

中華民國第 57 屆中小學科學展覽會

作品說明書

高級中等學校組 數學科

050405

多堆洗牌之最少次數探討

學校名稱：苗栗縣立興華高級中學

作者： 高一 楊蕎卉 高一 曾巧閔 高一 吳舜曄	指導老師： 蘇柏奇 游淑媛
---	-----------------------------

關鍵詞：多堆洗牌、重排(*permutation*)、階數(*order*)

摘要

我們延伸黃莉芸、邱文均所提供的兩堆洗牌的數學模式，將其擴展到三堆以上的情形，並討論特殊情況下的洗牌次數（如同堆牌顏色相同或每堆牌數量相等）。探討過程中，我們發現前人所提及的數學模式相當有效，但三堆以上的情形更加複雜，我們修正數學模式以適用於多堆洗牌的情形。

壹、研究動機：

我們嘗試將黃莉芸、邱文均探討兩堆洗牌時所提出的數學模式（圖數列、首末項重排等）擴展到多堆的情形，搜尋資料時，我們發現姜兆徽、吳承峰、林郁翔、廖奕瑋等人曾提及一種他們稱為「向下洗牌」的多堆洗牌程序。

不難發現，黃莉芸、邱文均所探索的洗牌方法即為 2 堆向下洗牌的特例，然則，姜兆徽、吳承峰、林郁翔、廖奕瑋僅討論各堆牌數量『皆相等』的向下洗牌次數。我們希望運用黃莉芸、邱文均的數學模式來探討各堆牌數量『不完全相等』的多堆向下洗牌的最少洗牌次數，開始了這一連串的試驗，發現其中的規律及其原因。

貳、研究目的：

1. 多堆向下洗牌時，最少需多少次洗牌才能回到原來的排序？
2. 若將各堆的牌視為相同，是否能得較小的最少洗牌次數？

參、研究設備及器材：電腦、Word。

肆、研究過程或方法結果：

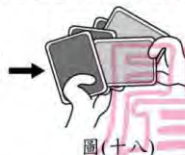
第一部分：文獻探討、符號定義與初探

(一) 文獻探討

102 年度基本學力測驗數學科試題提到了一個有關日常生活的撲克牌問題如右。

林建維、陳奕均、吳彥澄 [3, 4] 探討上述洗牌問題，他們觀察牌位置變化的規律，發現可將牌區分為多個組，最少洗牌次數即為各組個數的最小公倍數。

28. 圖(十六)為雅婷左手拿著 3 張深灰色與 2 張淺灰色的牌疊在一起的情形。以下是她每次洗牌的三個步驟：
- 步驟一：用右手拿出疊在最下面的 2 張牌，如圖(十七)。
- 步驟二：將右手拿的 2 張牌依序交錯插入左手拿的 3 張牌之間，如圖(十八)。
- 步驟三：用左手拿著顏色順序已改變的 5 張牌，如圖(十九)。



若依上述三個步驟洗牌，從圖(十六)的情形開始洗牌若干次後，其顏色順序會再次與圖(十六)相同，則洗牌次數可能為下列何者？

- (A) 18
(B) 20
(C) 25
(D) 27

黃莉芸、邱文均[5]利用重排 (permutation)、圈 (cycle) 及階數 (order) 等工具為洗牌提供一個數學模式，定義了洗牌操作 σ_{n_1, n_2} 的重排符號、重排的圈形式及洗牌次數 $ord(\sigma)$ ，進而定義 n_2 個「圈數列」 $\langle C_{n_2, 2i-1} \rangle, i=1 \sim n_2$ (底標 n_2 為圈數列總數， $2i-1$ 為圈數列首項) 及圈數列首末項重排 $b\sigma_{n_1, n_2}$ 如下：

【文獻定義 1】 σ_{n_1, n_2} 的圈數列 (黃莉芸、邱文均[5]，定義 6-2)

σ_{n_1, n_2} 的 n_2 個圈數列定義如下 (末項所對應的數 $b_i (i=1 \sim n_2)$ 以括號列於末項之後)。

$$\langle C_{n_2, 2i-1} \rangle = 2i-1, n_1+i-1, n_1+i-1-n_2, n_1+i-1-2n_2, \dots, (b_i) \quad (i=1 \sim n_2)$$

$$\text{再定義圈數列的首末項重排為：} b\sigma_{n_1, n_2} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & \dots & 2i-1 & \dots & 2n_2-1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_i & \dots & b_{n_2} \end{pmatrix}。$$

圈數列將重排的圈形式予以分段，使得數與數的對應，簡化為圈數列的連接。例如：

$$\begin{aligned} \sigma_{13,3} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12, & 13 & 14 & 15 \\ 0 & 13 & 1 & 14 & 2 & 15 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9, & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} \\ &= (1,13,10,7,4,2)(3,14,11,8,5,15,12,9,6) \end{aligned}$$

$$\text{定義出三個圈數列：} \begin{cases} \langle C_{3,1} \rangle = 1, 13, 10, 7, 4, 2, (1) \\ \langle C_{3,3} \rangle = 3, 14, 11, 8, (5) \\ \langle C_{3,5} \rangle = 5, 15, 12, 9, 6, (3) \end{cases}$$

其中： $\langle C_{3,1} \rangle$ 形成一個圈 $(1, 13, 10, 7, 4, 2)$ ，

$\langle C_{3,3} \rangle$ 和 $\langle C_{3,5} \rangle$ 兩個圈數列接續成一個圈 $(\underline{3, 14, 11, 8}, \underline{5, 15, 12, 9, 6})$ 。

進而得到快速計算最小洗牌次數的方法如下：

【文獻結論 1】 σ_{n_1, n_2} 的圈數列項數及重排 (黃莉芸、邱文均[5]，定理 6)

當 $n_1 = kn_2$ 時，令 $n_2 + i - 1 = c_i \times 2^{\alpha_i}$ ，則 σ_{n_1, n_2} 之圈數列首末項重排為

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & \dots & 2i-1 & \dots & 2n_2-1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_i & \dots & c_{n_2} \end{pmatrix}，\text{且 } \langle C_{n_2, 2i-1} \rangle \text{ 有 } k + \alpha_i \text{ 項。}$$

【文獻結論 2】 σ_{n_1, n_2} 的圈數列首末項重排及項數 (黃莉芸、邱文均[5]，定理 7)

若 $n_1 = kn_2 + d (d=1 \sim n_2-1)$ ，令 $\begin{cases} n_2 + d + i - 1 = c_i \times 2^{\alpha_i} \text{ (其中 } 1 \leq i < n_2 - d + 1) \\ i + d - 1 = c_i \times 2^{\alpha_i} \text{ (其中 } n_2 - d + 1 \leq i \leq n_2) \end{cases}$ ，則：

$$(1) \sigma_{n_1, n_2} \text{ 之圈數列首末項重排 } b\sigma_{n_1, n_2} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & \dots & 2i-1 & \dots & 2n_2-1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_i & \dots & c_{n_2} \end{pmatrix}。$$

$$(2) \langle C_{n_2, 2i-1} \rangle \text{ 項數為 } \begin{cases} k + \alpha_i (1 \leq i < n_2 - d + 1) \\ k + \alpha_i + 1 (n_2 - d + 1 \leq i \leq n_2) \end{cases}。$$

利用文獻結論，可以求得兩堆洗牌的最少次數，以求 $ord(\sigma_{7k+3,7})$ 為例，說明如下：

$$\text{將 } d=3, n_2=7 \text{ 代入 } \begin{cases} n_2+d+i-1=c_i \times 2^{\alpha_i} (1 \leq i < n_2-d+1) \\ i+d-1=c_i \times 2^{\alpha_i} (n_2-d+1 \leq i \leq n_2) \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} 9+i=c_i \times 2^{\alpha_i} (1 \leq i < 5) \\ i+2=c_i \times 2^{\alpha_i} (5 \leq i \leq 7) \end{cases}$$

$$\text{得 } \begin{cases} 10=c_1 \times 2^{\alpha_1}, 11=c_2 \times 2^{\alpha_2}, 12=c_3 \times 2^{\alpha_3}, 13=c_4 \times 2^{\alpha_4} \\ 7=c_5 \times 2^{\alpha_5}, 8=c_6 \times 2^{\alpha_6}, 9=c_7 \times 2^{\alpha_7} \end{cases}$$

由 $(c_1, c_2, \dots, c_7) = (5, 11, 3, 13, 7, 1, 9)$ 得

$$b\sigma_{7k+3,7} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 & 13 \\ 5 & 11 & 3 & 13 & 7 & 1 & 9 \end{pmatrix} = (1, 5, 3, 11)(7, 13, 9),$$

由 $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_7) = (1, 0, 2, 0, 0, 3, 0)$ 得

七個圈數列依序有 $k+1, k, k+2, k, k+1, k+4, k+1$ 項，

其中圈 $(1, 5, 3, 11)$ 有 $(k+1) + (k+2) + k + (k+4) = 4k+7$ 項

圈 $(7, 13, 9)$ 有 $k + (k+1) + (k+1) = 3k+2$ 項

故得 $ord(\sigma_{7k+3,7}) = lcm(4k+7, 3k+2)$.

若增加牌的堆數以推廣上面的問題，我們首先面臨的是**如何洗牌**？我們翻閱文獻，發現一種姜兆徽、吳承峰、林郁翔、廖奕璋 [6] 稱為「向下洗牌」的多堆洗牌程序，洗牌過程如右所示。

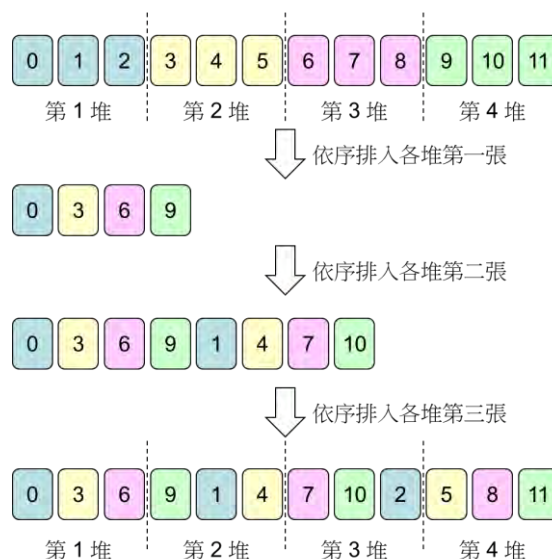
右例中，12 張牌分為四堆，原來的排序：

0、1、2、3、4、5、6、7、8、9、10、11

經過一次洗牌後，變成：

0、3、6、9、1、4、7、10、2、5、8、11

不難得知，**黃莉芸及邱文均的洗牌程序為向下洗牌之兩堆特例**。



P. Glaister [7] 也提到將 n 張牌等分成 m 堆，以向下洗牌方式洗牌時，回到原來排序的最少洗牌次數為滿足同餘式 $m^k \equiv 1 \pmod{n-1}$ 的最小整數 k 。

【文獻結論 3】P. Glaister

若將 n 張牌等分成 m 堆，

則回到原來次序所需的最少向下洗牌次數為滿足 $m^k \equiv 1 \pmod{n-1}$ 的最小整數 k 。

本文討論每堆牌數不完全相等的多堆向下洗牌，
當三堆分別有 4、2、1 張時，原來的排序為：

0、1、2、3、4、5、6

抽出各堆第 1 張牌，排成：0、4、6

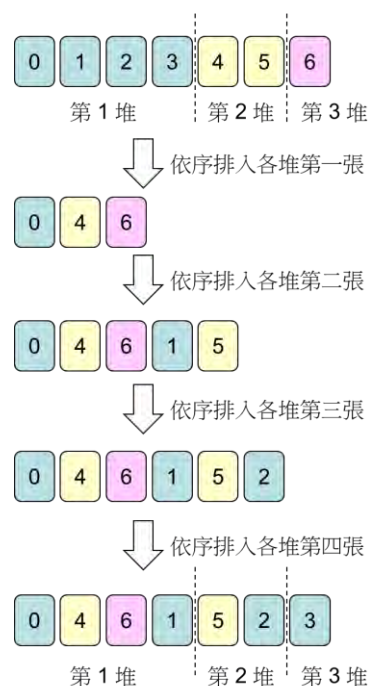
抽出各堆第 2 張牌，排成：0、4、6、1、5

抽出各堆第 3 張牌，排成：0、4、6、1、5、2

抽出各堆第 4 張牌，排成：0、4、6、1、5、2、3

亦即經過一次洗牌變成：

0、4、6、1、5、2、3



(二) 符號定義

我們沿用黃莉芸、邱文均為洗牌問題所定義的數學符號，將其推廣到多堆的情形。首先是牌的排列符號，定義如下：

【定義 1】牌的排列符號

第一堆放 4 張牌(依序編號為 0~3)，第二堆放 2 張牌(依序編號為 4~5)，
第三堆放 1 張牌(編號為 6)，則所有牌的排列以符號(0123,45,6)表示。

利用抽象代數的「重排(permutation)」來定義一次洗牌操作。

【定義 2】一次洗牌操作

已知牌組(0123,45,6) $\xrightarrow{\text{洗牌}}$ (0461,52,3)，

此洗牌操作以重排 $\sigma_{4,2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 4 & 6 & 1 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ 表示。

利用 order 來定義最少洗牌次數。

【定義 3】最少洗牌次數

給定一個洗牌操作 σ ，讓排序變回原來順序的最少洗牌次數記為 $\text{ord}(\sigma)$ 。

此例回到原來次序的洗牌過程為：(0123,45,6) $\rightarrow$ (0461,52,3) $\rightarrow$ (0534,26,1) $\rightarrow$ (0215,63,4) $\rightarrow$ (0642,31,5) $\rightarrow$ (0356,14,2) $\rightarrow$ (0123,45,6)，得到： $\text{ord}(\sigma_{4,2,1}) = 6$ 。

考慮一般的情形：若有 h 堆牌，各堆依序有 $n_1, n_2, n_3, \dots, n_h$ 張，令 $s = \sum_{i=1}^h n_i$ ，則根據

$\sigma_{n_1, n_2, \dots, n_h}$ 的對應關係，定義 s 個圈數列如下：

【定義 4】 $\sigma_{n_1, n_2, \dots, n_h}$ 的 s 個圈數列

$$\langle C_i \rangle = c_{i,1}, c_{i,2}, c_{i,3}, \dots, c_{i,\alpha_i}, i=1, 2, \dots, s$$

圈數列 $\langle C_i \rangle$ 的第 1 項為 $c_{i,1}$ ，定義一對一函數 $\phi(i)$ 如下：

【定義 5】一對一函數 $\phi(i)$

$$\phi(i) = c_{i,1}, i=1, 2, \dots, s$$

定義 $c_{i,1}$ 所形成的集合 A 及數列 $\langle A \rangle$ ；當 $\alpha_i \geq k+1$ 時，存在 $c_{i,k+1}$ ，定義集合 B 如下：

【定義 6】集合 A 及數列 $\langle A \rangle$

$$\text{集合 } A = \{c_{1,1}, c_{2,1}, \dots, c_{s,1}\}; \quad \text{數列 } \langle A \rangle = (c_{1,1}, c_{2,1}, \dots, c_{s,1})$$

$$\text{集合 } B = \{c_{i,k+1} \mid \alpha_i \geq k+1, i=1, 2, \dots, s\}$$

方便起見，定義接續多個等差數列所形成之數列符號：

【定義 7】數列的表示

$$1. \text{ 已知數列 } \begin{cases} \langle a \rangle = a_1, a_2, \dots, a_m \\ \langle b \rangle = b_1, b_2, \dots, b_n \end{cases}, \text{ 且 } s \leq m, t \leq n, \text{ 則：}$$

$$(1) \text{ 數列 } a_1, a_2, \dots, a_s \text{ 記為 } \langle a \rangle_s; \quad (2) \text{ 數列 } a_1, a_2, \dots, a_s, b_1, b_2, \dots, b_t \text{ 記為 } \langle a \rangle_s \oplus \langle b \rangle_t.$$

$$2. \text{ 首項 } a, \text{ 公差 } d, \text{ 項數 } n \text{ 的等差數列記為 } \langle a, (d, n) \rangle.$$

$$3. \underbrace{a, a+d_1, \dots, a+(m-1)d_1}_{\text{公差 } d_1, m \text{ 項}}, \underbrace{a+(m-1)d_1+d_2, \dots, a+(m-1)d_1+nd_2}_{\text{公差 } d_2, n \text{ 項}} \text{ 記為 } \langle a, (d_1, m) \oplus (d_2, n) \rangle.$$

$$4. \text{ 當 } n \leq 0 \text{ 時，兩數列 } \langle a, (d_1, m) \oplus (d_2, n) \rangle, \langle a, (d_1, m) \rangle \text{ 相同}$$

再定義 $b_{k+1}\sigma_{n_1, n_2, \dots, n_h}$ 及 $b\sigma_{n_1, n_2, \dots, n_h}$ 如下：

【定義 8】 $b_{k+1}\sigma_{n_1, n_2, \dots, n_h}$ 及 $b\sigma_{n_1, n_2, \dots, n_h}$

$$b_{k+1}\sigma_{n_1, n_2, \dots, n_h} = \begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{2,1} & c_{3,1} & \dots & c_{s,1} \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \dots & \beta_s \end{pmatrix}, \text{ 其中 } \beta_i \in A \cup B$$

$$b\sigma_{n_1, n_2, \dots, n_h} = \begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{2,1} & c_{3,1} & \dots & c_{s,1} \\ b_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_s \end{pmatrix}$$

$$= (b_{1,1}, b_{1,2}, \dots, b_{1,r_1})(b_{2,1}, b_{2,2}, \dots, b_{2,r_2}) \dots (b_{m,1}, b_{m,2}, \dots, b_{m,r_m}), \text{ 其中 } b_i, b_{i,j} \in A$$

(三) 初探

重排圖形式必能分為若干個不相交的圈的組成，如： $\sigma_{3,2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2, & 3 & 4, & 5 \\ 0 & 3 & 5, & 1 & 4, & 2 \end{pmatrix}$ ，圈形式為(1,3)(2,5)，最少洗牌次數為兩個圈內數值個數的最小公倍數，得 $\text{ord}(\sigma_{3,2,1}) = 2$ 。

根據定義 6，重排圖形式分為 m 個 cycle，其中第 i 個 cycle 由 r_i 個圈數列所組成，由反函數 ϕ^{-1} 可得此 r_i 個圈數列的項數分別為 α_{j_k} ， $j_k = \phi^{-1}(b_{i,k})$ ，故得此 cycle 有 $a_i = \sum_{k=1}^{r_i} \alpha_{j_k}$ 項，進一步得最少洗牌次數 $\text{ord}(\sigma_{n_1, n_2, \dots, n_h}) = \text{lcm}(a_1, a_2, \dots, a_m)$ ，歸納如下：

【定理 1】 $\text{ord}(\sigma_{n_1, n_2, \dots, n_h})$

$$\text{ord}(\sigma_{n_1, n_2, \dots, n_h}) = \text{lcm}(a_1, a_2, \dots, a_m), \text{ 其中 } a_i = \sum_{k=1}^{r_i} \alpha_{j_k}, j_k = \phi^{-1}(b_{i,k})$$

