中華民國第 57 屆中小學科學展覽會

作品說明書

高級中等學校組　數學科

佳作

050403

數的循環

學校名稱：國立彰化女子高級中學

作者：	指導老師：
高二 鍾佳霖 高二 黃甄儒 高二 李佳怡	游竣博

關鍵詞：運算、循環節次、變號數

摘要

我們欲證明任意 n 個正整數(n>1)之數列，其相鄰兩數相減之絕對值形成一個新數列，重複這個"運算"之數列是否具有循環性，並試圖找出其循環節次。

例：

0000	2	3	4	2	3
0001	1	1	2	1	1
0002	0	1	1	0	0
0003	1	0	1	0	0
0004	1	1	1	0	1
0005	0	0	1	1	0
0006	0	1	0	1	0
0007	1	1	1	1	0
0008	0	0	0	1	1
0009	0	0	1	0	1
0010	0	1	1	1	1
0011	1	0	0	0	1
0012	1	0	0	1	0
0013	1	0	1	1	1
0014	1	1	0	0	0
0015	0	1	0	0	1
0016	1	1	0	1	1
0017	0	1	1	0	0

$\langle a_2 \rangle = \langle a_{17} \rangle = 0\ 1\ 1\ 0\ 0$，
其循環節次為 17－2＝15 次

此"運算"的循環節次為 15(週期為 15)

壹、研究動機

有一天，我們翻閱第三十五屆的全國數學科展，證明了一個有趣的問題：方塊數論（如附件 A）。藉此我們想深入推廣，繼續研究下面這個問題：任意 n 個正整數之數列(n>1)其相鄰兩數相減之絕對值形成一新數列，重複這個"運算"，欲證明此"運算"的數列具有「循環性」，並找出其循環節次。

貳、研究目的

一、設計電腦程式來實驗任意 n 個正整數(n＞1)之數列依此"運算"是否具有循環性。

二、理論證明
- (一) 任意 n 個正整數之數列依此"運算"是否具有循環性。
- (二) 任意 n 個正整數之數列依此"運算"，找出其循環節次。

參、研究設備及器材

一、紙、筆、電腦。

二、電腦程式設計
- 附件 B: 數字"運算"之循環操作
- 附件 C: 以 a b c……代表數字"運算"之循環操作

肆、電腦程式設計之操作過程

一、一般性的例子，以下兩個數列"運算"的例子皆可造成"循環"。

(一) 例 1：任意填入 3 個整數之數列，經重複"運算"必可得最後一列皆為"0"和"M_i"的整數並產生循環。

〈a_i〉				最大值〈M_i〉	總和〈S_i〉	
0000	2	4	9	9	15	
0001	2	5	7	7	14	
0002	3	2	5	5	10	
0003	1	3	2	3	6	
0004	2	1	1	2	4	
0005	1	0	1	1	2	環狀排列之循環
0006	1	1	0	1	2	
0007	0	1	1	1	2	
0008	1	0	1	1	2	

由此開始數列內的整數非 0 即 1

由此可知 M_i 遞減

直線排列之循環

表一：任意 3 個整數之測試

(二) 例 2：任意填入 5 個整數之數列，經重複"運算"必可得最後一列皆為"0"和"M_i"的整數並產生循環。

〈a_i〉						最大值〈M_i〉	總和〈S_i〉	
0000		3	2	3	1	4	4	13	
0001		1	1	2	3	1	3	8	
0002		0	1	1	2	0	2	4	
0003		1	0	1	2	0	2	4	
0004		1	1	1	2	1	2	6	
0005		0	0	1	1	0	1	2	環狀排列之循環
0006		0	1	0	1	0	1	2	
0007		1	1	1	1	0	1	4	
0008		0	0	0	1	1	1	2	
0009		0	0	1	0	1	1	2	
0010		0	1	1	1	1	1	4	
0011		1	0	0	0	1	1	2	
0012		1	0	0	1	0	1	2	
0013		1	0	1	1	1	1	4	
0014		1	1	0	0	0	1	2	
0015		0	1	0	0	1	1	2	
0016		1	1	0	1	1	1	4	
0017		0	1	1	0	0	1	2	
0018		1	0	1	0	0	1	2	
0019		1	1	1	0	1	1	4	
0020		0	0	1	1	0	1	2	

