v^2+2v+9)}{4v^2}\right]$，

因 $\dfrac{2k}{v}=\dfrac{4k}{2v}\le \dfrac{k(3+v)}{2v}=\dfrac{k}{2}(1+\dfrac{3}{v})\le \dfrac{k}{2}\times 4=2k$，

所以在 $t=\dfrac{k(3+v)}{2v}$ 時，$f(t)$有最大值 $\dfrac{\sqrt{3}k^2(v^2+2v+9)}{16v}$。

(4)當 $2k\le t\le \dfrac{3k}{v}$ 時，

$$f(t)=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}\frac{5k-vt}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}(vt-k)\\ t-2k & \sqrt{3}k\end{vmatrix}=\frac{\sqrt{3}v}{4}\left[-(t-\frac{k(1+v)}{2v})^2+\frac{k^2(v^2+14v+1)}{4v^2}\right]$$，因 $\frac{k(1+v)}{2v}<2k$ ，

故 $f(t)$有最大值 $f(2k)<f(\frac{k(3+v)}{2v})$ 。

(5)當 $\frac{3k}{v}\le t\le\frac{6k}{1+v}$ 時， $f(t)\le f(\frac{3k}{v})\le f(\frac{k(3+v)}{2v})$ 。

由(1)(2)(3)(4)(5)得: $f(t)$有最大值 $\frac{\sqrt{3}k^2(v^2+2v+9)}{16v}$ ，此時 $P(\frac{k(7-v)}{4},\frac{\sqrt{3}k(1+v)}{4})$ ，

$Q(\frac{3k(1-v)}{4v},\frac{\sqrt{3}k(3+v)}{4v})$ ，無定點。

2.若 $\frac{3}{2}\le v\le 2$ ， P，Q 相遇在 $\overline{CD}$ 上。

(1)當 $0\le t\le k$ 時， $f(t)$有最大值 $=f(k)=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}k+\frac{1}{2}(vk-k) & \frac{\sqrt{3}}{2}(vk-k)\\ -\frac{1}{2}k & \frac{\sqrt{3}}{2}k\end{vmatrix}=\frac{\sqrt{3}vk^2}{4}$ 。

(2)當 $k\le t\le\frac{2k}{v}$ 時， $f(t)=\frac{\sqrt{3}}{8}\left[2k(1+v)t-2k^2\right]$ ， 在 $t=\frac{2k}{v}$ 時， $f(t)$有最大值 $\frac{\sqrt{3}(v+2)k^2}{4v}$ 。

(3)當 $\frac{2k}{v}\le t\le\frac{3k}{v}$ 時，

$$f(t)=\frac{\sqrt{3}v}{4}\left[-(t-\frac{k(3+v)}{2v})^2+\frac{k^2(v^2+2v+9)}{4v^2}\right]$$，因 $\frac{2k}{v}=\frac{4k}{2v}<\frac{k(3+v)}{2v}<\frac{6k}{2v}=\frac{3k}{v}$ ，

所以在 $t=\frac{k(3+v)}{2v}$ 時， $f(t)$有最大值 $f(\frac{k(3+v)}{2v})=\frac{\sqrt{3}k^2(v^2+2v+9)}{16v}$ 。

(4)當 $\frac{3k}{v}\le t\le 2k$ 時，

$$f(t)=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}4k-vt & \sqrt{3}k\\ \frac{t-2k}{2} & \frac{\sqrt{3}t}{2}\end{vmatrix}=\frac{\sqrt{3}v}{4}\left[-(t-\frac{3k}{2v})^2+\frac{k^2(9+8v)}{4v^2}\right]$$ 。

因 $\frac{3k}{2v}<\frac{3k}{v}$ ，故 $f(t)$有最大值 $f(\frac{3k}{v})<f(\frac{k(3+v)}{2v})$ 。

(5)當 $2k\le t\le\frac{6k}{1+v}$ 時， $f(t)<f(2k)<f(\frac{3k}{v})<f(\frac{k(3+v)}{2v})$ 。

由(1)(2)(3)(4)(5)得: $f(t)$有最大值 $\frac{\sqrt{3}k^2(v^2+2v+9)}{16v}$ ，

此時 $P(\frac{k(7-v)}{4},\frac{\sqrt{3}k(1+v)}{4})$，$Q(\frac{3k(1-v)}{4v},\frac{\sqrt{3}k(3+v)}{4v})$，無定點。

3.若 $2\le v\le 3$， P，Q 相遇在 $\overline{DE}$ 上。

(1)當 $0\le t\le k$ 時， $f(t)$有最大值 $=f(k)=\frac{1}{2}\cdot k\cdot\sqrt{3}k=\frac{\sqrt{3}k^2}{2}$ 。

(2)當 $k\le t\le\frac{3k}{v}$ 時，$f(t)=\frac{\sqrt{3}v}{4}\left[-(t-\frac{k(3+v)}{2v})^2+\frac{k^2(v^2+2v+9)}{4v^2}\right]$， 因 $k\le\frac{k(3+v)}{2v}\le\frac{6k}{2v}=\frac{3k}{v}$ ，

所以在 $t=\frac{k(3+v)}{2v}$ 時， $f(t)$有最大值 $\frac{\sqrt{3}k^2(v^2+2v+9)}{16v}$ 。

此時 $P(\frac{k(7-v)}{4},\frac{\sqrt{3}k(1+v)}{4})$ ，$Q(\frac{3k(1-v)}{4v},\frac{\sqrt{3}k(3+v)}{4v})$ 。

(3)當 $\frac{3k}{v}\le t\le\frac{4k}{v}$ 時， $f(t)=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}4k-vt & \sqrt{3}k\\ \frac{t-2k}{2} & \frac{\sqrt{3}t}{2}\end{vmatrix}=\frac{\sqrt{3}v}{4}\left[-(t-\frac{3k}{2v})^2+\frac{k^2(8v+9)}{4v^2}\right]$ 。

因 $\frac{3k}{2v}<\frac{3k}{v}$ ， 所以在 $t=\frac{3k}{v}$ 時， $f(t)$有最大值 $f(\frac{3k}{v})\le f(\frac{k(3+v)}{2v})$ 。

(4)當 $\frac{4k}{v}\le t\le\frac{6k}{1+v}$ 時，

$$f(t)=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}4k-vt & \sqrt{3}k\\ \frac{t-2k}{2} & \frac{\sqrt{3}t}{2}\end{vmatrix}=\frac{\sqrt{3}v}{4}\left[-(t-\frac{3k}{2v})^2+\frac{k^2(9+8v)}{4v^2}\right]$$ 。

因 $\frac{3k}{2v}<\frac{3k}{v}$ ， 故 $f(t)$有最大值 $f(\frac{3k}{v})<f(\frac{k(3+v)}{2v})$ 。

由(1)(2)(3)(4)得: $f(t)$有最大值 $\frac{\sqrt{3}k^2(v^2+2v+9)}{16v}$ ，

此時 $P(\frac{k(7-v)}{4},\frac{\sqrt{3}k(1+v)}{4})$ ，$Q(\frac{3k(1-v)}{4v},\frac{\sqrt{3}k(3+v)}{4v})$ ，無定點。

4.若 $3\le v\le 4$， P，Q 相遇在 $\overline{DE}$ 上。

(1)當 $0\le t\le\frac{3k}{v}$ 時， $f(t)$有最大值 $=f(\frac{3k}{v})=\frac{1}{2}\cdot\frac{3k}{v}\cdot\sqrt{3}k=\frac{3\sqrt{3}k^2}{2v}$ 。