初步探討發現當最後一堆牌的張數多於所有堆的張數時，會發生其他的牌皆已被排入後，只剩最後一堆有牌的情況，因此將最後一堆剩下來的牌全部排在最後面，即最後一堆的最後幾張牌從未變換位置，例如：

$$\begin{aligned} \sigma_{3,2,4} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2, & 3 & 4, & 5 & 6 & \boxed{7 & 8} \\ 0 & 3 & 5, & 1 & 4, & 6 & 2 & \boxed{7 & 8} \end{pmatrix} \\ \sigma_{2,4,6} &= \begin{pmatrix} 0 & 1, & 2 & 3 & 4 & 5, & 6 & 7 & 8 & \boxed{9 & 10 & 11} \\ 0 & 2, & 6 & 1 & 3 & 7, & 4 & 8 & 5 & \boxed{9 & 10 & 11} \end{pmatrix} \\ \sigma_{3,3,3} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2, & 3 & 4 & 5, & 6 & 7 & \boxed{8} \\ 0 & 3 & 6, & 1 & 4 & 7, & 2 & 5 & \boxed{8} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

若 h 堆牌依序有 $n_1, n_2, n_3, \dots, n_h$ 張牌，令 t 為 $n_1, n_2, n_3, \dots, n_{h-1}$ 之中的最大值，則經過 t 次抽牌後，前面 $h-1$ 堆牌皆已抽完，故最後一堆的牌之中，只有抽到前 t 張牌，並且第 t 張牌的位置也沒有變化，亦即最後一堆牌之中，僅有前 $t-1$ 張牌位置有變化。另外，若每一堆的數量皆相等時，最後一堆的最後一張從未變換位置。得到以下結論。

【定理 2】

1. $\text{ord}(\sigma_{n_1, n_2, n_3, \dots, n_{h-1}, n_h}) = \text{ord}(\sigma_{n_1, n_2, n_3, \dots, n_{h-1}, t-1})$ ，其中 $t = \max\{n_1, n_2, \dots, n_{h-1}\}$ 。
2. $\text{ord}(\sigma_{\underbrace{n, n, \dots, n}_h}) = \text{ord}(\sigma_{\underbrace{n, n, \dots, n, n-1}_h})$ 。

第二部分：三堆牌的最少洗牌次數

(一) $\sigma_{n_1,1,n_3}$:

先探討 $\sigma_{n_1,1,1}$ 及 $\sigma_{n_1,1,2}$ 的情形，發現 $\sigma_{n_1,1,1}$ 需分為 $n_1 = 2k$ 及 $n_1 = 2k+1$ 兩種情形來討論，得到： $\text{ord}(\sigma_{2k+1,1,1}) = k+1$ 、 $\text{ord}(\sigma_{2k,1,1}) = 2k+1$ 。同理， $\sigma_{n_1,1,2}$ 則需分成三種情形來討論，得到： $\text{ord}(\sigma_{3k,1,2}) = \text{lcm}(k+1, 2k+1)$ ， $\text{ord}(\sigma_{3k+1,1,2}) = 2(k+1)$ ， $\text{ord}(\sigma_{3k+2,1,2}) = \text{lcm}(2k+3, k+1)$ 。
(過程如研究日誌)

接著探討 $\sigma_{n_1,1,n_3}$ 的情形，先列出 $\sigma_{n_1,1,n_3}$ 如下：

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots & n_1-1, & n_1, & n_1+1 & n_1+2 & \dots & n_1+n_3 \\ 0 & n_1 & n_1+1 & 1 & n_1+2 & 2 & n_1+3 & \dots & n_1-n_3-2, & n_1-n_3-1, & n_1-n_3 & n_1-n_3+1 & \dots & n_1-1 \end{pmatrix}$$

1. 對應關係：

除了 0 對應到 0 以外，我們歸納了三種對應關係：

① 經過一次洗牌，第一堆的 1、2、4、6、...、 $2n_3$ 對應到第二、三堆牌，

對應關係 $\begin{cases} 1 \rightarrow n_1 \\ 2i \rightarrow n_1+i, 1 \leq i \leq n_3 \end{cases}$ ，後續將利用這個對應關係得 $c_{i,1}$ ，其中 $i = 1, 2, \dots, s$ 。

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & \dots & 2n_3-3 & 2n_3-2 & 2n_3-1 & 2n_3 \\ 0 & n_1 & n_1+1 & 1 & n_1+2 & 2 & n_1+3 & 3 & n_1+4 & \dots & n_3-2 & n_1-n_3-1 & n_3-1 & n_1+n_3 \end{pmatrix}$$

第1組 第2組 第3組 第4組 第 n_3-1 組 第 n_3 組

② 第一堆牌之中，部分奇數 $i \rightarrow \frac{i-1}{2}$ ， $3 \leq i \leq 2n_3-1$ 如下藍色箭頭：

後續，將利用這個對應關係得 $c_{i,t}$ ，其中 $i = 1, 2, \dots, s$ 且 $t = k+1, k+2, \dots, \alpha_i$ 。

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & \dots & 2n_3-3 & 2n_3-2 & 2n_3-1 & 2n_3 \\ 0 & n_1 & n_1+1 & 1 & n_1+2 & 2 & n_1+3 & 3 & n_1+4 & \dots & n_3-2 & n_1-n_3-1 & n_3-1 & n_1+n_3 \end{pmatrix}$$

第1組 第2組 第3組 第4組 第 n_3-1 組 第 n_3 組

③ 第一堆牌之中，大於 $2n_3$ 的牌的對應關係 $i \rightarrow i-n_3-1$ ， $i \geq 2n_3+1$ 如下：

後續，將利用這個對應關係得 $c_{i,t}$ ，其中 $i = 1, 2, \dots, s$ 且 $t = k+1, k+2, \dots, \alpha_i$ 。

$$\begin{pmatrix} 2n_3+1 & 2n_3+2 & 2n_3+3 & \dots & n_1+n_3-3 & n_1+n_3-2 & n_1+n_3-1 & n_1+n_3 \\ n_3 & n_3+1 & n_3+2 & \dots & n_1-4 & n_1-3 & n_1-2 & n_1-1 \end{pmatrix}$$

$$\textcircled{4} \text{ 以上三種對應關係歸納為：} \begin{cases} 1 & \rightarrow & n_1 & (\text{紅圈}) \\ 2i & \rightarrow & n_1 + i, & 1 \leq i \leq n_3 & (\text{紅箭}) \\ \text{奇數 } i & \rightarrow & (i-1)/2, & 3 \leq i \leq 2n_3 - 1 & (\text{藍箭}) \\ i & \rightarrow & i - n_3 - 1, & i \geq 2n_3 + 1 & (\text{綠框}) \end{cases}。$$

2. $b_{k+1}\sigma_{n_1,1,n_3}$ 、 $b\sigma_{n_1,1,n_3}$

先求 $b_{k+1}\sigma_{n_1,1,n_3}$ ，即求 $c_{i,1}$ 及 β_i 。令 $n_1 = k(n_3 + 1) + d$ ， $k \geq 1$ 且 $0 \leq d < n_3 + 1$ ，

$$\text{由對應關係}\textcircled{1}\text{，得} \begin{cases} c_{1,1} = 1 \\ c_{i,1} = 2(i-1), i = 2, 3, \dots, n_3 + 1 \end{cases}$$

由對應關係 $\textcircled{3}$ 及 $c_{i,1}$ 計算可得 $\beta_i = n_3 + d + i$ ， $i = 1, 2, \dots, n_3 + 1$

再求 $b\sigma_{n_1,1,n_3}$ ，即求 b_i ，分兩類討論：

(1) 若 $\beta_i \in A$ ，則 $\alpha_i = k$ 且 $b_i = \beta_i$ ；

(2) 若 $\beta_i \notin A$ ，則 $c_{i,k+1} = \beta_i$ 。

$$\text{由對應關係}\textcircled{2}\text{、}\textcircled{3}\text{及 } c_{i,k+1} \text{，依遞迴關係式 } c_{i,j+1} = \begin{cases} \frac{c_{i,j} - 1}{2}, \text{ 當 } c_{i,j} \leq 2n_3 - 1 \\ c_{i,j} - (n_3 + 1), \text{ 當 } c_{i,j} \geq 2n_3 + 1 \end{cases}$$

可以依序得 $c_{i,k+2}$ 、 $c_{i,k+3}$ 、 $\dots$ 、 c_{i,α_i} 、 b_i 。

故可得 $b\sigma_{n_1,1,n_3}$ 的圈形式，以上結論歸納如下：

【定理 3】 $b_{k+1}\sigma_{n_1,1,n_3}$ 、 $b\sigma_{n_1,1,n_3}$

令 $n_1 = k(n_3 + 1) + d$ ， $k \geq 1$ 且 $0 \leq d < n_3 + 1$ ，則：

$$1. \quad b_{k+1}\sigma_{n_1,1,n_3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 6 & \dots & 2n_3 \\ n_3 + d + 1 & n_3 + d + 2 & n_3 + d + 3 & n_3 + d + 4 & \dots & 2n_3 + d - 1 \end{pmatrix}。$$

2. (1) 若 $\beta_i \in A$ ，則 $\alpha_i = k$ 且 $b_i = \beta_i$ ；

(2) 若 $\beta_i \notin A$ ，則 $c_{i,k+1} = \beta_i$ 。

$$\text{由 } c_{i,k+1} \text{ 依遞迴式 } c_{i,j+1} = \begin{cases} \frac{c_{i,j} - 1}{2}, \text{ 當 } c_{i,j} \leq 2n_3 - 1 \\ c_{i,j} - (n_3 + 1), \text{ 當 } c_{i,j} \geq 2n_3 + 1 \end{cases} \text{ 得 } b_i \text{ 及 } \alpha_i。$$

由 $b\sigma_{n_1,1,n_3}$ 的圖形式，利用定理 1 即可得 $ord(\sigma_{n_1,1,n_3})$ ，以求 $ord(\sigma_{10k,1,9})$ 為例，說明如下：

例： $ord(\sigma_{10k,1,9})=?$

$$\text{先得 } b_{k+1}\sigma_{10k,1,9} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & 14 & 16 & 18 \\ 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 \end{pmatrix}$$

$$\text{得 } \begin{cases} (b_1, b_3, b_5, b_7, b_9) = (10, 12, 14, 16, 18) \\ \alpha_1 = \alpha_3 = \alpha_5 = \alpha_7 = \alpha_9 = k \\ (c_{2,k+1}, c_{4,k+1}, c_{6,k+1}, c_{8,k+1}, c_{10,k+1}) = (11, 13, 15, 17, 19) \end{cases}$$

$$\text{再由遞迴關係 } \begin{cases} c_{i,j+1} = \frac{c_{i,j}-1}{2}, c_{i,j} \leq 17 \\ c_{i,j+1} = c_{i,j} - (n_3 + 1), c_{i,j} \geq 19 \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} 11 \rightarrow 5 \rightarrow 2 \\ 13 \rightarrow 6 \\ 15 \rightarrow 7 \rightarrow 3 \rightarrow 1, \\ 17 \rightarrow 8 \\ 19 \rightarrow 9 \rightarrow 4 \end{cases}$$

$$\text{即得 } \begin{cases} (b_2, b_4, b_6, b_8, b_{10}) = (2, 6, 1, 8, 4) \\ (\alpha_2, \alpha_4, \alpha_6, \alpha_8, \alpha_{10}) = (k+2, k+1, k+3, k+1, k+2) \end{cases}$$

$$\text{且得 } b\sigma_{10k,1,9} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & 14 & 16 & 18 \\ 10 & 2 & 12 & 6 & 14 & 1 & 16 & 8 & 18 & 4 \end{pmatrix} \\ = (1, 10)(2)(4, 12, 16, 18)(6)(8, 14)$$

$$\text{故得 } ord(\sigma_{10k,1,9}) = lcm(\alpha_1 + \alpha_6, \alpha_2, \alpha_3 + \alpha_7 + \alpha_9 + \alpha_{10}, \alpha_4, \alpha_5 + \alpha_8) \\ = lcm(2k+3, k+2, 4k+2, k+1, 2k+1).$$

(二) σ_{n_1, n_2, n_3} :

本節探討 σ_{n_1, n_2, n_3} 的一般情形。

1. 討論 $n_2 > n_3$ 的情況：

列出 $\sigma_{n_1, 3, 2}$ 、 $\sigma_{n_1, 4, 2}$ 如下：

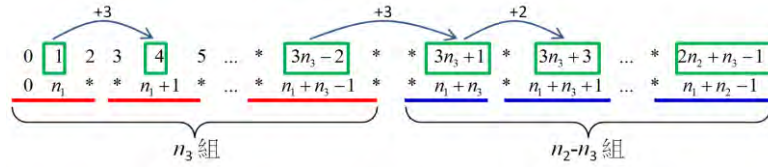
$$\sigma_{n_1, 3, 2} = \begin{pmatrix} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \boxed{8 \ 9 \ 10 \ 11 \ 12 \ 13 \ \dots \ n_1-1, \ n_1 \ n_1+1 \ n_1+2, \ n_1+3 \ n_1+4} \\ \hline 0 & n_1 & n_1+3 & 1 & n_1+1 & n_1+4 & 2 & n_1+2 & \boxed{3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ \dots \ n_1-6, \ n_1-5 \ n_1-4 \ n_1-3, \ n_1-2 \ n_1-1} \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{n_1, 4, 2} = \begin{pmatrix} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & \boxed{10 \ 11 \ 12 \ 13 \ \dots \ n_1-1, \ n_1 \ n_1+1 \ n_1+2 \ n_1+3, \ n_1+4 \ n_1+5} \\ \hline 0 & n_1 & n_1+4 & 1 & n_1+1 & n_1+5 & 2 & n_1+3 & 3 & n_1+4 & \boxed{4 \ 5 \ 6 \ 7 \ \dots \ n_1-7, \ n_1-6 \ n_1-5 \ n_1-4 \ n_1-3, \ n_1-2 \ n_1-1} \end{pmatrix}$$

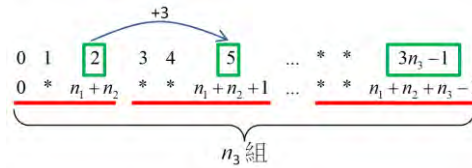
先討論對應關係，除了 0 以外，對應關係可分為三類：

(1) 部分第一堆的牌對應到第二、三堆的牌，如藍色箭頭標示處。

① 觀察對應到第二堆牌的數，得對應關係：

$$\begin{cases} 3i-2 \rightarrow n_1+i-1, & 1 \leq i \leq n_3 \\ 3n_3+2i-1 \rightarrow n_1+n_3+i, & 1 \leq i \leq n_2-n_3 \end{cases}$$


② 再觀察對應到第三堆牌的數，得對應關係： $3i-1 \rightarrow n_1+n_2+i-1, 1 \leq i \leq n_3$



歸納以上對應關係：

$$\begin{cases} 3i-2 \rightarrow n_1+i-1, & 1 \leq i \leq n_3 \\ 3n_3+2i-1 \rightarrow n_1+n_3+i, & 1 \leq i \leq n_2-n_3 \\ 3i-1 \rightarrow n_1+n_2+i-1, & 1 \leq i \leq n_3 \end{cases} \quad \dots\dots(*)$$

(2) 部分第一堆的牌對應到第二、三堆的牌且不在綠色框中，如紅色箭頭標示處。

紅色箭頭所指的數皆為紅線(3 個對應成為一組)及藍線(2 個對應成為一組)的第一個位置 (註:因為對應到第一堆的牌)，分別討論：

紅線上對應關係為：

$$\begin{array}{ccccccc} 3 & 6 & 9 & \dots & i & \dots & 3n_3-3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \dots & \downarrow & \dots & \downarrow \\ 1 & 2 & 3 & \dots & \frac{i}{3} & \dots & n_3-1 \end{array}, \text{ 即得 } i \rightarrow \frac{i}{3}, i \leq 3n_3-3$$

藍線上對應關係為：

$$\begin{array}{ccccccc} 3n_3 & 3n_3+2 & 3n_3+4 & \dots & i & \dots & 2n_2+n_3-2 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \dots & \downarrow & \dots & \downarrow \\ n_3 & n_3+1 & n_3+2 & \dots & j & \dots & n_2-1 \end{array}$$

若 i 為上列的第 t 項，由 $i = 3n_3 + 2(t-1)$ 算得 $t-1 = \frac{i-3n_3}{2}$

因 j 為上列的第 t 項，算得 $j = n_3 + (t-1) = n_3 + \frac{i-3n_3}{2} = \frac{i-n_3}{2}$ ，

即得 $i \rightarrow \frac{i-n_3}{2}, 3n_3 \leq i \leq 2n_2+n_3-2$

故得對應關係

$$\begin{cases} i \rightarrow \frac{i}{3}, & i \leq 3n_3-3 \\ i \rightarrow \frac{i-n_3}{2}, & 3n_3 \leq i \leq 2n_2+n_3-2 \end{cases} \quad \dots\dots(**)$$

(3) $i \rightarrow i-(n_2+n_3), i \geq 2n_2+n_3$ (如綠色框) $\dots\dots(***)$

以下依序討論 $b_{k+1}\sigma_{n_1, n_2, n_3}$ 、 $b\sigma_{n_1, n_2, n_3}$ ：

(1) $b_{k+1}\sigma_{n_1, n_2, n_3}$ ：

$$\text{由對應關係(*)，得 } c_{i,1} = \begin{cases} 3i-2, & i=1 \sim n_3 \\ 2i+n_3-1, & i=n_3+1 \sim n_2 \\ 3i-3n_2-1, & i=n_2+1 \sim n_2+n_3 \end{cases}$$

$$\text{即得數列 } \langle A \rangle = \underbrace{1, 4, \dots, 3n_3-2, 3n_3+1, 3n_3+3, \dots, 2n_2+n_3-1, 2, 5, \dots, 3n_3-1}_{n_3 \text{ 項, 公差 } 3} \underbrace{\quad}_{n_2-n_3 \text{ 項, 公差 } 2} \underbrace{\quad}_{n_3 \text{ 項, 公差 } 3}$$

$$\text{依定義 7 表示為 } \langle A \rangle = \langle 1, (3, n_3+1) \oplus (2, n_2-n_3-1) \rangle \oplus \langle 2, (3, n_3) \rangle$$

$$\text{令 } n_1 = k(n_3+1) + d, \quad k \geq 1 \text{ 且 } 0 \leq d < n_3+1,$$

$$\text{由對應關係(**)及 } c_{i,1} \text{ 得 } \beta_i = n_2 + n_3 + d + i - 1, \quad i=1, 2, \dots, n_2+n_3$$

(2) $b\sigma_{n_1, n_2, n_3}$ ：

僅需再求 b_i ，分兩類討論：

(1) 若 $\beta_i \in A$ ，則 $\alpha_i = k$ 且 $b_i = \beta_i$ ；

(2) 若 $\beta_i \notin A$ ，則 $c_{i,k+1} = \beta_i$ 。由對應關係②、③及 $c_{i,k+1}$ ，

$$\text{依遞迴式 } c_{i,j+1} = \begin{cases} \frac{c_{i,j}}{3}, & c_{i,j} \leq 3n_3-3 \\ \frac{c_{i,j}-n_3}{2}, & 3n_3 \leq c_{i,j} \leq 2n_2+n_3-2 \text{ 依序得 } c_{i,k+2}, \dots, c_{i,\alpha_i}, b_i。 \\ c_{i,j} - (n_2+n_3), & c_{i,j} \geq 2n_2+n_3 \end{cases}$$