由此開始數列內的整數非 0 即 1

由此可知 M_i 遞減

直線排列之循環

表二：任意 5 個整數之測試

伍、解釋名詞

一、符號說明

（一）$<a_0>$為原始數列，其最大值為M_0。數列內各數總和為S_0。

（二）$<a_i>$為經過 i 次運算後之數列，其最大值為M_i，總和為S_i。

（三）$<M_i>$為M_0、M_1、M_2……M_n所形成之數列。

二、名詞解釋

（一）運算：一個數列$<a_0>$，將相鄰兩數相減取其絕對值而成一新數列$<a_1>$稱之為"**運算**"。

（二）循環：數列$<a_0>$運算 n 次後得數列$<a_n>$，若再經 m－n 次運算使得$<a_n>=<a_m>$即$<a_m>$、$<a_n>$兩數列完全一樣，稱$<a_n>$到$<a_m>$為**循環**，其循環節次為 m－n。

由 表二 知數列 $<a_5>=<0\ 0\ 1\ 1\ 0>$，再運算 15 次得$<a_{20}>$

$=<0\ 0\ 1\ 1\ 0>$，知$<a_5>\equiv<a_{20}>$。

所以$<a_5>$到$<a_{20}>$為一循環，其循環節次為

20－5＝15 (次)。

（三）直線排列之循環：$<a_n>$之第 i 項與$<a_m>$之第 i 項相同時稱之。(i=1、2…… n)

例題：三個整數所形成之數列

$<a_0>\ \equiv\ 0\quad 1\quad 1$

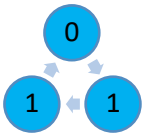
$<a_1>\ \equiv\ 1\quad 0\quad 1$

$<a_2>\ \equiv\ 1\quad 1\quad 0$

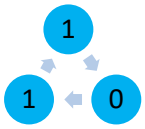
$<a_3>\ \equiv\ 0\quad 1\quad 1$

$<a_0>$到$<a_3>$即為直線排列之循環。

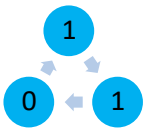
（四）環狀排列之循環：將數列頭尾連成一圓，若<a_m>、<a_n>之排列相同，則稱<a_n>到<a_m>為一環狀排列的循環，如上述（三）之例題的<a_0>到<a_1>、<a_1>到<a_2>、<a_2>到<a_3>皆是。



<a_0> ≡ 0 1 1



<a_1> ≡ 1 0 1



<a_2> ≡ 1 1 0

（五）同號、變號之定義：

1. 11、00稱為同號。

   運算 11 得0，運算 00 得0

2. 10、01稱為變號。

   運算 10 得1，運算 01 得1

陸、理論證明與討論過程

一、任意有限數列經有限次運算必產生循環或歸零（下列論述均對有限數列而言）

證明過程如下

(一)定理甲：數列<a_0>含有三個相異數以上，經有限次運算後，則M_0一定會遞減

證明如下：

1. 若數列<a_0>中M_0的相鄰數是不為0且較M_0小的數，則M_0與此相鄰數相減必立即嚴格遞減。　例：<a_0>　0　0　2　9　1　0　8（M_0）

   <a_1>　0　2　7　8　1　8　8　可看出M_0立即嚴格遞減

   若將不為0且較M_0小的M_0相鄰數設為a

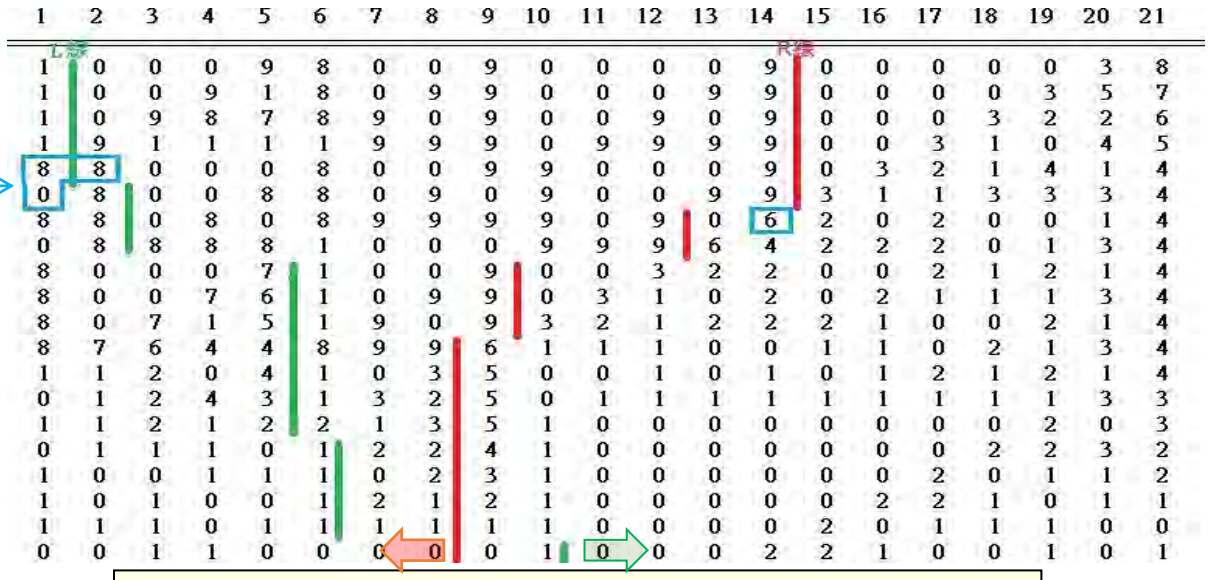
   設原始數列<a_0>＝0 0 a M_0 0……，則運算時$M_0-a<M_0$，即立即嚴格遞減。