(2)當 $\frac{3k}{v}\le t\le k$ 時， $f(t)=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}4k-vt & \sqrt{3}k\\ \frac{-t}{2} & \frac{\sqrt{3}t}{2}\end{vmatrix}=\frac{\sqrt{3}v}{4}\left[-(t-\frac{5k}{2v})^2+\frac{25k^2}{4v^2}\right]$ 。

因 $\frac{5k}{2v}<\frac{3k}{v}$ ，所以在 $t=\frac{3k}{v}$ 時， $f(t)$有最大值 $\frac{3\sqrt{3}k^2}{2v}$ 。此時 $P(k,\sqrt{3}k)$ ，$Q(-\frac{3k}{2v},\frac{3\sqrt{3}k}{2v})$ 。

(3)當 $k \le t \le \frac{4k}{v}$ 時， $f(t)=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 4k-vt & \sqrt{3}k \\ \frac{t-2k}{2} & \frac{\sqrt{3}t}{2} \end{vmatrix}=\frac{\sqrt{3}v}{4}\left[-(t-\frac{3k}{2v})^2+\frac{k^2(8v+9)}{4v^2}\right]$。因 $\frac{3k}{2v}<k$，

故所以在 $t=k$ 時， $f(t)$ 有最大值 $f(k)\le f(\frac{3k}{v})$。

(4)當 $\frac{4k}{v}\le t\le \frac{6k}{1+v}$ 時， P，Q 同在 $\overline{DE}$ 上， $f(t)\le f(\frac{4k}{v})\le f(k)\le f(\frac{3k}{v})$。

由(1)(2)(3)(4)得: $f(t)$ 有最大值 $\frac{3\sqrt{3}k^2}{2v}$，此時， $Q(-\frac{3k}{2v},\frac{3\sqrt{3}k}{2v})$，而 $P(k,\sqrt{3}k)$ 為定點。

5.若 $4\le v\le 5$， P，Q 相遇在 $\overline{DE}$ 上。

(1)當 $0\le t\le \frac{3k}{v}$ 時， $f(t)$ 有最大值 $=f(\frac{3k}{v})=\frac{1}{2}\cdot\frac{3k}{v}\cdot\sqrt{3}k=\frac{3\sqrt{3}k^2}{2v}$。

(2)當 $\frac{3k}{v}\le t\le \frac{4k}{v}$ 時， $f(t)=\frac{\sqrt{3}v}{4}\left[-(t-\frac{5k}{2v})^2+\frac{25k^2}{4v^2}\right]$。因 $\frac{5k}{2v}<\frac{3k}{v}$，

所以在 $t=\frac{3k}{v}$ 時， $f(t)$ 有最大值 $\frac{3\sqrt{3}k^2}{2v}$。此時 $P(k,\sqrt{3}k)$，$Q(-\frac{3k}{2v},\frac{3\sqrt{3}k}{2v})$。

(3)當 $\frac{4k}{v}\le t\le k$ 時， $f(t)=\frac{\sqrt{3}v}{4}\left[-(t-\frac{5k}{2v})^2+\frac{25k^2}{4v^2}\right]$。因 $\frac{5k}{2v}<\frac{4k}{v}$，

所以在 $t=\frac{4k}{v}$ 時， $f(t)$ 有最大值 $f(\frac{4k}{v})<f(\frac{3k}{v})$。

(4)當 $k\le t\le \frac{6k}{1+v}$ 時， P，Q 同在 $\overline{DE}$ 上， $f(t)\le f(k)<f(\frac{4k}{v})<f(\frac{3k}{v})$。

由(1)(2)(3)(4)得: $f(t)$ 有最大值 $\frac{3\sqrt{3}k^2}{2v}$，此時， $Q(-\frac{3k}{2v},\frac{3\sqrt{3}k}{2v})$，而 $P(k,\sqrt{3}k)$ 為定點。

6.若 $v\ge 5$， P，Q 相遇在 $\overline{OE}$ 上。

(1)當 $0\le t\le \frac{3k}{v}$ 時， $f(t)$ 有最大值 $=f(\frac{3k}{v})=\frac{1}{2}\cdot\frac{3k}{v}\cdot\sqrt{3}k=\frac{3\sqrt{3}k^2}{2v}$。

(2)當 $\frac{3k}{v}\le t\le \frac{4k}{v}$ 時， $f(t)=\frac{\sqrt{3}v}{4}\left[-(t-\frac{5k}{2v})^2+\frac{25k^2}{4v^2}\right]$。因 $\frac{5k}{2v}<\frac{3k}{v}$，

所以在 $t=\frac{3k}{v}$ 時， $f(t)$ 有最大值 $\frac{3\sqrt{3}k^2}{2v}$。此時 $P(k,\sqrt{3}k)$，$Q(-\frac{3k}{2v},\frac{3\sqrt{3}k}{2v})$。

(3)當 $\frac{4k}{v}\le t\le \frac{5k}{v}$ 時， $f(t)=\frac{\sqrt{3}v}{4}\left[-(t-\frac{5k}{2v})^2+\frac{25k^2}{4v^2}\right]$。因 $\frac{5k}{2v}<\frac{4k}{v}$，

所以在 $t=\dfrac{4k}{v}$ 時， $f(t)$ 有最大值 $f(\dfrac{4k}{v})<f(\dfrac{3k}{v})$ 。

(4)當 $\dfrac{5k}{v}\le t\le\dfrac{6k}{1+v}$ 時， P，Q 同在 $\overline{OE}$ 上， $f(t)=0$。

由(1)(2)(3)(4)得: $f(t)$ 有最大值 $\dfrac{3\sqrt{3}k^2}{2v}$ ，此時， $Q(-\dfrac{3k}{2v},\dfrac{3\sqrt{3}k}{2v})$ ，而 $P(k,\sqrt{3}k)$ 為定點。

結論: 當 $1\le v\le 3$ 時， $f(t)$ 有最大值 $\dfrac{\sqrt{3}k^2(v^2+2v+9)}{16v}$ ，

此時 $P(\dfrac{k(7-v)}{4},\dfrac{\sqrt{3}k(1+v)}{4})$ ， $Q(\dfrac{3k(1-v)}{4v},\dfrac{\sqrt{3}k(3+v)}{4v})$ ，無定點。

當 $v\ge 3$ 時， $f(t)$ 有最大值 $\dfrac{3\sqrt{3}k^2}{2v}$ ，此時 $Q(-\dfrac{3k}{2v},\dfrac{3\sqrt{3}k}{2v})$ ，而 $P(k,\sqrt{3}k)$ 為定點。

