中華民國第 57 屆中小學科學展覽會
作品說明書

高級中等學校組　數學科

第一名

050404

道同互相為「蒙」
—蒙日定理共點共線共圓的問題探討與推廣

學校名稱：臺北市立麗山高級中學

作者：	指導老師：
高二 郭品辰 高二 盧冠綸	林永發

關鍵詞：射影幾何、共點共線、位似圖形

得獎感言

「科展比賽就像是一場戲劇，許多的發現是一個個演員，而我們是負責安排演員出場次序、鋪陳整部戲情節的最重要人物——導演。」當臺上的主持人念出「臺北市立麗山高級中學」的霎那，我們的戲又增添了一個美麗的結尾。

一部戲的成功並非容易，就如一件好的科展作品亦得花上長久的努力。大約去年六月，由於前一個研究題目——雙心多邊形內接 N 邊形——已漸山窮水盡，我們毅然決然的放棄已有結果，而在 Google 的圖片搜尋裡不斷尋找有趣的幾何定理，蒙日定理就這樣意外的被我們發現了，經過多次文獻查詢，我們很訝異這有趣的定理竟沒有多少推廣，於是，我們開啟了一場場「戲劇生活」。

剛接觸專題研究，我們在各種條件變換的技巧上並不成熟，只是不斷的在電腦上連線，發掘諸多共點共線性質，看似有趣，但在這些研究結果的背後隱含的關係，我們並沒有作完整的討論，主軸方面也很零散，可說是一場演員雖多，卻不知其所以然的戲，當然受到評審們的許多挑戰。這時，一位指導老師經過建議：「好的作品並非是要有非常多的結果，而是要有主軸，讓人一看就雙眼發亮、對這件作品感到新奇有趣。」

經過此次教訓，我們重新定位，除了把之前尚未推廣的兩個性質推廣到 N 個圓外，也立定一個能吸引目光的主軸——道同互相為「蒙」，恰好說明了我們作品推廣至最後的內容——無論個數、無論形狀，只要互相「位似」就會滿足蒙日定理。

在這一場場戲的背後，一定少不了演員的努力。在研究的過程中，常常遇到課業與專題兩頭燒的情況，時常晚上在學校實驗或者撰寫報告書時，心中想著還有多少書沒念、幾張考卷沒寫、段考還剩幾天…，回到家後，不是休息，也不是吃宵夜，而是坐在書桌前，打開檯燈，以最高效率準備著隔天的小考、要交的作業。我們就在報告書交件與段考搏鬥之間成長，學會怎麼真正有效率的分配時間、有效率的設定實驗方向，在兩者間取得最佳的平衡。

這份研究能夠有目前的成果，要感謝的人實在不可勝數，謝謝我們的指導老師，總是能在推廣上給我們很多新穎、特殊的觀點、大方向，常常陪我們討論到深夜；謝謝台大數學系的蔡聰明教授，教導我們如何撰寫邏輯清楚、讓人一看就懂的文句，讓讀者在閱讀報告書時能更輕鬆；也要謝謝所有聽過我們報告的不管是教授、老師還是同學們，提出的問題或者是建議，讓我們能夠在每次的科展更進步、有更漂亮的研究結果。

摘　要

正如本研究作品名稱「**道同**」**互相為**「**蒙**」，本研究以三圓蒙日定理「平面上三個圓，彼此的外公切線交點共線（蒙日線），彼此的內公切線交點與另一圓圓心的連線共點（蒙日點）」以及相關共點共線為基礎，推廣至n個圓、球、多邊形與多面體等，發現只要圖形互相「**位似**」，均可作出代表它們的「蒙日點」、「蒙日圓」，及一般位似圖形的「蒙日形」。同時，也透過其位置與各圓半徑、圓心座標的關係，進一步發現更多共點共線及共圓的性質，其中最令人驚豔的是**圓分堆的蒙日點共線性質**:「**平面上 n 個外離圓，任意 k 圓的蒙日點與另 n-k 圓的蒙日點，必與此 n 圓的蒙日點共線**」，推廣至空間中 n 球的蒙日點依然成立，又 n 圓（球）分堆亦具有**蒙日圓（球）重合性質**。

壹、研究動機

在探討「Monge’s theorem 的性質探討與推廣」的前置研究中，礙於有問題尚未完成與發表篇幅有限，本研究將延續並進一步探討未觸及的問題，其中包含蒙日點位置與各圓半徑、座標的幾何量關係，以及探討 n 圓中各蒙日點間的關係，並試圖定義「蒙日圓」的作法以將蒙日線與廣義蒙日點定理也推廣至 n 圓情形。

貳、研究目的

本研究目的試圖將三圓中的蒙日定理推廣至n個圓、球、多邊形及多面體等位似圖形的情形，並探討其中相關的性質，問題如下：

（一）探討平面上四圓、五圓以至n個圓中蒙日點的相關性質與推廣。

（二）探討平面上代表n個圓的蒙日圓，其存在性及相關性質。

（三）試圖將上述性質推廣至空間中的球體。

（四）試圖將上述性質推廣至多邊形與多面體等位似圖形。

參、研究設備及器材

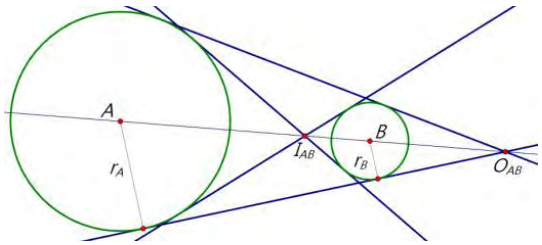
我們利用 GSP 與 Geogebra 等電腦動態幾何軟體進行幾何問題的實驗，透過觀察、猜測、驗證等，發掘研究結果並加以證明。

肆、研究過程與方法

一、文獻探討與前置研究

（一）位似圖形、Menelaus 定理、Ceva 定理與 Desargues 定理

若兩相似多邊形對應頂點連線共點，則稱其互為**位似圖形**，交點稱為**位似中心**，相似比又稱為**位似比**，可透過相似性質得知。若將圓視為無限多邊形，則兩圓必互為位似圖形，其內、外公切線交點分別稱為**位似內心**與**位似外心**，如圖 1。

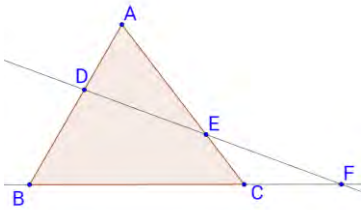


▲圖 1：兩圓 A、B 的位似內心I_{AB}與位似外心O_{AB}

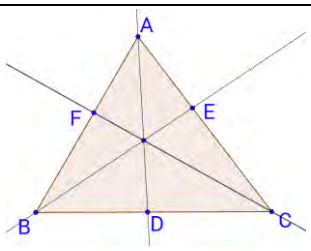
【位似定理】

設兩圓 A、B 的內公切線交點（位似內心）為I_{AB}，外公切線交點（位似外心）為O_{AB}，

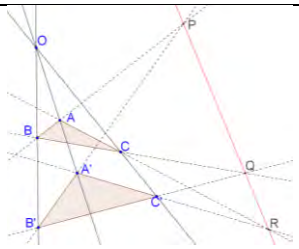
則兩圓的位似比為$\frac{\overline{AI_{AB}}}{\overline{BI_{AB}}}=\frac{r_A}{r_B}=\frac{\overline{AO_{AB}}}{\overline{BO_{AB}}}$，如圖 1。



▲圖 2：Menelaus 定理



▲圖 3：Ceva 定理



▲圖 4：Desargues 定理

【Menelaus 定理】

假設D、E、F分別在△ ABC的$\overleftrightarrow{AB}$、$\overleftrightarrow{CA}$、$\overleftrightarrow{BC}$邊上，若D、E、F三點共線，

則 $\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}}\times\frac{\overline{BF}}{\overline{FC}}\times\frac{\overline{CE}}{\overline{EA}}=1$，其逆敘述亦成立，如圖 2。

【Ceva 定理】

假設D、E、F 分別在△ ABC 的$\overleftrightarrow{BC}$、$\overleftrightarrow{CA}$、$\overleftrightarrow{AB}$邊上，若$\overleftrightarrow{AD}$、$\overleftrightarrow{BE}$、$\overleftrightarrow{CF}$共點，

則 $\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}\times\frac{\overline{CE}}{\overline{EA}}\times\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}=1$，其逆敘述亦成立，如圖 3。

【Desargues 定理】

在射影空間中的兩三角形△ ABC 與 △ A′B′C′，若兩三角形對應點連線共點於O，則兩三角形對應邊連線交點P、Q、R共線，其逆敘述亦成立，如圖 4。

（三）蒙日定理及其相關定理（參見文獻[2]、[3]）

【蒙日線定理】

假設平面上三個外離圓A、B、C，作任兩圓的外公切線交點（位似外心）O_{AB}、O_{AC}、O_{BC}，則此三點共線，此線稱為**三圓蒙日線**，並以L_{ABC}表示，如圖5。

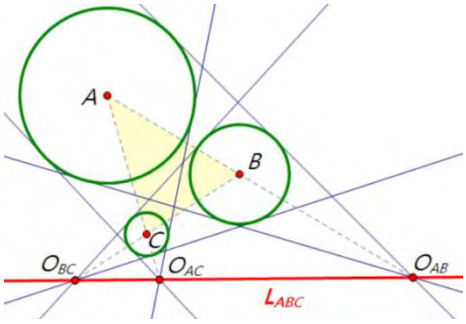
＜證明＞

1° 如右圖 5，△ ABC中，O_{AB}、O_{AC}、O_{BC} 分別在三邊延長線上，根據【位似定理】知

$$\frac{\overline{A\ O_{AB}}}{\overline{O_{AB}\ B}}\times\frac{\overline{B\ O_{BC}}}{\overline{O_{BC}\ C}}\times\frac{\overline{C\ O_{AC}}}{\overline{O_{AC}\ A}}=\frac{r_A}{r_B}\times\frac{r_B}{r_C}\times\frac{r_C}{r_A}=1，$$

2° 根據【Menelaus 逆定理】知

O_{AB}、O_{AC}、O_{BC}三點共線。 ■



▲圖 5：蒙日線定理

為方便後續討論，以下研究以相異大小的圓來進行討論，而當圓大小相同時，可視兩條平行的外公切線在無窮遠處相交一點，並可視其結果滿足定理敘述。因此在圓的大小相同時，本研究的所有性質仍能成立。

【蒙日點定理】

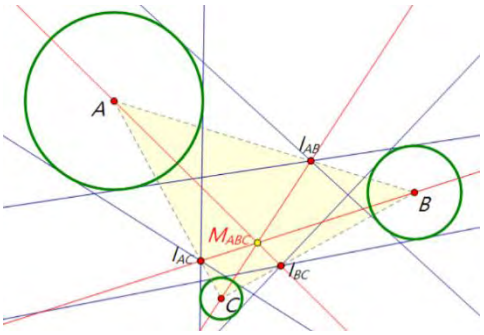
假設平面上三個外離圓 A、B、C，任 1 圓的圓心與另 2 圓的內公切線交點（位似內心）連線，即$\overleftrightarrow{AI_{BC}}$、$\overleftrightarrow{BI_{AC}}$、$\overleftrightarrow{CI_{AB}}$，則此三線共點，此點稱為**三圓蒙日點**，並以$M_{ABC}$表示，如圖 6。

＜證明＞

1° 如右圖 6，作△ ABC，I_{AB}、I_{AC}、I_{BC}分別在三邊延長線上，根據【位似定理】知

$$\frac{\overline{AI_{AB}}}{\overline{I_{AB}B}}\times\frac{\overline{BI_{BC}}}{\overline{I_{BC}C}}\times\frac{\overline{CI_{AC}}}{\overline{I_{AC}A}}=\frac{r_A}{r_B}\times\frac{r_B}{r_C}\times\frac{r_C}{r_A}=1，$$

2° 根據【Ceva 逆定理】知 $\overleftrightarrow{AI_{BC}}$、$\overleftrightarrow{BI_{AC}}$、$\overleftrightarrow{CI_{AB}}$ 三線共點。 ■



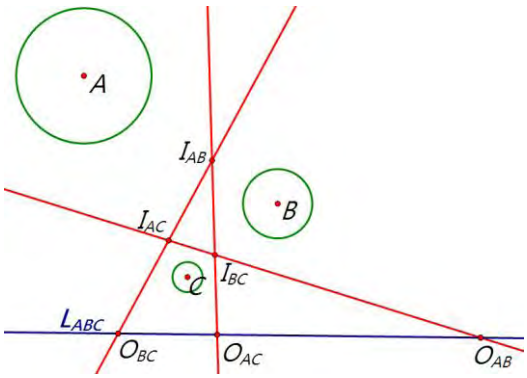
▲圖 6：蒙日點定理

除三圓蒙日點外，為方便後續討論，不妨定義兩圓的位似內心I_{AB}為「**二圓蒙日點**」，亦即$M_{AB}=I_{AB}$；而一個圓 A 時「**一圓蒙日點**」即為該圓圓心 A，亦即$M_A=A$。

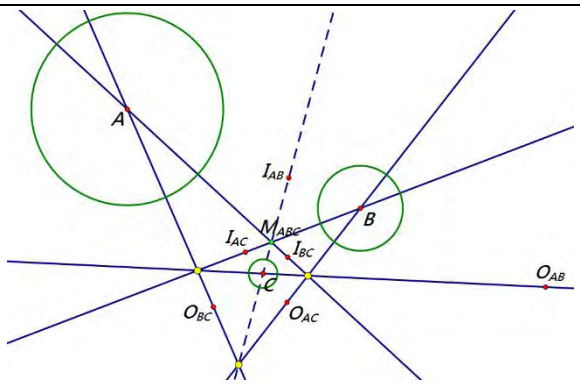
若上述兩定理經由條件變換後，可得到另外兩個定理：

【廣義蒙日線】

平面上三個外離圓 A、B、C，任 2 圓的位似外心（如O_{AB}），與此 2 圓分別與第三圓的位似內心（如I_{AC}、I_{BC}）三點共線，如圖 7。同理，$(O_{AC}$、I_{AB}、$I_{BC})$、$(O_{BC}$、I_{AB}、$I_{AC})$均分別三點共線，稱其為「**廣義蒙日線**」。



▲圖 7：廣義蒙日線定理



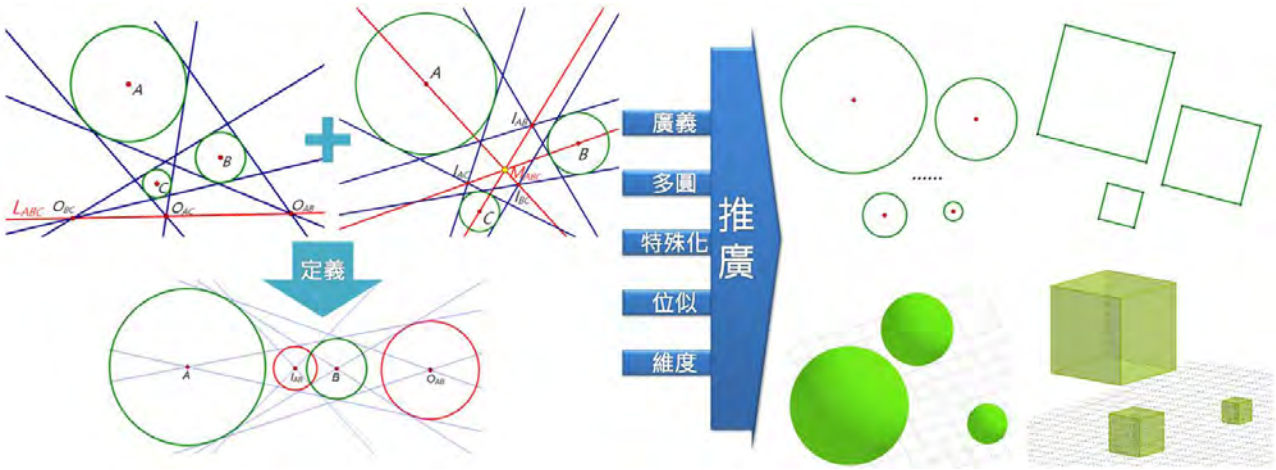
▲圖 8：廣義蒙日點定理

【廣義蒙日點】

平面上三個外離圓 A、B、C，任 1 圓圓心與另 2 圓的位似內心連線（如$\overleftrightarrow{AI_{BC}}$），及另 2 圓圓心分別與另 2 圓位似外心連線（如$\overleftrightarrow{BO_{AC}}$、$\overleftrightarrow{CO_{AB}}$），則此三線共點。如圖 8，同理（$\overleftrightarrow{BI_{AC}}$、$\overleftrightarrow{CO_{AB}}$、$\overleftrightarrow{AO_{BC}}$）、（$\overleftrightarrow{CI_{AB}}$、$\overleftrightarrow{AO_{BC}}$、$\overleftrightarrow{BO_{AC}}$）均三線共點，稱其為「**廣義蒙日點**」

上述兩性質皆可採用【蒙日線定理】及【蒙日點定理】的證明方式，透過作△ ABC並以【Menelaus 定理】或【Ceva 定理】證得，故不再贅述。

二、研究方法與架構



伍、研究結果與討論

一、蒙日點在n圓情形的性質與推廣

我們想先由四圓開始討論，再進而探討五圓、六圓至 n 圓的情形。首先發現廣義蒙日線定理及蒙日點定理皆可推廣至四圓中，如以下說明：

【定理 1-1】四圓蒙日點

假設A、B、C、D為平面上的四個外離圓，則有下列三個結果：

(1) 任2圓作位似外心（如選A、B作出O_{AB}），此2圓再分別與其餘2圓作蒙日點（如A與C、D作蒙日點M_{ACD}，B與C、D亦作M_{BCD}），則此三點共線，稱為**四圓廣義蒙日線**，如圖1-1。

(2) 任1圓的圓心與另3圓的蒙日點連線，即作出$\overleftrightarrow{AM_{BCD}}$、$\overleftrightarrow{BM_{ACD}}$、$\overleftrightarrow{CM_{ABD}}$、$\overleftrightarrow{DM_{ABC}}$，則此四線共點，稱其為**四圓蒙日點**，並以符號M_{ABCD}表示，如下頁圖1-2。

(3) 任2圓的位似內心與另2圓的位似內心連線（如$\overleftrightarrow{I_{AB}I_{CD}}$、$\overleftrightarrow{I_{AC}I_{BD}}$、$\overleftrightarrow{I_{AD}I_{BC}}$），則此三線必皆通過四圓蒙日點，如下頁圖1-3。

＜(1)證明＞如右圖1-1

1° 在 $\triangle ACI_{CD}$中，以I_{AC}、D、M_{ACD}為截線，

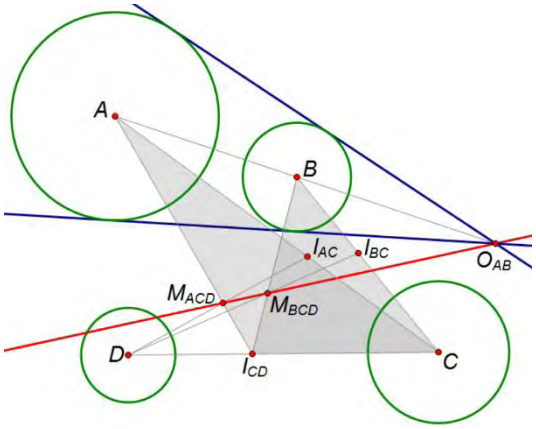
由【Menelaus 定理】知$\frac{\overline{AI_{AC}}}{\overline{I_{AC}C}}\times\frac{\overline{CD}}{\overline{DI_{CD}}}\times\frac{\overline{I_{CD}M_{ACD}}}{\overline{M_{ACD}A}}=1$，

並由【位似定理】知 $\frac{\overline{AI_{AC}}}{\overline{I_{AC}C}}=\frac{r_A}{r_C}$，

則上式可改寫為 $\frac{\overline{AM_{ACD}}}{\overline{M_{ACD}I_{CD}}}=\frac{r_A}{r_C}\times\frac{\overline{CD}}{\overline{DI_{CD}}}$；

同理，在$\triangle BCI_{CD}$中，以 I_{BC}、D、M_{BCD}為截線

可得 $\frac{\overline{I_{CD}M_{BCD}}}{\overline{M_{BCD}B}}=\frac{r_C}{r_B}\times\frac{\overline{DI_{CD}}}{\overline{CD}}$。



▲圖 1-1：四圓廣義蒙日線（圖中僅顯示其中一條）

2° 在 $\triangle ABI_{CD}$中，O_{AB}、M_{ACD}、M_{BCD}分別在三邊延長線上，由上述1°及【位似定理】

可得 $\frac{\overline{BO_{AB}}}{\overline{O_{AB}A}}\times\frac{\overline{AM_{ACD}}}{\overline{M_{ACD}I_{CD}}}\times\frac{\overline{I_{CD}M_{BCD}}}{\overline{M_{BCD}B}}=\frac{r_B}{r_A}\times\left(\frac{r_A}{r_C}\times\frac{\overline{CD}}{\overline{DI_{CD}}}\right)\times\left(\frac{r_C}{r_B}\times\frac{\overline{DI_{CD}}}{\overline{CD}}\right)=1$，

由【Menelaus 逆定理】可證得 O_{AB}、M_{ACD}、M_{BCD}三點共線。

同理，$(O_{AC}$、M_{ABD}、$M_{BCD})$、$(O_{AD}$、M_{ABC}、$M_{BCD})$、$(O_{BC}$、M_{ABD}、$M_{ACD})$、$(O_{BD}$、M_{ABC}、$M_{ACD})$、$(O_{CD}$、M_{ABC}、$M_{ABD})$ 亦分別三點共線。