故可得 $b\sigma_{n_1, n_2, n_3}$ 的圈形式。

【定理 4-1】 $\sigma_{n_1, n_2, n_3}, n_2 > n_3$

當 $n_2 > n_3$ ，令 $n_1 = k(n_2+n_3) + d, \quad k \geq 1 \text{ 且 } 0 \leq d < n_2+n_3$ ：

$$1. \quad \langle A \rangle = \langle 1, (3, n_3+1) \oplus (2, n_2-n_3-1) \rangle \oplus \langle 2, (3, n_3) \rangle$$

$$2. \quad \beta_i = n_2 + n_3 + d + i - 1, \quad i=1, 2, \dots, n_2+n_3$$

3. (1) 若 $\beta_i \in A$ ，則 $\alpha_i = k$ 且 $b_i = \beta_i$ ；

(2) 若 $\beta_i \notin A$ ，則 $c_{i,k+1} = \beta_i$ 。

$$\text{再由 } c_{i,k+1} \text{ 及遞迴式 } c_{i,j+1} = \begin{cases} \frac{c_{i,j}}{3}, & c_{i,j} \leq 3n_3-3 \\ \frac{c_{i,j}-n_3}{2}, & 3n_3 \leq c_{i,j} \leq 2n_2+n_3-2 \text{ 得 } b_i \text{ 及 } \alpha_i。 \\ c_{i,j} - (n_2+n_3), & c_{i,j} \geq 2n_2+n_3 \end{cases}$$

由上述定理可快速求得 $ord(\sigma_{n_1, n_2, n_3})$ 。

例如：求 $ord(\sigma_{8k, 6, 2}) = ?$

$$\text{先得 } b_{k+1}\sigma_{8k, 6, 2} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & 9 & 11 & 13 & 2 & 5 \\ 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \end{pmatrix}$$

$$\text{得 } \begin{cases} (b_2, b_4, b_6) = (9, 11, 13) \\ \alpha_2 = \alpha_4 = \alpha_6 = k \\ (c_{1, k+1}, c_{3, k+1}, c_{5, k+1}, c_{7, k+1}, c_{8, k+1}) = (8, 10, 12, 14, 15) \end{cases}$$

$$\text{再由遞迴關係 } c_{i, j+1} = \begin{cases} \frac{c_{i, j}}{3}, & c_{i, j} \leq 3 \\ \frac{c_{i, j} - 2}{2}, & 6 \leq c_{i, j} \leq 12 \\ c_{i, j} - 8, & c_{i, j} \geq 14 \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} 8 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \\ 10 \rightarrow 4 \\ 12 \rightarrow 5 \\ 14 \rightarrow 6 \rightarrow 2 \\ 15 \rightarrow 7 \end{cases},$$

$$\text{即得 } \begin{cases} (b_1, b_3, b_5, b_7, b_8) = (1, 4, 5, 2, 7) \\ (\alpha_1, \alpha_3, \alpha_5, \alpha_7, \alpha_8) = (k+2, k+1, k+1, k+2, k+1) \end{cases}$$

$$\text{且得 } b\sigma_{8k, 6, 2} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & 9 & 11 & 13 & 2 & 5 \\ 1 & 9 & 4 & 11 & 5 & 13 & 2 & 7 \end{pmatrix} = (1)(4, 9, 11, 5, 7)(13)(2)$$

$$\text{故得 } ord(\sigma_{10k, 1, 9}) = lcm(\alpha_1, \alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_8 + \alpha_3, \alpha_6, \alpha_7) = lcm(k+2, 5k+3, k)。$$

2. 討論 $n_2 < n_3$ 的情況：

列出 $\sigma_{n_1, 3, 4}$ 、 $\sigma_{n_1, 4, 5}$ 、 $\sigma_{n_1, 2, 2}$ 、 $\sigma_{n_1, 3, 3}$ 如下：

$$\sigma_{n_1, 3, 4} = \begin{pmatrix} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & \boxed{11 \ 12 \ \dots \ n_1-1, \ n_1 \ n_1+1 \ n_1+2, \ n_1+3 \ n_1+4 \ n_1+5 \ n_1+6} \\ \hline 0 & n_1 & n_1+3 & 1 & n_1+1 & n_1+4 & 2 & n_1+2 & n_1+5 & 3 & n_1+6 & \boxed{4 \ 5 \ \dots \ n_1-8, \ n_1-7 \ n_1-6 \ n_1-5, \ n_1-4 \ n_1-3 \ n_1-2 \ n_1-1} \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{n_1, 4, 5} = \begin{pmatrix} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & \boxed{14 \ 15 \ 16 \ 17 \ \dots \ n_1-1, \ \dots \ n_1+8} \\ \hline 0 & n_1 & n_1+4 & 1 & n_1+1 & n_1+5 & 2 & n_1+2 & n_1+6 & 3 & n_1+3 & n_1+7 & 4 & n_1+8 & \boxed{5 \ 6 \ 7 \ 8 \ \dots \ n_1-10, \ \dots \ n_1-1} \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{n_1, 2, 2} = \begin{pmatrix} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \boxed{6 \ 7 \ 8 \ 9 \ 10 \ 11 \ 12 \ 13 \ 14 \ 15 \ \dots \ n_1-1, \ n_1 \ n_1+1 \ n_1+2 \ n_1+3} \\ \hline 0 & n_1 & n_1+2 & 1 & n_1+1 & n_1+3 & \boxed{2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9 \ 10 \ 11 \ \dots \ n_1-5 \ n_1-4, \ n_1-3, \ n_1-2 \ n_1-1} \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{n_1, 3, 3} = \begin{pmatrix} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & \boxed{9 \ 10 \ 11 \ 12 \ 13 \ \dots \ n_1-1, \ n_1 \ n_1+1 \ n_1+2, \ n_1+3 \ n_1+4 \ n_1+5} \\ \hline 0 & n_1 & n_1+3 & 1 & n_1+1 & n_1+4 & 2 & n_1+2 & n_1+5 & \boxed{3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ \dots \ n_1-7, \ n_1-6 \ n_1-5 \ n_1-4, \ n_1-3 \ n_1-2 \ n_1-1} \end{pmatrix}$$

對應關係可分為藍、紅色箭頭、綠框三類，經由與前節類似的過程，得到以下結論：

【定理 4-2】 $\sigma_{n_1, n_2, n_3}, n_2 < n_3$

當 $n_2 < n_3$ ，令 $n_1 = k(n_2 + n_3) + d$ ， $k \geq 1$ 且 $0 \leq d < n_2 + n_3$ ：

$$1. \quad \langle A \rangle = \langle 1, (3, n_2) \rangle \oplus \langle 2, (3, n_2) \oplus (2, n_3 - n_2) \rangle$$

$$2. \quad \beta_i = n_2 + n_3 + d + i - 1, i = 1, 2, \dots, n_2 + n_3$$

$$3. \quad (1) \text{ 若 } \beta_i \in A, \text{ 則 } \alpha_i = k \text{ 且 } b_i = \beta_i;$$

$$(2) \text{ 若 } \beta_i \notin A, \text{ 則 } c_{i, k+1} = \beta_i. \text{ 由 } c_{i, k+1} \text{ 及 } c_{i, j+1} = \begin{cases} \frac{c_{i, j}}{3}, & c_{i, j} \leq 3n_2 - 3 \\ \frac{c_{i, j} - n_2}{2}, & 3n_2 \leq c_{i, j} \leq n_2 + 2n_3 \text{ 得 } b_i \text{ 及 } \alpha_i. \\ c_{i, j} - (n_2 + n_3), & c_{i, j} \geq n_2 + 2n_3 \end{cases}$$

【定理 4-3】 $\sigma_{n_1, n_2, n_3}, n_2 = n_3$

當 $n_2 = n_3$ ，令 $n_1 = k(n_2 + n_3) + d$ ， $k \geq 1$ 且 $0 \leq d < n_2 + n_3$ ：

$$1. \quad \langle A \rangle = \langle 1, (3, n_2) \rangle \oplus \langle 2, (3, n_2) \rangle$$

$$2. \quad \beta_i = n_2 + n_3 + d + i - 1, i = 1, 2, \dots, n_2 + n_3$$

$$3. \quad (1) \text{ 若 } \beta_i \in A, \text{ 則 } \alpha_i = k \text{ 且 } b_i = \beta_i;$$

$$(2) \text{ 若 } \beta_i \notin A, \text{ 則 } c_{i, k+1} = \beta_i. \text{ 由 } c_{i, k+1} \text{ 及 } c_{i, j+1} = \begin{cases} \frac{c_{i, j}}{3}, & c_{i, j} \leq 3n_2 - 3 \\ c_{i, j} - (n_2 + n_3), & c_{i, j} \geq 3n_2 \end{cases} \text{ 得 } b_i \text{ 及 } \alpha_i.$$

3. 綜合討論：

定義 s_1 為 n_2, n_3 較小的值， s_2 為 n_2, n_3 較大的值（若 $n_2 = n_3$ ，則 $n_2 = n_3 = s_1 = s_2$ ），

則 $\langle A \rangle$ ：

$$\begin{cases} n_2 > n_3 : & \langle 1, (3, s_1 + 1) \oplus (2, s_2 - s_1 - 1) \rangle \oplus & \langle 2, (3, s_1) \rangle \\ n_2 = n_3 : & \langle 1, (3, s_1) \rangle \oplus & \langle 2, (3, s_1) \rangle \\ n_2 < n_3 : & \langle 1, (3, s_1) \rangle \oplus & \langle 2, (3, s_1) \oplus (2, s_2 - s_1) \rangle \end{cases}$$

可簡化為 $\langle A \rangle = \langle 1, (3, s_1 + 1) \oplus (2, s_2 - s_1 - 1) \rangle_{n_2} \oplus \langle 2, (3, s_1) \oplus (2, s_2 - s_1) \rangle_{n_3}$.

$$\text{同理，三種情況下的遞迴式亦可合併表示為 } c_{i, j+1} = \begin{cases} \frac{c_{i, j}}{3}, & c_{i, j} \leq 3s_1 - 3 \\ \frac{c_{i, j} - s_1}{2}, & 3s_1 \leq c_{i, j} \leq s_1 + 2s_2 - 2, \\ c_{i, j} - (s_1 + s_2), & c_{i, j} \geq s_1 + 2s_2 \end{cases}$$

經由上述討論，定理 4-1~4-3 可歸納如下：

【定理 5】 σ_{n_1, n_2, n_3}

令 s_1 為 n_2 、 n_3 較小的值， s_2 為 n_2 、 n_3 較大的值，

再令 $n_1 = k(n_2 + n_3) + d$ ， $k \geq 1$ 且 $0 \leq d < n_2 + n_3$ ：

$$1. \quad \langle A \rangle = \langle 1, (3, s_1 + 1) \oplus (2, s_2 - s_1 - 1) \rangle_{n_2} \oplus \langle 2, (3, s_1) \oplus (2, s_2 - s_1) \rangle_{n_3}。$$

$$2. \quad \beta_i = n_2 + n_3 + d + i - 1, \quad i = 1, 2, \dots, n_2 + n_3。$$

3. (1) 若 $\beta_i \in A$ ，則 $\alpha_i = k$ 且 $b_i = \beta_i$ ；

$$(2) \text{ 若 } \beta_i \notin A, \text{ 則 } c_{i, k+1} = \beta_i。 \text{ 由 } c_{i, k+1} \text{ 及 } c_{i, j+1} = \begin{cases} \frac{c_{i, j}}{3}, & c_{i, j} \leq 3s_1 - 3 \\ \frac{c_{i, j} - s_1}{2}, & 3s_1 \leq c_{i, j} \leq s_1 + 2s_2 - 2 \text{ 得 } b_i \text{ 及 } \alpha_i。 \\ c_{i, j} - (s_1 + s_2), & c_{i, j} \geq s_1 + 2s_2 \end{cases}$$

第三部分：多堆洗牌的最少洗牌次數

前節所討論三堆的情形，適用於更多堆的情形，以四堆為例，列出 $\sigma_{n_1, n_2, n_3, n_4}$ 如下：

$$\sigma_{n_1, n_2, n_3, n_4} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & \dots \\ 0 & n_1 & n_1 + n_2 & n_1 + n_2 + n_3 & 1 & n_1 + 1 & n_1 + n_2 + 1 & n_1 + n_2 + n_3 + 1 & 2 & \dots \end{pmatrix}$$

(一) 數列 $\langle A \rangle$ ：

當 $n_2 > n_3 > n_4$ 時，根據 $\sigma_{n_1, n_2, n_3, n_4}$ 的對應關係，對應到 $n_1 \sim n_1 + n_2 + n_3 + n_4 - 1$ 的數依序為：

對應第二堆 $n_1 \sim n_1 + n_2 - 1$ 的數依序為：

$$\underbrace{1, \dots, 4n_4 - 3, 4n_4 + 1, \dots}_{n_4 \text{ 項, 公差 } 4}, \underbrace{3n_3 + n_4 - 2, 3n_3 + n_4 + 1, \dots}_{n_3 - n_4 \text{ 項, 公差 } 3}, \underbrace{2n_3 + n_3 + n_4 - 1}_{n_2 - n_3 \text{ 項, 公差 } 2}$$

$$\text{記為 } \langle 1, (4, n_4 + 1) \oplus (3, n_3 - n_4) \oplus (2, n_2 - n_3 - 1) \rangle$$

對應第三堆 $n_1 + n_2 \sim n_1 + n_2 + n_3 - 1$ 的數依序為：

$$\underbrace{2, \dots, 4n_4 - 2, 4n_4 + 2, \dots}_{n_4 \text{ 項, 公差 } 4}, \underbrace{3n_3 + n_4 - 1}_{n_3 - n_4 \text{ 項, 公差 } 3}, \text{ 記為 } \langle 2, (4, n_4 + 1) \oplus (3, n_3 - n_4) \rangle$$

對應第四堆 $n_1 + n_2 + n_3 \sim n_1 + n_2 + n_3 + n_4 - 1$ 的數依序為：

$$\underbrace{3, \dots, 4n_4 - 1}_{n_4 \text{ 項, 公差 } 4}, \text{ 記為 } \langle 3, (4, n_4) \rangle$$

因此，得到：

$$\langle A \rangle = \langle 1, (4, n_4 + 1) \oplus (3, n_3 - n_4) \oplus (2, n_2 - n_3 - 1) \rangle \oplus \langle 2, (4, n_4 + 1) \oplus (3, n_3 - n_4) \rangle \oplus \langle 3, (4, n_4) \rangle$$

討論其它大小關係時，令 s_1 為 n_2 、 n_3 、 n_4 最小的值， s_2 為 n_2 、 n_3 、 n_4 次小的值， s_3 為 n_2 、 n_3 、 n_4 最大的值，六種情形，我們歸納如下：

1. 對應到第二堆 $n_1 \sim n_1 + n_2 - 1$ 、第四堆 $n_1 + n_2 + n_3 \sim n_1 + n_2 + n_3 + n_4 - 1$ 的數依序為：

	對應到第二堆	對應到第四堆
$n_2 > n_3 > n_4$	$\langle 1, (4, s_1 + 1) \oplus (3, s_2 - s_1) \oplus (2, s_3 - s_2 - 1) \rangle$	$\langle 3, (4, s_1) \rangle$
$n_2 > n_4 > n_3$	$\langle 1, (4, s_1 + 1) \oplus (3, s_2 - s_1) \oplus (2, s_3 - s_2 - 1) \rangle$	$\langle 3, (4, s_1) \oplus (3, s_2 - s_1) \rangle$
$n_3 > n_2 > n_4$	$\langle 1, (4, s_1 + 1) \oplus (3, s_2 - s_1 - 1) \rangle$	$\langle 3, (4, s_1) \rangle$
$n_3 > n_4 > n_2$	$\langle 1, (4, s_1) \rangle$	$\langle 3, (4, s_1) \oplus (3, s_2 - s_1) \rangle$
$n_4 > n_2 > n_3$	$\langle 1, (4, s_1 + 1) \oplus (3, s_2 - s_1 - 1) \rangle$	$\langle 3, (4, s_1) \oplus (3, s_2 - s_1) \oplus (2, s_3 - s_2) \rangle$
$n_4 > n_3 > n_2$	$\langle 1, (4, s_1) \rangle$	$\langle 3, (4, s_1) \oplus (3, s_2 - s_1) \oplus (2, s_3 - s_2) \rangle$
通式	$\langle 1, (4, s_1 + 1) \oplus (3, s_2 - s_1) \oplus (2, s_3 - s_2 - 1) \rangle_{n_2}$	$\langle 3, (4, s_1) \oplus (3, s_2 - s_1) \oplus (2, s_3 - s_2) \rangle_{n_4}$

2. 對應到第三堆 $n_1 + n_2 \sim n_1 + n_2 + n_3 - 1$ 的數需分成兩種情形討論：

① 當 $n_2 > n_4$ 時，有三種情形：

$$n_2 > n_3 > n_4 : \langle 2, (4, s_1 + 1) \oplus (3, s_2 - s_1 - 1) \rangle$$

$$n_3 > n_2 > n_4 : \langle 2, (4, s_1 + 1) \oplus (3, s_2 - s_1 - 1) \oplus (2, s_3 - s_2) \rangle$$

$$n_2 > n_4 > n_3 : \langle 2, (4, s_1) \rangle$$

可用 $\langle 2, (4, s_1 + 1) \oplus (3, s_2 - s_1 - 1) \oplus (2, s_3 - s_2) \rangle_{n_3}$ 表示；

② 當 $n_2 < n_4$ 時，有三種情形：

$$n_3 > n_4 > n_2 : \langle 2, (4, s_1) \oplus (3, s_2 - s_1 + 1) \oplus (2, s_3 - s_2 - 1) \rangle$$

$$n_4 > n_2 > n_3 : \langle 2, (4, s_1) \rangle$$

$$n_4 > n_3 > n_2 : \langle 2, (4, s_1) \oplus (3, s_2 - s_1) \rangle$$

可用 $\langle 2, (4, s_1) \oplus (3, s_2 - s_1 + 1) \oplus (2, s_3 - s_2 - 1) \rangle_{n_3}$ 表示。

(二) β_i ：

令 $s = \sum_{t=2}^4 n_t$ ， $n_1 = ks + d$ $0 \leq d < s$ ，由遞迴式 $c_{i,j+1} = c_{i,j} - s$ ， $j \leq k$ 及 $c_{i,1}$ 得：

$$\beta_i = d + s + i - 1, i = 1, 2, \dots, s$$

(三) b_i :

當 $j \geq k$ 時，歸納遞迴關係式如下：

$$c_{i,j+1} = \begin{cases} \frac{c_{i,j}}{4}, & c_{i,j} \leq 4s_1 - 4 \\ \frac{c_{i,j} - s_1}{3}, & 4s_1 \leq c_{i,j} \leq s_1 + 3s_2 - 3 \\ \frac{c_{i,j} - (s_1 + s_2)}{2}, & s_1 + 3s_2 \leq c_{i,j} \leq s_1 + s_2 + 2s_3 - 2 \\ c_{i,j} - (s_1 + s_2 + s_3), & c_{i,j} \geq s_1 + s_2 + 2s_3 \end{cases}$$

【定理 6】 $\sigma_{n_1, n_2, n_3, n_4}$

令 s_1 為 n_2, n_3, n_4 最小的值， s_2 為 n_2, n_3, n_4 次小的值， s_3 為 n_2, n_3, n_4 最大的值，

且令 $s = \sum_{t=2}^4 n_t$ ， $n_1 = ks + d$ $0 \leq d < s$:

1. (1) 當 $n_2 > n_4$ 時：
 $\langle A \rangle = \langle 1, (4, s_1 + 1) \oplus (3, s_2 - s_1) \oplus (2, s_3 - s_2 - 1) \rangle_{n_2} \oplus$
 $\langle 2, (4, s_1 + 1) \oplus (3, s_2 - s_1 - 1) \oplus (2, s_3 - s_2) \rangle_{n_3} \oplus$
 $\langle 3, (4, s_1) \oplus (3, s_2 - s_1) \oplus (2, s_3 - s_2) \rangle_{n_4}$