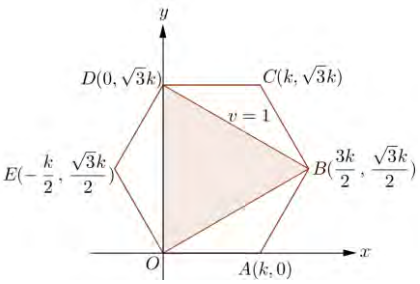


圖 4-2

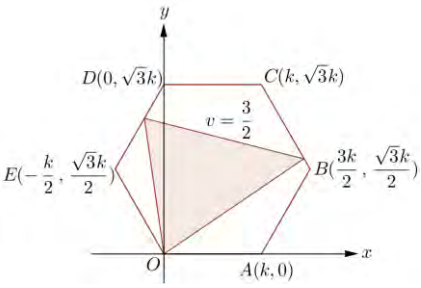


圖 4-3

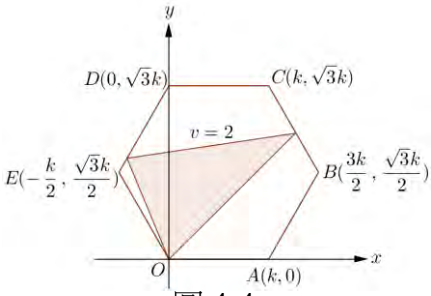


圖 4-4

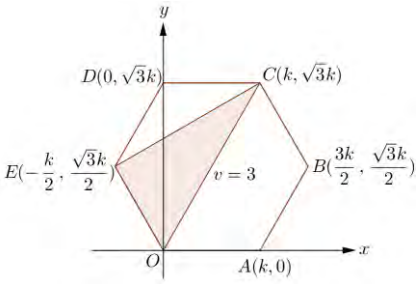


圖 4-5

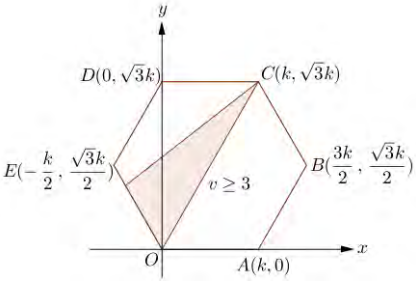


圖 4-6

伍、結論

一、直角三角形 OAB

邊長關係 \ 其他分類		速率範圍	P 與 Q 相遇位置	面積最大值	定點位置
$k\ge h$	$2k\ge h+c$	$1\le v\le\dfrac{h+c}{k}$	$\overline{AB}$	$\dfrac{h(h+c)^2}{8cv}$	$P(\dfrac{h(c+h)}{2c},\ \dfrac{k(c-h)}{2c})$
		$v\ge\dfrac{h+c}{k}$	$\overline{OB}$		
	$2k<h+c$	$1\le v\le\dfrac{h+c}{2k}$	$\overline{AB}$	$\dfrac{hk(h+c-kv)}{2c}$	$Q(0,k)$

		$\frac{h+c}{2k} \le v \le \frac{h+c}{k}$		$\frac{h(h+c)^2}{8cv}$	$P(\frac{h(c+h)}{2c}, \frac{k(c-h)}{2c})$
		$v \ge \frac{h+c}{k}$	$\overline{OB}$		
$h > k$	$2h \ge k+c$	$1 \le v \le \frac{2h}{k+c}$	$\overline{AB}$	$\frac{k(k+c)^2 v}{8c}$	$Q(\frac{h(c-k)}{2c}, \frac{k(k+c)}{2c})$
		$\frac{2h}{k+c} \le v \le \frac{h}{k}$		$\frac{hk(kv+cv-h)}{2cv}$	$P\ (h, 0)$
		$\frac{h}{k} \le v \le \frac{h+c}{2k}$		$\frac{hk(h+c-kv)}{2c}$	$Q\ (0, k)$
		$\frac{h+c}{2k} \le v \le \frac{h+c}{k}$			
		$v \ge \frac{h+c}{k}$	$\overline{OB}$	$\frac{h(h+c)^2}{8cv}$	$P(\frac{h(c+h)}{2c}, \frac{k(c-h)}{2c})$
	$2h < k+c$	$1 \le v \le \frac{h}{k}$	$\overline{AB}$	$\frac{hk(kv+cv-h)}{2cv}$	$P\ (h, 0)$
		$\frac{h}{k} \le v \le \frac{h+c}{2k}$		$\frac{hk(h+c-kv)}{2c}$	$Q\ (0, k)$
		$\frac{h+c}{2k} \le v \le \frac{h+c}{k}$		$\frac{h(h+c)^2}{8cv}$	$P(\frac{h(c+h)}{2c}, \frac{k(c-h)}{2c})$
		$v \ge \frac{h+c}{k}$	$\overline{OB}$		

二、一般三角形 OAB

其他分類 / 邊長關係	速率範圍	P 與 Q 相遇位置	面積最大值	定點位置
$k \ge h > c$	$1 \le v \le \frac{h+c}{k}$	$\overline{AB}$	$\frac{h^2}{2v}\sin\alpha$	$P(h,0)$
	$v \ge \frac{h+c}{k}$	$\overline{OB}$	$\frac{h^2}{2v}\sin\alpha$	$P(h,0)$

$k \ge c \ge h$		$1 \le v \le \frac{h+c}{k}$	$\overline{AB}$	$\frac{h(h+c)^2}{8cv}\sin\alpha$	$P(h-\frac{c-h}{2}\cos\beta,$ $\frac{k(c-h)}{2c}\sin\alpha)$
		$v \ge \frac{h+c}{k}$	$\overline{OB}$		
$c > k \ge h$	$2k \ge h+c$	$1 \le v \le \frac{h+c}{k}$	$\overline{AB}$	$\frac{h(h+c)^2}{8cv}\sin\alpha$	$P(h-\frac{c-h}{2}\cos\beta,$ $\frac{k(c-h)}{2c}\sin\alpha)$
		$v \ge \frac{h+c}{k}$	$\overline{OB}$		
	$2k < h+c$	$1 \le v \le \frac{h+c}{2k}$	$\overline{AB}$	$\frac{hk(h+c-kv)}{2c}\sin\alpha$	$Q(k\cos\alpha, k\sin\alpha)$
		$\frac{h+c}{2k} \le v \le \frac{h+c}{k}$		$\frac{h(h+c)^2}{8cv}\sin\alpha$	$P(h-\frac{c-h}{2}\cos\beta,$ $\frac{k(c-h)}{2c}\sin\alpha)$
		$v \ge \frac{h+c}{k}$	$\overline{OB}$		
$h > k \ge c$		$1 \le v \le \frac{h}{k}$	$\overline{AB}$	$\frac{vk^2}{2}\sin\alpha$	$Q(k\cos\alpha, k\sin\alpha)$
		$\frac{h}{k} \le v \le \frac{h+c}{k}$		$\frac{h^2}{2v}\sin\alpha$	$P(h,0)$
		$v \ge \frac{h+c}{k}$	$\overline{OB}$		
$h \ge c > k$		$1 \le v \le \frac{2h}{k+c}$	$\overline{AB}$	$\frac{k(k+c)^2 v}{8c}\sin\alpha$	$Q(k\cos\alpha + \frac{c-k}{2}\cos\beta,$ $\frac{k(k+c)}{2c}\sin\alpha)$
		$\frac{2h}{k+c} \le v \le \frac{h}{k}$		$\frac{hk(kv+cv-h)}{2cv}\sin\alpha$	$P(h,0)$
		$\frac{h}{k} \le v \le \frac{h+c}{k}$		$\frac{h^2}{2v}\sin\alpha$	
		$v \ge \frac{h+c}{k}$	$\overline{OB}$		
$c > h > k$	$2h \ge k+c$	$1 \le v \le \frac{2h}{k+c}$	$\overline{AB}$	$\frac{k(k+c)^2 v}{8c}\sin\alpha$	$Q(k\cos\alpha + \frac{c-k}{2}\cos\beta,$ $\frac{k(k+c)}{2c}\sin\alpha)$