＜(2)證明＞如右圖1-2

1°作△ ABC 與 △ $M_{BCD}M_{ACD}M_{ABD}$，

根據(1)，可知

$\overleftrightarrow{M_{BCD}M_{ACD}}$、$\overleftrightarrow{AB}$交於$O_{AB}$，

$\overleftrightarrow{M_{ACD}M_{ABD}}$、$\overleftrightarrow{BC}$交於$O_{BC}$，

$\overleftrightarrow{M_{BCD}M_{ABD}}$、$\overleftrightarrow{AC}$交於$O_{AC}$。

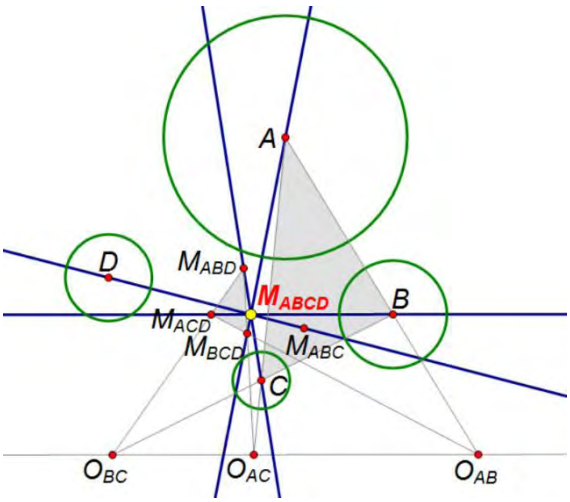
2°由【蒙日線定理】知O_{AB}、O_{AC}、O_{BC}

三點共線，並且由【Desargues定理】

可得 $\overleftrightarrow{AM_{BCD}}$、$\overleftrightarrow{BM_{ACD}}$、$\overleftrightarrow{CM_{ABD}}$ 三線共點，

同理，$\overleftrightarrow{AM_{BCD}}$、$\overleftrightarrow{BM_{ACD}}$、$\overleftrightarrow{DM_{ABC}}$ 三線共點，

故 $\overleftrightarrow{AM_{BCD}}$、$\overleftrightarrow{BM_{ACD}}$、$\overleftrightarrow{CM_{ABD}}$、$\overleftrightarrow{DM_{ABC}}$ 四線共交一點。



▲圖 1-2：1 圓圓心與另 3 圓的蒙日點連線必通過四圓蒙日點

＜(3)證明＞如右圖1-3

1°在 △ BDI_{AB}中，以I_{BD}、M_{ABD}、A為截線，

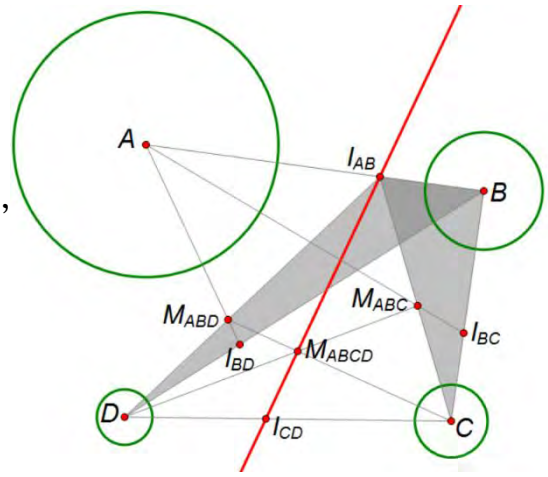
由【Menelaus 定理】知 $\frac{\overline{BI_{BD}}}{\overline{I_{BD}D}}\times\frac{\overline{DM_{ABD}}}{\overline{M_{ABD}I_{AB}}}\times\frac{\overline{I_{AB}A}}{\overline{AB}}=1$，

並由【位似定理】知 $\frac{\overline{BI_{BD}}}{\overline{I_{BD}D}}=\frac{r_B}{r_D}$

則上式可改寫為 $\frac{\overline{DM_{ABD}}}{\overline{M_{ABD}I_{AB}}}=\frac{r_D}{r_B}\times\frac{\overline{BA}}{\overline{AI_{AB}}}$。

同理，在△ BCI_{AB}中，以I_{BC}、M_{ABC}、A 為截線

可得 $\frac{\overline{I_{AB}M_{ABC}}}{\overline{M_{ABC}C}}=\frac{r_B}{r_C}\times\frac{\overline{I_{AB}A}}{\overline{AB}}$。



▲圖 1-3：四圓中兩圓、另兩圓的位似內心與四圓蒙日點共線（圖中僅顯示其中一條）

2°在 △ CDI_{AB}中，I_{CD}、M_{ABD}、M_{ABC} 分別在三邊延長線上，由上述1°及【位似定理】

可得 $\frac{\overline{DM_{ABD}}}{\overline{M_{ABD}I_{AB}}}\times\frac{\overline{I_{AB}M_{ABC}}}{\overline{M_{ABC}C}}\times\frac{\overline{CI_{CD}}}{\overline{I_{CD}D}}=\left(\frac{r_D}{r_B}\times\frac{\overline{BA}}{\overline{AI_{AB}}}\right)\times\left(\frac{r_B}{r_C}\times\frac{\overline{I_{AB}A}}{\overline{AB}}\right)\times\frac{r_C}{r_D}=1$，

由【Ceva 逆定理】知 $\overleftrightarrow{DM_{ABC}}$、$\overleftrightarrow{I_{AB}I_{CD}}$、$\overleftrightarrow{CM_{ABD}}$ 三線共點，

又根據(2) $\overleftrightarrow{DM_{ABC}}$、$\overleftrightarrow{CM_{ABD}}$ 交於M_{ABCD}，則可證得 $\overleftrightarrow{I_{AB}I_{CD}}$ 通過點M_{ABCD}。

同理，$\overleftrightarrow{I_{AC}I_{BD}}$、$\overleftrightarrow{I_{AD}I_{BC}}$ 亦皆通過M_{ABCD}。 ■

【定理 1-2】五圓蒙日點

假設A、B、C、D、E為平面上的五個外離圓，則有下列三個結果：

(1) 任2圓作位似外心（如A、B作出O_{AB}），此2圓再分別與另3圓作蒙日點（如A與C、D、E作蒙日點M_{ACDE}，B與C、D、E作M_{BCDE}），則此三點共線，稱為**五圓廣義蒙日線**，如圖1-4。

(2) 任1圓的圓心與另4圓的蒙日點連線，即作出$\overleftrightarrow{AM_{BCDE}}$、$\overleftrightarrow{BM_{ACDE}}$、$\overleftrightarrow{CM_{ABDE}}$、$\overleftrightarrow{DM_{ABCE}}$、$\overleftrightarrow{EM_{ABCD}}$，則此五線共點，稱其為**五圓蒙日點**，並以符號M_{ABCDE}表示，如圖1-5。

(3) 任2圓的位似內心與另3圓的蒙日點連線（如 $\overleftrightarrow{I_{AB}M_{CDE}}$、$\overleftrightarrow{I_{AC}M_{BDE}}$ 等共C_2^5=10條線），則此10條連線必皆通過五圓蒙日點，如圖1-6。

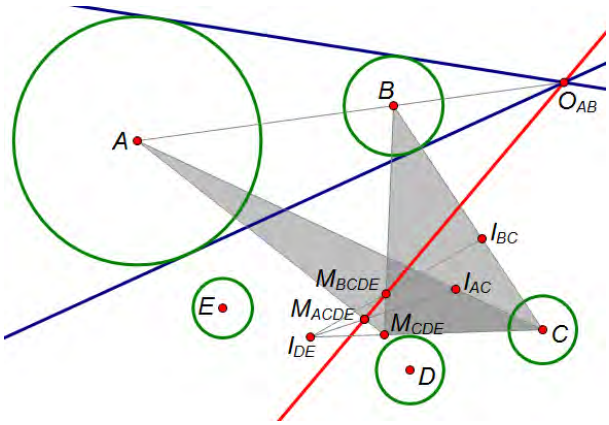
＜證明＞如右圖1-4

1° $\triangle ACM_{CDE}$中，I_{AC}、I_{DE}、M_{ACDE}分別在三邊延長線上，且依【定理 1-1】知此三點共線，由【Menelaus 定理】與【位似定理】知

$\frac{\overline{AM_{ACDE}}}{\overline{M_{ACDE}M_{CDE}}}=\frac{r_A}{r_C}\times\frac{\overline{CI_{DE}}}{\overline{I_{DE}M_{CDE}}}$，同理在

$\triangle BCM_{CDE}$中，以 I_{BC}、I_{DE}、M_{BCDE}為截線得

$\frac{\overline{M_{CDE}M_{BCDE}}}{\overline{M_{BCDE}B}}=\frac{r_C}{r_B}\times\frac{\overline{I_{DE}M_{CDE}}}{\overline{CI_{DE}}}$。



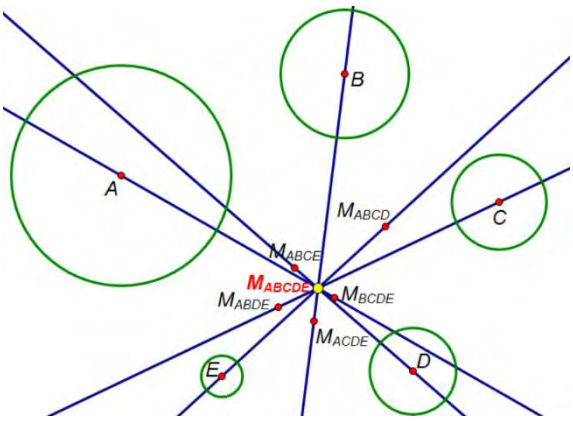
▲圖 1-4：五圓廣義蒙日線

2° 在 $\triangle ABM_{CDE}$中，O_{AB}、M_{BCDE}、M_{ACDE}分別在三邊延長線上，由上述1°及【位似定理】

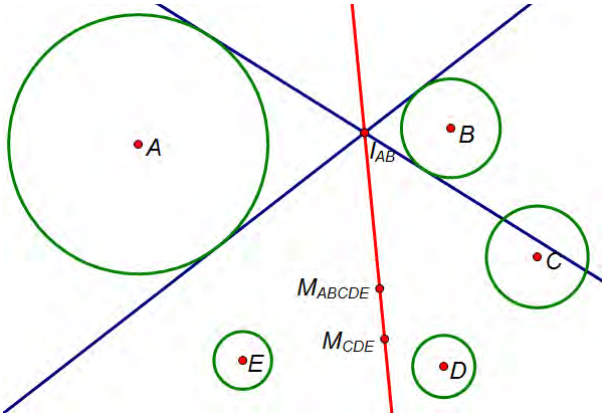
可得 $\frac{\overline{A\ M_{ACDE}}}{\overline{M_{ACDE}M_{CDE}}}\times\frac{\overline{M_{CDE}M_{BCDE}}}{\overline{M_{BCDE}B}}\times\frac{\overline{BO_{AB}}}{\overline{O_{AB}A}}=\left(\frac{r_A}{r_C}\times\frac{\overline{CI_{DE}}}{\overline{I_{DE}M_{CDE}}}\right)\times\left(\frac{r_C}{r_B}\times\frac{\overline{I_{DE}M_{CDE}}}{\overline{CI_{DE}}}\right)\times\frac{r_B}{r_A}=1$，

由【Menelaus 逆定理】可證得O_{AB}、M_{BCDE}、M_{ACDE}三點共線。

3° 同理可證得另九組亦分別三點共線。類比【定理 1-1】證明方式亦可證得(2)、(3)。 ■



▲圖 1-5：五圓蒙日點



▲圖 1-6：五圓中，兩圓與另三圓蒙日點關係

由四圓、五圓的結果，我們大膽提出下面 n 個圓情形的猜測，並透過數學歸納法得證。

【定理 1-3】n 圓蒙日點

假設A_1、A_2、⋯、A_{n-1}、A_n為平面上的n個外離圓（其中$n\epsilon N$，$n \geq 3$），則有下列三個結果：

(1) 任選2圓作位似外心（如作$O_{A_1A_2}$），此2圓再分別與另n-2圓作蒙日點（如作$M_{A_1A_3A_4\cdots A_{n-1}A_n}$、$M_{A_2A_3A_4\cdots A_{n-1}A_n}$），則此三點共線，稱為**n圓廣義蒙日線**。

(2) 任1圓的圓心與另n-1圓的蒙日點連線，即作出$\overleftrightarrow{A_1M_{A_2A_3\cdots A_{n-1}A_n}}$、$\overleftrightarrow{A_2M_{A_1A_3\cdots A_{n-1}A_n}}$等線，則此n線共點，稱其為**n圓蒙日點**，並以符號$M_{A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n}$表示。

(3) 任2圓的位似內心與另n-2圓的蒙日點連線（如 $\overleftrightarrow{I_{A_1A_2}M_{A_3A_4\cdots A_{n-1}A_n}}$ ），則此C_2^n條線必皆通過四圓蒙日點。

＜證明＞

1° 當$n = 3,4,5$時，根據【蒙日定理】、【定理1-1】、【定理1-2】，則敘述(1)(2)(3)成立。

2° 假設 $n = k$ 時成立（其中$k\epsilon N$，$k \geq 5$），即下列敘述(1)(2)(3)。

(1) 任意2圓的位似外心，必與此2圓分別和另k-2圓構成的兩個k-1圓蒙日點形成三點共線。

(2) 任意1圓的圓心與另k-1圓的蒙日點連線必共點，並以$M_{A_1A_2\cdots A_{k-1}A_k}$表示之。

(3) 任意2圓的位似內心與另k-2圓的蒙日點連線必通過k圓蒙日點。

3° 當n=k+1，代入敘述(1)時：

(1) $\triangle A_1A_2M_{A_2A_3\cdots A_k}$中，$M_{A_1A_2}$、$M_{A_3A_4\cdots A_k}$、$M_{A_1A_2\cdots A_k}$分別在三邊延長線上，

依上述2°（3）知此三點共線，由【Menelaus定理】與【位似定理】知

$$\frac{\overline{A_1M_{A_1A_2\cdots A_k}}}{\overline{M_{A_1A_2\cdots A_k}M_{A_2A_3A_4\cdots A_k}}} = \frac{r_{A_1}}{r_{A_2}} \times \frac{\overline{A_2M_{A_3A_4\cdots A_k}}}{\overline{M_{A_3A_4\cdots A_k}M_{A_2A_3A_4\cdots A_k}}} \quad ;$$

同理在$\triangle A_{k+1}A_2M_{A_2A_3A_4\cdots A_k}$中，以$M_{A_2A_{k+1}}$、$M_{A_3A_4\cdots A_k}$、$M_{A_2A_3\cdots A_{k+1}}$為截線得

$$\frac{\overline{M_{A_2A_3A_4\cdots A_k}M_{A_2A_3\cdots A_{k+1}}}}{\overline{M_{A_2A_3\cdots A_{k+1}}A_{k+1}}} = \frac{\overline{M_{A_3A_4\cdots A_k}M_{A_2A_3A_4\cdots A_k}}}{\overline{A_2M_{A_3A_4\cdots A_k}}} \times \frac{r_{A_2}}{r_{A_{k+1}}} 。$$

(2) $\triangle A_1A_{k+1}M_{A_2A_3A_4\cdots A_k}$中，$M_{A_1A_2\cdots A_k}$、$M_{A_2A_3\cdots A_{k+1}}$、$O_{A_1A_{k+1}}$分別在三邊延長線上，由上述3°(1)及【位似定理】可得

$$\frac{\overline{A_1M_{A_1A_2\cdots A_k}}}{\overline{M_{A_1A_2\cdots A_k}M_{A_2A_3A_4\cdots A_k}}} \times \frac{\overline{M_{A_2A_3A_4\cdots A_k}M_{A_2A_3\cdots A_{k+1}}}}{\overline{M_{A_2A_3\cdots A_{k+1}}A_{k+1}}} \times \frac{\overline{A_{k+1}O_{A_1A_{k+1}}}}{\overline{O_{A_1A_{k+1}}A_1}}$$

$$= \left(\frac{r_{A_1}}{r_{A_2}} \times \frac{\overline{A_2M_{A_3A_4\cdots A_k}}}{\overline{M_{A_3A_4\cdots A_k}M_{A_2A_3A_4\cdots A_k}}}\right) \times \left(\frac{\overline{M_{A_3A_4\cdots A_k}M_{A_2A_3A_4\cdots A_k}}}{\overline{A_2M_{A_3A_4\cdots A_k}}} \times \frac{r_{A_2}}{r_{A_{k+1}}}\right) \times \frac{r_{A_{k+1}}}{r_{A_1}} = 1，$$

(3) 由【Menelaus逆定理】可證得$M_{A_1A_2\cdots A_k}$、$M_{A_2A_3\cdots A_{k+1}}$、$O_{A_1A_{k+1}}$三點共線，同理可證得其它組三點共線。敘述成立。

4° 當 n=k+1，代入敘述(2)時：

(1) 作$\triangle A_1A_2A_3$、$\triangle M_{A_2A_3\cdots A_{k+1}}M_{A_1A_3A_4\cdots A_{k+1}}M_{A_1A_2A_4\cdots A_{k+1}}$，由定義及上述3°可知

$\overleftrightarrow{M_{A_2A_3A_4\cdots A_{k+1}}M_{A_1A_3A_4\cdots A_{k+1}}}$、$\overleftrightarrow{A_1A_2}$交於$O_{A_1A_2}$，

$\overleftrightarrow{M_{A_2A_3A_4\cdots A_{k+1}}M_{A_1A_2A_4\cdots A_{k+1}}}$、$\overleftrightarrow{A_1A_3}$交於$O_{A_1A_3}$，

$\overleftrightarrow{M_{A_1A_3A_4\cdots A_{k+1}}M_{A_1A_2A_4\cdots A_{k+1}}}$、$\overleftrightarrow{A_2A_3}$交於$O_{A_2A_3}$。

(2) 根據【蒙日線定理】知$O_{A_1A_2}$、$O_{A_1A_3}$、$O_{A_2A_3}$三點共線，並由【Desargues定理】可得$\overleftrightarrow{A_1M_{A_2A_3A_4\cdots A_{k+1}}}$、$\overleftrightarrow{A_2M_{A_1A_3A_4\cdots A_{k+1}}}$、$\overleftrightarrow{A_3M_{A_1A_2A_4\cdots A_{k+1}}}$三線交於一點。

(3) 同理可寫出其他式，結合3°可得此k+1線共交一點$M_{A_1A_2A_3\cdots A_kA_{k+1}}$。敘述成立。

5° 當n=k+1，代入敘述(3)中時：

(1) $\triangle A_1A_2M_{A_2A_3\cdots A_{k-1}A_k}$中，$M_{A_1A_2}$、$M_{A_3A_4\cdots A_{k-1}A_k}$、$M_{A_1A_2\cdots A_{k-1}A_k}$分別在三邊延長線上，且依4°知此三點共線，由【Menelaus定理】與【位似定理】知

$$\frac{\overline{M_{A_1A_2\cdots A_{k-1}A_kA_1}}}{\overline{M_{A_2A_3\cdots A_{k-1}A_k}M_{A_1A_2\cdots A_{k-1}A_k}}}=\frac{r_{A_1}}{r_{A_2}}\times\frac{\overline{A_2M_{A_3A_4\cdots A_{k-1}A_k}}}{\overline{M_{A_3A_4\cdots A_{k-1}A_k}M_{A_2A_3\cdots A_{k-1}A_k}}}。$$

同理在$\triangle A_{k+1}A_2M_{A_2A_3\cdots A_{k-1}A_k}$中，以$M_{A_{k+1}A_2}$、$M_{A_3A_4\cdots A_{k-1}A_k}$、$M_{A_2A_3\cdots A_kA_{k+1}}$為截線得 $\frac{\overline{M_{A_2A_3\cdots A_{k-1}A_k}M_{A_2A_3\cdots A_kA_{k+1}}}}{\overline{M_{A_2A_3\cdots A_kA_{k+1}}A_{k+1}}}=\frac{r_{A_2}}{r_{A_{k+1}}}\times\frac{\overline{M_{A_3A_4\cdots A_{k-1}A_k}M_{A_2A_3\cdots A_{k-1}A_k}}}{\overline{A_2M_{A_3A_4\cdots A_{k-1}A_k}}}$。

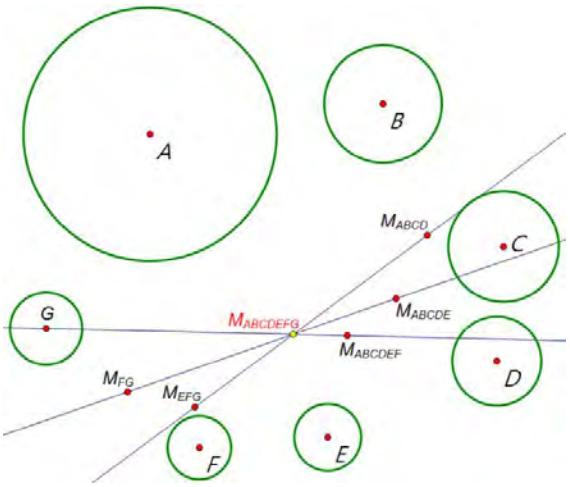
(2) $\triangle A_1A_{k+1}M_{A_2A_3\cdots A_{k-1}A_k}$中，$M_{A_2A_3\cdots A_kA_{k+1}}$、$M_{A_1A_2\cdots A_{k-1}A_k}$、$M_{A_1A_{k+1}}$分別在三邊延長線上，由上述5°（1）及【位似定理】可知

$$\frac{\overline{A_1M_{A_1A_2\cdots A_{k-1}A_k}}}{\overline{M_{A_1A_2\cdots A_{k-1}A_k}M_{A_2A_3\cdots A_{k-1}A_k}}}\times\frac{\overline{M_{A_2A_3\cdots A_{k-1}A_k}M_{A_2A_3\cdots A_kA_{k+1}}}}{\overline{M_{A_2A_3\cdots A_kA_{k+1}}A_{k+1}}}\times\frac{\overline{A_{k+1}M_{A_1A_{k+1}}}}{\overline{M_{A_1A_{k+1}}A_1}}=1。$$