(2) 當 $n_2 < n_4$ 時：
 $\langle A \rangle = \langle 1, (4, s_1 + 1) \oplus (3, s_2 - s_1) \oplus (2, s_3 - s_2 - 1) \rangle_{n_2} \oplus$
 $\langle 2, (4, s_1) \oplus (3, s_2 - s_1 + 1) \oplus (2, s_3 - s_2 - 1) \rangle_{n_3} \oplus$
 $\langle 3, (4, s_1) \oplus (3, s_2 - s_1) \oplus (2, s_3 - s_2) \rangle_{n_4}$

2. $\beta_i = d + s + i - 1$, $i = 1, 2, \dots, s$

3. (1) 若 $\beta_i \in A$ ，則 $\alpha_i = k$ 且 $b_i = \beta_i$;

(2) 若 $\beta_i \notin A$ ，則 $c_{i,k+1} = \beta_i$ 。

$$\text{由 } c_{i,k+1} \text{ 及 } c_{i,j+1} = \begin{cases} \frac{c_{i,j}}{4}, & c_{i,j} \leq 4s_1 - 4 \\ \frac{c_{i,j} - s_1}{3}, & 4s_1 \leq c_{i,j} \leq s_1 + 3s_2 - 3 \\ \frac{c_{i,j} - (s_1 + s_2)}{2}, & s_1 + 3s_2 \leq c_{i,j} \leq s_1 + s_2 + 2s_3 - 2 \\ c_{i,j} - (s_1 + s_2 + s_3), & c_{i,j} \geq s_1 + s_2 + 2s_3 \end{cases} \text{ 得 } b_i \text{ 及 } \alpha_i \text{。}$$

第四部分：同堆同色之最少洗牌次數

基測題目中，牌分成兩種顏色（同一堆的顏色相同），僅需將牌洗成兩邊顏色相同即可（不須每張牌回到原來的次序）。本節探討同一堆的牌皆相同的洗牌次數，方便起見，以 1, 2, 3 來表示三種顏色，但為追蹤牌的變化，仍標記該張牌初始位置，將三堆分別有 n_1, n_2, n_3 張牌依序記為 $1_0, 1_1, \dots, 1_{n_1-1}, 2_{n_1}, \dots, 2_{n_1+n_2-1}, 3_{n_1+n_2}, \dots, 3_{n_1+n_2+n_3-1}$ ，定義同堆的牌皆相同的洗牌次數 $\text{cord}(\sigma_{n_1, n_2, n_3})$ 如下：

【定義 7】 $cord(\sigma_{n_1, n_2, n_3})$

將三堆依序有張牌，且同一堆牌皆相同的洗牌操作 σ_{n_1, n_2, n_3} ，則將牌洗回同堆皆相的最少次數記為 $cord(\sigma_{n_1, n_2, n_3})$ 。

三堆牌之中，只要兩堆同時洗回同色，第三堆也必定都同色，我們選擇觀察第二、三堆牌同時洗回同色的次數。

先觀察 $n_2=3$ 、 $n_3=1$ 的情形，得到：

$$\sigma_{n_1, 3, 1} = \begin{pmatrix} 1_0 & 1_1 & 1_2 & 1_3 & 1_4 & 1_5 & 1_6 & 1_7 & 1_8 & \dots & 1_{n_1-1} & 2_{n_1} & 2_{n_1+1} & 2_{n_1+2} & 3_{n_1+3} \\ 1_0 & 2_{n_1} & 3_{n_1+3} & 1_1 & 2_{n_1+1} & 1_2 & 2_{n_1+2} & 1_3 & 1_4 & \dots & 1_{n_1-5} & 1_{n_1-4} & 1_{n_1-3} & 1_{n_1-2} & 1_{n_1-1} \end{pmatrix}$$

當 $n_1=4k$ 時，得 $b_{k+1}\sigma_{4k, 3, 1} = \begin{pmatrix} 1_1 & 1_4 & 1_6 & 1_2 \\ 1_4 & 1_5 & 1_6 & 1_7 \end{pmatrix}$ ，再得 $b\sigma_{4k, 3, 1} = \begin{pmatrix} 1_1 & 1_4 & 1_6 & 1_2 \\ 1_4 & 1_2 & 1_6 & 1_1 \end{pmatrix} = (1_1, 1_4, 1_2)(1_6)$

且 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = (k, k+1, k, k+2)$ 。

先求 $ord(\sigma_{4k, 3, 1}) = ?$

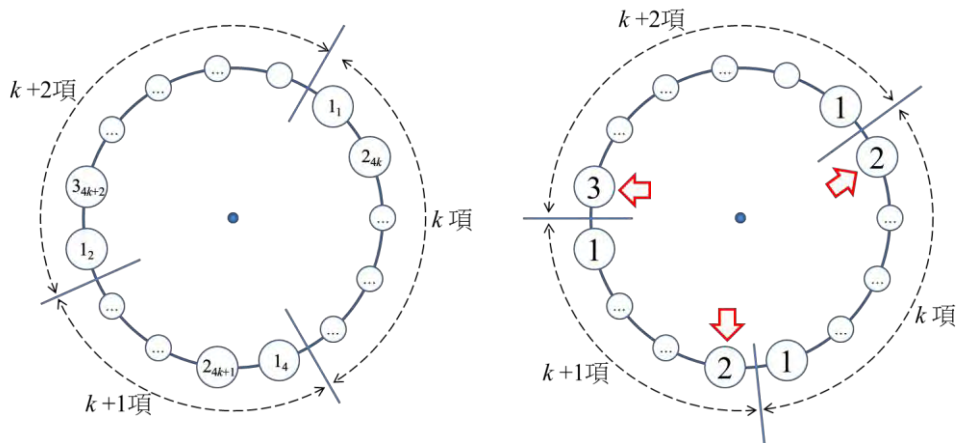
由 $\sigma_{4k, 3, 1} = (\underbrace{1_1, 2_{4k}, \dots, 1_4}_{k \text{ 項}}, \underbrace{2_{4k+1}, \dots, 1_2}_{k+1 \text{ 項}}, \underbrace{3_{4k+3}, \dots, 1_3}_{k+2 \text{ 項}})(\underbrace{1_6, 2_{4k+2}, \dots, 1_{10}}_{k \text{ 項}})$ ，

得 $ord(\sigma_{4k, 3, 1}) = lcm(3k+3, k) \dots (*)$

只考慮顏色，求 $cord(\sigma_{4k, 3, 1}) = ?$

得 $\sigma_{4k, 3, 1} = (\underbrace{1, 2, 1, \dots}_{k \text{ 項}}, \underbrace{1, 2, 1, \dots}_{k+1 \text{ 項}}, \underbrace{1, 3, 1, \dots, 1}_{k+2 \text{ 項}})(\underbrace{1, 2, 1, \dots, 1}_{k \text{ 項}}) = (\underbrace{2, 1, \dots, 1}_{k \text{ 項}}, \underbrace{2, 1, \dots, 1}_{k+1 \text{ 項}}, \underbrace{3, 1, \dots, 1}_{k+2 \text{ 項}})(\underbrace{2, 1, \dots, 1}_{k \text{ 項}})$

經過 $3k+3$ 次移動， $(\underbrace{2, 1, \dots, 1}_{k \text{ 項}}, \underbrace{2, 1, \dots, 1}_{k+1 \text{ 項}}, \underbrace{3, 1, \dots, 1}_{k+2 \text{ 項}})$ 中的第二、三堆的牌回到第二、三堆；



經過 k 次移動， $(\underbrace{2, 1, \dots, 1}_{k \text{ 項}})$ 圈中的第二堆的牌回到第二堆，

故得 $cord(\sigma_{4k, 3, 1}) = lcm(3k+3, k) \dots (**)$

我們得到 $cord(\sigma_{4k, 3, 1}) = ord(\sigma_{4k, 3, 1})$ 。

這樣的結果代表 **僅考慮顏色時**，洗牌次數並不會較少，這令我們有點訝異。在推導過程中，發現洗牌次數是否減少的關鍵在於：

「合併為 cycle 之圈數列的項數是否皆相同」。

說明如下：

(1) 如下圖左，若有三個項數相等圈數列（皆為 x 項）組成一個圈，

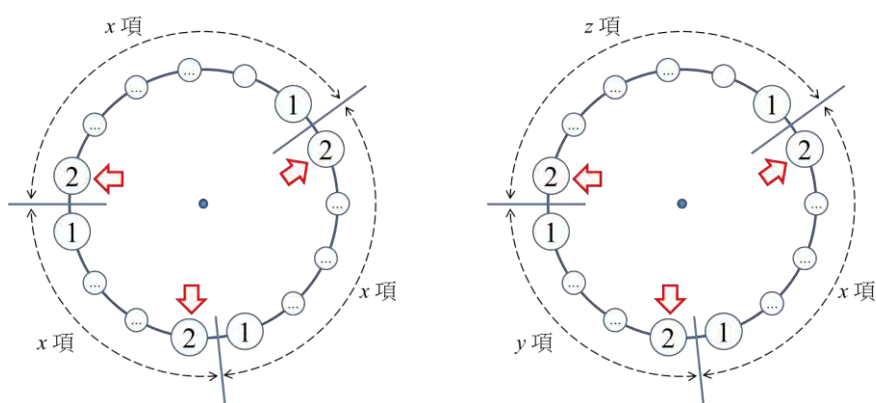
當牌是 **每張互異** 時，則須經 $3x$ 次移動才能移回原來的狀況，

當牌是 **同堆同色** 時，經 x 次移動，即能移回原來的狀況。（**同堆同色移動次數較少**）

(2) 如下圖左，若三個項數不完全相等的圈數列（分別有 x 、 y 、 z 項， $x \neq y$ ）組成一個圈，

當牌是 **每張互異** 時，則須經 $x+y+z$ 次移動才能移回原來的狀況，

當牌是 **同堆同色** 時，經 $x+y+z$ 次移動，即能移回原來的狀況。（**移動次數相同**）



為快速檢驗 $ord(\sigma_{n_1, n_2, n_3})$ 和 $cord(\sigma_{n_1, n_2, n_3})$ 的關係，利用 Visual Basic 設計了一程式，輸入三堆的數量，執行程式後，輸出 $ord(\sigma_{n_1, n_2, n_3})$ 和 $cord(\sigma_{n_1, n_2, n_3})$ ，程式碼說明如附錄一、二。

每張互異V.S.同堆同色

程式一(3堆，每張互異)

程式二(3堆，每堆同色)

利用程式檢驗許多例子都得到 $ord(\sigma_{n_1, n_2, n_3}) = cord(\sigma_{n_1, n_2, n_3})$ 的結果，我們懷疑：

「不存在所含圈數列之項數皆相等的 cycle」。

以下檢驗上述假設是否正確，觀察 $b_{k+a}\sigma_{n_1, n_2, n_3}$ ：

$$b_{k+1}\sigma_{7k, 3, 4} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc|ccc} \text{第二堆} & & & \text{第三堆} & & \\ \text{小} & \text{大} & & \text{小} & \text{大} & \\ 1 & 4 & 7 & 2 & 5 & 8 & 10 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \end{array} \end{array}$$

$$b_{k+1}\sigma_{7k+3, 3, 4} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc|ccc} \text{第二堆} & & & \text{第三堆} & & \\ \text{小} & \text{大} & & \text{小} & \text{大} & \\ 1 & 4 & 7 & 2 & 5 & 8 & 10 \\ 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \end{array} \end{array}$$

我們得到，第二堆的牌所在的圈數列首項大小關係與第 $k+1$ 項相同，事實上，從之前的探討中，得到：

若第二堆的牌 a_2, b_2 分別落在圈數列 $\langle C_x \rangle = x, a_2, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots$ ，則 $a_i > b_i, i=1 \sim k+1$
 $\langle C_y \rangle = y, b_2, \dots, b_k, b_{k+1}, \dots$

因為 a_{k+1}, b_{k+1} 必為第一堆的牌，根據對應關係：

$$\begin{cases} i \rightarrow \frac{i}{3}, i \leq 3n_2 \\ i \rightarrow \frac{i-n_2}{2}, 3n_2 < i \leq n_2 + 2n_3 \\ i \rightarrow i - n_2 - n_3, i > n_2 + 2n_3 \end{cases}$$

可以進一步得到： $a_{k+2} > b_{k+2}, a_{k+3} > b_{k+3}, a_{k+4} > b_{k+4}, \dots$

以下將利用反證法來說明必不存在所含圈數列之項數皆相等的 *cycle*。

假設有兩項數相等（設皆有 $k+t$ 項）的圈數列合併為一個 *cycle*,

其首末項重排為： $b\sigma = \begin{pmatrix} \dots & x & \dots & y & \dots \\ \dots & y & \dots & x & \dots \end{pmatrix}$ ，得 $x < y$ ，

因兩圈數列皆有 $k+t$ 項，回推其首項與第 $k+1$ 項重排為 $\begin{pmatrix} \dots & x & \dots & y & \dots \\ \dots & b_{k+1} & \dots & a_{k+1} & \dots \end{pmatrix}$

因在圈數列的首項與第 $k+1$ 項重排第二列越右邊的數越大， $a_{k+1} > b_{k+1}$ ，產生矛盾，因此此兩個圈數列的項數必不相等。

同理可證若有 h 個項數相等的圈數列合併為一個 *cycle*，其中必存在矛盾，因此得證當 $n_1 = kn_2$ 時，必不存在所含圈數列之項數皆相等的 *cycle*。得以下結果：

【定理 7】

$$\text{cord}(\sigma_{n_1, n_2, n_3}) = \text{ord}(\sigma_{n_1, n_2, n_3})。$$

第五部分：特殊情況的最少洗牌次數

本節討論特定條件下的最少洗牌次數。

1. 每堆牌的數量相等

首先考慮三堆數量相等的情況：

$$\text{由 } \sigma_{5,5,5} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4, & 5 & 6 & 7 & 8 & 9, & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 0 & 5 & 10 & 1 & 6, & 11 & 2 & 7 & 12 & 3, & 8 & 13 & 4 & 9 & 14 \end{pmatrix}$$

對應關係 $\begin{cases} 3i \rightarrow i, 0 \leq i \leq 4 \\ 3i-2 \rightarrow i+4, 1 \leq i \leq 5 \text{ 不利於計算,} \\ 3i-1 \rightarrow i+9, 1 \leq i \leq 5 \end{cases}$

考慮下列對應到上列之反向的對應關係，即：

$$\sigma_{5,5,5} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ 0 & 5 & 10 & 1 & 6 & 11 & 2 & 7 & 12 & 3 & 8 & 13 & 4 & 9 & 14 \end{pmatrix}$$

其對應關係為 $\begin{cases} i \rightarrow 3i, 1 \leq i \leq 4 \\ i \rightarrow 3i-14, 5 \leq i \leq 9 \\ i \rightarrow 3i-28, 10 \leq i \leq 14 \end{cases}$ 可以用同餘 14 來表示：

「若給定下列的數 i ， $i \rightarrow j$ ，則 j 滿足 $j \equiv 3i \pmod{14}$ 」

這個結果是否適用於一般情形，檢驗如下：

$$\sigma_{n,n,n} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots & n-1 & n & \dots & 2n-1 & 2n & \dots & 3n-1 \\ 0 & n & 2n & 1 & n+1 & 2n+1 & 2 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 3n-1 \end{pmatrix}$$

其三個對應關係為 $\begin{cases} i \rightarrow 3i, 1 \leq i \leq n-1 \\ i \rightarrow 3i-(3n-1), n \leq i \leq 2n-1 \\ i \rightarrow 3i-2(3n-1), 2n \leq i \leq 3n-1 \end{cases}$ 可以用一個同餘式表示：

「若給定重排之中下列的 i ，及上列的 j 且 $i \rightarrow j$ ，則 j 滿足 $j \equiv 3i \pmod{3n-1}$ 」

藉由同餘的性質，我們得到與文獻結論 3 相同的結果（過程詳如研究日誌）：

「若 k 為滿足 $h^k \equiv 1 \pmod{hn-1}$ 的最小整數，則 $\text{ord}(\underbrace{\sigma_{n,n,\dots,n}}_{h \text{ 個}}) = k$ 。」

根據歐拉定理：

「若 $\gcd(a, n)=1$ ，則 $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$ 」 （ $\varphi(n)$ 為歐拉函數）

亦即 $k = \varphi(hn-1)$ 滿足 $h^k \equiv 1 \pmod{hn-1}$ ，進一步得到：

「當有 h 堆牌，每堆 n 張時，最少洗牌次數為 $\varphi(hn-1)$ 的因數」

以符號表示為： $\text{ord}(\underbrace{\sigma_{n,n,\dots,n}}_{h \text{ 個}}) \mid \varphi(hn-1)$

特別的是，當每堆皆有 h^t 張牌時，可得滿足 $h^k - 1 \equiv 0 \pmod{h^{t+1} - 1}$ 的最小整數 $k = t+1$ ，

即得： $\text{ord}(\underbrace{\sigma_{h^t, h^t, \dots, h^t}}_{h \text{ 個}}) = t+1$

【定理 8】

$$1. \text{ord}(\underbrace{\sigma_{n,n,\dots,n}}_{h \text{ 個}}) \mid \varphi(hn-1).$$

$$2. \text{ord}(\underbrace{\sigma_{h^t, h^t, \dots, h^t}}_{h \text{ 個}}) = t+1.$$

2. 每堆牌的數量不完全相等

當牌有 $nh+d$ 張($d \neq 0$)時，無法均分成 h 堆，我們先將 nh 張牌等分成 h 堆(每堆 n 張)，再考慮剩下的 d 張牌如何分配，例如：當牌數不是 3 的倍數且牌分為 3 堆時，可考慮將牌分為 $(n+1, n, n)$ 、 $(n, n+1, n)$ 、 $(n, n, n+1)$ 、 $(n+1, n+1, n)$ 、 $(n+1, n, n+1)$ 、 $(n, n+1, n+1)$ 、 $(n+2, n, n)$ 、 $(n, n+2, n)$ 、 $(n, n, n+2)$ 等情形。

以下討論 $(n+1, n, n)$ 的洗牌次數：

$$\text{由 } \sigma_{6,5,5} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 0 & 6 & 11 & 1 & 7 & 12 & 2 & 8 & 13 & 3 & 9 & 14 & 4 & 10 & 15 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{考慮 } \sigma_{6,5,5} \text{ 反向(下列對應到上列)的對應關係 } \begin{cases} i \rightarrow 3i, 0 \leq i \leq 5 \\ i \rightarrow 3i-17, 6 \leq i \leq 10 \\ i \rightarrow 3i-31, 11 \leq i \leq 15 \end{cases}$$

合併第一、二堆的對應關係用同餘 17 來表示，第三堆的對應關係則用同餘 31 來表示：

$$\text{「若給定下列的數 } i, i \rightarrow j, \text{ 則 } j \text{ 滿足 } \begin{cases} j \equiv 3i \pmod{17}, 0 \leq i \leq 10 \\ j \equiv 3i \pmod{31}, 11 \leq i \leq 15 \end{cases} \text{」}$$