		$\frac{2h}{k+c} \le v \le \frac{h}{k}$		$\frac{hk(kv+cv-h)}{2cv}\sin\alpha$	$P(h,0)$
		$\frac{h}{k} \le v \le \frac{h+c}{2k}$		$\frac{hk(h+c-kv)}{2c}\sin\alpha$	$Q(k\cos\alpha, k\sin\alpha)$
		$\frac{h+c}{2k} \le v \le \frac{h+c}{k}$		$\frac{h(h+c)^2}{8cv}\sin\alpha$	$P(h-\frac{c-h}{2}\cos\beta,$ $\frac{k(c-h)}{2c}\sin\alpha)$
		$v \ge \frac{h+c}{k}$	$\overline{OB}$		
$c>h>k$	$2h<k+c$	$1 \le v \le \frac{h}{k}$	$\overline{AB}$	$\frac{hk(kv+cv-h)}{2cv}\sin\alpha$	$P(h,0)$
		$\frac{h}{k} \le v \le \frac{h+c}{2k}$		$\frac{hk(h+c-kv)}{2c}\sin\alpha$	$Q(k\cos\alpha, k\sin\alpha)$
		$\frac{h+c}{2k} \le v \le \frac{h+c}{k}$		$\frac{h(h+c)^2}{8cv}\sin\alpha$	$P(h-\frac{c-h}{2}\cos\beta,$ $\frac{k(c-h)}{2c}\sin\alpha)$
		$v \ge \frac{h+c}{k}$	$\overline{OB}$		

三、$F(v)$的圖形探討(包含直角三角形與一般三角形)

(一) $h>k$。

其他分類 / 邊長關係	速率範圍	定點位置	最大面積函數 $F(v)$	$F(v)$的圖形增減與凹向
$h>k\ge c$	$1 \le v \le \frac{h}{k}$	$Q(k\cos\alpha, k\sin\alpha)$	$\frac{vk^2}{2}\sin\alpha$	↗
	$\frac{h}{k} \le v < \infty$	$P(h,0)$	$\frac{h^2}{2v}\sin\alpha$	
$h\ge c>k$	$1 \le v \le \frac{2h}{k+c}$	$Q(k\cos\alpha+\frac{c-k}{2}\cos\beta,$ $\frac{k(k+c)}{2c}\sin\alpha)$	$\frac{k(k+c)^2 v}{8c}\sin\alpha$	↗
	$\frac{2h}{k+c} \le v \le \frac{h}{k}$	$P(h,0)$	$\frac{hk(kv+cv-h)}{2cv}\sin\alpha$	
	$\frac{h}{k} \le v < \infty$		$\frac{h^2}{2v}\sin\alpha$	

$c>h>k$	$2h\ge k+c$	$1\le v\le \dfrac{2h}{k+c}$	$Q(k\cos\alpha+\dfrac{c-k}{2}\cos\beta,$ $\dfrac{k(k+c)}{2c}\sin\alpha)$	$\dfrac{k(k+c)^2 v}{8c}\sin\alpha$	↗
		$\dfrac{2h}{k+c}\le v\le \dfrac{h}{k}$	$P(h,0)$	$\dfrac{hk(kv+cv-h)}{2cv}\sin\alpha$	⌒
		$\dfrac{h}{k}\le v\le \dfrac{h+c}{2k}$	$Q(k\cos\alpha,k\sin\alpha)$	$\dfrac{hk(h+c-kv)}{2c}\sin\alpha$	↘
		$\dfrac{h+c}{2k}\le v<\infty$	$P(h-\dfrac{c-h}{2}\cos\beta,$ $\dfrac{k(c-h)}{2c}\sin\alpha)$	$\dfrac{h(h+c)^2}{8cv}\sin\alpha$	⌒
$c>h>k$	$2h<k+c$	$1\le v\le \dfrac{h}{k}$	$P(h,0)$	$\dfrac{hk(kv+cv-h)}{2cv}\sin\alpha$	↗
		$\dfrac{h}{k}\le v\le \dfrac{h+c}{2k}$	$Q(k\cos\alpha,k\sin\alpha)$	$\dfrac{hk(h+c-kv)}{2c}\sin\alpha$	↘
		$\dfrac{h+c}{2k}\le v<\infty$	$P(h-\dfrac{c-h}{2}\cos\beta,$ $\dfrac{k(c-h)}{2c}\sin\alpha)$	$\dfrac{h(h+c)^2}{8cv}\sin\alpha$	⌒

(二) $k\ge h$ 。

其他分類 / 邊長關係	速率範圍	定點位置	最大面積函數 $F(v)$	$F(v)$的圖形增減與凹向
$k\ge h>c$	$1\le v<\infty$	$P(h,0)$	$\dfrac{h^2}{2v}\sin\alpha$	⌒
$k\ge c\ge h$	$1\le v<\infty$	$P(h-\dfrac{c-h}{2}\cos\beta,$ $\dfrac{k(c-h)}{2c}\sin\alpha)$	$\dfrac{h(h+c)^2}{8cv}\sin\alpha$	⌒

$c>k\geq h$	$2k\geq h+c$	$1\leq v<\infty$	$P(h-\frac{c-h}{2}\cos\beta,$ $\frac{k(c-h)}{2c}\sin\alpha)$	$\frac{h(h+c)^2}{8cv}\sin\alpha$	
	$2k<h+c$	$1\leq v\leq\frac{h+c}{2k}$	$Q(k\cos\alpha,k\sin\alpha)$	$\frac{hk(h+c-kv)}{2c}\sin\alpha$	
		$\frac{h+c}{2k}\leq v<\infty$	$P(h-\frac{c-h}{2}\cos\beta,$ $\frac{k(c-h)}{2c}\sin\alpha)$	$\frac{h(h+c)^2}{8cv}\sin\alpha$	

四、正四、五、六、八邊形。

其他分類 / 正 n 邊形	速率範圍	P 與 Q 相遇位置	面積最大值	定點位置
$n=4$	$1\leq v\leq 2$	$\overline{BC}$	$\frac{k^2}{2}$	$Q(0,k)$
	$2\leq v\leq 3$		$\frac{k^2}{v}$	$P(k,k)$
	$v\geq 3$	$\overline{OC}$		
$n=5$	$1\leq v\leq\frac{3}{2}$	$\overline{BC}$	$\frac{k^2\sin 72^\circ(1+2\cos 72^\circ)}{2}$	$P(k+k\cos 72^\circ,k\sin 72^\circ)$
	$\frac{3}{2}\leq v\leq 2$	$\overline{CD}$		
	$2\leq v\leq\frac{3+2\cos 36^\circ}{2}$		$\frac{k^2\sin 72^\circ(2\cos 36^\circ-1)(3+2\cos 36^\circ-v)}{2}$	$Q(-k\cos 72^\circ,k\sin 72^\circ)$
	$\frac{3+2\cos 36^\circ}{2}\leq v\leq 3$		$\frac{k^2\sin 72^\circ(2\cos 36^\circ-1)(3+2\cos 36^\circ)^2}{8v}$	$P(\frac{k\cos 36^\circ(1+2\cos 36^\circ)}{2},$ $\frac{k\cos 36^\circ(4\sin 36^\circ+\cos 36^\circ(2\cos 36^\circ-1))}{2})$
	$3\leq v\leq 4$			
	$v\geq 4$	$\overline{OD}$		