(3) 由【Ceva逆定理】知 $\overleftrightarrow{A_1M_{A_2A_3\cdots A_kA_{k+1}}}$、$\overleftrightarrow{A_{k+1}M_{A_1A_2\cdots A_{k-1}A_k}}$、$\overleftrightarrow{M_{A_2A_3\cdots A_{k-1}A_k}M_{A_1A_{k+1}}}$三線共點，結合上述4°便可證明 $\overleftrightarrow{M_{A_1A_{k+1}}M_{A_2A_3\cdots A_{k-1}A_k}}$ 通過 $M_{A_1A_2A_3\cdots A_kA_{k+1}}$，同理可證得其他線亦皆通過 $M_{A_1A_2A_3\cdots A_kA_{k+1}}$。結果成立。

6° 由1°~5°，並由數學歸納法知，∀n∈n，n ≥ 3，【定理1-3】均成立。 ■

由 1、2 圓蒙日點的定義可將【定理 1-3】的(2)、(3)敘述視為「1 圓與另 n-1 圓蒙日點連線通過 n 圓蒙日點」、「2 圓與另 n-2 圓蒙日點連線通過 n 圓蒙日點」，而在七圓中我們也發現除上述兩性質外，3 圓與另 4 圓蒙日點連線亦通過 7 圓蒙日點。於是我們大膽猜測「**k 圓與另 n-k 圓蒙日點連線通過 n 圓蒙日點**」，發現其結果令人驚豔。

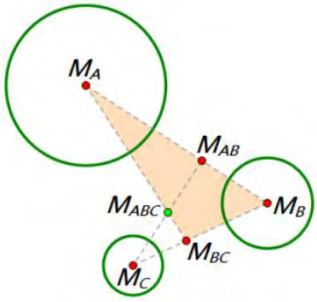


▲圖 1-7：7 圓分堆的蒙日點共線性質

我們一開始亦想藉由數學歸納法的方式證明，但由於此定理有兩個變數，過程會太過繁瑣，不覺失去定理美麗之處，因此我們轉而想先找出蒙日點與各圓位置、半徑大小的幾何量關係，期待透過代數方法為此定理做出簡潔的證明。

首先由 3 圓情形討論，如右圖 1-8，在$\triangle M_AM_BM_{BC}$中，M_{AB}、M_C、M_{ABC}分別在三邊延長線上且共線，由【Menelaus 定理】與【位似定理】得 $\frac{\overline{M_AM_{ABC}}}{\overline{M_{ABC}M_{BC}}}=\frac{\overline{M_AM_{AB}}}{\overline{M_{AB}M_B}}\times\frac{\overline{M_BM_C}}{\overline{M_CM_{BC}}}=\frac{r_A}{r_B}\times\frac{r_B+r_C}{r_C}=\frac{\frac{1}{r_B}+\frac{1}{r_C}}{\frac{1}{r_A}}$，

所以 $\mathbf{\overline{M_AM_{ABC}}:\overline{M_{ABC}M_{BC}}=\left(\frac{1}{r_B}+\frac{1}{r_C}\right):\left(\frac{1}{r_A}\right)}$。



▲圖 1-8：證明簡圖

在 $\overline{M_BM_C}$上，由分點公式知 $\overrightarrow{OM_{BC}}=\frac{r_C}{r_B+r_C}\cdot\overrightarrow{OM_B}+\frac{r_B}{r_B+r_C}\cdot\overrightarrow{OM_C}$，

而在$\overline{M_AM_{BC}}$上，由分點公式知 $\overrightarrow{OM_{ABC}}=\frac{\frac{1}{r_A}}{\frac{1}{r_A}+\frac{1}{r_B}+\frac{1}{r_C}}\cdot\overrightarrow{OM_A}+\frac{\frac{1}{r_B}+\frac{1}{r_C}}{\frac{1}{r_A}+\frac{1}{r_B}+\frac{1}{r_C}}\cdot\overrightarrow{OM_{BC}}$，

將第一式代入第二式化簡可得 $\mathbf{\left(\frac{1}{r_A}+\frac{1}{r_B}+\frac{1}{r_C}\right)\cdot\overrightarrow{OM_{ABC}}=\frac{1}{r_A}\cdot\overrightarrow{OM_A}+\frac{1}{r_B}\cdot\overrightarrow{OM_B}+\frac{1}{r_C}\cdot\overrightarrow{OM_C}}$。

從上述這兩個關係式，我們可以大膽推測在 n 個圓時的公式，並以數學歸納法成功證明。

【定理 1-4】蒙日點間的距離關係、蒙日點坐標與各圓半徑及坐標關係

若A_1、A_2、…、A_{n-1}、A_n為平面上 n 個外離圓，半徑分別為r_1、r_2、……、r_{n-1}、r_n，則

(1) $\overline{M_{A_1}M_{A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n}}:\overline{M_{A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n}M_{A_2A_3\cdots A_{n-1}A_n}}=\left(\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{r_i}\right):\left(\frac{1}{r_1}\right)$。

(2) $\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{r_i}\right)\cdot\overrightarrow{OM_{A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n}}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{r_i}\cdot\overrightarrow{OA_i}\right)$。

＜(1)證明＞

1° 當 n=2 時，由【位似定理】知$\overline{M_{A_1}M_{A_1A_2}}:\overline{M_{A_1A_2}M_{A_2}}=\frac{1}{r_2}:\frac{1}{r_1}=\left(\sum_{i=2}^{2}\frac{1}{r_i}\right):\left(\frac{1}{r_1}\right)$，

敘述成立。

2° 假設 n=k 時成立，即 $\overline{M_{A_1}M_{A_1A_2\cdots A_{k-1}A_k}}:\overline{M_{A_1A_2\cdots A_{k-1}A_k}M_{A_2A_3\cdots A_{k-1}A_k}}=\left(\sum_{i=2}^{k}\frac{1}{r_i}\right):\left(\frac{1}{r_1}\right)$，

則當 n=k+1 時，則在$\triangle M_{A_1}M_{A_2}M_{A_2A_3\cdots A_kA_{k+1}}$中，$M_{A_1A_2}$、$M_{A_1A_2\cdots A_kA_{k+1}}$、$M_{A_3A_4\cdots A_kA_{k+1}}$

分別在三邊延長線上且共線，由【Menelaus 定理】、【位似定理】與假設可得

$$\frac{\overline{M_{A_1}M_{A_1A_2\cdots A_kA_{k+1}}}}{\overline{M_{A_1A_2\cdots A_kA_{k+1}}M_{A_2A_3\cdots A_kA_{k+1}}}}=\frac{\overline{M_{A_1}M_{A_1A_2}}}{\overline{M_{A_1A_2}M_{A_2}}}\times\frac{\overline{M_{A_2}M_{A_3A_4\cdots A_kA_{k+1}}}}{\overline{M_{A_3A_4\cdots A_kA_{k+1}}M_{A_2A_3\cdots A_kA_{k+1}}}}=\frac{r_1}{r_2}\times\frac{\sum_{i=2}^{k+1}\frac{1}{r_i}}{\frac{1}{r_2}}=\frac{\sum_{i=2}^{k+1}\frac{1}{r_i}}{\frac{1}{r_1}},$$

故知 $\overline{M_{A_1}M_{A_1A_2\cdots A_kA_{k+1}}}:\overline{M_{A_1A_2\cdots A_kA_{k+1}}M_{A_2A_3\cdots A_kA_{k+1}}}=\left(\sum_{i=2}^{k+1}\frac{1}{r_i}\right):\left(\frac{1}{r_1}\right)$，敘述亦成立。

3° 根據上述，由數學歸納法知 $\forall n\in n$，$n\geq 2$，

$\overline{M_{A_1}M_{A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n}}:\overline{M_{A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n}M_{A_2A_3\cdots A_{n-1}A_n}}=\left(\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{r_i}\right):\left(\frac{1}{r_1}\right)$。

＜(2)證明＞

1° 當 n=2 時，由【定理 1-4】、向量分點公式知 $\overrightarrow{OM_{A_1A_2}}=\frac{r_2}{r_1+r_2}\overrightarrow{OA_1}+\frac{r_1}{r_1+r_2}\overrightarrow{OA_2}$，整理可得

$\overrightarrow{OM_{A_1A_2}}=\frac{\frac{\overrightarrow{OA_1}}{r_1}}{\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}}+\frac{\frac{\overrightarrow{OA_2}}{r_2}}{\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}}=\frac{\sum_{i=1}^{2}\frac{\overrightarrow{OA_1}}{r_i}}{\sum_{i=1}^{2}\frac{1}{r_i}}$，故知$\left(\sum_{i=1}^{2}\frac{1}{r_i}\right)\cdot\overrightarrow{OM_{A_1A_2}}=\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{1}{r_i}\cdot\overrightarrow{OA_1}\right)$，此敘述成立。

2° 假設當 n=k 時成立，即$\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{r_i}\right)\cdot\overrightarrow{OM_{A_1A_2\cdots A_{k-1}A_k}}=\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{1}{r_i}\cdot\overrightarrow{OA_1}\right)$，則當 n=k+1 時，

由【定理 1-4】敘述(1)、向量分點公式知$\overrightarrow{OM_{A_1A_2\cdots A_kA_{k+1}}}=\frac{\frac{\overrightarrow{OA_{k+1}}}{r_{k+1}}+\overrightarrow{OM_{A_1A_2\cdots A_{k-1}A_k}}\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{r_i}}{\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{r_i}+\frac{1}{r_{k+1}}}$

將假設帶入，整理便得$\left(\sum_{i=1}^{k+1}\frac{1}{r_i}\right)\cdot\overrightarrow{OM_{A_1A_2\cdots A_kA_{k+1}}}=\sum_{i=1}^{k+1}\left(\frac{1}{r_i}\cdot\overrightarrow{OA_1}\right)$，敘述亦成立。

3° 根據上述，由數學歸納法知$\forall n\in n$，$n\geq 2$，$\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{r_i}\right)\cdot\overrightarrow{OM_{A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n}}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{r_i}\cdot\overrightarrow{OA_1}\right)$。■

藉由此兩關係式，可以透過向量的方法給出「**圓分堆的蒙日點共線性質**」的簡單證明，並也可以同時將【定理 1-4】中的敘述(1)「1、n-1、n 圓蒙日點之間的距離關係」推廣至「k、n-k、n 圓蒙日點之間的距離關係」，統整及證明如下頁定理：

【定理 1-5】圓分堆的蒙日點共線性質與 k、n-k、n 圓蒙日點之間的距離關係

假設A_1、A_2、⋯、A_{n-1}、A_n為平面上的 n 個外離圓，半徑分別為r_1、r_2、……、r_{n-1}、r_n，若 k∈N 且1≤k≤n-1，則有下列兩個結果：

(1) $M_{A_1A_2\cdots A_k}$、$M_{A_{k+1}A_{k+2}\cdots A_n}$、$M_{A_1A_2\cdots A_n}$三點共線。

(2) $\overline{M_{A_1A_2\cdots A_k}M_{A_1A_2\cdots A_n}}:\overline{M_{A_1A_2\cdots A_n}M_{A_{k+1}A_{k+2}\cdots A_n}}=\left(\sum_{i=k+1}^{n}\frac{1}{r_i}\right):\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{r_i}\right)$。

＜證明＞

1° 由【定理 1-4】知$\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{r_i}\right)\cdot\overrightarrow{OM_{A_1A_2\cdots A_k}}=\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{1}{r_i}\cdot\overrightarrow{OA_i}\right)$，

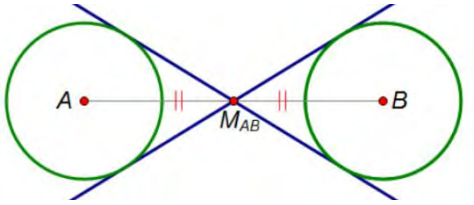
$\left(\sum_{i=k+1}^{n}\frac{1}{r_i}\right)\cdot\overrightarrow{OM_{A_{k+1}A_{k+2}\cdots A_n}}=\sum_{i=k+1}^{n}\left(\frac{1}{r_i}\cdot\overrightarrow{OA_i}\right)$， $\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{r_i}\right)\cdot\overrightarrow{OM_{A_1A_2\cdots A_n}}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{r_i}\cdot\overrightarrow{OA_i}\right)$。

2° 因$\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{r_i}\right)\cdot\overrightarrow{OM_{A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n}}=\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{r_i}\right)\cdot\overrightarrow{OM_{A_1A_2\cdots A_{k-1}A_k}}+\left(\sum_{i=k+1}^{n}\frac{1}{r_i}\right)\cdot\overrightarrow{OM_{A_{k+1}A_{k+2}\cdots A_{n-1}A_n}}$

由向量性質知$M_{A_1A_2\cdots A_{k-1}A_k}$、$M_{A_{k+1}A_{k+2}\cdots A_{n-1}A_n}$、$M_{A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n}$三點共線，且

$\overline{M_{A_1A_2\cdots A_{k-1}A_k}M_{A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n}}:\overline{M_{A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n}M_{A_{k+1}A_{k+2}\cdots A_{n-1}A_n}}=\left(\sum_{i=k+1}^{n}\frac{1}{r_i}\right):\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{r_i}\right)$。■

若各圓半徑大小皆相同，上述會發生什麼情況呢？由於半徑相同，兩圓蒙日點即為連心線段的中點，如右圖所示。而三圓情形的蒙日點便可視為兩圓連心線的中點連線到第三圓的圓心，即**三角形重心**的定義，



▲圖 1-9：二圓蒙日點為連心線段中點

推廣至 n 圓亦如此。於是平面上的 n 個點，若分別以各點為圓心作出半徑大小相等的圓時，透過【定理 1-5】的公式可以導出以下兩個關於重心的性質。

【定理 1-6】平面上 n 點的重心關係

平面上的 n 個點 A_1、A_2、⋯、A_{n-1}、A_n， 若 n、$k\in N$ ，且 $1\le k\le n-1$，則：

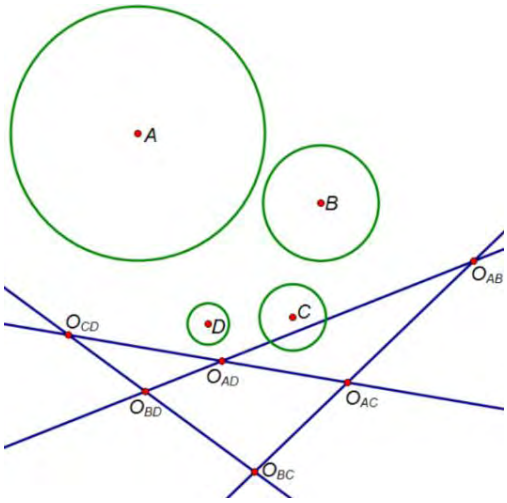
(1) $G_{A_1A_2\cdots A_{k-1}A_k}$、$G_{A_{k+1}A_{k+2}\cdots A_{n-1}A_n}$、$G_{A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n}$三點共線。

(2) $\overline{G_{A_1A_2\cdots A_{k-1}A_k}G_{A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n}}:\overline{G_{A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n}G_{A_{k+1}A_{k+2}\cdots A_{n-1}A_n}}=(n-k):k$。

這項結果不僅重新解釋了重心之間線段比的關係，同時也推廣了「**點分堆的重心共線性質**」，並且在權衡不同圖形的位置與大小方面，蒙日點似乎比重心更能用來表達這些關係，值得在後續作更深入的探討。

二、平面上蒙日圓的性質與推廣

既然有代表多圓的一點（蒙日點），那麼「**會不會有代表多圓的一條線（蒙日線）呢？對四圓的任意兩圓作位似外心是否都共線呢？**」如圖 2-1，很明顯四圓蒙日線並未成立。又想，那麼「**會不會也有代表多圓的一圓（蒙日圓）呢？**」透過實驗我們驚訝發現「**在平面上的兩個圓，過任一圓心作另一圓的切線，四條切線所形成的四邊形會有一內切圓，而其圓心洽為此兩圓的蒙日點**」，稱此內切圓為**蒙日圓**，如圖 2-2 所示。



▲圖 2-1：四圓任兩圓作位似外心，共有四條三圓蒙日線。

＜證明＞

1° 如右圖，由切線性質與全等性質不難得到

$\triangle ABD \cong \triangle ABE$，得$\overline{AD}+\overline{BE}=\overline{BD}+\overline{AE}$，

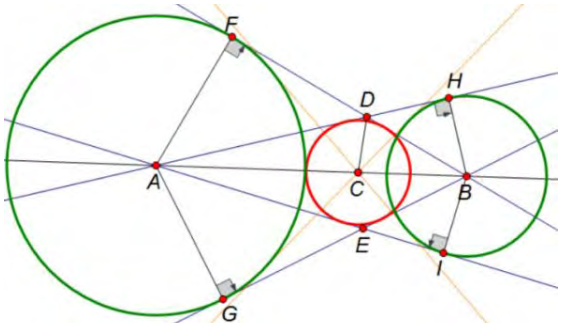
由圓外切四邊形性質知四邊形ADBE有內接圓。

2° $\angle ADF=\angle BDH$，由三角形 AA 相似性質知

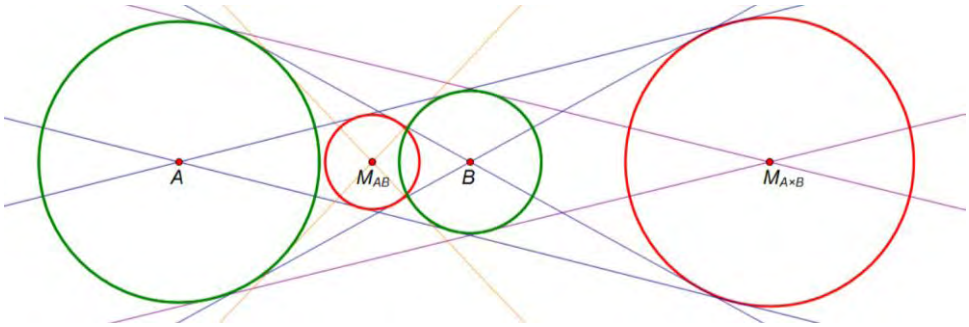
$\triangle ADF \sim \triangle BDH$，$\overline{AD}:\overline{BD}=\overline{AF}:\overline{BH}$，

3° C 為四邊形ADBE內心，知$\overline{CD}$為$\angle ADB$的角平分線，

由角平分線性質得 $\overline{AC}:\overline{CB}=\overline{AD}:\overline{BD}=\overline{AF}:\overline{BH}=r_A:r_B$，故可知$C=M_{AB}$。 ■



▲圖 2-2：圓 C 為圓 A、B 的蒙日圓。



▲圖 2-3：A、B 的蒙日圓$M_{A\cdot B}$與廣義蒙日圓$M_{A\times B}$。

如圖 2-3，我們發現在$\overline{AB}$線段外亦有一圓與四條切線相切，相對於蒙日圓我們則稱此圓為圓 A 與圓 C 的「**廣義蒙日圓**」，並分別以符號$M_{A\cdot B}$與$M_{A\times B}$表示。整理如下：

【定義 2-1】蒙日圓與廣義蒙日圓定義

假設 A、B 為平面上兩個外離圓，過 A 作 B 的切線，並過 B 作 A 的切線，則必存在與四線相切且圓心在連心線上的圓。

(1) 若圓心在$\overline{AB}$上，則稱其為 A、B 的**蒙日圓**，以$\mathbf{M_{A\cdot B}}$表示，簡記成$\mathbf{M_{AB}}$，其圓心即為I_{AB}。

(2) 若圓心在$\overline{AB}$外，則稱其為 A、B 的**廣義蒙日圓**，以$\mathbf{M_{A\times B}}$表示，其圓心即為O_{AB}。

(3) 平面上的三圓，若其中一圓為另兩圓的蒙日圓，則稱此三圓為一組**蒙日圓關係**。

例如 A、B、M_{AB} 或 A、B、$M_{A\times B}$ 均構成一組蒙日圓關係。

重申上述符號「$A\cdot B$」與「$A\times B$」在本研究中僅用以表示作蒙日圓或廣義蒙日圓的過程，而非指向量所用的內積與外積概念。另外，對 A、B 兩圓而言，在不同情境中，符號M_{AB}既可代表此兩圓的蒙日圓，也可代表其圓心，同時也代表此兩圓的蒙日點；同理，符號$M_{A\times B}$亦可代表此二圓的廣義蒙日圓與圓心，同時也是廣義蒙日點。由於對 A、B 兩圓操作無先後問題，因此$M_{AB}=M_{BA}$、$M_{A\times B}=M_{B\times A}$ ，顯然是成立的。

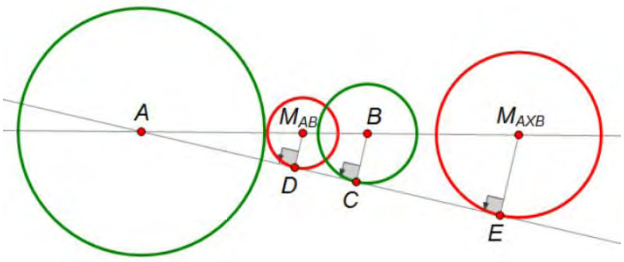
【定理 2-2】兩圓的蒙日圓與廣義蒙日圓的半徑與坐標

設r_A、r_B 分別表示圓 A、B 的半徑，則M_{AB}、$M_{A\times B}$與圓 A、B 的半徑和坐標的關係如下：

(1) 半徑關係：$\frac{1}{r_{M_{AB}}}=\frac{1}{r_A}+\frac{1}{r_B}$ 、 $\frac{1}{r_{M_{A\times B}}}=\left|\frac{1}{r_A}-\frac{1}{r_B}\right|$ 。

(2) 坐標關係：$\overrightarrow{OM_{AB}}=\frac{r_B\cdot\overrightarrow{OA}+r_A\cdot\overrightarrow{OB}}{r_A+r_B}=\frac{\frac{\overrightarrow{OA}}{r_A}+\frac{\overrightarrow{OB}}{r_B}}{\frac{1}{r_A}+\frac{1}{r_B}}$ 、 $\overrightarrow{OM_{A\times B}}=\frac{r_B\cdot\overrightarrow{OA}-r_A\cdot\overrightarrow{OB}}{r_A-r_B}=\frac{\frac{\overrightarrow{OA}}{r_A}-\frac{\overrightarrow{OB}}{r_B}}{\frac{1}{r_A}-\frac{1}{r_B}}$ 。