這個結果是否適用於一般情形，檢驗如下：

$$\sigma_{n+1,n,n} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & n & n+1 & \dots & 2n & 2n+1 & \dots & 3n \\ 0 & n+1 & 2n+1 & 1 & n+2 & 2n+2 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{其對應關係為 } \begin{cases} i \rightarrow 3i, 0 \leq i \leq n \\ i \rightarrow 3i-3n-2, n+1 \leq i \leq 2n \\ i \rightarrow 3i-6n-1, 2n+1 \leq i \leq 3n \end{cases} \text{ 可以用同餘表示：}$$

$$\text{「若給定重排 } \sigma_{n+1,n,n} \text{ 之中下列的數 } i, i \rightarrow j, \text{ 則 } j \text{ 滿足 } \begin{cases} j \equiv 3i \pmod{3n+2}, 0 \leq i \leq 2n \\ j \equiv 3i \pmod{6n+1}, 2n+1 \leq i \leq 3n \end{cases} \text{」}$$

$$\text{堆數更多時，如：} \sigma_{n+1,n,n,n} \text{ 的對應關係為 } \begin{cases} i \rightarrow 4i, 0 \leq i \leq n \\ i \rightarrow 4i-(4n+3), n+1 \leq i \leq 2n \\ i \rightarrow 4i-(8n+2), 2n+1 \leq i \leq 3n \\ i \rightarrow 4i-(12n+1), 3n+1 \leq i \leq 4n \end{cases} \text{ 可用同餘式表示：}$$

$$\text{「若給定重排 } \sigma_{n+1,n,n,n} \text{ 之中下列的數 } i, i \rightarrow j, \text{ 則 } j \text{ 滿足 } \begin{cases} j \equiv 4i \pmod{4n+3}, 0 \leq i \leq 2n \\ j \equiv 4i \pmod{8n+2}, 2n+1 \leq i \leq 3n \\ j \equiv 4i \pmod{12n+1}, 3n+1 \leq i \leq 4n \end{cases} \text{」}$$

因此，我們得到：當每堆牌數不相等時，對應關係不利形成一個同餘式。

以同餘工具無法得解，再考慮利用圈數列等工具來探討，由

$$\sigma_{6,5,5} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 0 & 6 & 11 & 1 & 7 & 12 & 2 & 8 & 13 & 3 & 9 & 14 & 4 & 10 & 15 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{定義 10 個圈數列如下} \left\{ \begin{array}{l} \langle C_1 \rangle = 1, \quad (6) \\ \langle C_2 \rangle = 4, \quad (7) \\ \langle C_3 \rangle = 7, \quad (8) \\ \langle C_4 \rangle = 10, \quad 9, \quad 3, \quad (1) \\ \langle C_5 \rangle = 13, \quad (10) \\ \langle C_6 \rangle = 2, \quad (11) \\ \langle C_7 \rangle = 5, \quad 12, \quad (4) \\ \langle C_8 \rangle = 8, \quad (13) \\ \langle C_9 \rangle = 11, \quad (14) \\ \langle C_{10} \rangle = 14, \quad 15, \quad (5) \end{array} \right.$$

可看出大部分圈數列僅有 1 項，若有第 2 項，則第二項之後的對應關係為 $i \rightarrow \frac{i}{3}$ ，因此，我們將第二項以後的數除以 3，反覆計算至不為 3 的倍數為止，所得的數即為末項對應數，由計算的次數可得圈數列項數，例如：圈數列 $\langle C_4 \rangle$ 的第 2 項為 9，由 $9 \rightarrow \frac{9}{3} = 3 \rightarrow \frac{3}{3} = 1$ ，故得 $\langle C_4 \rangle$ 末項對應數為 1 且此圈數列有 3 項。

上述 $\sigma_{n+1,n,n}$ 觀察也適用於 $\sigma_{n,n,n}$ 的情形，歸納如下：

【定理 9】 $\sigma_{n+d,n,n}$ 的圈數列項數及重排

當 $d=0$ 或 1 時，令 $i+n+d-1=b_i \times 3^{\gamma_i} (1 \leq i \leq 2n)$ ，則：

1. $b\sigma_{n+d,n,n} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & \dots & 3n-2 & 2 & 5 & \dots & 3n-1 \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n & b_{n+1} & b_{n+2} & \dots & b_{2n} \end{pmatrix}.$
2. $\alpha_i = 1 + \gamma_i.$

由上述定理，可以求得 $\text{ord}(\sigma_{n+d,n,n}), d=0 \text{ or } 1$ ，舉例如下：

例如： $\text{ord}(\sigma_{10,9,9}) = ?$

將 $d=1, n=9$ 代入 $i+n+d-1=b_i \times 3^{\gamma_i}$ 得 $i+9=b_i \times 3^{\gamma_i} (1 \leq i \leq 18)$ ，

$$\text{得} \begin{cases} (b_1, b_2, \dots, b_{18}) = (10, 11, 4, 13, 14, 5, 16, 17, 2, 19, 20, 7, 22, 23, 8, 25, 26, 1) \\ (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{18}) = (1, 1, 2, 1, 1, 2, 1, 1, 3, 1, 1, 2, 1, 1, 2, 1, 1, 4) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & b\sigma_{10,9,9} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & 10 & 13 & 16 & 19 & 22 & 25 & 2 & 5 & 8 & 11 & 14 & 17 & 20 & 23 & 26 \\ 10 & 11 & 4 & 13 & 14 & 5 & 16 & 17 & 2 & 19 & 20 & 7 & 22 & 23 & 8 & 25 & 26 & 1 \end{pmatrix} \\ &= (1, 10, 13, 14, 23, 26)(4, 11, 22, 17, 8, 7)(16, 5, 20, 25, 2, 19) \end{aligned}$$

故 $\sigma_{10,9,9}$ 為三個圈的合成，每個圈有 9 項，故得 $\text{ord}(\sigma_{10,9,9}) = 9$ 。

考慮利用圈數列等工具來探討，由

$$\sigma_{5,4,4,4} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 0 & 5 & 9 & 13 & 1 & 6 & 10 & 14 & 2 & 7 & 11 & 15 & 3 & 8 & 12 & 16 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{定義 12 個圈數列如下} \left\{ \begin{array}{ll} \langle C_1 \rangle = & 1, \quad (5) \\ \langle C_2 \rangle = & 5, \quad (6) \\ \langle C_3 \rangle = & 9, \quad (7) \\ \langle C_4 \rangle = & 13, \quad 8 \quad (2) \\ \langle C_5 \rangle = & 2, \quad (9) \\ \langle C_6 \rangle = & 6, \quad (10) \\ \langle C_7 \rangle = & 10, \quad (11) \\ \langle C_8 \rangle = & 14, \quad 12, \quad (3) \\ \langle C_9 \rangle = & 3, \quad (13) \\ \langle C_{10} \rangle = & 7, \quad (14) \\ \langle C_{11} \rangle = & 11, \quad (15) \\ \langle C_{12} \rangle = & 15, \quad 16, \quad 4, \quad (1) \end{array} \right.$$

可看出大部分圈數列僅有 1 項，若有第 2 項，則第二項之後的對應關係為 $i \rightarrow \frac{i}{4}$ ，因此，我們將第二項以後的數除以 4，反覆計算至不為 4 的倍數為止，所得的數即為末項對應數，由計算的次數可得圈數列項數，進而得到快速計算最小洗牌次數的方法如下：

【定理 10】 $\sigma_{\underbrace{n+d, n, n, \dots, n}_{h \text{ 個}}}$

當 $d=0$ 或 1 時，令 $i+n+d-1=b_i \times h^{\gamma_i} (1 \leq i \leq n(h-1))$ ，則：

1. $b\sigma_{\underbrace{n+d, n, n}_{h \text{ 個}}} = \begin{pmatrix} 1 & 1+h & \dots & hn-h+1 & 2 & 2+h & \dots & hn-h+2 & \dots & hn-2h+2 \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n & b_{n+1} & b_{n+2} & \dots & b_{2n} & \dots & b_{n(h-1)} \end{pmatrix}.$
2. $\alpha_i = 1 + \gamma_i.$

例如： $ord(\sigma_{4,3,3,3,3}) = ?$

將 $d=1, n=3$ 代入 $i+n+d-1=b_i \times 3^{\gamma_i}$ 得 $i+3=b_i \times 3^{\gamma_i} (1 \leq i \leq 12)$,

$$\text{得} \begin{cases} (b_1, b_2, \dots, b_{12}) = (4, 1, 6, 7, 8, 9, 2, 11, 12, 13, 14, 3) \\ (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{12}) = (1, 2, 1111, 2, 1111, 2) \end{cases}$$

$$b\sigma_{4,3,3,3,3} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 11 & 2 & 7 & 12 & 3 & 8 & 13 & 4 & 9 & 14 \\ 4 & 1 & 6 & 7 & 8 & 9 & 2 & 11 & 12 & 13 & 14 & 3 \end{pmatrix} = (1, 4, 13, 12, 9, 14, 3, 2, 7, 8, 11, 6)$$

故 $b\sigma_{4,3,3,3,3}$ 為一個圈，有 15 項，故得 $ord(b\sigma_{4,3,3,3,3}) = 15$.

我們利用 VB 程式求出 $ord(\sigma_{n+1,n,n})$, $1 \leq n \leq 1000$ (程式碼如研究日誌) ,



其中，我們發現一個有趣的結果：

$$\text{當 } n=3^t, t=0,1,2,3,4,5,6 \text{ 時, } ord(\sigma_{n+1,n,n}) = 3t + 3$$

進一步利用 VB 程式求出 $ord(\sigma_{n+1,n,n})$, $n=3^7 \sim 3^{13}$, 得到：

$$\text{當 } n=3^t, t=7 \sim 13 \text{ 時, } ord(\sigma_{n+1,n,n}) = 3t + 3$$

我們再利用 VB 程式求出 $ord(\sigma_{n+1,n,n,n})$, $n=4^1 \sim 4^{13}$, 得到：

$$\text{當 } n=4^t, t=1 \sim 13 \text{ 時, } ord(\sigma_{n+1,n,n,n}) = 4t + 4$$

再利用 VB 程式求出 $ord(\sigma_{n+1,n,n,n,n})$, $n=5^1 \sim 5^{13}$, 得到：

$$\text{當 } n=5^t, t=1 \sim 13 \text{ 時, } ord(\sigma_{n+1,n,n,n,n}) = 5t + 5$$

進而猜測當 $n=h^t$ 時, $ord(\sigma_{\underbrace{n+1,n,n,\dots,n}_{h \text{ 個}}})$ 也存在相同的規律, 再利用程式檢驗了許多 h 堆, 且

$n=h^t$ 的例子, 皆得到 $ord(\sigma_{\underbrace{n+1,n,n,\dots,n}_{h \text{ 個}}}) = h(t+1)$, 得以下推測：

【推測】

$$ord(\sigma_{\underbrace{h^t+1,h^t,h^t,\dots,h^t}_{h \text{ 個}}}) = h(t+1) \text{ 。}$$

另外，我們也利用 VB 程式求出 $ord(\sigma_{n,n+1,n})$, $ord(\sigma_{n+1,n+1,n})$, $ord(\sigma_{n+2,n,n})$, $1 \leq n \leq 1000$, 但未發現有趣的現象。

第六部分：其他的洗牌方式

我們考慮另一種兩堆洗牌方式，將右堆的第一張放在左堆第一張之前，第二張之後依序插在左堆的空隙之中，例如：兩堆牌分別有 5 張(編號 0~4)、3 張(編號 5~7) ,

原 來 排 序：0、1、2、3、4、5、6、7

經過一次洗牌為：5、0、6、1、7、2、3、4

我們發現第一堆第一張牌位置有所變化，應該將其編號為 1，以重排表示如下：

$$\sigma_{5,3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5, & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 1 & 7 & 2 & 8 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

考慮一般的情形，我們得到：

$$\sigma_{n_1, n_2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots & n_1, & n_1+1 & n_1+2 & \dots & n_1+n_2 \\ n_1+1 & 1 & n_1+2 & 2 & n_1+3 & 3 & \dots & n_1-n_2 & n_1+1-n_2 & n_1+2-n_2 & \dots & n_1 \end{pmatrix}$$

顯而易見，根據對應關係 $\begin{cases} i \rightarrow n_1+i, & 1 \leq i \leq 2n_2, i \text{ 為奇數} \\ i \rightarrow \frac{i}{2}, & 1 \leq i \leq 2n_2, i \text{ 為偶數} \\ i \rightarrow i-n_2, & 2n_2+1 \leq i \leq n_1+n_2 \end{cases}$ ，可以藉由圈數列等工具來求

得最少洗牌次數。

多堆時，規定洗牌方式為抽出各堆第一張，依相反的順序，將越後面的牌排在越前面，例如：三堆牌分別有 4 張(編號 1~4)、2 張(編號 5~6)，3 張(編號 7~9)，

原 來 排 序：1、2、3、4、5、6、7、8、9

抽出各堆第一張牌，排成：7、5、1

抽出各堆第二張牌，排成：7、5、1、8、6、2

抽出各堆第三張牌，排成：7、5、1、8、6、2、9、3

抽出各堆第四張牌，排成：7、5、1、8、6、2、9、3、4

以重排表示為：

$$\sigma_{4,2,3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4, & 5 & 6, & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 5 & 1 & 8, & 6 & 2, & 9 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

更多的例子：

$$\sigma_{11,2,3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11, & 12 & 13, & 14 & 15 & 16 \\ 14 & 12 & 1 & 15 & 13 & 2 & 16 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{11,3,2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11, & 12 & 13 & 14, & 15 & 16 \\ 15 & 12 & 1 & 16 & 13 & 2 & 14 & 3 & 4 & 5 & 6, & 7 & 8 & 9, & 10 & 11 \end{pmatrix}$$

顯而易見，根據對應關係，藉由與本研究類似的過程，可以圈數列等工具來求得這種洗牌方法的最少洗牌次數。

伍、研究結果：

我們延伸黃莉芸、邱文均所提供的兩堆洗牌的數學模式，將其擴展到三堆以上的情形，並討論特殊情況下的洗牌次數（如同堆牌顏色相同或每堆牌數量相等）。探討過程中，我們

發現前人所提供的數學模式相當有效，但三堆以上的情形更加複雜，我們修正數學模式以適用於多堆洗牌的情形，探究的過程及成果如下：

1. 三堆洗牌 σ_{n_1, n_2, n_3} (令 s_1 為 n_2 、 n_3 較小的值， s_2 為 n_2 、 n_3 較大的值；令 $n_1 = k(n_2 + n_3) + d$ ， $k \geq 1$ 且 $0 \leq d < n_2 + n_3$)：

$$(1) \langle A \rangle = \langle 1, (3, s_1 + 1) \oplus (2, s_2 - s_1 - 1) \rangle_{n_2} \oplus \langle 2, (3, s_1) \oplus (2, s_2 - s_1) \rangle_{n_3}$$

$$(2) \beta_i = n_2 + n_3 + d + i - 1, i = 1, 2, \dots, n_2 + n_3$$

$$(3) \textcircled{1} \text{ 若 } \beta_i \in A, \text{ 則 } \alpha_i = k \text{ 且 } b_i = \beta_i;$$

$$\textcircled{2} \text{ 若 } \beta_i \notin A, \text{ 則 } c_{i, k+1} = \beta_i.$$

$$\text{由 } c_{i, k+1} \text{ 及 } c_{i, j+1} = \begin{cases} \frac{c_{i, j}}{3}, & c_{i, j} \leq 3s_1 - 3 \\ \frac{c_{i, j} - s_1}{2}, & 3s_1 \leq c_{i, j} \leq s_1 + 2s_2 - 2 \text{ 得 } b_i \text{ 及 } \alpha_i. \\ c_{i, j} - (s_1 + s_2), & c_{i, j} \geq s_1 + 2s_2 \end{cases}$$

2. 四堆洗牌 $\sigma_{n_1, n_2, n_3, n_4}$ (令 s_1 為 n_2 、 n_3 、 n_4 最小的值， s_2 為 n_2 、 n_3 、 n_4 次小的值， s_3

為 n_2 、 n_3 、 n_4 最大的值，且令 $s = \sum_{t=2}^4 n_t$ ， $n_1 = ks + d$ $0 \leq d < s$)：

$$(1) \textcircled{1} \text{ 當 } n_2 > n_4 \text{ 時：} \langle A \rangle = \langle 1, (4, s_1 + 1) \oplus (3, s_2 - s_1) \oplus (2, s_3 - s_2 - 1) \rangle_{n_2} \oplus \\ \langle 2, (4, s_1 + 1) \oplus (3, s_2 - s_1 - 1) \oplus (2, s_3 - s_2) \rangle_{n_3} \oplus \\ \langle 3, (4, s_1) \oplus (3, s_2 - s_1) \oplus (2, s_3 - s_2) \rangle_{n_4}$$

$$\textcircled{2} \text{ 當 } n_2 < n_4 \text{ 時：} \langle A \rangle = \langle 1, (4, s_1 + 1) \oplus (3, s_2 - s_1) \oplus (2, s_3 - s_2 - 1) \rangle_{n_2} \oplus \\ \langle 2, (4, s_1) \oplus (3, s_2 - s_1 + 1) \oplus (2, s_3 - s_2 - 1) \rangle_{n_3} \oplus \\ \langle 3, (4, s_1) \oplus (3, s_2 - s_1) \oplus (2, s_3 - s_2) \rangle_{n_4}$$

$$(2) \beta_i = d + s + i - 1, i = 1, 2, \dots, s$$

$$(3) \text{ 若 } \beta_i \in A, \text{ 則 } \alpha_i = k \text{ 且 } b_i = \beta_i;$$

$$\text{若 } \beta_i \notin A, \text{ 則 } c_{i, k+1} = \beta_i.$$

$$\text{由 } c_{i, k+1} \text{ 及 } c_{i, j+1} = \begin{cases} \frac{c_{i, j}}{4}, & c_{i, j} \leq 4s_1 - 4 \\ \frac{c_{i, j} - s_1}{3}, & 4s_1 \leq c_{i, j} \leq s_1 + 3s_2 - 3 \text{ 得 } b_i \text{ 及 } \alpha_i. \\ \frac{c_{i, j} - (s_1 + s_2)}{2}, & s_1 + 3s_2 \leq c_{i, j} \leq s_1 + s_2 + 2s_3 - 2 \\ c_{i, j} - (s_1 + s_2 + s_3), & c_{i, j} \geq s_1 + s_2 + 2s_3 \end{cases}$$

3. 討論同色及數量相同等特殊情形下的洗牌次數，得到：

(1) 同堆同色的洗牌次數等於每張互異的洗牌次數，即 $\text{cord}(\sigma_{n_1, n_2, n_3}) = \text{ord}(\sigma_{n_1, n_2, n_3})$ 。

(2) $\text{ord}(\sigma_{\underbrace{n, n, \dots, n}_{h \text{ 個}}}) \mid \varphi(hn-1)$.

(3) $\text{ord}(\sigma_{\underbrace{h^t, h^t, \dots, h^t}_{h \text{ 個}}}) = t+1$.

(4) 當 $d=0$ 或 1 時，令 $i+n+d-1 = b_i \times h^{\gamma_i}$ ($1 \leq i \leq n(h-1)$), 則：

$$\textcircled{1} b\sigma_{\underbrace{n+d, n, n}_{h \text{ 個}}} = \begin{pmatrix} 1 & 1+h & \dots & hn-h+1 & 2 & 2+h & \dots & hn-h+2 & \dots & hn-2h+2 \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n & b_{n+1} & b_{n+2} & \dots & b_{2n} & \dots & b_{n(h-1)} \end{pmatrix},$$

$$\textcircled{2} \alpha_i = 1 + \gamma_i.$$

(5) 根據 VB 程式所得數據，推測 $\text{ord}(\sigma_{\underbrace{h^t+1, h^t, h^t, \dots, h^t}_{h \text{ 個}}}) = h(t+1)$.