2. 若數列<a_0>中M_0的相鄰數是 0 則經有限次運算後也必遞減

先舉一個例子證明：　　將數列　9 8 0 0 9 0 0 0 0 9 0 0 0 0 3 8 1 0 0 0

繞排得 <a_0>為　1 0 0 0 9 8 0 0 9 0 0 0 0 9 0 0 0 0 0 3 8

使<a_0>數列首項不為M_0 及 0，然後繼續運算<a_0>至<a_{19}> 。如表三



L 線右移，R 線左移至兩線重疊或交錯，此時最大數 9 必消失

表三：數列<a_0>經運算M_0必遞減的例子

(1)將 L 線置於表三首項 1 的右側，則最大數M_0(9)必不會在 L 線的左側出現。

理由如下：

① 運算方式為兩數之差置於左數之下方，L 線左側這一行不是 0，則此數與 L 線右側之數減左側之數的差必小於 9

② 若 L 線左方這一行出現 0，則 0 的上方和右上方兩數必相同

則我們將這 L 線右移，直到 L 線左方那一數不為 0 為止，如此可保證 L 線左方相鄰之數必為非 0 之數。

由①②知最大數 9 不會出現在 L 線之左側。

(2)將 R 線置於最右方的 9 之右側，可知 9 不會出現於 R 線的右側。

(3)由(1)(2)知 9 已被限定在 L 線及 R 線所夾的區間，今我們來證明此 L 線及 R 線

所夾之區間必逐漸縮小，直至 L 線與 R 線重疊或交錯為止。

① R 線左方之第一行必出現一個小於 9 之數，如表三之 R 線左方的 6

理由：L 線左方必有一不為 0 且比 9 較小之數，此數經有限次運算一直朝左下移，最後碰到 9 相減得到 6 這個較小之數。(說明見 3. 數學歸納法)

② 此數 6 之下方不可能再出現最大數 9，因為較小之數 6 與最大數 9 之差不可能為 9。

③ 最大數 9 可能出現的區間少了一行，故 R 線向左移。

④ 由①②③的現象重複出現 R 線不斷向左移，而 L 線時而停止，時而向右移，最後 L 線與 R 線重疊或交錯，已沒有區間可容納最大數 9，所以最大數 9 必消失。

由(1)(2)(3)知最大數 9 必消失會得到一個較小數成為新的最大數，故M_0必遞減，得證。

3.數學歸納法：設$M_0 \geqq M > 0$，M_0最大，M_0與 M 之間會有 n 個 0，經 n＋1 次運算M_0，必遞減。

證明如下：

① n＝0　　M_0　M

運算一次得　$M_0 - M < M_0$　得證

② 設 n＝k 時

M_0　0 0 0…… 0 M 經 k＋1 次運算後得

$M_0 - M$　M_0遞減

③ 當 n=k＋1 時，M_0　0 0 0……0 M

（k＋1 個 0）

運算 1 次，M_0　0 0……0 M

（k 個 0）

運算 2 次，M_0　0 ……0 M

（k－1 個 0）

每運算一次少一個 0，故運算 k＋1 次，M_0、M必相鄰

再運算一次得M_0－M

故運算 k＋2 次必可減少最大值M_0，由數學歸納法得知，最大值M_0必遞減。

經上述之討論，同理M_i必遞減。

由 1.2.3.之論述，定理甲得證。

(二) 定理乙：$<a_0>$經有限次運算後不是均變為 0，就是變成 0、m 兩種數字

分三種情形證明如下：

1. 若數列$<a_0>$內共有2^n個數經有限次運算後必全為 0。

2. 若重複上述之數列$<a_0>$ k 次得到形如$<a_0>' \equiv a_1a_2a_3\cdots a_{2^n}, a_1a_2a_3\cdots a_{2^n}, \cdots\cdots,$