＜證明＞如右圖 2-4



▲圖 2-4：證明簡圖

1° 由$\triangle ADM_{AB}\sim\triangle ACB$，可知

$\overline{AM_{AB}}:\overline{DM_{AB}}=\overline{AB}:\overline{BC}$，故得

$$\frac{1}{r_{M_{AB}}}=\frac{1}{\overline{DM_{AB}}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{AM_{AB}}\times\overline{BC}}=\frac{\overline{AM_{AB}}+\overline{M_{AB}B}}{\overline{AM_{AB}}\times\overline{BC}}$$

$$=\frac{1}{\overline{BC}}+\frac{\overline{M_{AB}B}}{\overline{AM_{AB}}\times\overline{BC}}=\frac{1}{r_A}+\frac{1}{r_B}\ 。$$

2° 由$\triangle ACB\sim\triangle AEM_{A\times B}$，可知$\overline{AM_{A\times B}}:\overline{EM_{A\times B}}=\overline{AB}:\overline{BC}$，故得

$$\frac{1}{r_{M_{A\times B}}}=\frac{1}{\overline{EM_{A\times B}}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{AM_{A\times B}}\times\overline{BC}}=\frac{|\overline{AM_{A\times B}}-\overline{M_{A\times B}B}|}{\overline{AM_{A\times B}}\times\overline{BC}}=\left|\frac{1}{\overline{BC}}-\frac{\overline{M_{A\times B}B}}{\overline{AM_{A\times B}}\times\overline{BC}}\right|=\left|\frac{1}{r_B}-\frac{1}{r_A}\right|=\left|\frac{1}{r_A}-\frac{1}{r_B}\right|。$$

3° 坐標關係由分點公式即可證明，故不再贅述。 ■

我們從兩圓的位似內（外）心的想法，推廣至兩圓的（廣義）蒙日圓，則先前對 n 圓所探討的性質，將蒙日圓的作法帶入，會不會有什麼意想不到的結果呢？我們先回到三圓情形，如下：

【定理 2-3】三圓蒙日圓定理

假設 A、B、C 為平面上三個外離圓，任 2 圓作蒙日圓，再與第三圓作蒙日圓，即$M_{(AB)C}$、$M_{(BC)A}$、$M_{(AC)B}$，則此三圓會重合，稱其為此**三圓蒙日圓**，並以符號M_{ABC}表示，即$M_{(AB)C}=M_{(BC)A}=M_{(AC)B}=M_{ABC}$，如圖 2-5。

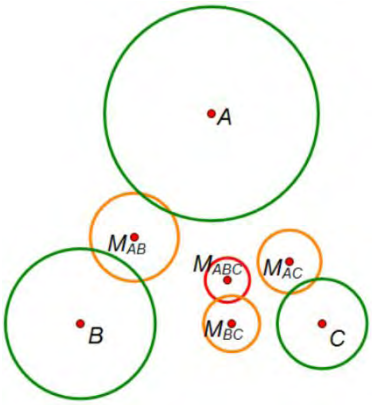
＜證明＞由半徑關係與坐標關係，可推得

1° $\frac{1}{r_{M_{(AB)C}}}=\frac{1}{r_{AB}}+\frac{1}{r_C}=\frac{1}{r_A}+\frac{1}{r_B}+\frac{1}{r_C}$。

同理，便可得知 $r_{M_{(AB)C}}=r_{M_{(BC)A}}=r_{M_{(AC)B}}$。

2° $\overrightarrow{OM_{(AB)C}}=\frac{r_{M_{AB}}\cdot\overrightarrow{OC}+r_C\cdot\overrightarrow{OM_{AB}}}{r_C+r_{M_{AB}}}=\frac{\frac{r_A\cdot r_B}{r_A+r_B}\overrightarrow{OC}+r_C\cdot\frac{r_B\cdot\overrightarrow{OA}+r_A\cdot\overrightarrow{OB}}{r_A+r_B}}{r_C+\frac{r_A\cdot r_B}{r_A+r_B}}=\frac{\frac{\overrightarrow{OA}}{r_A}+\frac{\overrightarrow{OB}}{r_B}+\frac{\overrightarrow{OC}}{r_C}}{\frac{1}{r_A}+\frac{1}{r_B}+\frac{1}{r_C}}$

，同理，可得 $\overrightarrow{OM_{(AB)C}}=\overrightarrow{OM_{(BC)A}}=\overrightarrow{OM_{(AC)B}}$。



▲圖 2-5：三圓蒙日圓M_{ABC}

3° 由上述知$M_{(AB)C}=M_{(BC)A}=M_{(AC)B}$，以符號$M_{ABC}$表示之。 ■

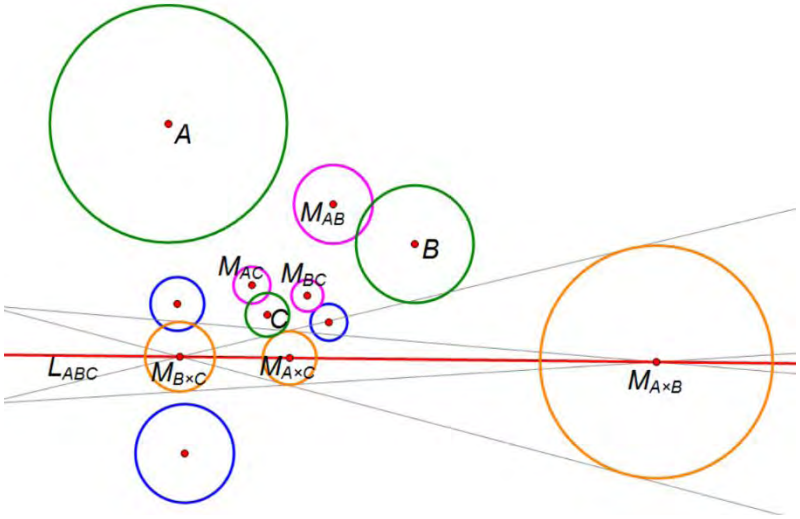
【定理 2-4】蒙日線定理、廣義蒙日線定理與蒙日圓關係

假設A、B、C為平面上三個外離圓，則有以下兩個結果，如下頁圖2-6：

(1)作任兩圓的廣義蒙日圓，即$M_{A\times B}$、$M_{B\times C}$、$M_{A\times C}$，此三圓為一組蒙日圓關係，且其連心線即為三圓A、B、C的蒙日線。

(2)作任兩圓的廣義蒙日圓，與此兩圓分別再和另一圓作蒙日圓，如$(M_{A\times B}、M_{AC}、M_{BC})$、$(M_{A\times C}、M_{AB}、M_{BC})$、$(M_{B\times C}、M_{AB}、M_{AC})$，此三圓為一組蒙日圓關係，且其連心線即為此三圓的廣義蒙日線。

此定理的證明方法類同【定理 2-3】，故不再贅述。



▲圖 2-6：三圓蒙日線、廣義蒙日線、蒙日圓與廣義蒙日圓

廣義蒙日圓半徑大小的公式（$\frac{1}{r_{M_{A\times B}}}=\left|\frac{1}{r_A}-\frac{1}{r_B}\right|$）會受到各圓半徑大小順序的影響，接下來的討論，不失一般性，我們皆以$r_A>r_B>r_C>\cdots\cdots$的方式進行討論。如圖 2-6 中的藍色圓，透過位置關係公式，算出在三圓情形的廣義蒙日圓共有三種，分別是：

$$\overrightarrow{OM_{BC\times A}}=\overrightarrow{OM_{A\times CB}}=\overrightarrow{OM_{A\times BC}}=\frac{-\frac{\overrightarrow{OA}}{r_A}+\frac{\overrightarrow{OB}}{r_B}+\frac{\overrightarrow{OC}}{r_C}}{-\frac{1}{r_A}+\frac{1}{r_B}+\frac{1}{r_C}}$$

$$\overrightarrow{OM_{B\times CA}}=\overrightarrow{OM_{AC\times B}}=\overrightarrow{OM_{A\times B\times C}}=\frac{+\frac{\overrightarrow{OA}}{r_A}-\frac{\overrightarrow{OB}}{r_B}+\frac{\overrightarrow{OC}}{r_C}}{+\frac{1}{r_A}-\frac{1}{r_B}+\frac{1}{r_C}}$$

$$\overrightarrow{OM_{B\times C\times A}}=\overrightarrow{OM_{A\times C\times B}}=\overrightarrow{OM_{AB\times C}}=\frac{+\frac{\overrightarrow{OA}}{r_A}+\frac{\overrightarrow{OB}}{r_B}-\frac{\overrightarrow{OC}}{r_C}}{+\frac{1}{r_A}+\frac{1}{r_B}-\frac{1}{r_C}}$$

更驚訝的是我們發現這三個圓的圓心，居然就是我們前置研究中三個圓的廣義蒙日點！

【定理 2-5】三圓的廣義蒙日圓

假設 A、B、C 為平面上三個外離圓，若$r_A>r_B>r_C$，則

(1) $M_{BC\times A}=M_{A\times CB}=M_{A\times BC}$，

(2) $M_{B\times CA}=M_{AC\times B}=M_{A\times B\times C}$，

(3) $M_{B\times C\times A}=M_{A\times C\times B}=M_{AB\times C}$，

上述所得的圓均稱為此**三圓的廣義蒙日圓**，其圓心分別是三圓的**廣義蒙日點**。

由上敘述及分點公式算出各座標即可證明，故不再贅述。

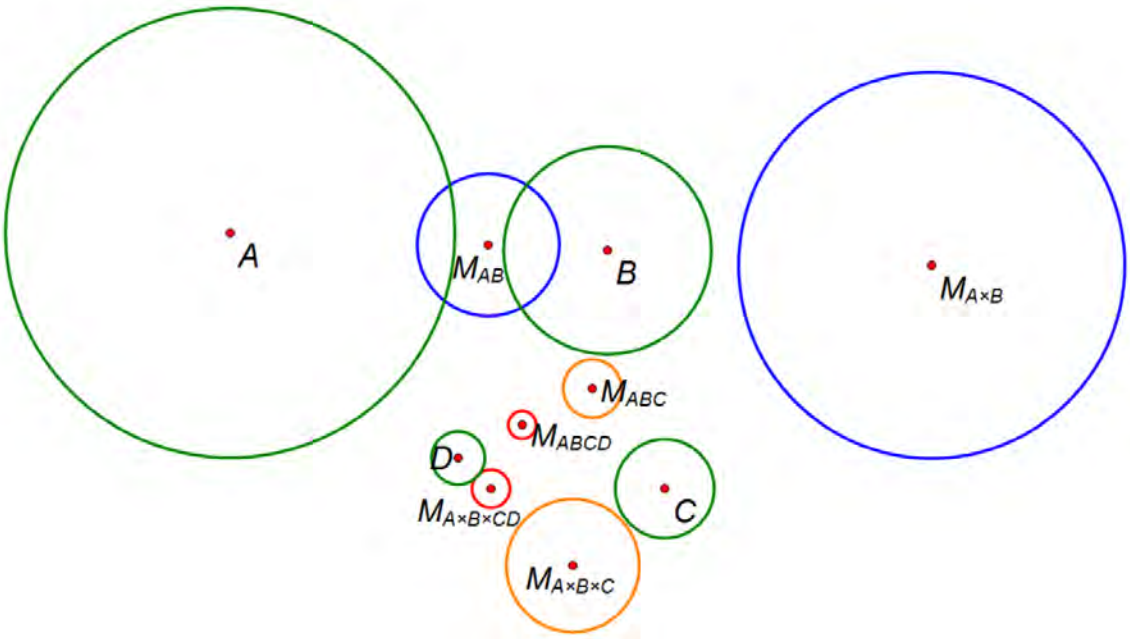
兩圓的蒙日圓圓心是位似內心，也可將其視為此兩圓的蒙日點；而兩圓的廣義蒙日圓圓心是位似外心，我們合理猜測此位似外心就是此兩圓的廣義蒙日點。基於此想法，我們好奇【蒙日線定理】及【廣義蒙日點定理】是否也能推廣至 n 個圓呢？

在討論此問題前，為了方便表達對 n 圓作蒙日圓或廣義蒙日圓的作圖過程，我們選定一個起始圓，依序對下一個圓作蒙日圓（或廣義蒙日圓），直到最後。如圖 2-7，以 A、B、C、D 的蒙日圓與其中一種廣義蒙日圓的作法為例：

$M_{A\cdot B\cdot C\cdot D}$ ：表示由 A 對 B 作蒙日圓$M_{A\cdot B}$，再對 C 作蒙日圓$M_{A\cdot B\cdot C}$，再對 D 作蒙日圓$M_{A\cdot B\cdot C\cdot D}$，其結果 $M_{A\cdot B\cdot C\cdot D}$即為此四圓的蒙日圓。

$M_{A\times B\times C\cdot D}$：表示由 A 對 B 作廣義蒙日圓$M_{A\times B}$，再對 C 作廣義蒙日圓$M_{A\times B\times C}$，再對 D 作蒙日圓$M_{A\times B\times C\cdot D}$，所得圓$M_{A\times B\times C\cdot D}$即為此四圓其中的一個廣義蒙日圓。

由上述可推知 n 圓的蒙日圓只有 1 個，而其廣義蒙日圓則有$2^{n-1}-1$個。



▲圖 2-7：四圓的蒙日圓與廣義蒙日圓

經過多次作蒙日圓或作廣義蒙日圓之後，所得的廣義蒙日圓的坐標與半徑如何求呢？透過位置關係與半徑關係，我們發現公式導出的規律：

【定理 2-6】n 圓廣義蒙日圓的半徑與坐標關係

平面上 n 個外離圓，必有$2^{n-1}-1$個廣義蒙日圓，其圓心定義為 **n 圓廣義蒙日點**，且圓半徑與圓心坐標有以下關係：

(1) 若由圓A_1開始，依序將半徑倒數累加，每作廣義蒙日圓時則變累減，再遇則又變回累加，以此類推，累計結果取絕對值的倒數即為所求圓半徑。例如：

$$\frac{1}{r_{M_{A\cdot B\times C\cdot D}}}=\left|\frac{1}{r_A}+\frac{1}{r_B}-\frac{1}{r_C}-\frac{1}{r_D}\right| \quad 、 \quad \frac{1}{r_{M_{A\times B\times C\times D}}}=\left|\frac{1}{r_A}-\frac{1}{r_B}+\frac{1}{r_C}-\frac{1}{r_D}\right| 。$$

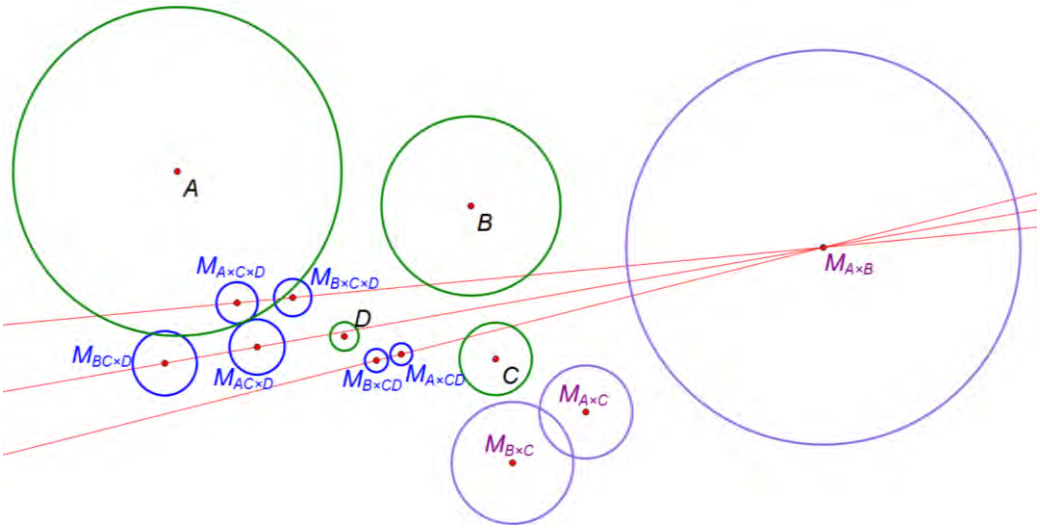
(2) 若由圓A_1開始，依序將圓坐標除以半徑的值累加，每作廣義蒙日圓時則變累減，再遇則又變回累加，以此類推，累計結果除以半徑的累計結果即為所求圓心坐標。例如：

$$\overrightarrow{OM_{A\cdot B\times C\cdot D}}=\frac{\frac{\overrightarrow{OM_A}}{r_A}+\frac{\overrightarrow{OM_B}}{r_B}-\frac{\overrightarrow{OM_C}}{r_C}-\frac{\overrightarrow{OM_D}}{r_D}}{\frac{1}{r_A}+\frac{1}{r_B}-\frac{1}{r_C}-\frac{1}{r_D}} \quad 、 \quad \overrightarrow{OM_{A\times B\times C\times D}}=\frac{\frac{\overrightarrow{OM_A}}{r_A}-\frac{\overrightarrow{OM_B}}{r_B}+\frac{\overrightarrow{OM_C}}{r_C}-\frac{\overrightarrow{OM_D}}{r_D}}{\frac{1}{r_A}-\frac{1}{r_B}+\frac{1}{r_C}-\frac{1}{r_D}} 。$$

既有 n 圓廣義蒙日點，不妨仿照廣義蒙日線「**n 個外離圓中，任意 2 圓的位似外心，必與此 2 圓分別和另 n-2 圓所構成的兩組 n-1 圓蒙日點形成三點共線**」，大膽推廣 n 圓蒙日線。

【定理 2-7】n 圓蒙日線

平面上 n 個外離圓，任意 2 圓的**廣義蒙日圓**圓心，與此 2 圓分別和另 n-2 圓所構成的兩組 n-1 圓**廣義蒙日圓**的圓心，形成三點共線。如圖 2-8，以四圓 A、B、C、D 為例，其中三組($M_{A\times B}$、$M_{A\cdot C\times D}$、$M_{B\cdot C\times D}$)、($M_{A\times B}$、$M_{A\times C\cdot D}$、$M_{B\times C\cdot D}$)、($M_{A\times B}$、$M_{A\times C\times D}$、$M_{B\times C\times D}$)均三點共線。



▲圖 2-8：4 圓的蒙日線

至此，我們成功地將蒙日定理的四大性質：蒙日線、蒙日點、廣義蒙日線及前置研究的廣義蒙日點，推廣至任意 n 個圓的情形。

上述以蒙日圓的方法成功推廣了蒙日定理，我們不禁好奇蒙日圓是否也可以用來推廣其他定理呢？我們從射影幾何中的幾個重要定理進行臆測與實驗，首先由 Pascal 神秘六邊形定理「圓內接六邊形三組對邊延長線交點共線」進行討論，並有出乎意外的結果：

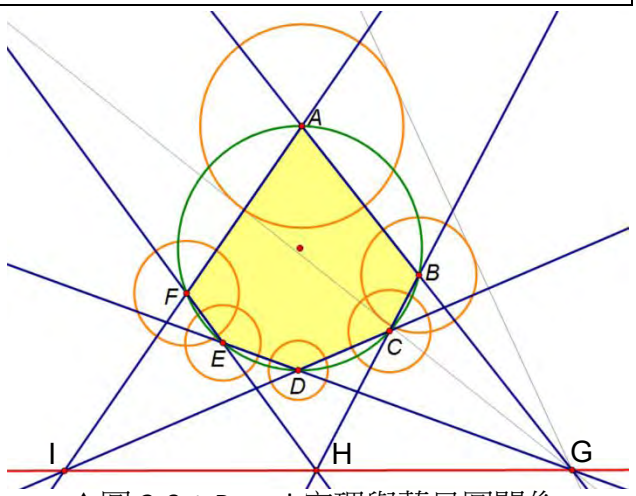
【定理 2-8】Pascal 神秘六邊形定理中的蒙日圓關係

平面上一圓內接六邊形 ABCDEF，作其對應邊延長線的交點，由 Pascal 定理知其三點共線，如圖 2-9。若以 A 為圓心，作一半徑小於 A 點到此邊延長線上交點距離（即$\overline{AG}$與$\overline{AI}$）的一圓，再依序以下一個頂點 B 為圓心，使得此邊延長線上的交點為其位似外心作出圓 B，依此類推，作出圓 C、D、E、F，最後再由圓 F 作出圓 A'，則以下兩點敘述成立：

(1) 圓 A'與圓 A 重合。

(2) 此六圓 A、B、C、D、E、F 中，任三圓的蒙日線皆恰為圓內接六邊形 ABCDEF 的 Pascal 線；換句話說，此時六圓中的任意兩圓的位似外心，共C_2^6=15 個點，均落在 Pascal 線上。

在前述（如圖 2-1）中有個未處理的問題「**當平面上 n 個圓在什麼特殊條件下，任三圓的蒙日線會重合？**」，透過與 Pascal 定理的結合，似乎離問題的解答更近一步。