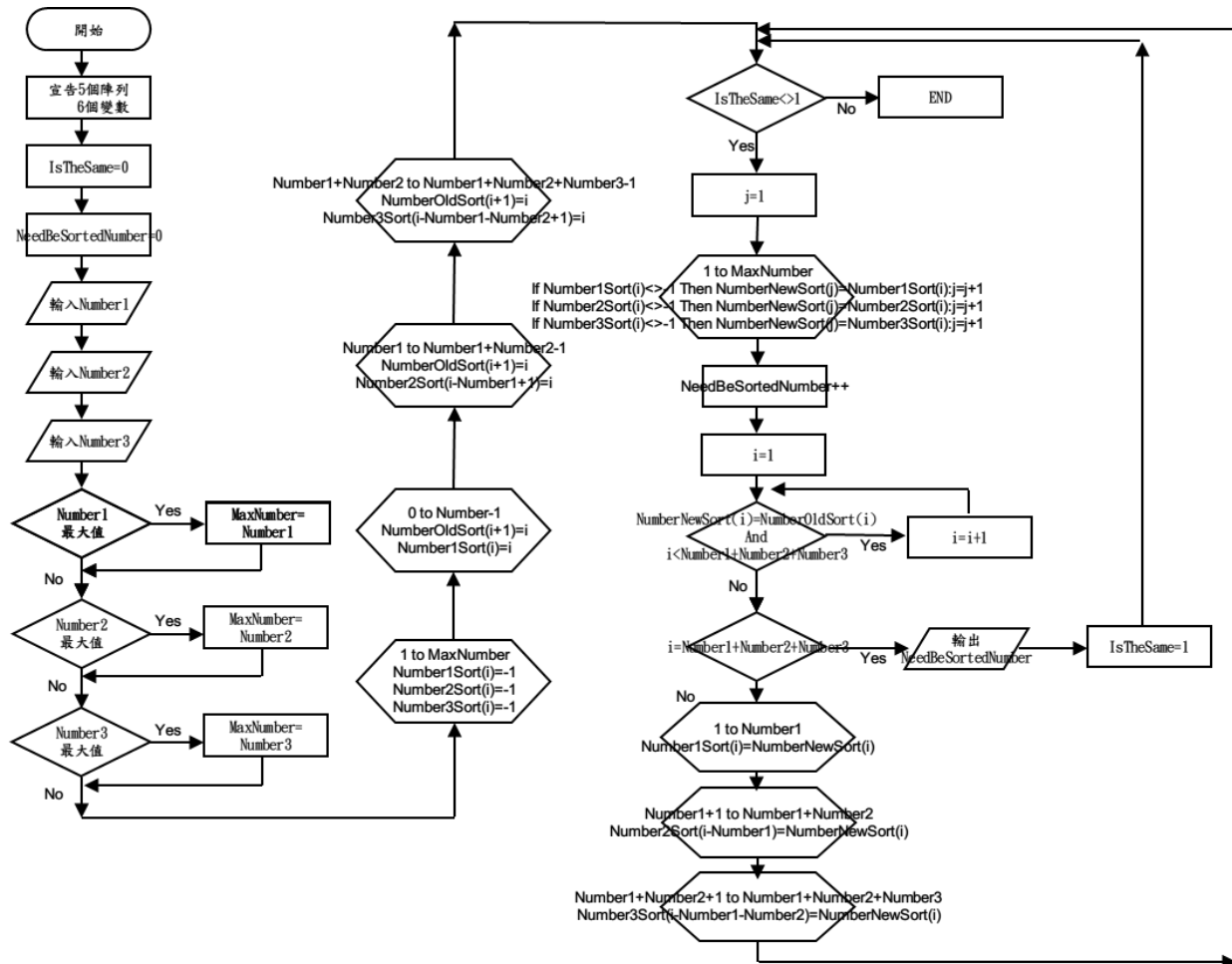
陸、未來展望：

我們延伸黃莉芸、邱文均所提供的兩堆洗牌的數學模式，將其擴展到三堆以上的情形，後續可運用此模式來探討不同的插牌方式的洗牌問題。

柒、參考資料：

1. 李華介，大學基礎代數。<http://math.ntnu.edu.tw/~li/algebra-html/algebra.pdf>。
2. 許志農等(2013)，普通高級中學數學第二冊。第 1 章數列與級數。臺北市：龍騰。
3. 林建維、陳奕均、吳彥澄(2014)，苗栗縣第 54 屆中小學科展國中組數學科作品。「牌」山倒海—洗「排」遊戲。
4. 林建維、陳奕均、吳彥澄、蘇柏奇、游淑媛(2014)，一個關於洗牌次數之基測題目的延伸探討。科學教育月刊。372，13-25。
5. 黃莉芸、邱文均(2015)，全國科展第 55 屆高中組數學科作品。洗排遊戲的數學模式。
6. 姜兆徽、吳承峰、林郁翔、廖奕瑋(2002)，全國科展第 42 屆高中組數學科作品。洗牌的數學。
7. P. Glaister (1994)，Card Shuffling for Beginners p5-7，Mathematical -Spectrum 27。

附錄一： $ord(\sigma_{n_1, n_2, n_3})$ 的程式碼及說明



Private Sub Command1_Click()

Dim NumberOldSort(3000) As Integer '一開始的陣列

Dim NumberNewSort(3000) As Integer '重新排過的陣列

Dim Number1Sort(1000), Number2Sort(1000), Number3Sort(1000) As Integer

Dim Number1, Number2, Number3 As Integer

Dim MaxNumber, IsTheSame As Integer

Dim NeedBeSortedNumber As Integer '排序的次數

'設原本舊陣列與新陣列是不相同的，0 是不相同；1 是相同

IsTheSame = 0

NeedBeSortedNumber = 0

Number1 = InputBox("請輸入第一個數", "檢查排序一樣時的個數")

Number2 = InputBox("請輸入第二個數", "檢查排序一樣時的個數")

Number3 = InputBox("請輸入第三個數", "檢查排序一樣時的個數")

'找出三數之最大數，並將三個陣列的初起化皆設為-1

If Number1 >= Number2 And Number1 >= Number3 Then MaxNumber = Number1

If Number2 >= Number3 And Number2 >= Number1 Then MaxNumber = Number2

If Number3 >= Number1 And Number3 >= Number2 Then MaxNumber = Number3

For i = 1 To MaxNumber

Number1Sort(i) = -1

Number2Sort(i) = -1

Number3Sort(i) = -1

Next

'從 0 循序填入陣列中，讓陣列內容呈現 0,1,2,3,4,.....

```
For i = 0 To Number1 - 1  
NumberOldSort(i + 1) = i  
Number1Sort(i + 1) = i
```

```
Next i
```

```
For i = Number1 To Number1 + Number2 - 1  
NumberOldSort(i + 1) = i  
Number2Sort(i - Number1 + 1) = i  
Next i
```

```
For i = Number1 + Number2 To Number1 + Number2 + Number3 - 1  
NumberOldSort(i + 1) = i  
Number3Sort(i + 1 - Number1 - Number2) = i  
Next i
```

'計算需要重新排序幾次，才能與原陣列一樣

```
While IsTheSame <> 1
```

'開始從各陣列挑一個數，重新排列

```
j = 1
```

```
For i = 1 To MaxNumber
```

```
    If Number1Sort(i) <> -1 Then NumberNewSort(j) = Number1Sort(i): j = j + 1
```

```
    If Number2Sort(i) <> -1 Then NumberNewSort(j) = Number2Sort(i): j = j + 1
```

```
    If Number3Sort(i) <> -1 Then NumberNewSort(j) = Number3Sort(i): j = j + 1
```

```
Next i
```

```
NeedBeSortedNumber = NeedBeSortedNumber + 1
```

'檢查重新排過的陣列與原陣列是否一樣

```
i = 1
```

```
While (NumberNewSort(i) = NumberOldSort(i)) And (i < Number1 + Number2 + Number3)
```

```
    i = i + 1
```

```
Wend
```

```
If i = Number1 + Number2 + Number3 Then
```

```
    MsgBox ("共排序了" & NeedBeSortedNumber & "次")
```

```
    IsTheSame = 1
```

```
Else
```

```
    For i = 1 To Number1
```

```
        Number1Sort(i) = NumberNewSort(i)
```

```
    Next i
```

```
    For i = Number1 + 1 To Number1 + Number2
```

```
        Number2Sort(i - Number1) = NumberNewSort(i)
```

```
    Next i
```

```
    For i = Number1 + Number2 + 1 To Number1 + Number2 + Number3
```

```
        Number3Sort(i - Number1 - Number2) = NumberNewSort(i)
```

```
    Next i
```

```
End If
```

```
Wend
```

```
End Sub
```

附錄二： $cord(\sigma_{n_1, n_2, n_3})$ 的程式碼

```

Dim NumberOldSort(3000), NumberNewSort(3000) As Integer
Dim Number1Sort(1000), Number2Sort(1000), Number3Sort(1000) As Integer
Dim Number1, Number2, Number3, MaxNumber, IsTheSame, NeedBeSortedNumber As Integer
IsTheSame = 0
NeedBeSortedNumber = 0
Number1 = InputBox("請輸入第一個數", "檢查排序一樣時的個數")
Number2 = InputBox("請輸入第二個數", "檢查排序一樣時的個數")
Number3 = InputBox("請輸入第三個數", "檢查排序一樣時的個數")
If Number1 >= Number2 And Number1 >= Number3 Then MaxNumber = Number1
If Number2 >= Number3 And Number2 >= Number1 Then MaxNumber = Number2
If Number3 >= Number1 And Number3 >= Number2 Then MaxNumber = Number3
For i = 1 To MaxNumber
    Number1Sort(i) = -1
    Number2Sort(i) = -1
    Number3Sort(i) = -1
Next
For i = 0 To Number1 - 1
    NumberOldSort(i + 1) = 0
    Number1Sort(i + 1) = 0
Next i
For i = Number1 To Number1 + Number2 - 1
    NumberOldSort(i + 1) = 1
    Number2Sort(i - Number1 + 1) = 1
Next i
For i = Number1 + Number2 To Number1 + Number2 + Number3 - 1
    NumberOldSort(i + 1) = 2
    Number3Sort(i + 1 - Number1 - Number2) = 2
Next i
While IsTheSame <> 1
    j = 1
    For i = 1 To MaxNumber
        If Number1Sort(i) <> -1 Then NumberNewSort(j) = Number1Sort(i): j = j + 1
        If Number2Sort(i) <> -1 Then NumberNewSort(j) = Number2Sort(i): j = j + 1
        If Number3Sort(i) <> -1 Then NumberNewSort(j) = Number3Sort(i): j = j + 1
    Next i
    NeedBeSortedNumber = NeedBeSortedNumber + 1
    i = 1
    While (NumberNewSort(i) = NumberOldSort(i)) And (i < Number1 + Number2 + Number3)
        i = i + 1
    Wend
    If i = Number1 + Number2 + Number3 Then
        MsgBox ("cord("&Number1&","& Number2 &","& Number3 &")="&NeedBeSortedNumber )
        IsTheSame = 1
    Else
        For i = 1 To Number1
            Number1Sort(i) = NumberNewSort(i)
        Next i
        For i = Number1 + 1 To Number1 + Number2
            Number2Sort(i - Number1) = NumberNewSort(i)
        Next i
        For i = Number1 + Number2 + 1 To Number1 + Number2 + Number3
            Number3Sort(i - Number1 - Number2) = NumberNewSort(i)
        Next i
    End If
Wend
End Sub

```

【評語】 050405

優點：

1. 本作品雖為延伸別人作品研究方法，但有詳細作文獻探討。
2. 研究方法使用函數對應及重排的概念，乃是已知文獻的作法。

建議：

1. 本文作品提及 Glaister 的研究結果，可考慮說明研究結果與 Glaister 的結果是否相符。
2. 利用 VB 程式提出推測，但未能以數學試驗證，且須交代 VB 程式是由研究者自行設計嗎？
3. 研究過程第五、六部份不完整，數學嚴謹驗證不夠完整。
4. 作者利用圈列數來探討”各堆牌數量不完全相等的多堆牌，向下洗牌法的最少洗牌次數”，並將各堆牌視為相同時，也做了討論，但使用圈列數的手法是否也能有效利用在不同洗牌方式的洗牌問題？
5. 研究主題有意義，表達尚佳，唯內文定義稍繁，且推理過程未交代哪些研究方法自創。

作品海報

動機

我們嘗試將黃莉芸、邱文均探討兩堆洗牌時所提出的圈數列、首末項重排等工具擴展到姜兆徽、吳承峰、林郁翔、廖奕璋等人所稱「向下洗牌」的多堆洗牌程序，發展出多堆洗牌可用的數學模式。