$n=6$	$1\le v\le 2$	$\overline{CD}$	$\dfrac{\sqrt{3}(v^2+2v+9)}{16v}k^2$	無
	$2\le v\le 3$	$\overline{DE}$		
	$3\le v\le 5$		$\dfrac{3\sqrt{3}}{2v}k^2$	$P(k,\sqrt{3}k)$
	$v\ge 5$	$\overline{OE}$		
$n=8$	$1\le v\le \dfrac{3}{2}$	$\overline{DE}$	$\dfrac{4+3\sqrt{2}}{4}k^2$	$P(\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}k,\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}k)$
	$\dfrac{3}{2}\le v\le \dfrac{5}{3}$		$\dfrac{3\sqrt{2}+2-\sqrt{2}v}{2}k^2$	$Q(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}k,\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}k)$
	$\dfrac{5}{3}\le v\le \dfrac{4+\sqrt{2}}{3}$	$\overline{EF}$		
	$\dfrac{4+\sqrt{2}}{3}\le v\le 4-\sqrt{2}$		$\dfrac{\sqrt{2}(v^2+2\sqrt{2}v+18+8\sqrt{2})}{16v}k^2$	無
	$4-\sqrt{2}\le v\le 3$		$\dfrac{4+\sqrt{2}v}{2v}k^2$	$P(k,(1+\sqrt{2})k)$
	$3\le v\le 7$	$\overline{FG}$		
	$v\ge 7$	$\overline{GO}$		

陸、未來展望

目前我們已完成三角形的所有情況，正多邊形的情況推廣到正四、五、六、八邊形，並推測正偶數 n 邊形：若 $n=2m$， $m\ge 2$ ，當 $v\ge m$ 時，定點位置在 $P(k,k\tan(90^\circ-\dfrac{90^\circ}{m}))$ ，此 P 點即為原點經過對稱中心而連接的頂點。其他邊數尚無一般性的結果，未來可以繼續往這些方面努力。本研究的結果希望也能應用在最佳化的理論及實務中，為科學及生活的提升提供有效的幫助。

柒、參考資料

一、**第十三屆 JHMC 國中數學競賽**(2015)。

二、許志農(主編) (2012)。**高中數學甲選修下冊**。新北市：龍騰。

三、游森棚(主編)(2015)。**高中數學第三冊**。台南市：翰林。

四、楊維哲、蔡聰明、吳隆盛(主編) (2003)。**高中數學第三冊**。台北市：三民。

【評語】050406

優點：

1. 本文起源於第十三屆 JHMC 國中數學競賽的一個題目，探討兩動點 P 和 Q 由原點 O 出發，沿著直角ΔOAB 的邊界運動，Q 點以每秒 1 單位的速率順時針方向運動，P 點以每秒 v 單位的速率逆時針方向運動，在 P 和 Q 兩點相遇之前，求ΔOPQ 的面積。本文並將題目推廣到任意三角形、及某些正多邊形，有得到不錯的研究結果。
2. 探討正 n 邊形中，當 n 為偶數的情形，有較完整的結果。
3. 研究方法以高中教材內容為主，使用座標及三角函數值概念，值得鼓勵。

建議：

1. 從三角形推廣至多邊形，如四、五、六、八，其餘尚無結果。未交代七邊形可能遭遇問題（主要是處理會較複雜）。
2. 可試著比較正 K 邊形與正 2K 邊形的相關性。
3. 由作品內容，看不出結論的實用性。

作品海報

壹、研究動機

在專題研究的課程中，老師給我們第十三屆 JHMC 國中數學競賽中，個人賽第四回第 7 題的題目：「直線 $y=-\frac{4}{3}x+8$ 與 x、y 軸分別交於 A、B 兩點，動點 P、Q 分別從原點 O 同時出發，P 點以每秒 2 單位的速率沿著 ΔOAB 的邊界逆時針運動，Q 點沿著 ΔOAB 的邊界順時針以每秒 1 單位的速率運動，一直到 P、Q 兩點移動到 B 點相遇時就停止。試問 P、Q 的運動過程中，面積的最大值為 ___。」當我們將 P 點的速率改為每秒 1 單位或 3 單位時，發現其面積最大值與速率 v 成反比，當面積達最大時，P 點位置竟然不受速率 v 的影響，這樣特殊的點，我們稱它為面積最大值定點，或簡稱為定點。這是一道簡單又有趣的題目，經網路查詢之後，無相關的文獻資料。於是，我們就以「面積最大值定點」為題目，開始我們的研究。

貳、研究目的

一、在直角 ΔOAB 中，探討 P 點在不同速率下，於 P、Q 兩點相遇之前，ΔOPQ 面積的最大值、此時 P、Q 的坐標及其幾何意義。

二、在一般 ΔOAB 中，探討 P 點在不同速率下，於 P、Q 兩點相遇之前，ΔOPQ 面積的最大值、此時 P、Q 的坐標及其幾何意義。

三、在任意 ΔOAB 中，以速率 v 為變數，探討最大面積函數 $F(v)$的圖形，並且比較其差異性。

四、在正 n 邊形中，$n=4$、5、6、8，探討 P 點在不同速率下，於 P、Q 兩點相遇之前，ΔOPQ 面積的最大值、此時 P、Q 的坐標及其幾何意義。

參、研究設備及器材

電腦、Word、Geogebra 數學繪圖軟體、紙、筆。

肆、研究過程或方法

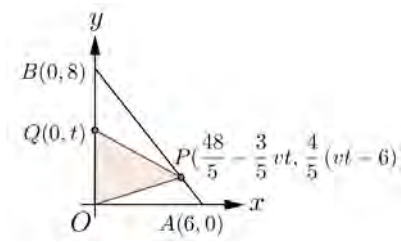
研究一：直角三角形 OAB

在直角 ΔOAB 中，$O(0,0)$，$A(h,0)$，$B(0,k)$，$\overline{AB}=c$，$h>0$，$k>0$，兩動點 P、Q 同時由原點 O 出發沿 ΔOAB 的邊界運動，Q 以每秒 1 單位的速率順時針方向運動，P 以每秒 $v(\geq 1)$單位的速率逆時針方向運動，在 P、Q 相遇之前，討論 ΔOPQ 面積的最大值。在這些條件之下，得到定理 1.1 與 1.2。在敘述定理之前，我們先討論兩個範例，以作為定理的思考方向。

【範例 1】

若 $O(0,0)$，$A(6,0)$，$B(0,8)$。P 在 $\overline{OA}$ 上且 Q 在 $\overline{OB}$ 上時，ΔOPQ 面積為遞增；而 P、Q 同時在 $\overline{AB}$ 上時，ΔOPQ 面積為遞減。故考慮 P 在 $\overline{AB}$ 上且 Q 在 $\overline{OB}$ 上，則在時間 t 秒時，$P(\frac{48}{5}-\frac{3}{5}vt,\frac{4}{5}(vt-6))$，$Q(0,t)$，如下圖(一)，此時 ΔOPQ 面積為

$f(t)=\frac{1}{2}t\cdot\frac{48-3vt}{5}=-\frac{3v}{10}\left[(t-\frac{8}{v})^2-\frac{64}{v^2}\right]$，其中 $\frac{6}{v}\leq t\leq 8$。因對 $v\geq 1$，$\frac{8}{v}$ 恆滿足 $\frac{6}{v}<\frac{8}{v}\leq 8$，故在 $t=\frac{8}{v}$ 時，$f(t)$有最大值 $\frac{96}{5v}$。此時 $Q(0,\frac{8}{v})$，而 $P(\frac{24}{5},\frac{8}{5})$ 與速率 v 無關，故 P 為面積最大值定點。此時，P 恰為 $\overline{OA}+\overline{AB}$ 路徑的中點。