▲圖 2-9：Pascal 定理與蒙日圓關係

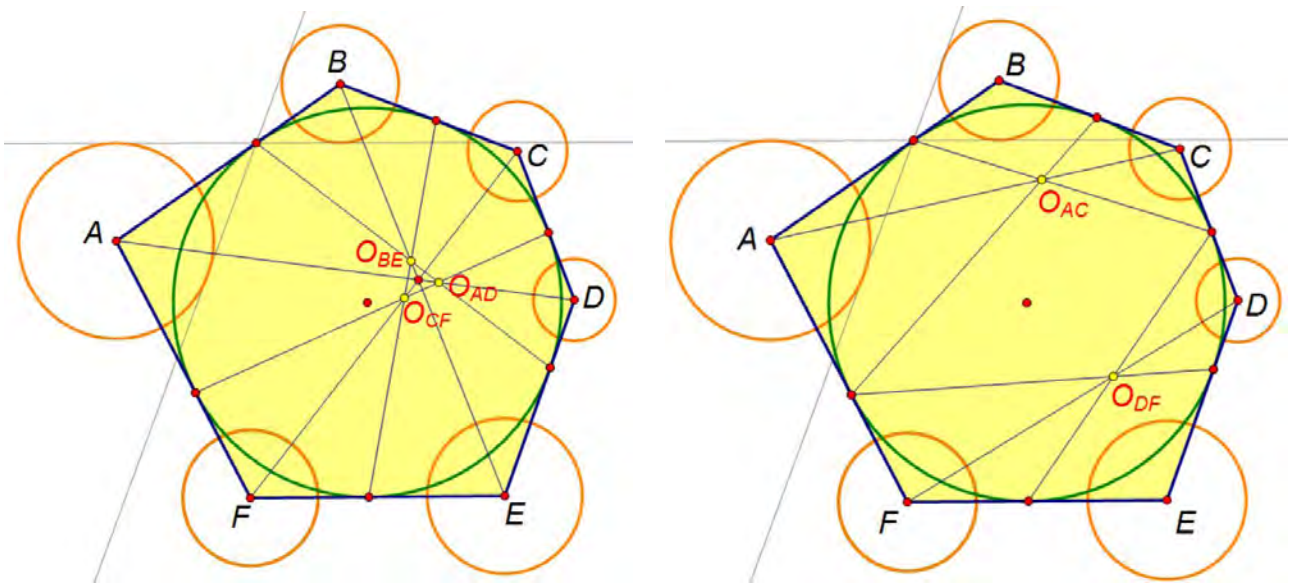
發現此結果後，我們強烈懷疑與之對偶的 Brianchon 定理:「圓外切六邊形三條對角線共點」，亦跟蒙日圓有所關聯，發現結果如下：

【定理 2-9】Brianchon 定理中的蒙日圓關係

平面上一圓外切六邊形 ABCDEF，作其對應頂點的連線，由 Brianchon 定理知其三線共點，另有多組廣義 Brianchon 點，如下頁圖 2-10。若以 A 為圓心，作一半徑小於 A 到切點距離的一圓，再依序以下一個頂點 B 為圓心，使-得 AB 邊上的切點為其位似內心作出圓 B，依此類推，作出圓 C、D、E、F，最後再由圓 F 作出圓 A'， 則以下兩點敘述成立：

(1) 圓 A'會與圓 A 重合。

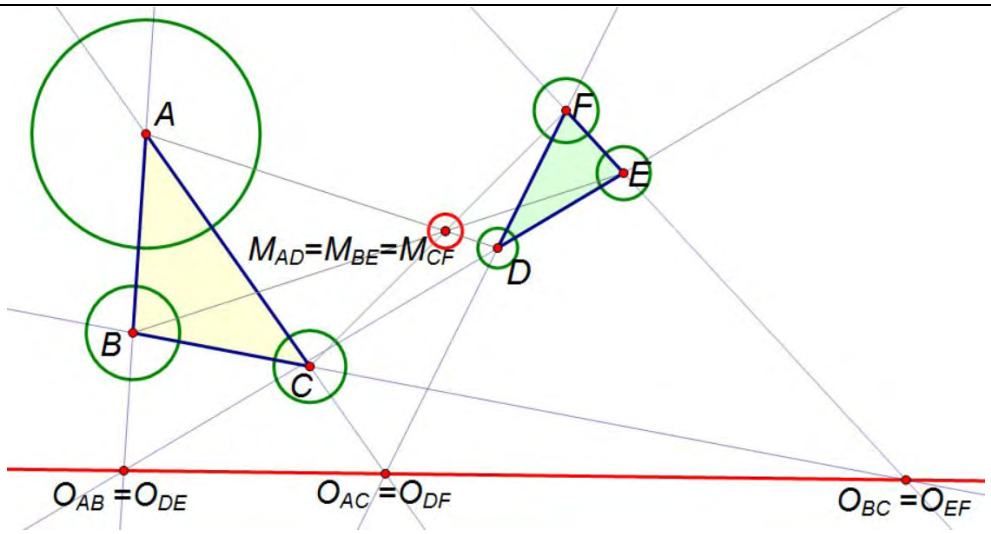
(2) 對角線兩圓的位似內心為廣義 Brianchon 點（如下頁圖 2-10 左圖），與相隔一圓所做的位似內心亦為另一種廣義 Brianchon 點（如下頁圖 2-10 右圖，圖中僅顯示其中兩組）。



▲圖 2-10：Brianchon 定理與蒙日圓關係

【定理 2-10】Desargues 定理中的蒙日圓關係

平面上的兩組三圓 A、B、C 與 D、E、F，共六個外離圓；若三組對應兩圓的蒙日圓皆重合，即$O_{AD} = O_{BE} = O_{CF}$，則兩組三圓蒙日線重合，且$O_{AB} = O_{DE}$、$O_{AC} = O_{DF}$、$O_{BC} = O_{EF}$。



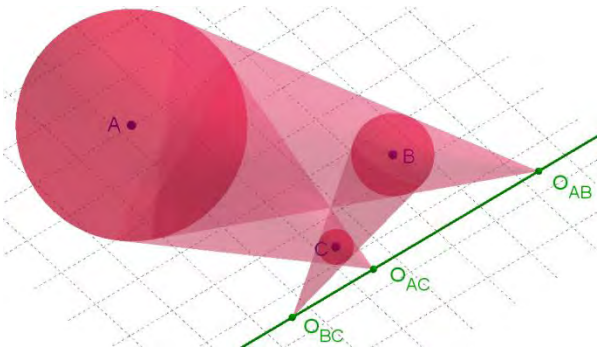
▲圖 2-11：Desargues 定理與蒙日圓關係

此定理推廣至空間中時，將敘述中的圓改為球，即可成立。

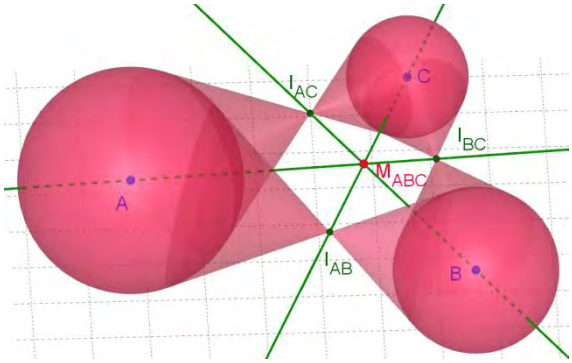
這些有趣的性質似乎說明了蒙日圓在射影幾何中的許多定理具有重大的地位，期待日後能發現其與更多定理美妙的結合，同時我們也從圖形的操作轉換為代數符號的操作，期望未來找到可能的運算性質。

三、空間中球體的蒙日定理性質推廣

接下來，我們大膽地探討空間中的球體，首先在三球情形，因為作過三球心的平面可將三球截出共平面的三圓，又透過前述平面上的定理知其蒙日線與蒙日點必然存在，也就是說「**空間中的三個外離球A、B、C，任兩球的外公切錐頂點（位似外心） O_{AB}、O_{AC}、O_{BC}三點共線**，如圖3-1；**任一球的球心與另兩球內公切錐頂點（位似內心）的連線$\overleftrightarrow{AI_{BC}}$、$\overleftrightarrow{BI_{AC}}$、$\overleftrightarrow{CI_{AB}}$三線共點**，如圖3-2」。同理，「球心共平面的n個球也必有n球蒙日點與廣義蒙日線」。



▲圖 3-1：空間中三球的蒙日線



▲圖 3-2：空間中三球的蒙日點

然而，空間中球心**不共平面**的四個外離球，是否也會成立呢？我們發現此答案是肯定的。

【定理 3-1】4 球蒙日點與廣義蒙日線

假設A、B、C、D為空間中的四個外離球，則以下三點敘述成立：

(1) 任2球作位似外心（如選A、D作出O_{AD}），此2球再分別與其餘2球作蒙日點（如A與B、C作M_{ABC}，D與B、C作M_{BCD}），則此三點共線，稱為**四球廣義蒙日線**，如下頁圖3-3。

(2) 任1球的球心與另3球的蒙日點連線，即$\overleftrightarrow{AM_{BCD}}$、$\overleftrightarrow{BM_{ACD}}$、$\overleftrightarrow{CM_{ABD}}$、$\overleftrightarrow{DM_{ABC}}$，則此四線共點，稱此點為**四球蒙日點**，並以符號M_{ABCD}表示，如下頁圖3-4。

(3) 任2球的位似內心與另2球的位似內心連線，即$\overleftrightarrow{I_{AB}I_{CD}}$、$\overleftrightarrow{I_{AC}I_{BD}}$、$\overleftrightarrow{I_{AD}I_{BC}}$，則此三線皆通過四球蒙日點，如P.23圖3-5。

＜(1)證明＞如圖 3-3

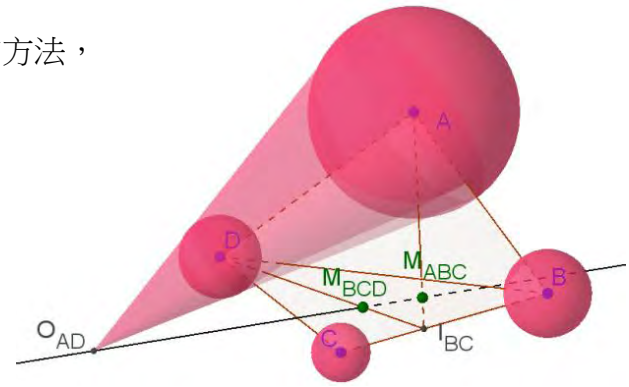
1°在△ ABI_{BC}中，可透過如證明【定理 1-1】的方法，

由【Menelaus 定理】得$\frac{\overline{AM_{ABC}}}{\overline{M_{ABC}I_{BC}}}=\frac{r_A}{r_B}\times\frac{\overline{BC}}{\overline{CI_{BC}}}$，

同理在△ BDI_{BC}中得 $\frac{\overline{I_{BC}M_{BCD}}}{\overline{M_{BCD}D}}=\frac{r_B}{r_D}\times\frac{\overline{CI_{BC}}}{\overline{BC}}$，

2°在 △ $AI_{BC}D$中，M_{ABC}、M_{BCD}、O_{AD}分別在三邊延長線上，由上述1°及【位似定理】

得 $\frac{\overline{AM_{ABC}}}{\overline{M_{ABC}I_{BC}}}\times\frac{\overline{I_{BC}M_{BCD}}}{\overline{M_{BCD}D}}\times\frac{\overline{DO_{AD}}}{\overline{O_{AD}A}}=1$，



▲圖 3-3： 4 球的廣義蒙日線
（圖中僅顯示其中一條）

由【Menelaus 逆定理】可得M_{ABC}、M_{BCD}、O_{AD}三點共線。同理另有五組三點共線。

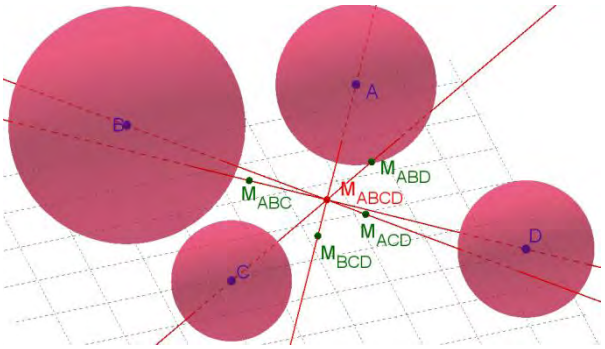
＜(2)證明＞如圖 3-4

1°作△ ABC、 △ $M_{BCD}M_{ACD}M_{ABD}$，

根據上述(1)知 $\overleftrightarrow{M_{ACD}M_{ABD}}$、$\overleftrightarrow{BC}$交於$O_{BC}$，

$\overleftrightarrow{M_{BCD}M_{ABD}}$、$\overleftrightarrow{AC}$ 交於O_{AC}，

$\overleftrightarrow{M_{BCD}M_{ACD}}$、$\overleftrightarrow{AB}$ 交於O_{AB}。



▲圖 3-4：4 球的蒙日點

2°由【蒙日線定理】知O_{AB}、O_{AC}、O_{BC}三點共線，

並由【Desargues定理】得 $\overleftrightarrow{AM_{BCD}}$、$\overleftrightarrow{BM_{ACD}}$、$\overleftrightarrow{CM_{ABD}}$三線共點。

同理可證 $\overleftrightarrow{AM_{BCD}}$、$\overleftrightarrow{BM_{ACD}}$、$\overleftrightarrow{DM_{ABC}}$三線共點，

故$\overleftrightarrow{AM_{BCD}}$、$\overleftrightarrow{BM_{ACD}}$、$\overleftrightarrow{CM_{ABD}}$、$\overleftrightarrow{DM_{ABC}}$四線共點。

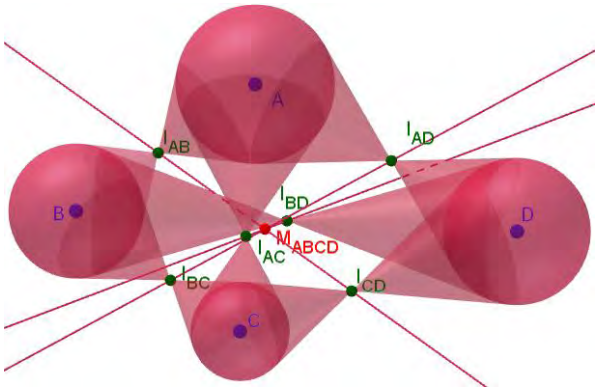
＜(3)證明＞如下頁圖 3-5

1°在△ BDI_{AB}中，可透過如證明【定理 1-1】方法，藉由【Menelaus 定理】得$\frac{\overline{DM_{ABD}}}{\overline{M_{ABD}I_{AB}}}=\frac{r_D}{r_B}\times\frac{\overline{BA}}{\overline{AI_{BC}}}$，

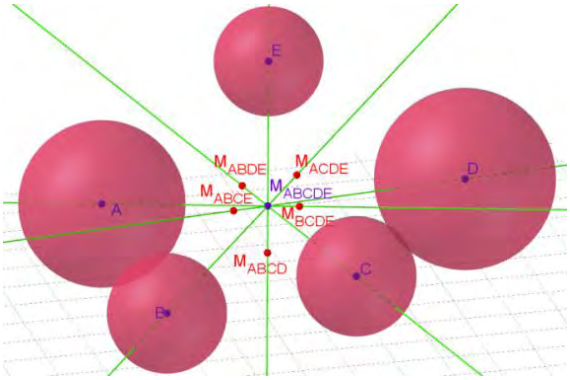
同理在△ BCI_{AB}中得$\frac{\overline{I_{AB}M_{ABC}}}{\overline{M_{ABC}C}}=\frac{r_B}{r_C}\times\frac{\overline{I_{BC}A}}{\overline{AB}}$ 。

2°在△ CDI_{AB}中，由上述1°及【位似定理】得$\frac{\overline{DM_{ABD}}}{\overline{M_{ABD}I_{AB}}}\times\frac{\overline{I_{AB}M_{ABC}}}{\overline{M_{ABC}C}}\times\frac{\overline{CI_{CD}}}{\overline{I_{CD}D}}=1$，

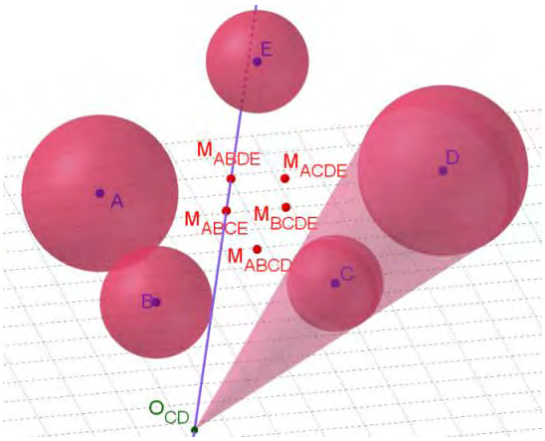
由【Ceva 逆定理】知 $\overleftrightarrow{DM_{ABC}}$、$\overleftrightarrow{I_{AB}I_{CD}}$、$\overleftrightarrow{CM_{ABD}}$三線共點，結合上述(2)便可證明$\overleftrightarrow{I_{AB}I_{CD}}$通過點$M_{ABCD}$。同理可得$\overleftrightarrow{I_{AB}I_{CD}}$、$\overleftrightarrow{I_{AC}I_{BD}}$、$\overleftrightarrow{I_{AD}I_{BC}}$皆通過$M_{ABCD}$。 ■



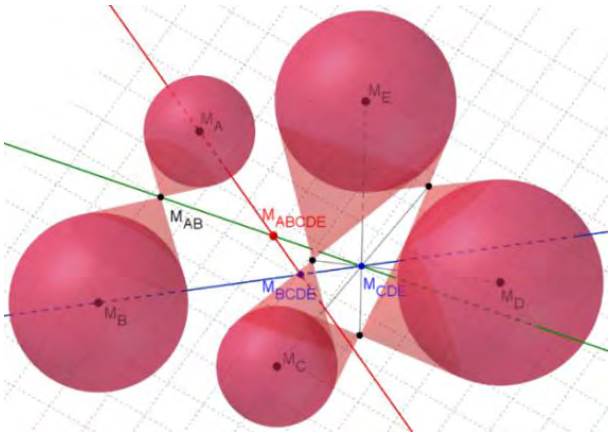
▲圖 3-5：任意 2 球的蒙日點與另 2 球的蒙日點連線必通過 4 球蒙日點



▲圖 3-6：5 球的蒙日點



▲圖 3-7：5 球的廣義蒙日線（圖中僅顯示其中一條）



▲圖 3-8：5 球分堆的蒙日點共線性質

透過實驗與仿照前面的證明，我們發現空間中球心不共平面的 5 個外離球的蒙日點、廣義蒙日線以及球分堆的蒙日點共線等性質也會成立，如上圖 3-6、3-7、3-8。

接著，仿照【定理 1-3】的數學歸納法，可將上述性質推廣到 n 球的情形，結論如下，證明就不再贅述。

【定理 3-2】n 球蒙日點與 n 球分堆的蒙日點共線性質

假設A_1、A_2、⋯、A_{n-1}、A_n為空間中n個外離球（其中$n\epsilon N$，$n \geq 3$），則以下三點敘述成立：

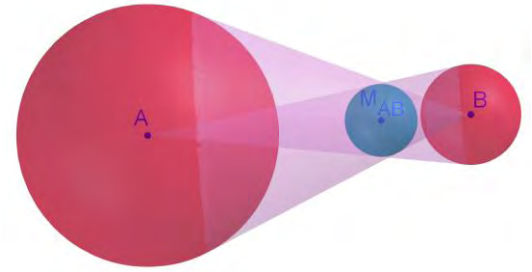
(1) 任2球作位似外心，此2球再分別與另n-2球作出n-1球蒙日點，則此三點共線，稱為**n球廣義蒙日線**。

(2) 任1球的球心與另n-1球的蒙日點連線，則此n線共點，稱其為**n球蒙日點**，並以符號$M_{A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n}$表示。

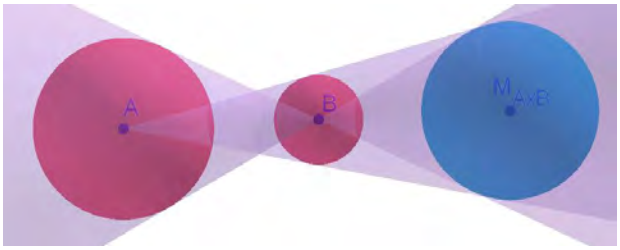
(3) 任意**k球的蒙日點**與另**n-k球的蒙日點**連線必皆通過**n球蒙日點**。

（**n球分堆的蒙日點共線性質**）

仿照平面上兩個外離圓的蒙日圓與廣義蒙日圓做法，「空間中兩個外離球 A、B，過球心 A 作球 B 的切錐，過球心 B 作球 A 的切錐，則兩切錐內必有一內公切球，稱為球 A、B 的**蒙日球**，以符號$M_{A\cdot B}$表示（仍簡記成M_{AB}），其球心即為兩球位似內心（蒙日點），如圖 3-9；相對地，在球 B 的另一側，也能作出 A、B 兩球的**廣義蒙日球**，以符號$M_{A\times B}$表示，其球心即為兩球的位似外心，如圖 3-10。」

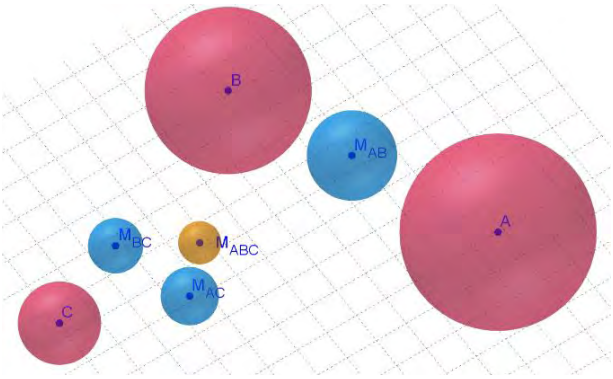


▲圖 3-9：A、M_{AB}、B 構成一組蒙日球關係



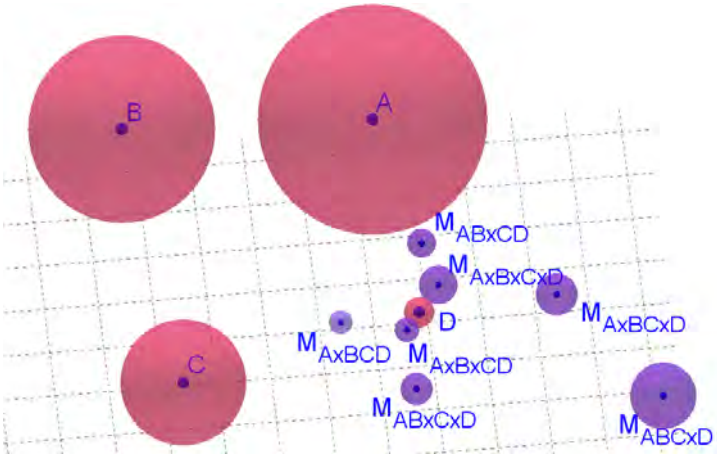
▲圖 3-10：A、B、$M_{A\times B}$亦構成一組蒙日球關係

從上述想法我們也可以得知「**空間中三個外離球 A、B、C，若任兩球作蒙日球，再與第三球作蒙日球，則最終得到的三球會重合，且球心為三球的蒙日點M_{ABC}**」，如圖 3-11。