目的

- 1. 多堆向下洗牌時，最少需多少次洗牌才能回到原來的排序？
- 2. 若將各堆的牌視為相同，是否能得較少的最少洗牌次數？

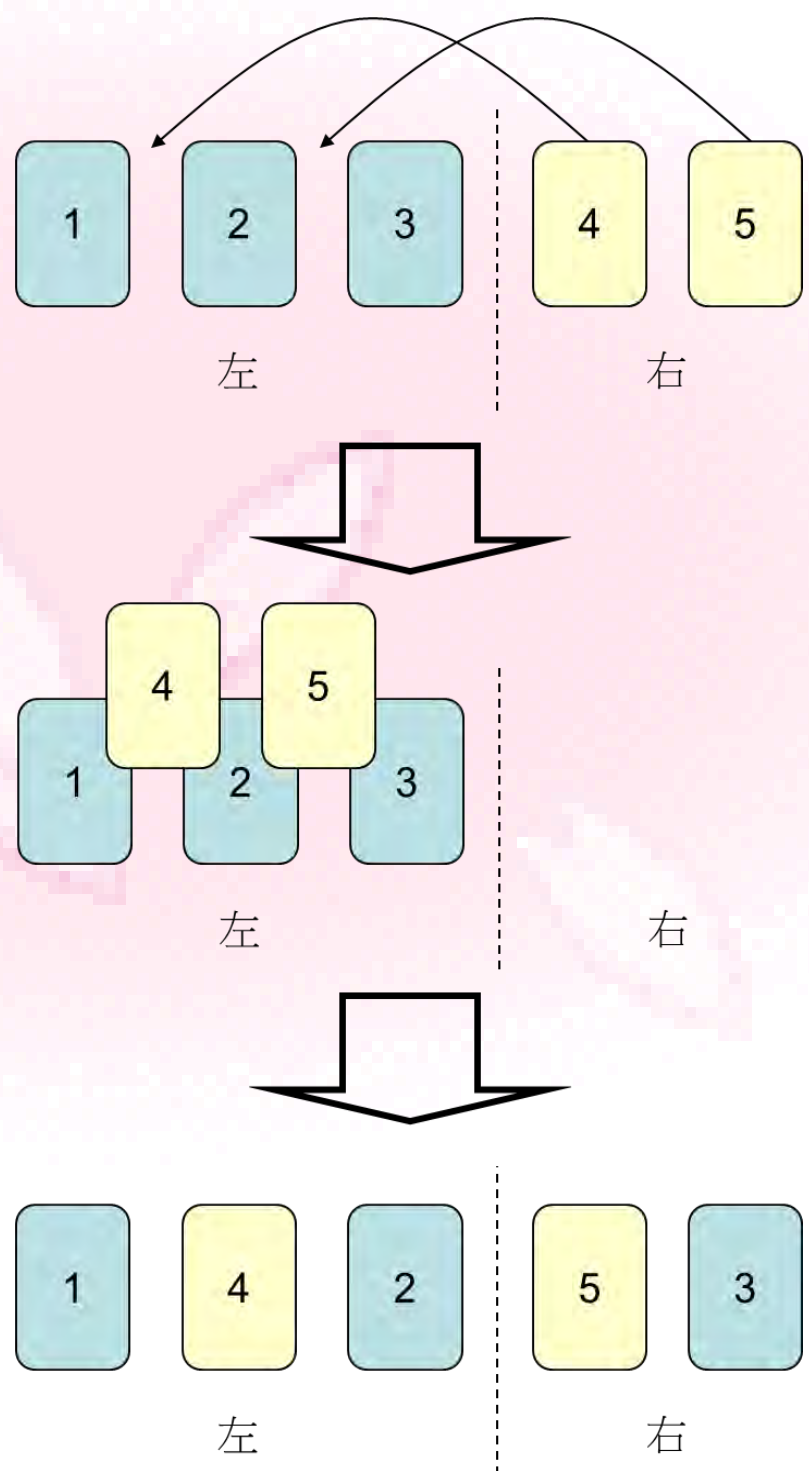
設備與器材

紙、筆、Visual Basic、Excel、Word。

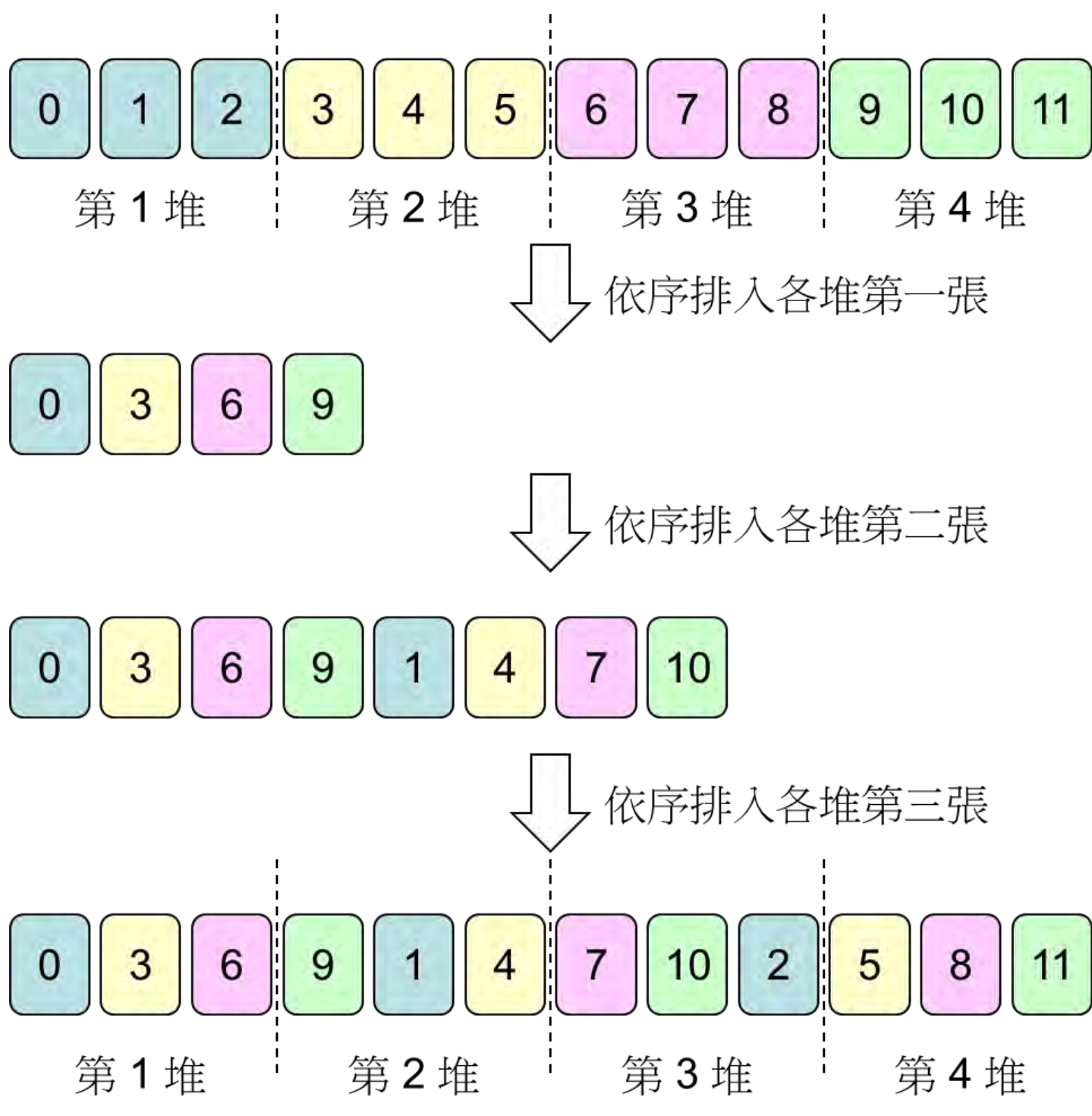
研究過程

第一部分：文獻探討、符號定義與初探

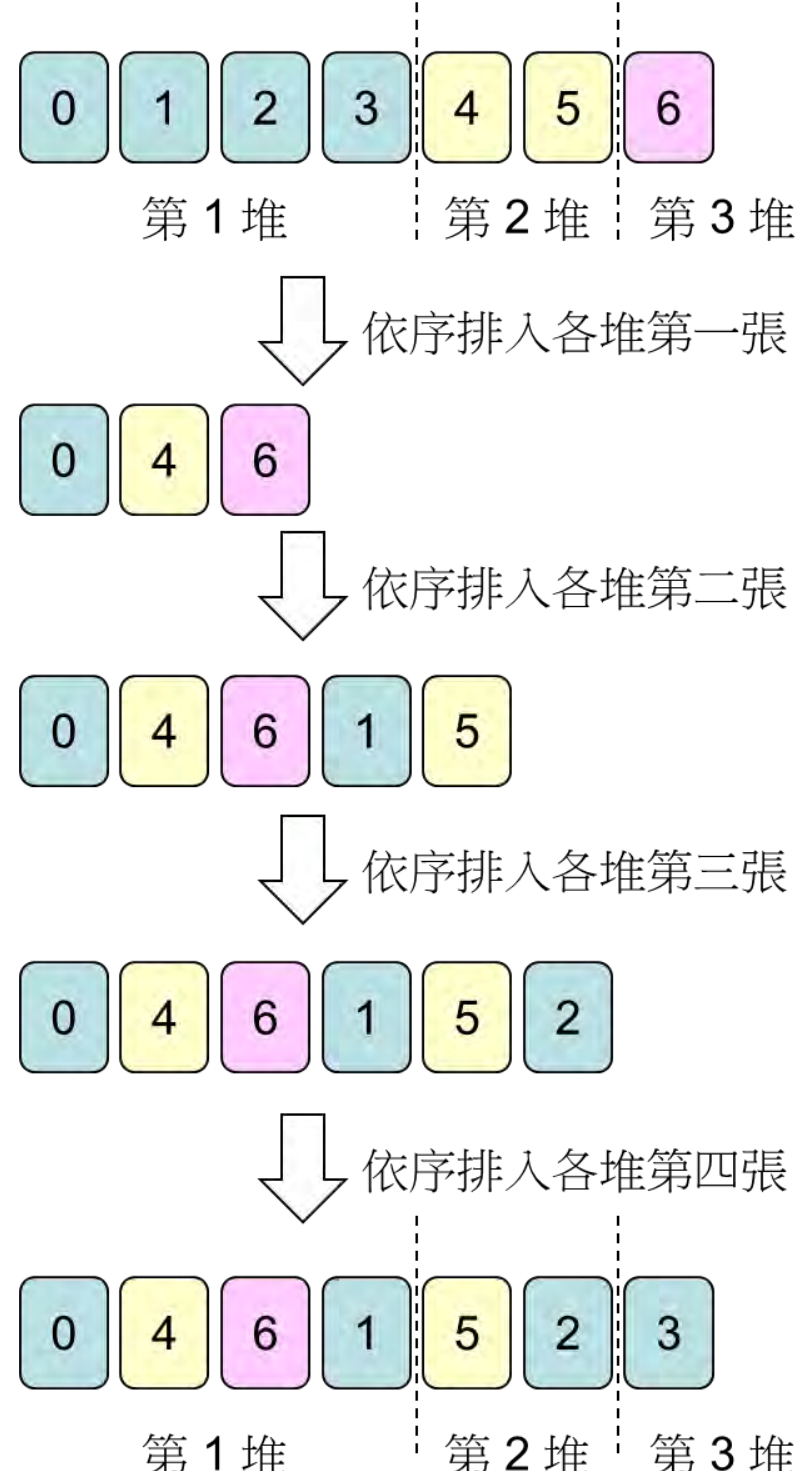
黃莉芸等人之兩堆洗牌



姜兆徽等人之向下洗牌



本研究洗牌方式



【文獻結論 2】 σ_{n_1, n_2} 的圈數列首末項重排及項數（黃莉芸、邱文均[5]，定理 7）

若 $n_1 = kn_2 + d$ ($d=1 \sim n_2 - 1$)，令 $\begin{cases} n_2 + d + i - 1 = c_i \times 2^{\alpha_i} \text{ (其中 } 1 \leq i < n_2 - d + 1 \text{)} \\ i + d - 1 = c_i \times 2^{\alpha_i} \text{ (其中 } n_2 - d + 1 \leq i \leq n_2 \text{)} \end{cases}$ ，則：

(1) $b\sigma_{n_1, n_2} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & \dots & 2i-1 & \dots & 2n_2-1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_i & \dots & c_{n_2} \end{pmatrix}$ (2) $\langle C_{n_2, 2i-1} \rangle$ 項數為 $\begin{cases} k + \alpha_i & (1 \leq i < n_2 - d + 1) \\ k + \alpha_i + 1 & (n_2 - d + 1 \leq i \leq n_2) \end{cases}$ 。

【定義 2】一次洗牌操作

已知牌組 $(0123, 45, 6) \xrightarrow{\text{洗牌}} (0461, 52, 3)$ ，

這樣的洗牌操作以重排 $\sigma_{4,2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 4 & 6 & 1 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ 表示。

【定義 6】集合 A 及數列 $\langle A \rangle$

集合 $A = \{c_{1,1}, c_{2,1}, \dots, c_{s,1}\}$ ；

數列 $\langle A \rangle = (c_{1,1}, c_{2,1}, \dots, c_{s,1})$

集合 $B = \{c_{i,k+1} \mid \alpha_i \geq k+1, i=1, 2, \dots, s\}$

【定義 3】最少洗牌次數

給定洗牌操作 σ ，讓排序變回原來順序的最少洗牌次數記為 $ord(\sigma)$ 。

有 h 堆牌，各堆依序有 $n_1, n_2, \dots, n_h$ 張，令 $s = \sum_{i=1}^h n_i$ ，定義圈數列如下：

【定義 4】 $\sigma_{n_1, n_2, \dots, n_h}$ 的 s 個圈數列

$\langle C_i \rangle = c_{i,1}, c_{i,2}, c_{i,3}, \dots, c_{i,\alpha_i}, i=1, 2, \dots, s$

圈數列 $\langle C_i \rangle$ 的第 1 項為 $c_{i,1}$ ，定義一對一函數 $\phi(i)$ 如下：

【定義 5】一對一函數 $\phi(i)$

$\phi(i) = c_{i,1}, i=1, 2, \dots, s$

【定義 8】 $b_{k+1}\sigma_{n_1, n_2, \dots, n_h}$ 及 $b\sigma_{n_1, n_2, \dots, n_h}$

$b_{k+1}\sigma_{n_1, n_2, \dots, n_h} = \begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{2,1} & c_{3,1} & \dots & c_{s,1} \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \dots & \beta_s \end{pmatrix}, \beta_i \in A \cup B$

$b\sigma_{n_1, n_2, \dots, n_h} = \begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{2,1} & c_{3,1} & \dots & c_{s,1} \\ b_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_s \end{pmatrix}$

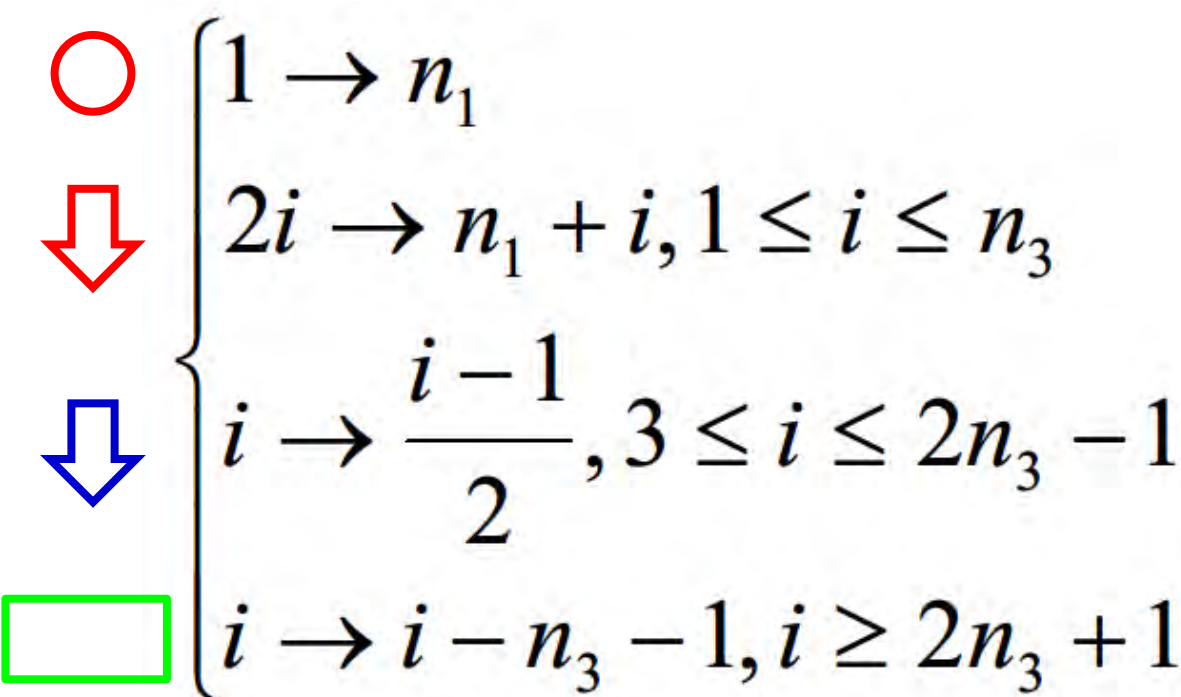
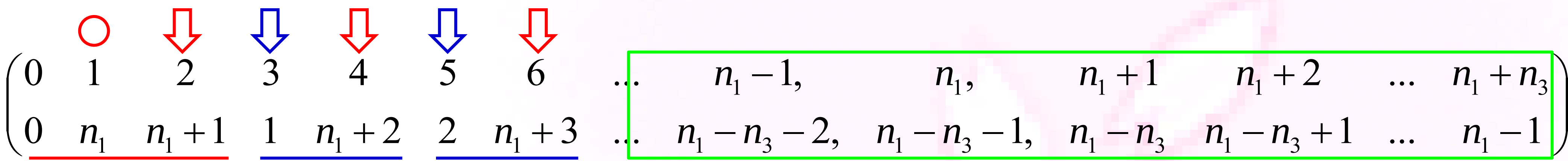
$= (b_{1,1}, b_{1,2}, \dots, b_{1,r_1})(b_{2,1}, b_{2,2}, \dots, b_{2,r_2}) \dots (b_{m,1}, b_{m,2}, \dots, b_{m,r_m}), b_i, b_{i,j} \in A$

【定理 1】 $ord(\sigma_{n_1, n_2, \dots, n_h})$

$ord(\sigma_{n_1, n_2, \dots, n_h}) = lcm(a_1, a_2, \dots, a_m)$ ，其中 $a_i = \sum_{k=1}^{r_i} \alpha_{j_k}, j_k = \phi^{-1}(b_{i,k})$

第二部分：三堆牌的最少洗牌次數

1. 三堆依序有 $n_1, 1, n_3$ 張



【定理 3】 $b_{k+1}\sigma_{n_1, 1, n_3}$ 、 $b\sigma_{n_1, 1, n_3}$

令 $n_1 = k(n_3 + 1) + d$ ， $k \geq 1$ 且 $0 \leq d < n_3 + 1$ ，則：

1. $b_{k+1}\sigma_{n_1, 1, n_3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 6 & \dots & 2n_3 \\ n_3 + d + 1 & n_3 + d + 2 & n_3 + d + 3 & n_3 + d + 4 & \dots & 2n_3 + d - 1 \end{pmatrix}$ 。

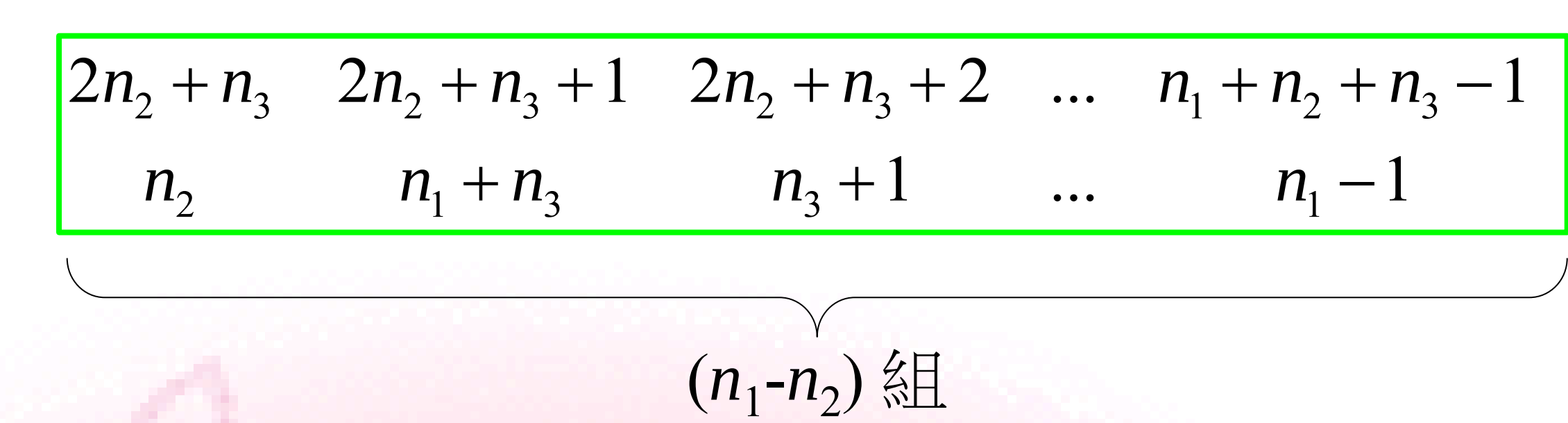
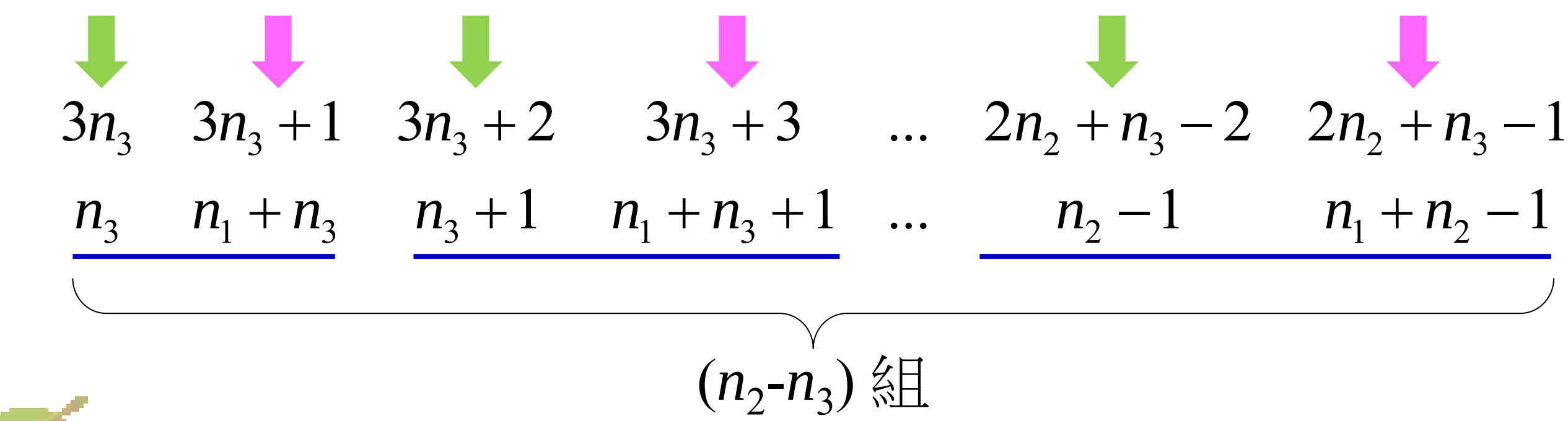
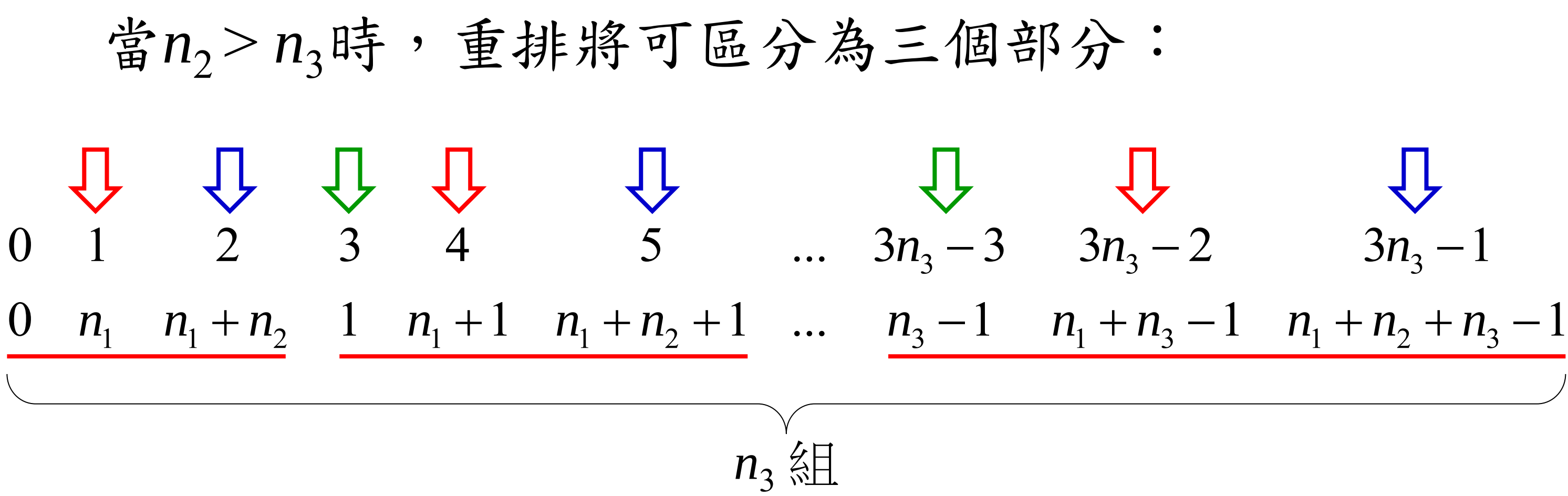
2. (1) 若 $\beta_i \in A$ ，則 $\alpha_i = k$ 且 $b_i = \beta_i$ ；