圖(一)

【範例 2】

在範例 1 中，若 $v=1$ 且 $\overline{OB}<8$，則 P 到 $(\frac{24}{5},\frac{8}{5})$時，$Q$ 已繞過 B 點，面積開始遞減。

因此考慮將 B 點坐標改為(0,7)，當 P 在 $\overline{AB}$ 上且 Q 在 $\overline{OB}$ 上，則在時間 t 秒時，

$P(\frac{6}{c}(6+c-vt),\frac{7}{c}(vt-6))$，$Q(0,t)$，$\Delta OPQ$ 面積為 $f(t)=\frac{1}{2}t\cdot\frac{6(6+c-vt)}{c}=-\frac{3v}{c}\left[(t-\frac{6+c}{2v})^2-\frac{(6+c)^2}{4v^2}\right]$，其中 $\frac{6}{v}\leq t\leq 7$。

(1)若 $\frac{6+c}{2v}\geq 7$，即 $1\leq v\leq\frac{6+c}{14}$，$f(t)$在 $t=7$ 時有最大值 $\frac{21(6+c-7v)}{c}$。此時 $P(\frac{36+6c-42v}{c},\frac{49v-42}{c})$，而 $Q(0,7)$為面積最大值定點。

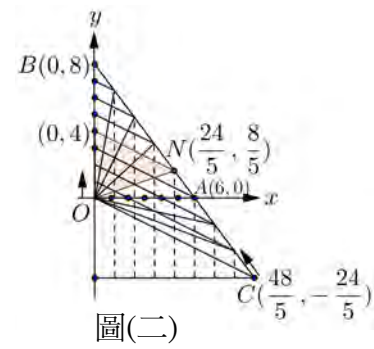
(2)若 $\frac{6}{v}\leq\frac{6+c}{2v}\leq 7$，即 $v\geq\frac{6+c}{14}$，$f(t)$在 $t=\frac{6+c}{2v}$ 時有最大值 $\frac{3(6+c)^2}{4cv}$。此時 $Q(0,\frac{6+c}{2v})$，而 $P(\frac{3(6+c)}{c},\frac{7(c-6)}{2c})$ 為面積最大值定點。此時，P 恰好是 $\overline{OA}+\overline{AB}$ 路徑的中點。

【幾何觀點】

在範例 1 中，我們發現：「對於 $v\geq 1$，當 $vt=8$ 時，即 P 走到 $\overline{OA}+\overline{AB}$ 路徑的中點時，ΔOPQ 面積有最大值。」如何解釋此現象呢？因 P 速率較快，故在 P 由 O 往 A 走的過程中，Q 點未到達 B 點，因此，在不影響結果的情況下，我們不妨設 P 是由 C 出發，其中 B、A、C 三點共線且 $\overline{CA}=\overline{OA}=6$。今以 $v=2$ 為例，如下圖(二)，Q 每走 1 單位，ΔOPQ 的高就減少 1.2 單位，當 Q 走了 t 單位時，ΔOPQ 的面積為 $\frac{1}{2}\cdot t\cdot(\frac{48}{5}-\frac{6}{5}t)=\frac{1}{2}\cdot t\cdot\frac{6}{5}(8-t)$。由算幾不等式得 $\frac{t+(8-t)}{2}\geq\sqrt{t(8-t)}$，當 $t=8-t=4$ 時，ΔOPQ 的面積有最大值，此時 P 點恰好走到 $\overline{CB}$ 的中點 N。

一般而言，若 $k\geq h>0$ 且 $v\geq 1$，則 ΔOPQ 的面積為 $\frac{1}{2}\cdot t\cdot\frac{h}{c}(h+c-vt)=\frac{h}{2cv}\cdot vt\cdot(h+c-vt)$。

由算幾不等式得 $\frac{vt+(h+c-vt)}{2}\geq\sqrt{vt(h+c-vt)}$。當 $vt=h+c-vt=\frac{h+c}{2}$ 時，ΔOPQ 的面積有最大值，此時 P 恰好到 N。於是我們便知：「只要 $\overline{OB}\geq\frac{\overline{OA}+\overline{AB}}{2}$，則對 $v\geq 1$，在 Q 到 B 之前，P 都會先到 N，而且在此時面積有最大值。」



圖(二)

在範例 2 中，因為 $\overline{OB}<\frac{\overline{OA}+\overline{AB}}{2}$，因此當 P 速率較慢時，$1\leq v\leq\frac{6+c}{14}$，$P$ 尚未到 N，Q 已先(含同時)到 B，故 ΔOPQ 的面積最大值產生在 $P(\frac{36+6c-42v}{c},\frac{49v-42}{c})$，$Q(0,7)$的位置；但是，當 P 速率夠快時，$v\geq\frac{6+c}{14}$，Q 尚未到 B，P 已先(含同時)到 N，故 ΔOPQ 的面積最大值產生在 $P(\frac{3(6+c)}{c},\frac{7(c-6)}{2c})$，$Q(0,\frac{6+c}{2v})$的位置。

定理 1.1：

直角ΔOAB中，$O(0,0)$，$A(h,0)$，$B(0,k)$，$k \ge h > 0$，$\overline{AB}=c$。

(1)若$2k \ge h+c$，則ΔOPQ面積的最大值爲$\frac{h(h+c)^2}{8cv}$，此時$P(\frac{h(h+c)}{2c},\frac{k(c-h)}{2c})$爲面積最大值定點，而$Q(0,\frac{h+c}{2v})$。

(2)若$2k < h+c$，

①當$1 \le v \le \frac{h+c}{2k}$時，則$\Delta OPQ$面積的最大值爲$\frac{hk(h+c-kv)}{2c}$，此時$P(\frac{h(h+c-kv)}{c},\frac{k(kv-h)}{c})$，而$Q(0,k)$爲面積最大值定點。

②當$v \ge \frac{h+c}{2k}$時，則ΔOPQ面積的最大值爲$\frac{h(h+c)^2}{8cv}$，此時$P(\frac{h(h+c)}{2c},\frac{k(c-h)}{2c})$爲面積最大值定點，而$Q(0,\frac{h+c}{2v})$。

定理 1.2：

直角ΔOAB中，$O(0,0)$，$A(h,0)$，$B(0,k)$，$h > k > 0$，$\overline{AB}=c$。

(1)若$2h \ge k+c$，

①當$1 \le v \le \frac{2h}{k+c}$時，$\Delta OPQ$面積的最大值爲$\frac{kv(k+c)^2}{8c}$，此時$P(\frac{k+c}{2}v,0)$，而$Q(\frac{h(c-k)}{2c},\frac{k(k+c)}{2c})$爲面積最大值定點。

②當$\frac{2h}{k+c} \le v \le \frac{h}{k}$時，$\Delta OPQ$面積的最大值爲$\frac{hk(kv+cv-h)}{2cv}$，此時$P(h,0)$爲面積最大值定點，而$Q(\frac{h(h-kv)}{cv},\frac{k(kv+cv-h)}{cv})$。

③當$\frac{h}{k} \le v \le \frac{h+c}{2k}$時，$\Delta OPQ$面積的最大值爲$\frac{hk(h+c-kv)}{2c}$，此時$P(\frac{h(h+c-kv)}{c},\frac{k(kv-h)}{c})$，而$Q(0,k)$爲面積最大值定點。