▲圖 3-11：$M_{ABC}=M_{BCA}=M_{ACB}$

在作 n 個球的蒙日球或廣義蒙日球過程中，除了只作蒙日球之外，其餘作圖最後所得的球，均稱為此 **n 球的廣義蒙日球**，其個數共有$2^{n-1}-1$個。仿照平面上蒙日圓的做法，亦可求出其半徑與球心座標。以四個外離球A、B、C、D為例，符號$M_{A\times BC\times D}$表示由 A 開始先與 B 作廣義蒙日球，所得再與 C 作蒙日球，最後在與 D 作廣義蒙日球，最後所得即為$M_{A\times BC\times D}$，如圖 3-12。

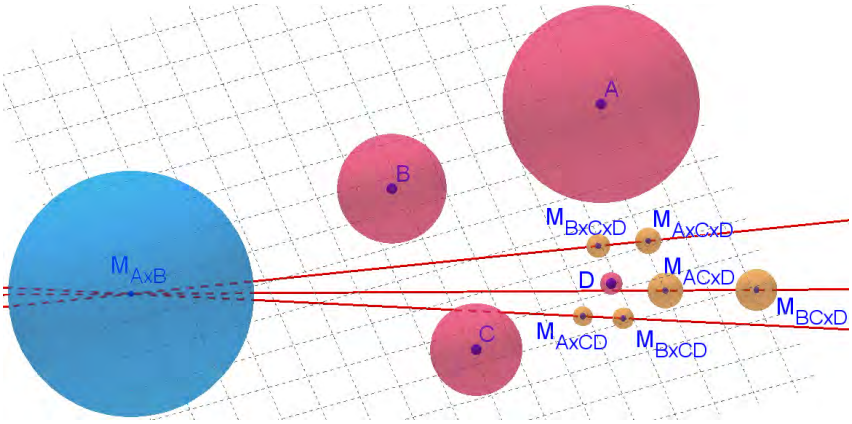


▲圖 3-12：4 球的 7 個廣義蒙日球

在前述我們發現了 n 球蒙日點及 n 球廣義蒙日線定理，於是我們也開始探討空間中的 n 球蒙日線的存在性，仿照【定理 2-7】n 圓蒙日線的想法，我們果真也發現了以下定理：

【定理 3-3】n 球的蒙日線

空間中 n 個外離球，任意 2 球的廣義蒙日球的球心，必與此 2 球分別和另 n-2 球構成的兩組廣義蒙日球球心，形成三點共線，均稱其為 **n 球的蒙日線**。如圖 3-13，$(M_{A\times B}$、$M_{AC\times D}$、$M_{BC\times D})$、$(M_{A\times B}$、$M_{A\times CD}$、$M_{B\times CD})$、$(M_{A\times B}$、$M_{A\times C\times D}$、$M_{B\times C\times D})$等均三點共線。

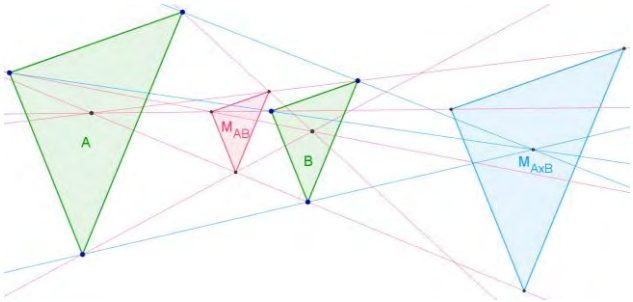


▲圖 3-13：4 球的蒙日線（圖中僅顯示其中三條）

四、蒙日定理在位似圖形上的性質與推廣

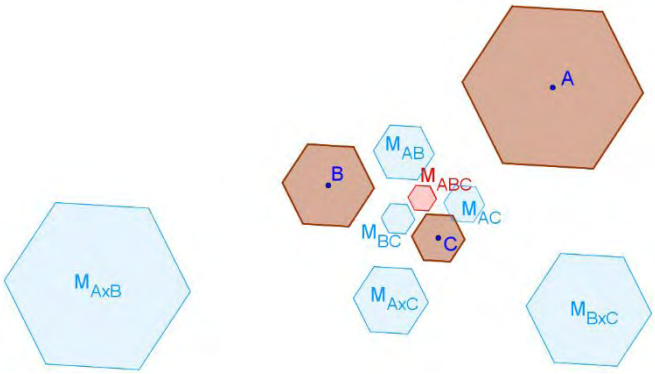
無論是平面上的外離圓或空間中的外離球，皆互為位似圖形（含位似體），那麼對互為位似圖形的多邊形或多面體，是否也有相對應的蒙日點、蒙日線、廣義蒙日點、廣義蒙日線、蒙日位似圖形（以下簡稱**蒙日形**）等性質呢？最後，就讓我們來探討位似圖形的蒙日定理。

首先，從蒙日形的存在性開始。由於 n 邊形並不像圓有明確的中心（圓心），它可以看作是外心、內心或重心，但任意 n 邊形不一定有外心或內心，於是為不失一般性，我們選擇重心作為代表 n 邊形的中心。我們發現「平面上兩個外離的位似 n 邊形 A、B，任一個 n 邊形的重心與另一 n 邊形的各頂點連線，則其對應連線交點所形成的 n 邊形亦為 A、B 的位似圖形」，稱其為 n 邊形 A、B 的**蒙日形**，以M_{AB}表示，其重心即為 A、B 的**位似內心**；而 n 邊形 A、B 的**廣義蒙日形**，以$M_{A\times B}$表示，其重心即為 A、B 的**位似外心**。



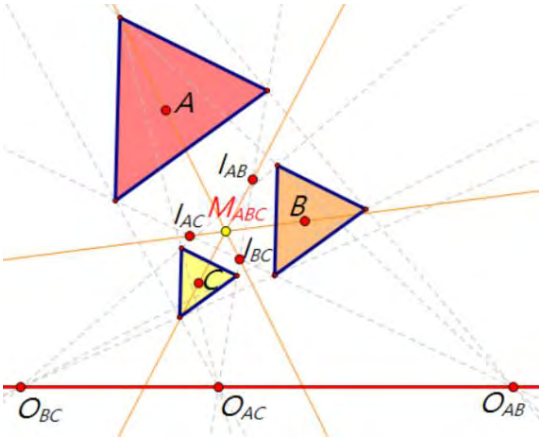
▲圖 4-1：兩個三角形 A、B 的蒙日形M_{AB}與廣義蒙日形$M_{A\times B}$

有了蒙日形的性質，我們合理猜測前蒙日圓的性質在位似圖形都能成立。如右圖「平面上三個外離的位似圖形 A、B、C，任 1 個位似圖形與另 2 個位似圖形的蒙日形的蒙日形，則三個蒙日形會重合，稱其為此三個位似圖形的蒙日形，以M_{ABC}表示，同時三位似圖形的蒙日線亦存在」，其符號皆同蒙日圓表示法，且此性質可推廣至 n 個位似圖形的蒙日形。

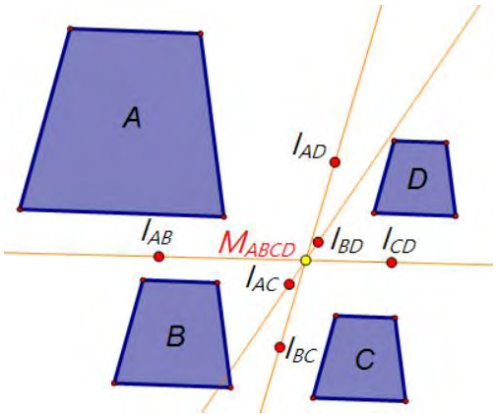


▲圖 4-2：三個六邊形 A、B、C 的蒙日形M_{ABC}

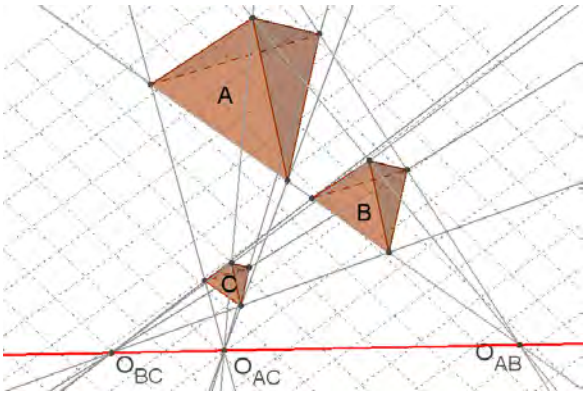
除了蒙日形的性質外，我們也嘗試將蒙日點、蒙日線、廣義蒙日點、廣義蒙日線等性質推廣至任意 n 個位似圖形的情形中。以平面上的三角形與四邊形，以及空間中四面體、六面體為例，如下圖：



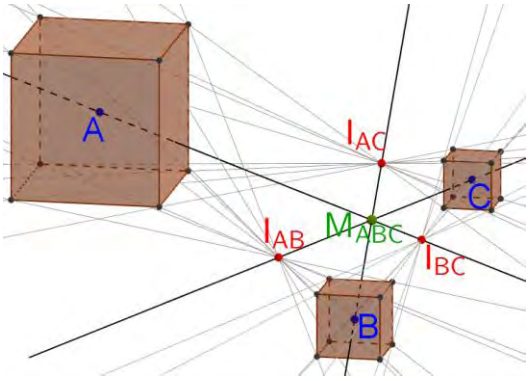
▲圖 4-4：三個三角形的蒙日線與蒙日點



▲圖 4-5：四個四邊形分堆的蒙日點性質

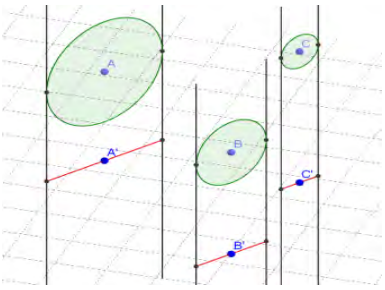


▲圖 4-6：三個四面體的蒙日線



▲圖 4-7：三個六面體的蒙日點

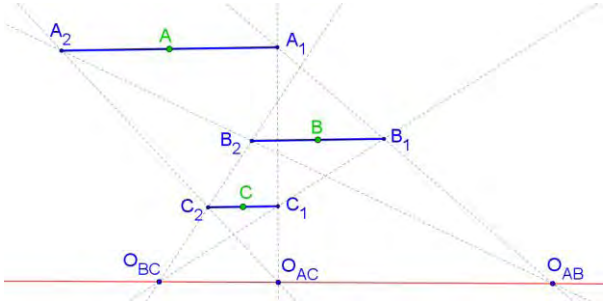
最後，若我們想像在空間中有三個位似且垂直於底面的圓 A、B、C，由前述知其具有蒙日點和蒙日線等性質，若將其投影到底面上，會形成三個位似的線段，如右圖所示。透過上述投影的有趣想像，下面退化至一維圖形的結果就變得很顯然。



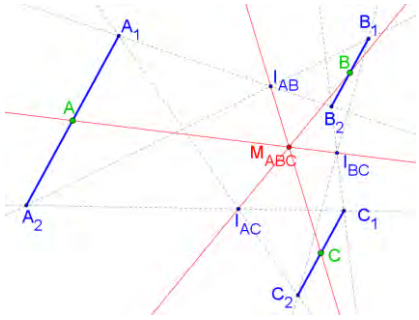
▲圖 4-8：投影簡圖

【定理 4-1】位似線段中的蒙日線

假設平面上有三個位似線段$\overline{A_1A_2}$、$\overline{B_1B_2}$、$\overline{C_1C_2}$，若任取兩線段作出其位似外心O_{AB}、O_{BC}、O_{CA}，則此三點共線，即為蒙日線，如圖 4-9。



▲圖 4-9：三位似線段的蒙日線



▲圖 4-10：三位似線段的蒙日點

【定理 4-2】位似線段中的蒙日點

假設平面上有三個位似線段$\overline{A_1A_2}$、$\overline{B_1B_2}$、$\overline{C_1C_2}$，若任一線段的中心與另兩線段的位似內心連線，即$\overleftrightarrow{AI_{BC}}$、$\overleftrightarrow{BI_{AC}}$、$\overleftrightarrow{CI_{AB}}$，則此三線共點，即為蒙日點，如圖 4-10。

若是將空間中的 n 個位似且垂直於底面的圓投影至底面，亦會形成 n 條位似線段，因此同理可知上述 n 圓蒙日定理的性質推廣至 n 條位似的線段亦可成立。

於是從上面的例子，無論有多少個多邊形或多面體，我們發現只要互為位似圖形，就能滿足蒙日點、蒙日線等定理。上述的證明，基本上皆可仿照前面探討 n 個圓的蒙日定理的方法得證，礙於篇幅有限，這裡就不再贅述。

本研究至此，我們從三圓的蒙日定理出發，推廣至 n 個圓、n 個球，以至一般的位似圖形，我們發現「**無論平面上或空間中的任意 n 個位似圖形，都滿足含有蒙日點、蒙日線、廣義蒙日點、廣義蒙日線、蒙日形與廣義蒙日形之性質。**」換句話說，我們將最初的蒙日定理從圓推廣至任意多個位似圖形（含位似體）皆成立，這將使蒙日定理能更貼近實體世界圖形關係的應用，更獲得進一步的推廣。

陸、結　　論

正如本研究作品名稱「**道同**」**互相為**「**蒙**」，我們從三圓的蒙日點定理推廣至n個圓、球，以至多邊形與多面體等圖形時，發現只要圖形互為「**位似**」，不論幾個都可以作出其「**蒙日點**」，不僅是代表多圓的蒙日點，我們也作出能代表多圓的蒙日圓，又因此將蒙日線及廣義蒙日點定理推廣至 n 個位似圖形中。茲將結論分述如下：

一、 平面上n個外離圓必有一個n圓蒙日點。

若將1圓的圓心時視為1圓蒙日點，2圓時的位似內心（內公切線交點）視為2圓蒙日點，則對所有$n \epsilon N$，$n \geq 3$，均有下列性質：

（一） 任意1圓的蒙日點（圓心）與另n-1圓的蒙日點連線必共交一點，即**n圓蒙日點**；其座標分量與各圓半徑倒數總和的乘積等於各圓座標分量除以該圓半徑的總和。

（二） 任意2圓的位似外心（外公切線交點），必與此2圓分別和另n-2圓所構成的蒙日點形成三點共線，稱之為**n圓廣義蒙日線**。

（三） 任意k圓的蒙日點與另n-k圓的蒙日點的連線必通過此n圓蒙日點；其中n圓蒙日點到k圓蒙日點與n-k圓蒙日點的距離比等於兩堆各圓半徑倒數總和的倒數比，稱之為**n圓分堆的蒙日點共線性質**。

（四） 若圓大小均相同，則n圓蒙日點即為各圓心所形成n邊形的重心，所以n邊形的重心也具有「**n點分堆的重心共線性質**」。

二、 平面上n個外離圓必有一個n圓蒙日圓，其圓心即為n圓蒙日點。

在兩個外離圓中，若任一圓心對另一圓做切線，則四條切線必有內切圓：若圓心在連心線段上，稱其為**蒙日圓**；若圓心在連心線段外，則稱其為**廣義蒙日圓**。並具有下列性質：

（一） 任1圓的蒙日圓與另n-1圓的蒙日圓作蒙日圓，則會有n個蒙日圓重合，此圓稱為n圓的蒙日圓；其半徑的倒數為各圓半徑的倒數總和；其圓心座標即為n圓蒙日點的座標。

（二） 任意k圓的蒙日圓與另n-k圓的蒙日圓的蒙日圓，必與n圓的蒙日圓重合，稱之為**n圓分堆的蒙日圓重合性質**。

（三） 在作n個圓的蒙日圓或廣義蒙日圓過程中，除了只作蒙日圓之外，其餘作圖最後所得到的圓，均稱為此n**圓的廣義蒙日圓**，其個數共有 $2^{n-1}-1$ 個。仿照蒙日圓的做法可以求出其半徑與圓心座標。

（四） 任意2圓的廣義蒙日圓圓心，必與此2圓分別和另n-2圓所構成的兩組廣義蒙日圓圓心形成三點共線，稱之為**n圓蒙日線**。

（五） 透過蒙日圓的觀點，發現Pascal神秘六邊形定理、Brianchon定理、Desargues定理皆與蒙日定理有密切關係。

三、 空間中的n個外離球，必有一個n球蒙日球，其球心即為n球蒙日點。

在兩個外離球中，若任一球心對另一球做切錐，則兩個切錐必有內切圓：若球心在連心線段上，稱其為**蒙日圓**；若圓心在連心線段外，則稱其為**廣義蒙日圓**。並具有下列性質：

（一） 任1球的蒙日球與另n-1球的蒙日球作蒙日球，則會有n個蒙日球重合，此球稱為n**球的蒙日球；**其半徑的倒數為各球半徑的倒數總和；其球心座標分量與各球半徑倒數總和的乘積等於各球心座標分量除以該球半徑的總和。

（二） 任意k球的蒙日球與另n-k球的蒙日球的蒙日球，必與n球的蒙日球重合，此性質稱為**n球分堆的蒙日球重合性質**。

（三） 在作n個球的蒙日球或廣義蒙日球過程中，除了只作蒙日球之外，其餘作圖最後所得到的球，均稱為此n**球的廣義蒙日球**，其個數共有 $2^{n-1}-1$ 個。仿照蒙日球的做法可以求出其半徑與球心座標。

（四） 除了蒙日點、蒙日球性質外，空間中的n個球亦滿足蒙日線、廣義蒙日線、廣義蒙日點等性質。

四、 平面上或空間中的n個位似圖形（除圓、球外，含一般的多邊形或多面體等），必滿足蒙日定理，包含蒙日點、蒙日線、廣義蒙日點、廣義蒙日線，以及滿足圖形分堆的蒙日點共線性質。同時亦可作出其蒙日形（蒙日位似圖形），亦滿足**圖形分堆的蒙日形重合性質**。

柒、未來展望

從上述結論，我們發現無論是n個圓、球、多邊形或多面體等位似圖形，它們必存在一個類似平衡概念的中心點（蒙日點）或中心圖形（蒙日圓或蒙日形），其位置大小與此n個圖形的位置大小皆有所相關，不禁令人想像「**是否可運用蒙日點或蒙日圓（球）的概念去權衡各個位似圖形的位置與大小關係？**」同時，本研究為射影幾何上的討論，或許可成為幾何光學應用的理論基礎，並在探究宇宙星體間奧秘關係方面上，期待亦能找到代表多個星體的**蒙日星體**，值得日後做進一步的探討。

捌、參考資料及其他

1. 位似圖形（2013）。2016年6月13日，取自網址：http://www.twword.com/wiki/%E4%BD%8D%E4%BC%BC%E5%9C%96%E5%BD%A2
2. 蒙日定理和一个对偶定理（2007）。2016年6月13日，取自網址：https://matrix19.wordpress.com/2011/07/30/%E8%92%99%E6%97%A5%E5%AE%9A%E7%90%86%E5%92%8C%E4%B8%80%E4%B8%AA%E5%AF%B9%E5%81%B6%E5%AE%9A%E7%90%86/
3. Pierre Beaudry（1995）. The Geometry of the One and the Many. Retrieved May 30, 2016, from https://www.schillerinstitute.org/fid_91-96/952_met_of_persp.html
4. David Graham Searby （2009）. Forum Geometricorum.（Volume 9 P.181－193）. Retrieved December 8, 2016, from http://forumgeom.fau.edu/FG2009volume9/FG200918.pdf

【評語】050404

1. 延續之前參展主題，有系統推廣蒙日定理到各種情形。主題清楚且聚焦。
2. 研究方法適切，以動態幾何軟體觀察問題的可能現象，進而驗證，架構完整。
3. 團體合作佳，展示及表達能力良好。
4. 宜作更多文獻探討，交代相關研究成果。

作品海報

摘　要

正如本研究作品名稱**「道同」互相為「蒙」**，本研究以三圓蒙日定理「平面上三個圓，彼此的外公切線交點共線（蒙日線），彼此的內公切線交點與另一圓圓心的連線共點（蒙日點）」以及相關共點共線為基礎，推廣至n個圓、球、多邊形與多面體等，發現只要圖形互相「**位似**」，均可作出代表它們的「蒙日點」、「蒙日圓」，及一般位似圖形的「蒙日形」。同時，也透過其位置與各圓半徑、圓心座標的關係，進一步發現更多共點共線及共圓的性質，其中最令人驚豔的是**圓分堆的蒙日點共線性質：「平面上 n 個外離圓，任意 k 圓的蒙日點與另 n-k 圓的蒙日點，必與此 n 圓的蒙日點共線」**，推廣至空間中 n 球的蒙日點依然成立， n 圓（球）分堆亦具有**蒙日圓（球）重合性質**。

壹、研究動機

在探討「Monge's theorem的性質探討與推廣」的前置研究中，礙於有問題尚未完成與發表篇幅有限，本研究將延續並進一步探討未觸及的問題，其中包含蒙日點位置與各圓半徑、座標的幾何量關係，以及探討n圓中各蒙日點間的關係，並試圖定義「蒙日圓」的作法以將蒙日線與廣義蒙日點定理也推廣至n圓情形。