(2) 若 $\beta_i \notin A$ ，則 $c_{i,k+1} = \beta_i$ 。

由 $c_{i,k+1}$ 依遞迴式 $c_{i,j+1} = \begin{cases} \frac{c_{i,j}-1}{2}, \text{ 當 } c_{i,j} \leq 2n_3-1 \\ c_{i,j} - (n_3+1), \text{ 當 } c_{i,j} \geq 2n_3+1 \end{cases}$ 得 b_i 及 α_i 。

2. 三堆依序有 n_1, n_2, n_3 張

歸納成六種對應關係：



由 得：

$$c_{i,1} = \begin{cases} 3i-2, & 1 \leq i \leq n_3 \\ 3n_3+2i-1, & 1 \leq i \leq n_2-n_3 \\ 3i-1, & 1 \leq i \leq n_3 \\ i, & 1 \leq i \leq 3n_3-3 \\ i, & 3n_3 \leq i \leq 2n_2+n_3-2 \\ i, & 2n_2+n_3 \leq i \leq n_1+n_2+n_3-1 \end{cases}$$

由 得：

$$c_{i,1} = \begin{cases} 3i-2, & i = 1 \sim n_3 \\ 2i+n_3-1, & i = n_3+1 \sim n_2 \\ 3i-3n_2-1, & i = n_2+1 \sim n_2+n_3 \end{cases}$$

由 得：

$$\beta_i = n_2 + n_3 + d + i - 1, \quad i = 1, 2, \dots, n_2 + n_3$$

由 $c_{i,j+1} = \begin{cases} \frac{c_{i,j}}{3}, & c_{i,j} \leq 3n_3-3 \\ \frac{c_{i,j}-n_3}{2}, & 3n_3 \leq c_{i,j} \leq 2n_2+n_3-2 \\ c_{i,j}-(n_2+n_3), & c_{i,j} \geq 2n_2+n_3 \end{cases}$ 得 b_i

求 $ord(\sigma_{8k,6,2}) = ?$

先得 $b_{k+1}\sigma_{8k,6,2} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & 9 & 11 & 13 & 2 & 5 \\ 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \end{pmatrix}$

得 $\begin{cases} (b_2, b_4, b_6) = (9, 11, 13) \\ \alpha_2 = \alpha_4 = \alpha_6 = k \\ (c_{1,k+1}, c_{3,k+1}, c_{5,k+1}, c_{7,k+1}, c_{8,k+1}) = (8, 10, 12, 14, 15) \end{cases}$

再由遞迴關係 $c_{i,j+1} = \begin{cases} \frac{c_{i,j}}{3}, & c_{i,j} \leq 3 \\ \frac{c_{i,j}-2}{2}, & 6 \leq c_{i,j} \leq 12 \\ c_{i,j}-8, & c_{i,j} \geq 14 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} 8 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \\ 10 \rightarrow 4 \\ 12 \rightarrow 5 \\ 14 \rightarrow 6 \rightarrow 2 \\ 15 \rightarrow 7 \end{cases}$

即得 $\begin{cases} (b_1, b_3, b_5, b_7, b_8) = (1, 4, 5, 2, 7) \\ (\alpha_1, \alpha_3, \alpha_5, \alpha_7, \alpha_8) = (k+2, k+1, k+1, k+2, k+1) \end{cases}$

且得 $b\sigma_{8k,6,2} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & 9 & 11 & 13 & 2 & 5 \\ 1 & 9 & 4 & 11 & 5 & 13 & 2 & 7 \end{pmatrix} = (1)(4, 9, 11, 5, 7)(13)(2)$

故得 $ord(\sigma_{8k,6,2}) = lcm(\alpha_1, \alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_8 + \alpha_3, \alpha_6, \alpha_7) = lcm(k+2, 5k+3, k)$

【定義 7】數列的表示

1. 已知數列 $\begin{cases} \langle a \rangle = a_1, a_2, \dots, a_m \\ \langle b \rangle = b_1, b_2, \dots, b_n \end{cases}$ ，且 $s \leq m, t \leq n$ ，則：

(1) 數列 $a_1, a_2, \dots, a_s$ 記為 $\langle a \rangle_s$ ；(2) 數列 $a_1, a_2, \dots, a_s, b_1, b_2, \dots, b_t$ 記為 $\langle a \rangle_s \oplus \langle b \rangle_t$ 。

2. 首項 a ，公差 d ，項數 n 的等差數列記為 $\langle a, (d, n) \rangle$ 。

3. $\underbrace{a, a+d_1, \dots, a+(m-1)d_1}_{\text{公差 } d_1, m \text{ 項}}, \underbrace{a+(m-1)d_1+d_2, \dots, a+(m-1)d_1+nd_2}_{\text{公差 } d_2, n \text{ 項}}$ 記為 $\langle a, (d_1, m) \oplus (d_2, n) \rangle$ 。

4. 當 $n \leq 0$ 時，兩數列 $\langle a, (d_1, m) \oplus (d_2, n) \rangle, \langle a, (d_1, m) \rangle$ 相同

【定理 5】 σ_{n_1, n_2, n_3}

令 s_1 為 n_2, n_3 較小的值， s_2 為 n_2, n_3 較大的值，再令 $n_1 = k(n_2 + n_3) + d$ ， $k \geq 1$ 且 $0 \leq d < n_2 + n_3$ ：

1. $\langle A \rangle = \langle 1, (3, s_1+1) \oplus (2, s_2-s_1-1) \rangle_{n_2} \oplus \langle 2, (3, s_1) \oplus (2, s_2-s_1) \rangle_{n_3}$ 。

2. $\beta_i = n_2 + n_3 + d + i - 1, i = 1, 2, \dots, n_2 + n_3$ 。

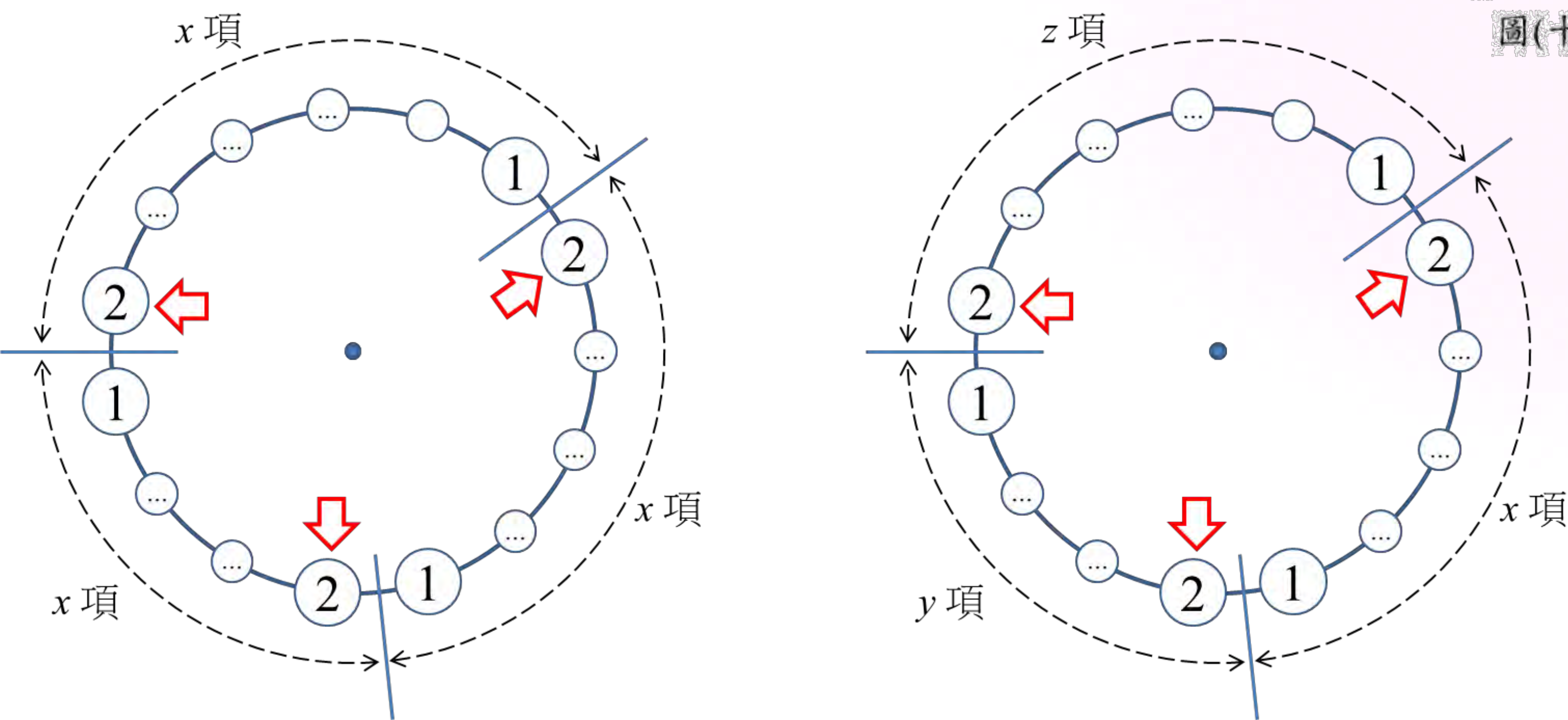
3. (1) 若 $\beta_i \in A$ ，則 $\alpha_i = k$ 且 $b_i = \beta_i$ ；

(2) 若 $\beta_i \notin A$ ，則 $c_{i,k+1} = \beta_i$ 。由 $c_{i,k+1}$ 及 $c_{i,j+1} = \begin{cases} \frac{c_{i,j}}{3}, & c_{i,j} \leq 3s_1-3 \\ \frac{c_{i,j}-s_1}{2}, & 3s_1 \leq c_{i,j} \leq s_1+2s_2-2 \\ c_{i,j}-(s_1+s_2), & c_{i,j} \geq s_1+2s_2 \end{cases}$ 得 b_i 及 α_i 。

第四部分：同堆同色之最少洗牌次數

基測題目中，牌分成兩種顏色，僅需將牌洗成兩邊顏色相同即可。

定義同堆同色的最少洗牌次數為 $cord(\sigma_{n_1, n_2, n_3})$

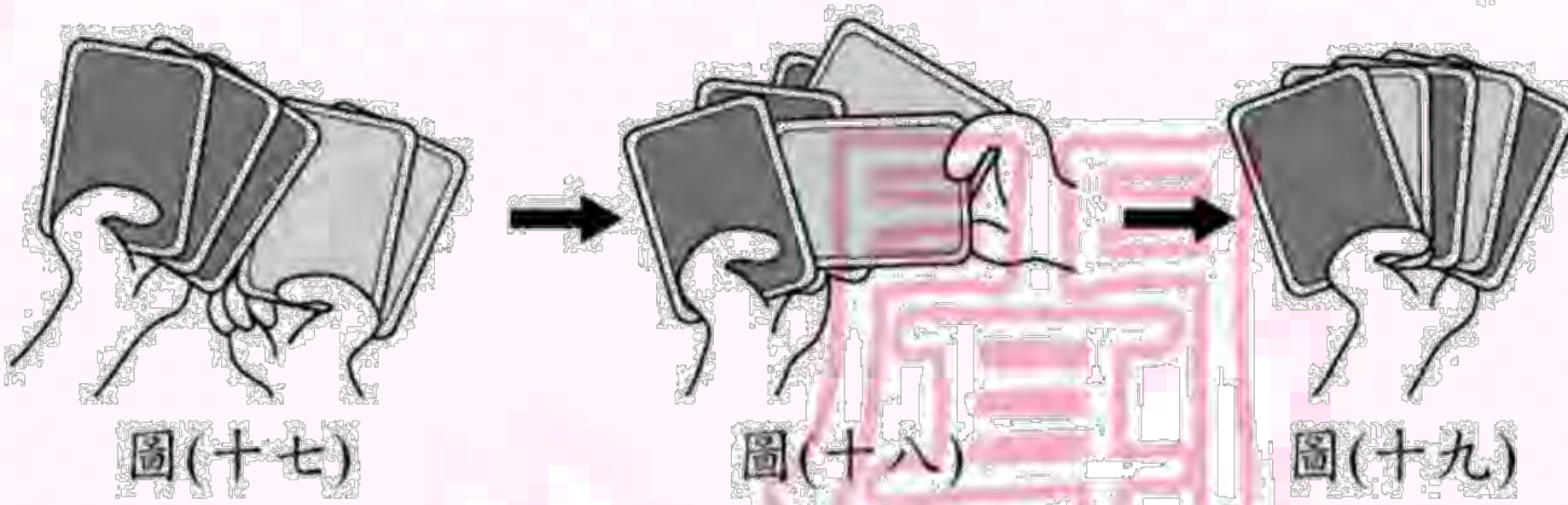


28. 圖(十六)為雅婷左手拿著3張深灰色與2張淺灰色的牌疊在一起的情形。以下是她每次洗牌的三個步驟：

步驟一：用右手拿出疊在最下面的2張牌，如圖(十七)。

步驟二：將右手拿的2張牌依序交錯插入左手拿的3張牌之間，如圖(十八)。

步驟三：用左手拿著顏色順序已改變的5張牌，如圖(十九)。



洗牌次數減少的關鍵：
「合併為圈之圈數列項數皆相同」

每張互異V.S.同堆同色

程式一(3堆，每張互異)

程式二(3堆，每堆同色)

根據VB 程式檢驗結果，

猜測：「不存在所含圈數列之項數皆相等的圈」

以反證法得：

『必不存在所含圈數列之項數皆相等的圈』

故得： $cord(\sigma_{n_1,n_2,n_3})=ord(\sigma_{n_1,n_2,n_3})$

$$b_{k+1}\sigma_{7k,3,4}=\begin{pmatrix} \overset{\text{第二堆}}{\overset{\text{小}}{\underset{\text{大}}{\begin{matrix} 1 & 4 & 7 \\ 7 & 8 & 9 \end{matrix}}} \overset{\text{第三堆}}{\overset{\text{小}}{\underset{\text{大}}{\begin{matrix} 2 & 5 & 8 & 10 \\ 10 & 11 & 12 & 13 \end{matrix}}}} \end{pmatrix}$$

第五部分：特殊情況的最少洗牌次數

1.每堆牌的數量相等

$$\sigma_{n,n,n}=\begin{pmatrix} \Downarrow \Downarrow \Downarrow \Downarrow \Downarrow \Downarrow \Downarrow & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots & n-1, & n & \dots & 2n-1, & 2n & \dots & 3n-1 \\ \Downarrow \Downarrow \Downarrow \Downarrow \Downarrow \Downarrow \Downarrow & 0 & n & 2n & 1 & n+1 & 2n+1 & 2 & \dots & \dots, & \dots & \dots & \dots, & \dots & \dots & 3n-1 \end{pmatrix}$$

$\Downarrow \begin{cases} i \rightarrow 3i, 1 \leq i \leq n-1 \\ i \rightarrow 3i-(3n-1), n \leq i \leq 2n-1 \\ i \rightarrow 3i-2(3n-1), 2n \leq i \leq 3n-1 \end{cases}$

若給定重排之中下列的*i*，*i*→*j*，
則*j*滿足 $j \equiv 3i(\text{mod } 3n-1)$

由同餘性質，得：「若*k*為滿足*h^k≡1(mod hn-1)*的最小整數，則 $ord(\sigma_{\underbrace{n,n,\dots,n}_{h\text{個}}})=k$ 。」

根據歐拉定理：「若gcd(*a*, *n*)=1，則 $a^{\varphi(n)} \equiv 1(\text{mod } n)$ 」 ($\varphi(n)$ 為歐拉函數)

即*k*= $\varphi(hn-1)$ 滿足*h^k≡1(mod hn-1)*，得：「 $ord(\sigma_{\underbrace{n,n,\dots,n}_{h\text{個}}})|\varphi(hn-1)$ 」

當每堆皆有*h^t*張牌時，滿足*h^k-1≡0(mod h^{t+1}-1)*的最小整數*k=t+1*，得： $ord(\sigma_{\underbrace{h^t,h^t,\dots,h^t}_{h\text{個}}})=t+1$ 。

2.每堆牌的數量不完全相等

$$\sigma_{k+1,k,k}=\begin{pmatrix} \Downarrow \Downarrow \Downarrow \Downarrow \Downarrow \Downarrow & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & k, & k+1 & \dots & 2k, & 2k+1 & \dots & 3k \\ \Downarrow \Downarrow \Downarrow \Downarrow \Downarrow \Downarrow & 0 & k+1 & 2k+1 & 1 & k+2 & 2k+2 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 3 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow \begin{cases} i \rightarrow 3i, 0 \leq i \leq k \\ i \rightarrow 3i-3k-2, k+1 \leq i \leq 2k \\ i \rightarrow 3i-6k-1, 2k+1 \leq i \leq 3k \end{cases}$$

對應無法以一個同餘式表示

【定理 10】 $\sigma_{\underbrace{n+d,n,n,\dots,n}_{h\text{個}}}$

當*d*=0 或 1 時，令*i+n+d-1=b_i×h^{γ_i}* ($1 \leq i \leq n(h-1)$), 則：

- $$1. \ b\sigma_{\underbrace{n+d,n,n,\dots,n}_{h\text{個}}}=\begin{pmatrix} 1 & 1+h & \dots & hn-h+1 & 2 & 2+h & \dots & hn-h+2 & \dots & hn-2h+2 \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n & b_{n+1} & b_{n+2} & \dots & b_{2n} & \dots & b_{n(h-1)} \end{pmatrix}.$$
- $$2. \ \alpha_i=1+\gamma_i.$$

例如： $ord(\sigma_{4,3,3,3,3})=?$

將*d*=1,*n*=3 代入*i+n+d-1=b_i×3^{γ_i}* 得*i+3=b_i×5^{γ_i}* ($1 \leq i \leq 12$),

$$\text{得} \begin{cases} (b_1,b_2,\dots,b_{12})=(4,1,,6,7,8,9,2,11,12,13,14,3) \\ (\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_{12})=(1,2,1111,2,1111,2) \end{cases}$$

$$b\sigma_{4,3,3,3,3}=\begin{pmatrix} 1 & 6 & 11 & 2 & 7 & 12 & 3 & 8 & 13 & 4 & 9 & 14 \\ 4 & 1 & 6 & 7 & 8 & 9 & 2 & 11 & 12 & 13 & 14 & 3 \end{pmatrix} \\ =(1,4,13,12,9,14,3,2,7,8,11,6)$$

故 $b\sigma_{4,3,3,3,3}$ 為一個圈，有 15 項，故得 $ord(b\sigma_{4,3,3,3,3})=15$ 。

三堆特例

(*n*+1,*n*,*n*) c:\temp\ SFile001.txt

(*n*,*n*+1,*n*) c:\temp\ SFile002.txt

(*n*+2,*n*,*n*) c:\temp\ SFile003.txt

(*n*+1,*n*+1,*n*) c:\temp\ SFile004.txt

(2*n*,*n*,*n*) c:\temp\ SFile005.txt

根據VB 程式檢驗結果，

猜測： $ord(\sigma_{\underbrace{h^t+1,h^t,h^t,\dots,h^t}_{h\text{個}}})=h(t+1)$

未來展望

我們延伸黃莉芸、邱文均所提供的兩堆洗牌的數學模式，將其擴展到三堆以上的情形，後續可運用此模式來探討不同的插牌方式的洗牌問題。