④當$v \ge \frac{h+c}{2k}$時，ΔOPQ面積的最大值爲$\frac{h(h+c)^2}{8cv}$，此時$P(\frac{h(h+c)}{2c},\frac{k(c-h)}{2c})$爲面積最大值定點，而$Q(0,\frac{h+c}{2v})$。

(2)若$2h < k+c$，

①當$1 \le v \le \frac{h}{k}$時，ΔOPQ面積的最大值爲$\frac{hk(kv+cv-h)}{2cv}$，此時$P(h,0)$爲面積最大值定點，而$Q(\frac{h(h-kv)}{cv},\frac{k(kv+cv-h)}{cv})$。

②當$\frac{h}{k} \le v \le \frac{h+c}{2k}$時，$\Delta OPQ$面積的最大值爲$\frac{hk(h+c-kv)}{2c}$，此時$P(\frac{h(h+c-kv)}{c},\frac{k(kv-h)}{c})$，而$Q(0,k)$爲面積最大值定點。

③當$v \ge \frac{h+c}{2k}$時，ΔOPQ面積的最大值爲$\frac{h(h+c)^2}{8cv}$，此時$P(\frac{h(h+c)}{2c},\frac{k(c-h)}{2c})$爲面積最大值定點，而$Q(0,\frac{h+c}{2v})$。

研究二：一般三角形 OAB

現在我們將直角三角形 OAB 的情況推廣到一般三角形 OAB，先假設$\angle AOB=\alpha$，$\angle OAB=\beta$，$\angle OBA=\theta$，$\overline{OA}=h$，$\overline{OB}=k$，$\overline{AB}=c$。兩動點 P、Q 同時由原點 O 出發，沿ΔOAB的邊界運動，Q 以每秒 1 單位的速率順時針方向運動，P 以每秒 $v(\ge 1)$單位的速率逆時針方向運動。然後討論 P、Q 兩點在相遇之前，ΔOPQ 面積的最大值。在這些條件之下，得到定理 2.1 與 2.2。

定理 2.1：

在ΔOAB中，若 $O(0,0)$，$A(h,0)$，$k \ge h$。

(1)當$k \ge h > c$時，ΔOPQ面積的最大值爲$\frac{h^2\sin\alpha}{2v}$，此時$P(h,0)$爲面積最大值定點，而$Q(\frac{h\cos\alpha}{v},\frac{h\sin\alpha}{v})$。

(2)當$k \ge c \ge h$時，ΔOPQ面積的最大值爲$\frac{h(h+c)^2}{8cv}\sin\alpha$，此時$P(h-\frac{c-h}{2}\cos\beta,\frac{k(c-h)}{2c}\sin\alpha)$爲面積最大值定點，而$Q(\frac{h+c}{2v}\cos\alpha,\frac{h+c}{2v}\sin\alpha)$。

(3)當$c > k \ge h$且$2k \ge h+c$時，ΔOPQ面積的最大值爲$\frac{h(h+c)^2}{8cv}\sin\alpha$，此時$P(h-\frac{c-h}{2}\cos\beta,\frac{k(c-h)}{2c}\sin\alpha)$爲面積最大值定點，

而$Q(\frac{h+c}{2v}\cos\alpha,\frac{h+c}{2v}\sin\alpha)$。

(4)當$c > k \ge h$且$2k < h+c$時，

①若$1 \le v \le \frac{h+c}{2k}$，$\Delta OPQ$面積的最大值爲$\frac{hk(h+c-kv)}{2c}\sin\alpha$，此時$P(h-(kv-h)\cos\beta,\frac{k(kv-h)}{c}\sin\alpha)$，

而$Q(k\cos\alpha,k\sin\alpha)$爲面積最大值定點。

②若$v \ge \frac{h+c}{2k}$，ΔOPQ面積的最大值爲$\frac{h(h+c)^2}{8cv}\sin\alpha$，此時$P(h-\frac{c-h}{2}\cos\beta,\frac{k(c-h)}{2c}\sin\alpha)$爲面積最大值定點，而$Q(\frac{h+c}{2v}\cos\alpha,\frac{h+c}{2v}\sin\alpha)$。

定理 2.2：

在ΔOAB中，若 $O(0,0)$，$A(h,0)$，$h > k$。

(1)當若$h > k \ge c$時，

①若$1 \le v \le \frac{h}{k}$，ΔOPQ面積的最大值爲$\frac{k^2v\sin\alpha}{2}$，此時$P(kv,0)$，而$Q(k\cos\alpha,k\sin\alpha)$爲面積最大值定點。

②若$v \ge \frac{h}{k}$，ΔOPQ面積的最大值爲$\frac{h^2\sin\alpha}{2v}$，此時$P(h,0)$爲面積最大值定點，而$Q(\frac{h\cos\alpha}{v},\frac{h\sin\alpha}{v})$。

(2)當$h \ge c > k$時，

①若$1 \le v \le \frac{2h}{k+c}$，$\Delta OPQ$面積的最大值爲$\frac{k(k+c)^2v}{8c}\sin\alpha$，此時$P(\frac{k+c}{2}v,0)$，而$Q(k\cos\alpha+\frac{c-k}{2}\cos\beta,\frac{k(k+c)}{2c}\sin\alpha)$ 爲面積最大值定點。

②若$\frac{2h}{k+c} \le v \le \frac{h}{k}$，$\Delta OPQ$面積的最大值爲$\frac{hk(kv+cv-h)}{2cv}\sin\alpha$，此時$P(h,0)$爲面積最大值定點，而$Q(k\cos\alpha+\frac{h-kv}{v}\cos\beta,\frac{k(kv+cv-h)}{cv}\sin\alpha)$。

③若$v \ge \frac{h}{k}$，ΔOPQ面積的最大值爲$\frac{h^2\sin\alpha}{2v}$，此時$P(h,0)$爲面積最大值定點，而$Q(\frac{h\cos\alpha}{v},\frac{h\sin\alpha}{v})$。

(3)當$c > h > k$且$2h \ge k+c$時，

①若$1 \le v \le \frac{2h}{k+c}$，$\Delta OPQ$面積的最大值爲$\frac{k(k+c)^2v}{8c}\sin\alpha$，此時$P(\frac{k+c}{2}v,0)$，而$Q(k\cos\alpha+\frac{c-k}{2}\cos\beta,\frac{k(k+c)}{2c}\sin\alpha)$爲面積最大值定點。

②若$\frac{2h}{k+c}\le v\le\frac{h}{k}$，$\Delta OPQ$面積的最大值爲$\frac{hk(kv+cv-h)}{2cv}\sin\alpha$，此時$P(h,0)$爲面積最大值定點，而

$Q(k\cos\alpha+\frac{h-kv}{v}\cos\beta,\frac{k(kv+cv-h)}{cv}\sin\alpha)$。

③若$\frac{h}{k}\le v\le\frac{h+c}{2k}$，$\Delta OPQ$面積的最大值爲$\frac{hk(h+c-kv)}{2c}\sin\alpha$，此時$P(h-(kv-h)\cos\beta,\frac{k(kv-h)}{c}\sin\alpha)$，而$Q(k\cos\alpha,k\sin\alpha)$爲面積最大值定點。

④若$v\ge\frac{h+c}{2k}$，ΔOPQ面積的最大值爲$\frac{h(h+c)^2}{8cv}\sin\alpha$，此時$P(h-\frac{c-h}{2}\cos\beta,\frac{k(c-h)}{2c}\sin\alpha)$爲面積最大值定點，而