貳、研究目的與問題

一、探討平面上四圓、五圓以至n個圓中蒙日定理的性質與推廣。

二、探討平面上代表n個圓的蒙日圓，其存在性及相關性質。

三、試圖將上述性質推廣至空間中的球體。

四、試圖將上述性質推廣至多邊形與多面體等位似圖形。

符號說明

I_{AB} ：圓A與圓B的內公切線交點

O_{AB} ：圓A與圓B的外公切線交點

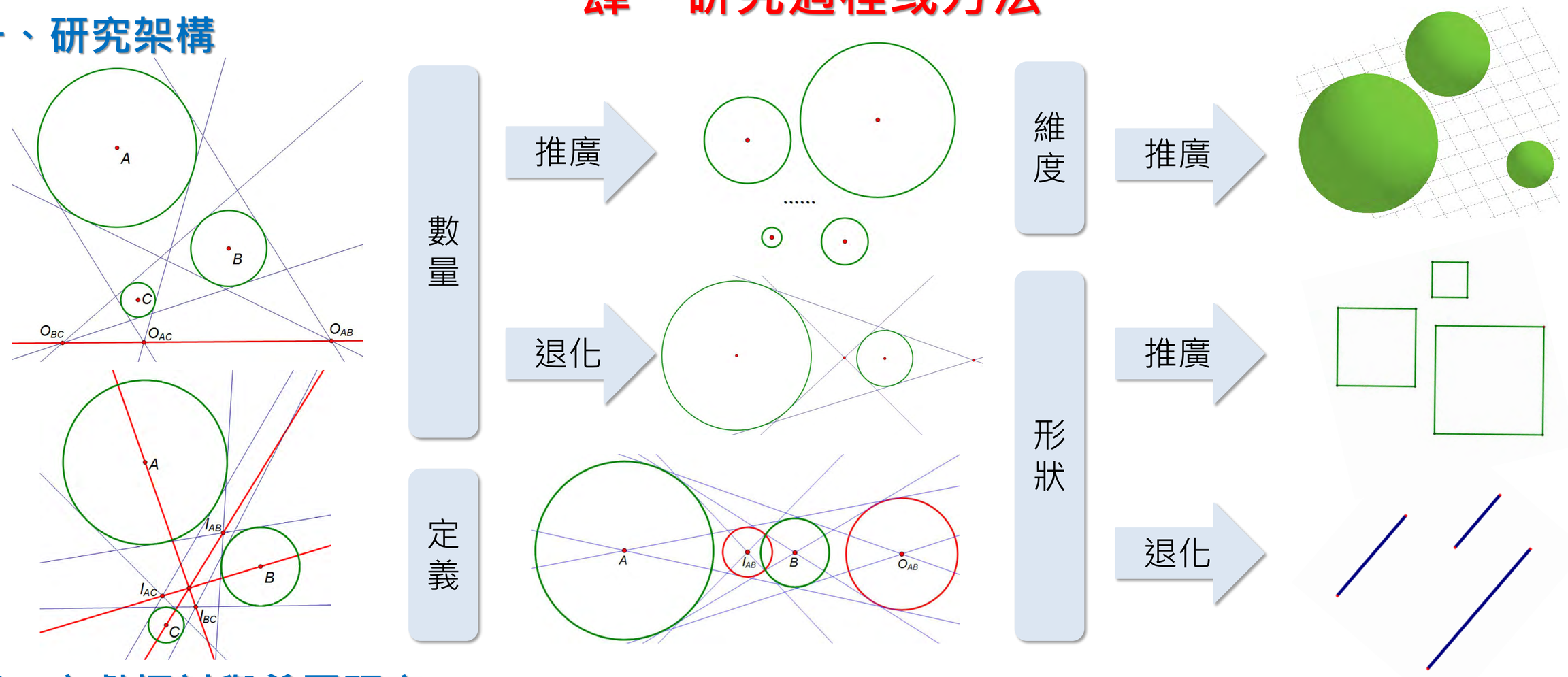
M_{ABC} ：圓A、B、C的蒙日點

參、研究設備及器材

電腦、GSP、Geogebra等幾何繪圖軟體。

肆、研究過程或方法

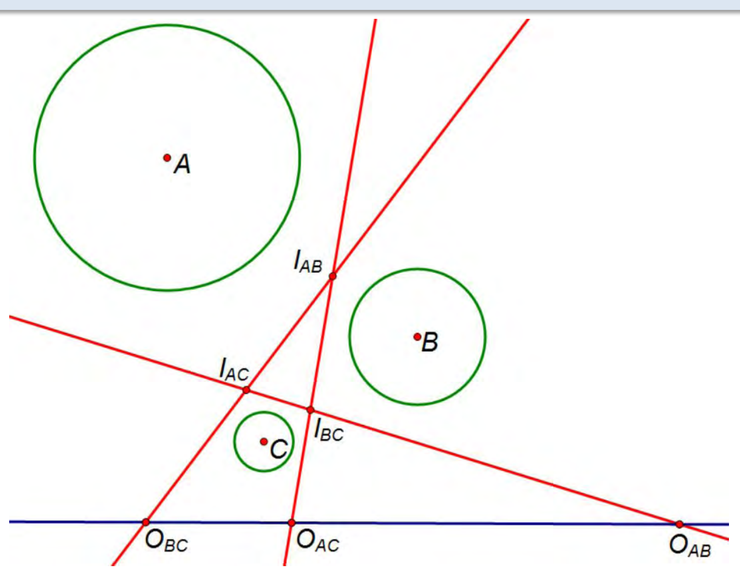
一、研究架構



二、文獻探討與前置研究

【性質１】廣義蒙日線

平面上三個外離圓，任選2圓作外公切線交點，再分別與另1圓作內公切線交點，則此三點共線，稱其為此三圓的廣義蒙日線。



◀如左圖

$(O_{AB}、I_{AC}、I_{BC})$、

$(O_{BC}、I_{AB}、I_{AC})$、

$(O_{AC}、I_{AB}、I_{BC})$，

均三點共線。

【性質２】廣義蒙日點

平面上三個外離圓，任1圓圓心與另2圓內公切線交點連線，及另外2圓圓心分別與另2 圓外公切線交點連線，則此三線共點，稱其為此三圓的廣義蒙日點。

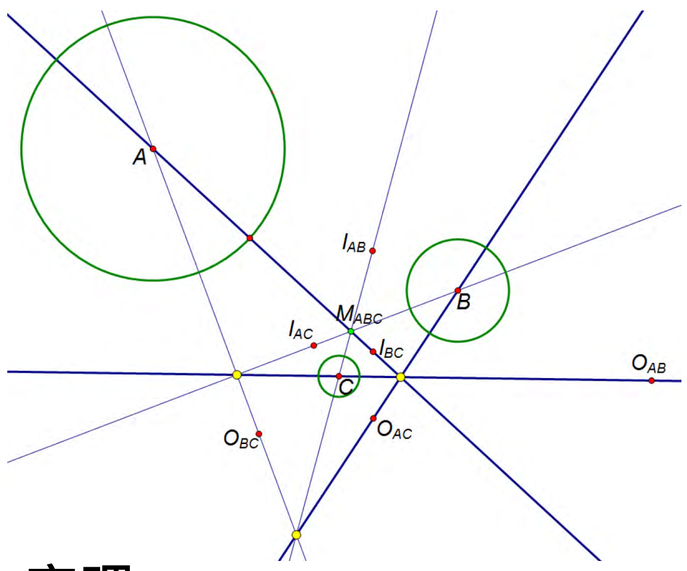
▶如右圖

$(\overleftrightarrow{AI_{BC}}、\overleftrightarrow{BO_{AC}}、\overleftrightarrow{CO_{AB}})$、

$(\overleftrightarrow{BI_{AC}}、\overleftrightarrow{CO_{AB}}、\overleftrightarrow{AO_{BC}})$、

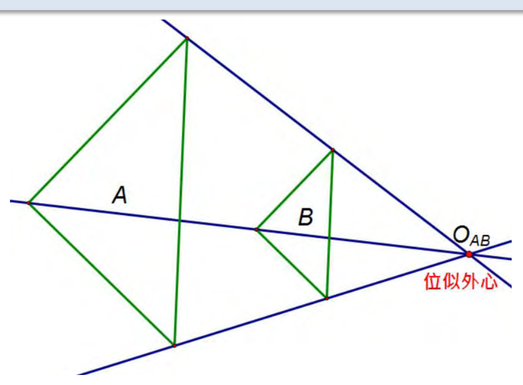
$(\overleftrightarrow{CI_{AB}}、\overleftrightarrow{AO_{BC}}、\overleftrightarrow{BO_{AC}})$，

均三線共點。

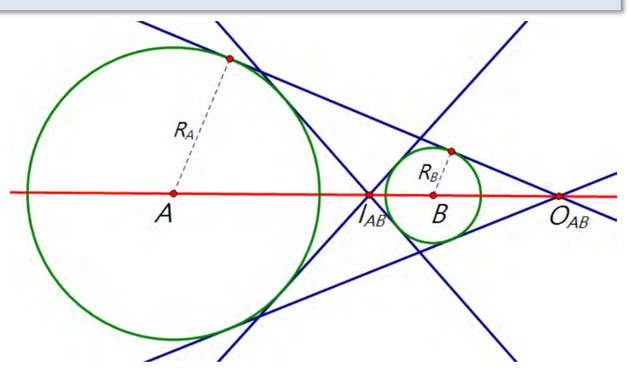


【性質３】位似比

若兩多邊形相似，且對應頂點的連線交於一點時，稱此兩圖形為**位似圖形**，其交點稱為**位似中心**，此時的**相似比**又稱為**位似比**。



位似比 $=\frac{\overline{A\,I_{AB}}}{\overline{B\,I_{AB}}}=\frac{\overline{A\,O_{AB}}}{\overline{B\,O_{AB}}}=\frac{r_A}{r_B}$



▲由於圓可視為無限邊形，故此性質在兩圓上亦成立。

【性質４】Desargues定理

平面或空間中的兩個三角形，若其對應點連線共點，則其對應邊延長線的交點共線，其逆敘述亦成立。

【性質５】Pascal定理

平面上的六邊形，若其內接於一圓錐曲線，則其對邊延長線的交點共線，其逆敘述亦成立。

【性質６】Brianchon定理

平面上的六邊形，若其外切於一圓錐曲線，則其對角線共點，其逆敘述亦成立。

伍、研究結果與討論

一、平面上n圓的廣義蒙日線與蒙日點

【定理１】n 圓廣義蒙日線

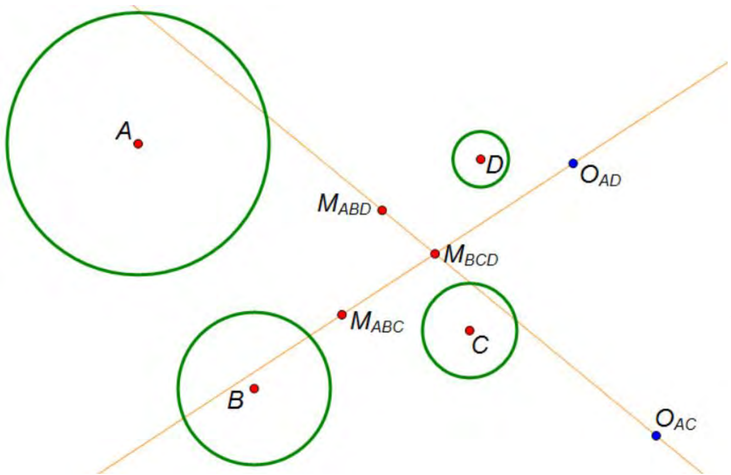
n個外離圓中，任選2圓作外公切線交點，此2圓再分別與其餘圓作n-1圓蒙日點，則此三點共線，稱其為n圓廣義蒙日線。

【定理２】n 圓蒙日點

n個外離圓中，任1圓圓心與另n-1圓蒙日點連線，則此n條直線必共交一點，稱其為n圓蒙日點。

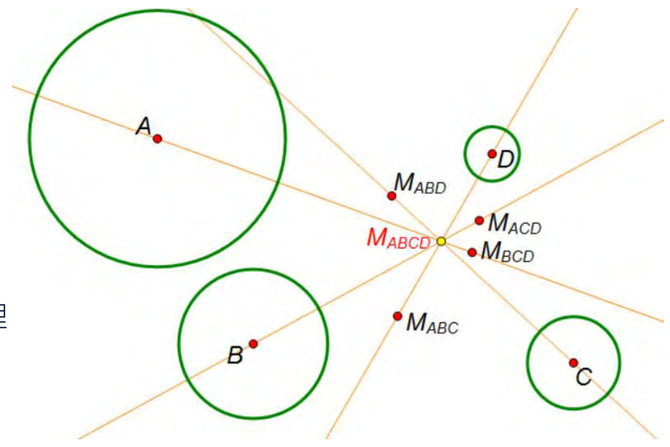
【定理３】2圓與另n-2圓蒙日點連線

n個外離圓中，任選2圓作內公切線交點，另n-2圓作蒙日點，則此二點的連線皆會通過n圓蒙日點。



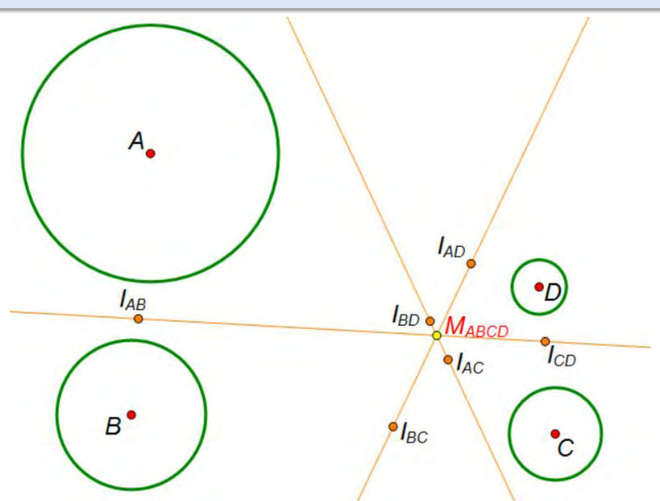
▲4圓的廣義蒙日線

笛沙格定理



▲4圓的蒙日點

孟氏定理
西瓦定理



▲2圓內公切線交點與另2圓蒙日點連線

孟氏定理

數學歸納法

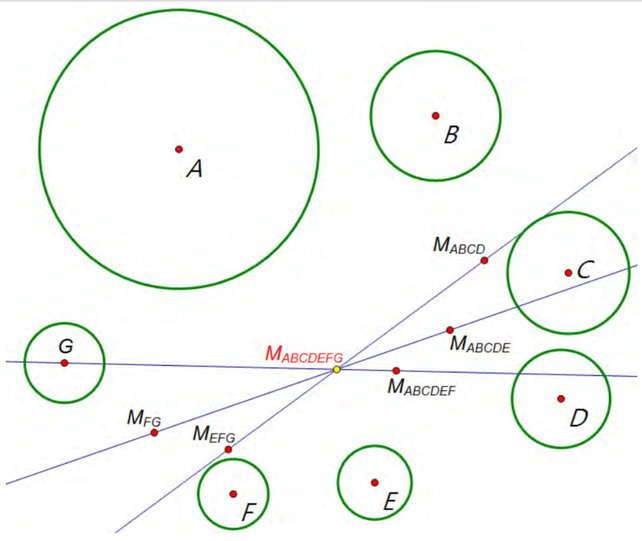
以退化觀點可定義：
二圓蒙日點為二圓的內公切線交點；
一圓蒙日點為圓心。

→ 1圓蒙日點與n−1圓蒙日點連線通過n圓蒙日點。

＋ 2圓蒙日點與n−2圓蒙日點連線通過n圓蒙日點。

【定理４】圓分堆的蒙日點共線性質

平面上n個外離圓中，任意k圓的蒙日點與另n-k圓的蒙日點連線，皆通過n圓的蒙日點。



◂ 7圓分堆的蒙日點共線性質

7=1+6=2+5=3+4

例如(M_G 、M_{ABCDEF})、(M_{FG} 、M_{ABCDE})、(M_{EFG} 、M_{ABCD})，其連線皆通過$M_{ABCDEFG}$

【定理５】蒙日點座標與距離關係

◆ n 圓蒙日點座標

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{r_i}\right)\cdot\overrightarrow{OM_{A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n}}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{r_i}\cdot\overrightarrow{OA_i}\right)$$

◆ 蒙日點間距離關係

$$\overline{M_{A_1A_2\cdots A_k}M_{A_1A_2\cdots A_n}}:\overline{M_{A_1A_2\cdots A_n}M_{A_{k+1}A_{k+2}\cdots A_n}}=\left(\sum_{i=k+1}^{n}\frac{1}{r_i}\right):\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{r_i}\right)$$

▸如左圖，以n=7為例：

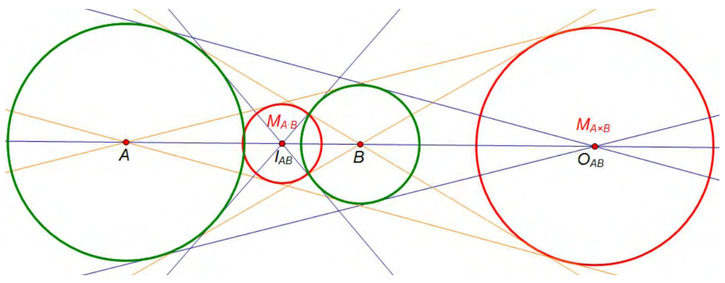
$$\left(\frac{1}{r_A}+\frac{1}{r_B}+\frac{1}{r_C}+\frac{1}{r_D}+\frac{1}{r_E}+\frac{1}{r_F}+\frac{1}{r_G}\right)\cdot\overrightarrow{OM_{ABCDEFG}}=\frac{\overrightarrow{OA}}{r_A}+\frac{\overrightarrow{OB}}{r_B}+\frac{\overrightarrow{OC}}{r_C}+\frac{\overrightarrow{OD}}{r_D}+\frac{\overrightarrow{OE}}{r_E}+\frac{\overrightarrow{OF}}{r_F}+\frac{\overrightarrow{OG}}{r_G}$$

$$\overline{M_{ABCD}M_{ABCDEFG}}:\overline{M_{ABCDEFG}M_{EFG}}=\left(\frac{1}{r_E}+\frac{1}{r_F}+\frac{1}{r_G}\right):\left(\frac{1}{r_A}+\frac{1}{r_B}+\frac{1}{r_C}+\frac{1}{r_D}\right)$$

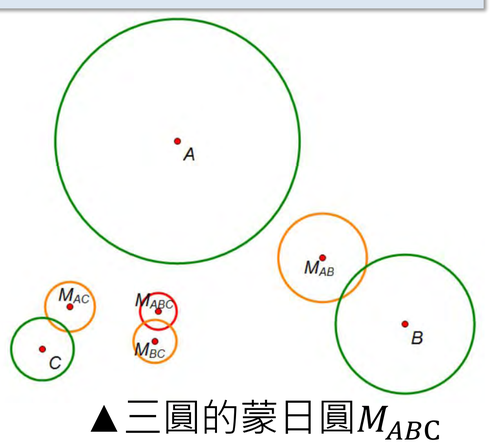
二、以蒙日圓定義推廣蒙日線與廣義蒙日點

【定義６】蒙日圓與廣義蒙日圓

平面上兩個外離圓A、B，過一圓作另一圓切線，則必存在與此四線相切的兩個圓：若圓心在連心線段上，則稱其為**蒙日圓**，以$M_{A\cdot B}$（或M_{AB}）表之；若圓心在連心線外，則稱其為**廣義蒙日圓**，以$M_{A\times B}$表之。此兩圓圓心分別為內、外公切線交點。



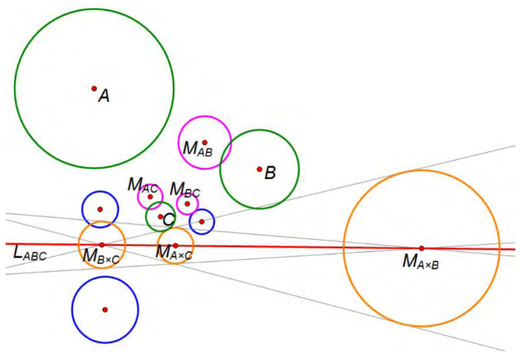
▲ $M_{A\cdot B}$ 表示對圓 A、B 作蒙日圓、$M_{A\times B}$表示對圓 A、B 作廣義蒙日圓。



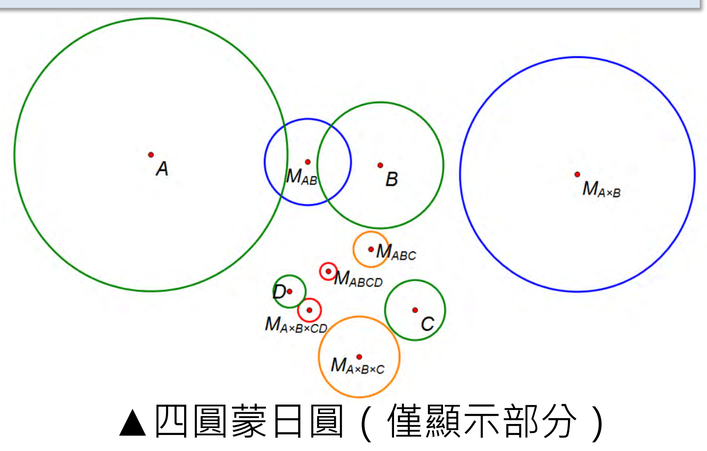
▲三圓的蒙日圓M_{ABC}

【定義７】n圓廣義蒙日圓與廣義蒙日點

平面上n個外離圓中，任選一圓依序對下一圓作蒙日圓或廣義蒙日圓，所得再繼續對下一圓作前述動作，直到最後。若都作蒙日圓則其最後結果稱為**n圓蒙日圓**，否則均稱為**n圓廣義蒙日圓**；且其圓心即分別為**n圓蒙日點**與**廣義蒙日點**。



▲三圓的廣義蒙日圓



▲四圓蒙日圓（僅顯示部分）

【定理８】n圓蒙日圓半徑與圓心座標

◆ n 圓蒙日圓半徑

由一圓開始，依序將半徑倒數累加，每作廣義蒙日圓時則變累減，再遇則又變回累加，以此類推，累計結果取絕對值的倒數即為所求圓半徑。

◆ n 圓蒙日圓圓心座標

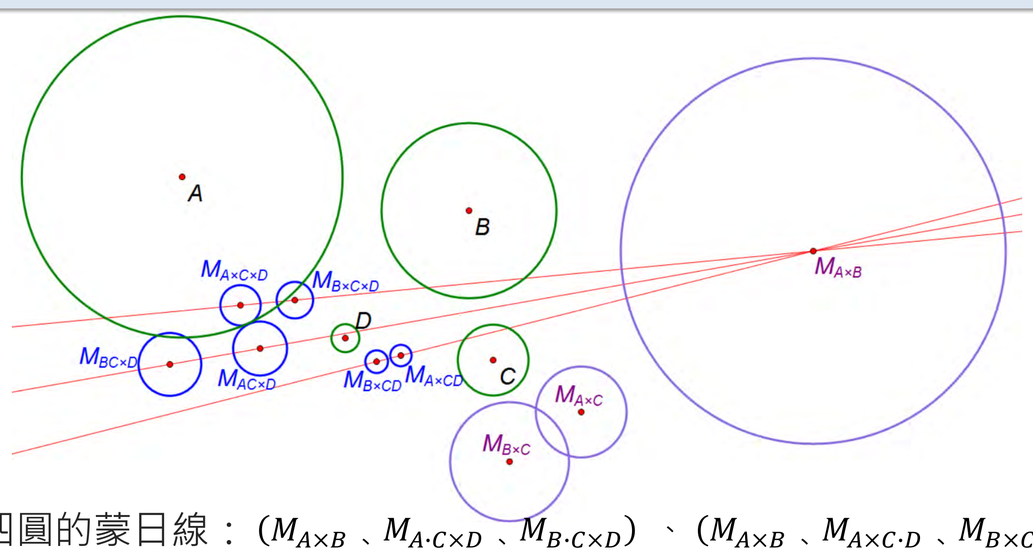
由一圓開始，依序將圓心座標除以半徑的值累加，每作廣義蒙日圓時則變累減，再遇則又變回累加，以此類推，累計結果除以半徑的累計結果即為所求圓心座標。

$$\frac{1}{r_{M_{A\cdot B\times C\cdot D}}}=\left|\frac{1}{r_A}+\frac{1}{r_B}-\frac{1}{r_C}-\frac{1}{r_D}\right|\qquad\left(\frac{1}{r_A}+\frac{1}{r_B}-\frac{1}{r_C}-\frac{1}{r_D}\right)\cdot\overrightarrow{OM_{A\cdot B\times C\cdot D}}=\frac{\overrightarrow{OM_A}}{r_A}+\frac{\overrightarrow{OM_B}}{r_B}-\frac{\overrightarrow{OM_C}}{r_C}-\frac{\overrightarrow{OM_D}}{r_D}$$

$$\frac{1}{r_{M_{A\times B\times C\times D}}}=\left|\frac{1}{r_A}-\frac{1}{r_B}+\frac{1}{r_C}-\frac{1}{r_D}\right|\qquad\left(\frac{1}{r_A}-\frac{1}{r_B}+\frac{1}{r_C}-\frac{1}{r_D}\right)\cdot\overrightarrow{OM_{A\times B\times C\times D}}=\frac{\overrightarrow{OM_A}}{r_A}-\frac{\overrightarrow{OM_B}}{r_B}+\frac{\overrightarrow{OM_C}}{r_C}-\frac{\overrightarrow{OM_D}}{r_D}$$

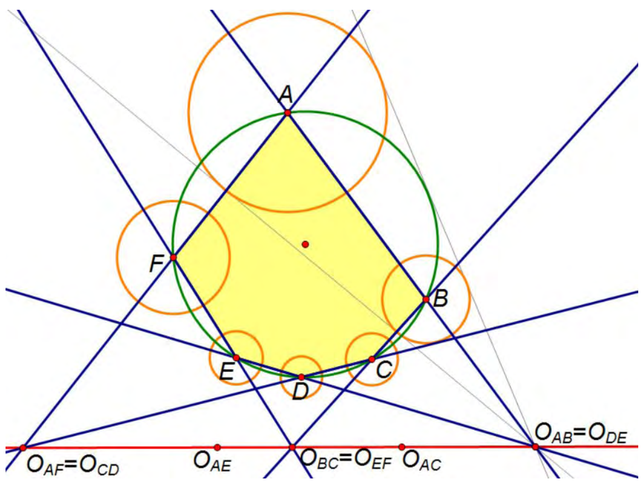
【定理９】n圓蒙日線

平面上n個外離圓中，任選2圓作廣義蒙日圓的圓心，再分別與另n-2圓作n-1圓廣義蒙日圓的圓心，則此三個廣義蒙日圓的圓心三點共線，稱其為**n圓蒙日線**。

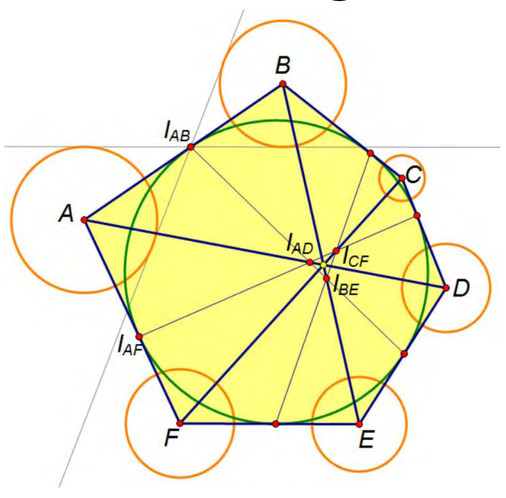


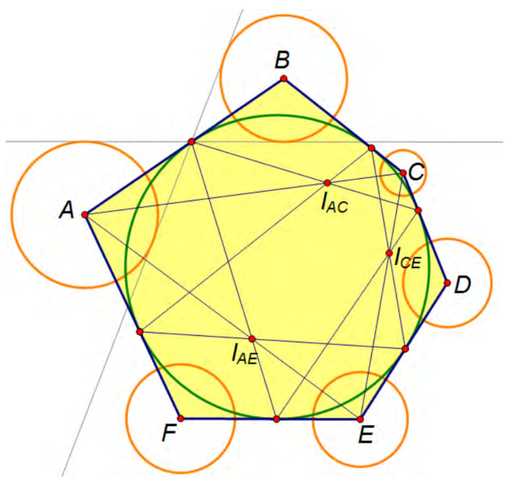
▲四圓的蒙日線：($M_{A\times B}$、$M_{A\cdot C\times D}$、$M_{B\cdot C\times D}$)、($M_{A\times B}$、$M_{A\times C\cdot D}$、$M_{B\times C\cdot D}$)、($M_{A\times B}$、$M_{A\times C\times D}$、$M_{B\times C\times D}$) 均三點共線。

【定理１０】Pascal、Brianchon、Desargues定理中的蒙日圓關係

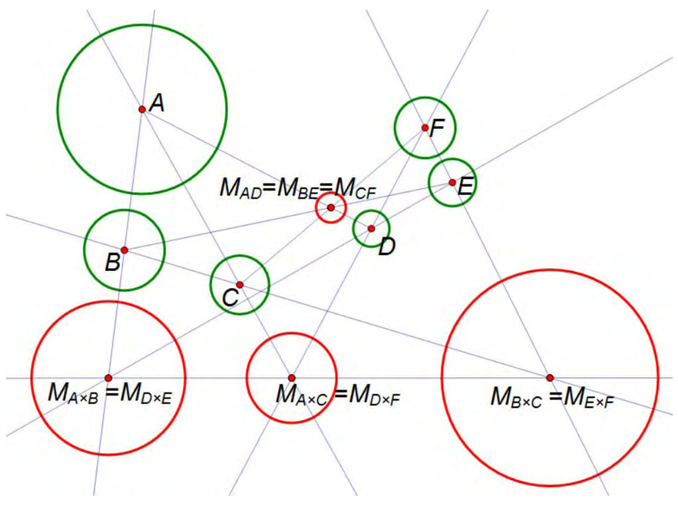


▲在圓內接六邊形一頂點上作一圓，並依序以下一頂點為圓心，邊延長線上交點為位似外心作一圓，以此類推，則任兩圓外公切線交點皆在Pascal線上。





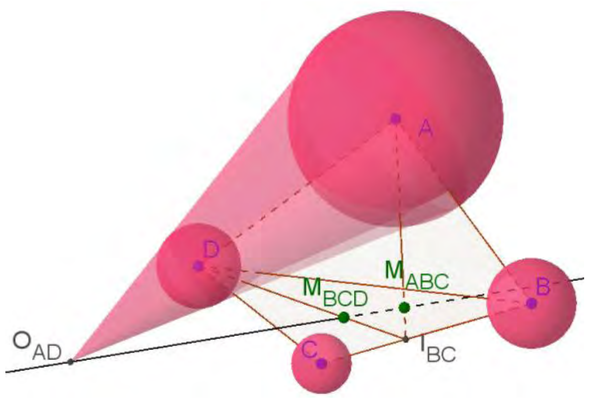
▲在圓外切六邊形一頂點上作一圓，並依序以下一頂點為圓心，邊上切點為位似內心作一圓，以此類推，則任兩圓內公切線交點皆為廣義Brianchon點。



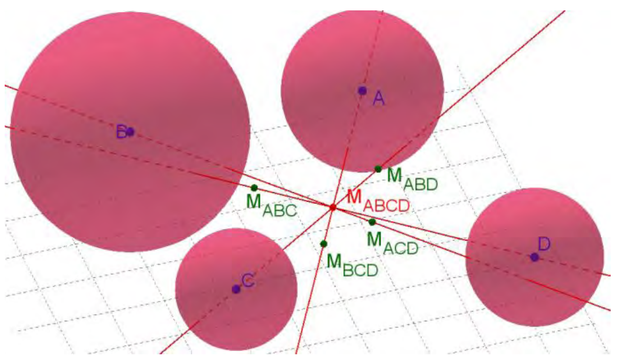
▲平面上的六個外離圓，並分為兩組三圓，若對應各組任兩圓的廣義蒙日圓皆重合，則對應的蒙日圓重合，其逆敘述亦成立。

三、空間中球體的蒙日定理性質推廣

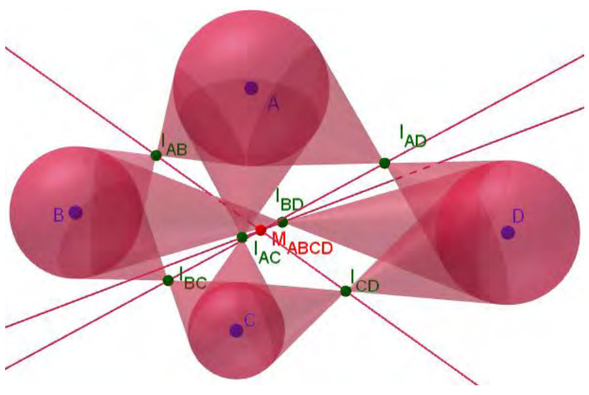
【定理１１】n球的蒙日點、廣義蒙日線與分堆共線性質



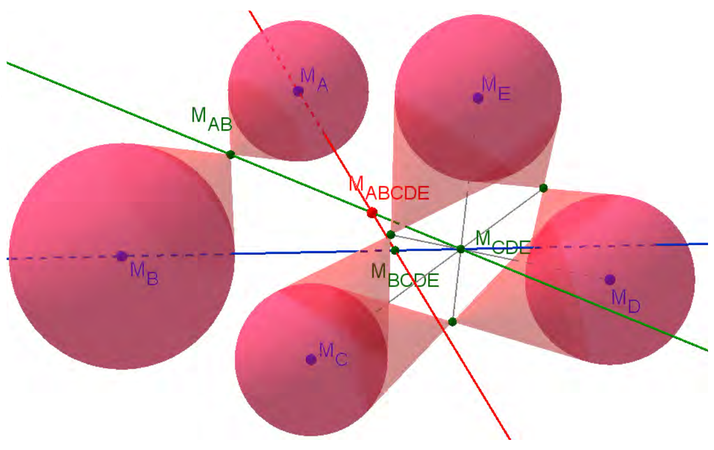
▲四球廣義蒙日線



▲四球蒙日點

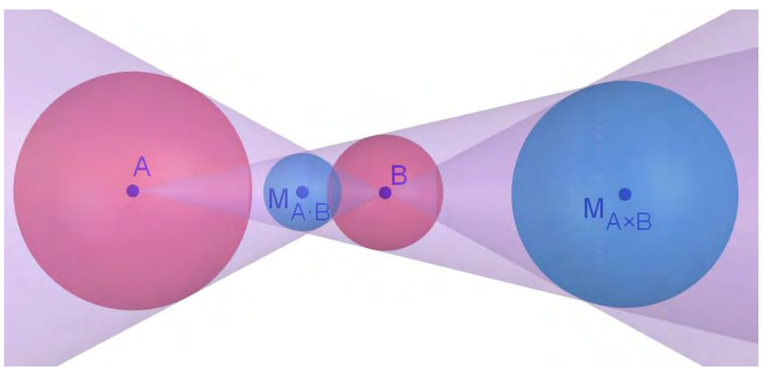


▲二球蒙日點與另二球蒙日點連線必通過四球蒙日點。

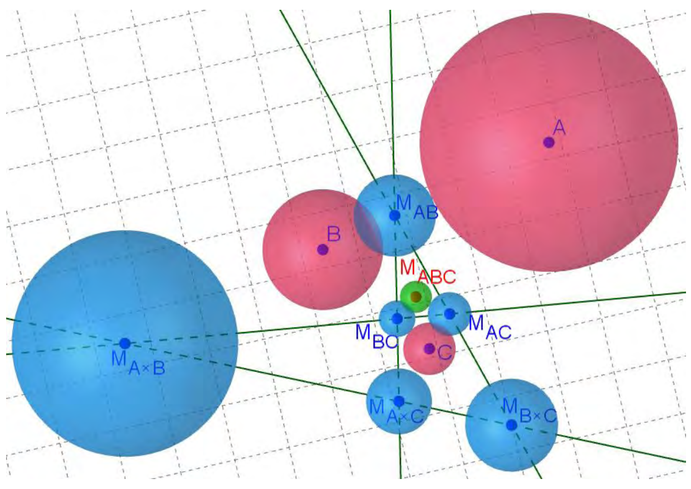


▲五球分堆的蒙日點共線性質
5=1+4=2+3

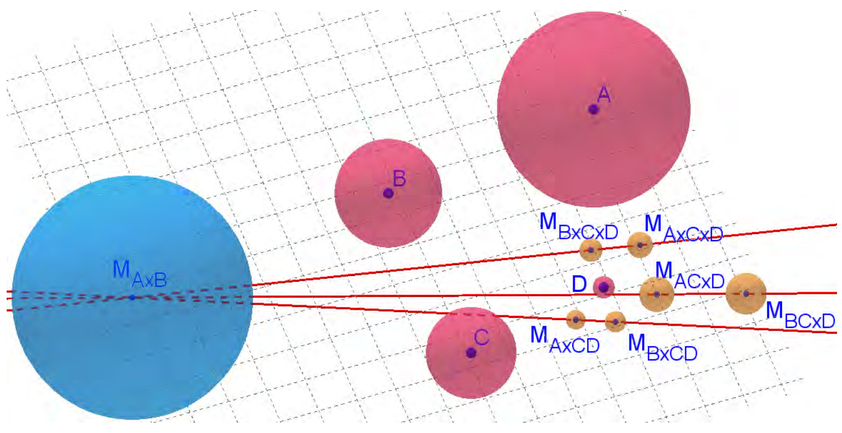
【定理１２】n球的蒙日球、蒙日線、廣義蒙日點



▲ 二球的蒙日球、廣義蒙日球



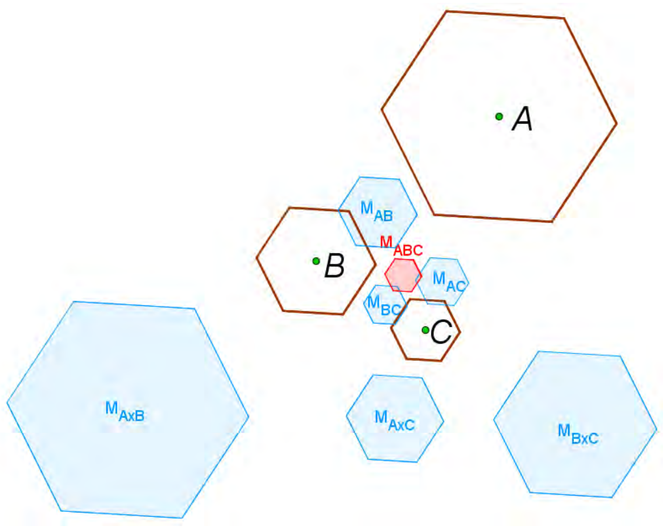
▲三球的蒙日球(點)與(廣義)蒙日線



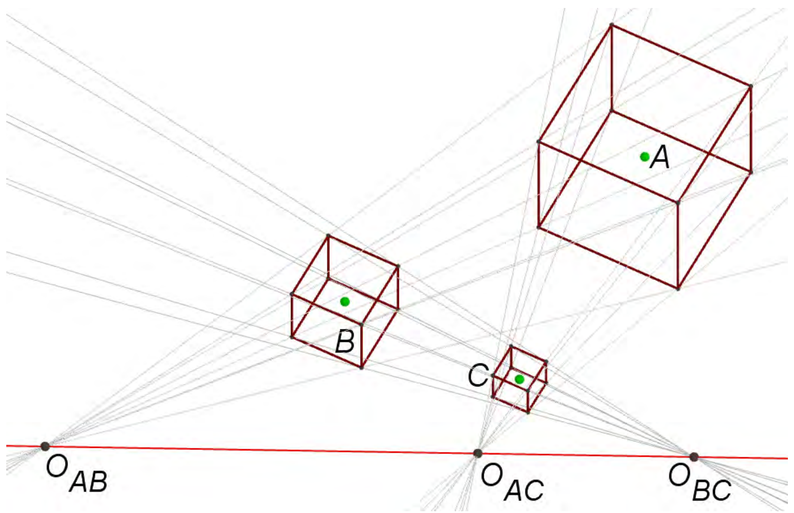
▲四球廣義蒙日點與蒙日線

四、蒙日定理在位似圖形上的性質推廣

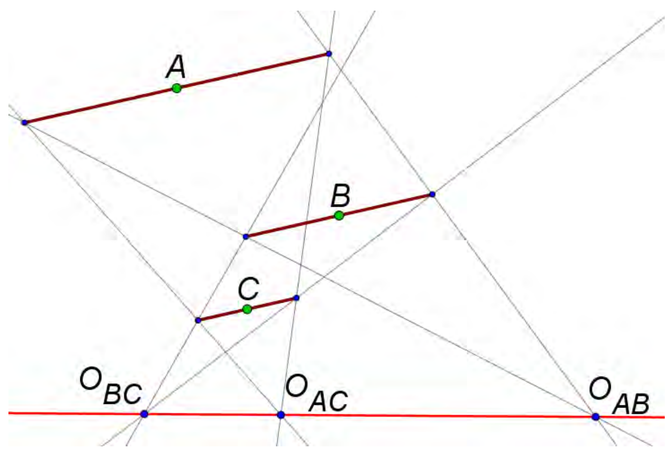
【定理１３】n 個位似圖形的蒙日定理



▲三個位似圖形的蒙日形與廣義蒙日形



▲三個位似體的蒙日線



▲位似線段中的蒙日線

陸、研究結論

一、平面上n個外離圓的蒙日定理：

(一)由一圓開始依序對下一圓作蒙日圓或廣義蒙日圓，若皆作蒙日圓，則最後得唯一的n**圓蒙日圓**，其圓心為n**圓蒙日點**；其餘得$2^{n-1}-1$個不同的n**圓廣義蒙日圓**，其圓心為n**圓廣義蒙日點**。

(二)任意2圓作廣義蒙日點，再分別與其餘圓作n-1圓廣義蒙日點，則此三點共線，稱為n**圓蒙日線**。

(三)任意2圓作廣義蒙日點，再分別與其餘圓作n-1圓蒙日點，則此三點共線，稱為n**圓廣義蒙日線**。

(四)**圓分堆的蒙日點共線性質**：k圓蒙日點、n-k圓蒙日點與n圓蒙日點三點共線。

二、透過蒙日圓的觀點，發現Pascal神秘六邊形定理、Brianchon定理與Desargues定理皆與蒙日定理有密切關係。

三、透過位似比可證得n圓蒙日圓的圓心(蒙日點)位置、半徑與各圓圓心位置、半徑的關係，並推得蒙日點與分堆蒙日點的距離關係；對 n圓廣義蒙日圓亦同。

四、上述推廣至多邊形、空間中的球體及多面體或線段，若圖形互相「位似」，則性質皆仍成立。

柒、未來展望

從上述結論可發現無論是n個圓、球、多邊形或多面體等位似圖形，它們必存在一個類似平衡概念的中心點（蒙日點）或中心圖形（蒙日圓或蒙日形），其位置大小均與此n個圖形的位置大小有所相關，不禁令人想像「**是否可運用蒙日點或蒙日圓（球）的概念去權衡各個位似圖形的位置與大小關係？**」。同時，本研究為射影幾何上的討論，或許可成為幾何光學應用的理論基礎，並在探究宇宙星體間奧秘關係方面上，期待亦能找到代表多個星體的**蒙日星體**，值得日後做進一步的探討。

捌、參考資料

1. 蒙日定理和一个对偶定理（2007）。
2. Pierre Beaudry（1995）. The Geometry of the One and the Many.
3. David Graham Searby (2009). Forum Geometricorum.(Volume 9 P.181–193).