$Q(\frac{h+c}{2v}\cos\alpha,\frac{h+c}{2v}\sin\alpha)$。

(4)當$c>h>k$且$2h<k+c$時，

①若$1\le v\le\frac{h}{k}$，ΔOPQ面積的最大值爲$\frac{hk(kv+cv-h)}{2cv}\sin\alpha$，此時$P(h,0)$爲面積最大值定點，而

$Q(k\cos\alpha+\frac{h-kv}{v}\cos\beta,\frac{k(kv+cv-h)}{cv}\sin\alpha)$。

②若$\frac{h}{k}\le v\le\frac{h+c}{2k}$，$\Delta OPQ$面積的最大值爲$\frac{hk(h+c-kv)}{2c}\sin\alpha$，此時$P(h-(kv-h)\cos\beta,\frac{k(kv-h)}{c}\sin\alpha)$，而$Q(k\cos\alpha,k\sin\alpha)$爲面積最大值定點。

③若$v\ge\frac{h+c}{2k}$，ΔOPQ面積的最大值爲$\frac{h(h+c)^2}{8cv}\sin\alpha$，此時$P(h-\frac{c-h}{2}\cos\beta,\frac{k(c-h)}{2c}\sin\alpha)$爲面積最大值定點，而

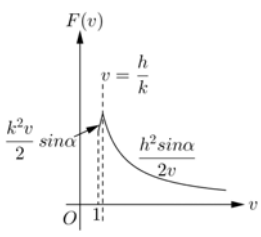
$Q(\frac{h+c}{2v}\cos\alpha,\frac{h+c}{2v}\sin\alpha)$。

研究三：探討 $F(v)$的圖形

最後，以速率v爲變數，以$F(v)$表示最大面積函數，底下我們探討並解讀$F(v)$的圖形。

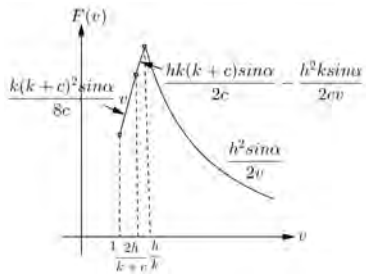
(一)若ΔOAB爲任意(含直角與一般)三角形且$h>k$。

1.$h>k\ge c$：



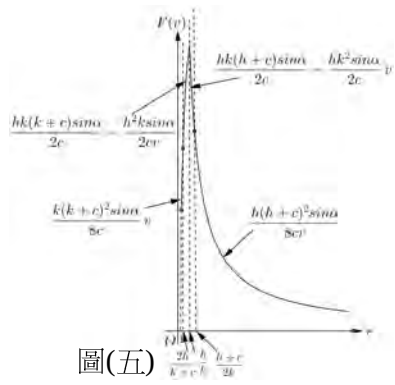
圖(三)

2.$h\ge c>k$：



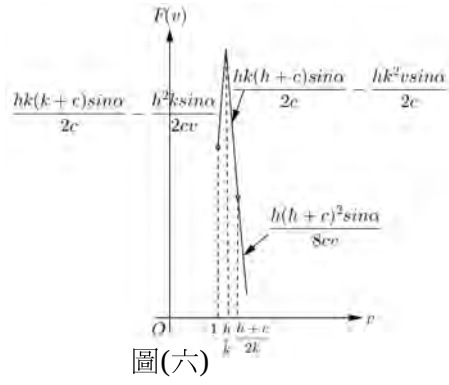
圖(四)

3.$c>h>k$且$2h\ge k+c$：



圖(五)

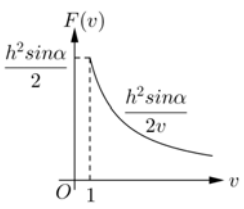
4.$c>h>k$且$2h<k+c$：



圖(六)

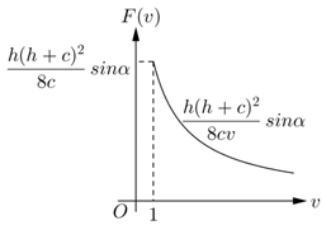
(二)若ΔOAB爲任意(含直角與一般)三角形且$k\ge h$。

1.$k\ge h>c$：



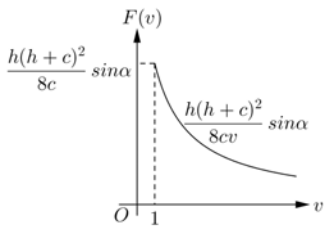
圖(七)

2.$k\ge c\ge h$：



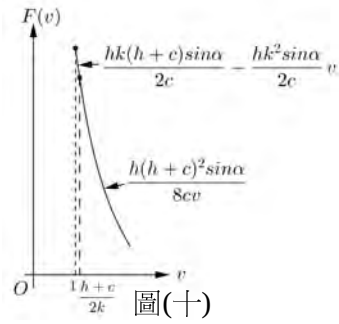
圖(八)

3.$c>k\ge h$且$2k\ge h+c$：



圖(九)

4.$c>k\ge h$且$2k<h+c$：



圖(十)

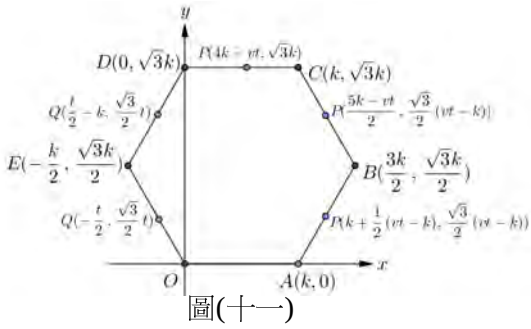
研究四：推廣到正 n 邊形，$n=4$，5，6，8

最後，我們將三角形的情況推廣到正n邊形，其中$n=4$，5，6，8。因爲篇幅的關係，在此僅列出正六邊形的結果。

當$1\le v\le 3$時，$f(t)$有最大值$\frac{\sqrt{3}(v^2+2v+9)}{16v}k^2$，

此時$P(\frac{(7-v)}{4}k,\frac{\sqrt{3}(1+v)}{4}k)$，$Q(\frac{3(1-v)}{4v}k,\frac{\sqrt{3}(3+v)}{4v}k)$，無定點。

當$v\ge 3$時，$f(t)$有最大值$\frac{3\sqrt{3}}{2v}k^2$，此時$P(k,\sqrt{3}k)$爲定點，而$Q(-\frac{3k}{2v},\frac{3\sqrt{3}k}{2v})$。



圖(十一)

伍、未來展望

目前我們已完成三角形的所有情況，正多邊形的情況推廣到正四、五、六、八邊形，並推測正偶數n邊形：若$n=2m$，$m\ge 2$，當$v\ge m$時，定點位置在$P(k,k\tan(90^\circ-\frac{90^\circ}{m}))$，此$P$點即爲原點經過對稱中心而連接的頂點。其他邊數尚無一般性的結果，未來可以繼續往這些方面努力。本研究的結果希望能應用在最佳化的理論及實務中，爲科學及生活的提升提供有效的幫助。

陸、參考資料及其他

一、**第十三屆 *JHMC* 國中數學競賽**(2015)。

二、許志農(主編) (2012)。**高中數學甲選修下冊**。新北市：龍騰。

三、游森棚(主編)(2015)。**高中數學第三冊**。台南市：翰林。

四、楊維哲、蔡聰明、吳隆盛(主編) (2003)。**高中數學第三冊**。台北市：三民。