$a_1a_2a_3\cdots a_{2^n}$，則經有限次運算後亦全為 0：

例												最大值
1	3	0	5	1	3	0	5	1	3	0	5	5
2	3	5	4	2	3	5	4	2	3	5	4	5
1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	2
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

證明過程：

數列 $<a_0>' \equiv a_1a_2a_3\cdots a_{2^n}$ ， $a_1a_2a_3\cdots a_{2^n}$ ， …… ， $a_1a_2a_3\cdots a_{2^n}$

之運算如下

$a_1a_2a_3\cdots a_{2^n}$	$a_1a_2a_3\cdots a_{2^n}$	……	$a_1a_2a_3\cdots a_{2^n}$
$b_1b_2b_3\cdots b_{2^n}$	$b_1b_2b_3\cdots b_{2^n}$	……	$b_1b_2b_3\cdots b_{2^n}$
$c_1c_2c_3\cdots c_{2^n}$	$c_1c_2c_3\cdots c_{2^n}$	……	$c_1c_2c_3\cdots c_{2^n}$
⋮	⋮	⋮	⋮
0 0 0 ... 0	0 0 0 ... 0	……	0 0 0 ... 0

3. 若數列<a_0>中除了 0 與M_0外，尚有另一數M_i，而$M_i < M_0$ ，由定理甲得知M_0必會遞減，而一直遞減的結果，每一項均變為 0，因為M_i必遞減，而底限為 0，自然最後每一數均變為 0，除非當<a_i>數列中僅剩下 0 與M_i兩種數，故定理乙得證。

(三) 定理丙：數列個數不是2^n個且$a_i \in \{0、m\}$時，經有限次運算則產生循環或歸零

先以 5 個數的數列為例

〈a_0〉 ≡	0	m	0	0	m
	m	m	0	m	m
	0	m	m	0	0
	m	0	m	0	0
	m	m	m	0	m
〈a_5〉 ≡	0	0	m	m	0
	0	m	0	m	0
	m	m	m	m	0
	0	0	0	m	m
	0	0	m	0	m
〈a_{10}〉 ≡	0	m	m	m	m
	m	0	0	0	m
	m	0	0	m	0
	m	0	m	m	m
	m	m	0	0	0
〈a_{15}〉 ≡	0	m	0	0	m

當數列運算到只剩 0、m 兩種數字，若此數列中有 k 個整數，則由 0、m 組成 k 個的直線排列情形就只有2^k種，最多運算2^k+1次，必有重複的情況，此時便會產生循環或歸零

故定理丙得證。

二、 除了數列個數為2^n個以外，其餘數列循環節次之計算與討論過程如下：

(一) 由定理乙<a_0>經有限次運算後不是均變為 0，就是變成 0、m 兩種數字時，

我們定義 $m-0 \equiv m+0$

$m-m \equiv m+m \equiv 0$

$0-0 \equiv 0+0 \equiv 0$

雖然我們的運算本來是減法，當數列經減法運算遞減至只含 0、m 兩種數字時，跟我們現在定義的加法運算是同構的。

運算由減法改為加法之原由:

例 <a_0>≡ a b c [<a_0>有 3 個數 a b c 不是 0 就是 m]

	a	b	c
減法運算一次得	a-b or b-a	b-c or c-b	c-a or a-c
	a	b	c
運算一次得	a+b	b+c	c+a

由上可知，若利用減法運算一次後<a_0>中的每個數都有兩種情形，得 $2^3=8$ 種情形，其運算太過複雜，但若用加法來運算，則只會有一種情形，故我們定義用加法來運算。

之後的證明其"運算"皆改為加法

(二) 今我們欲計算與證明下列各個數列之循環節次

1. <a_0 >≡ a b c 〔<a_0> 有 $2^2-1=3$ 個數 a b c 不是 0 就是 m〕

	a	b	c	a	b	c
循環節次為 3	a+b	b+c	c+a	ab	bc	ca
	a+c	b+a	c+b	ac	ba	cb
	c+b	a+c	b+a	cb	ac	ba
	b+a	c+b	a+c	ba	cb	ac

表四：含 2^2-1 個數之數列其循環節次為2^2-1

為了節省空間，把"＋"省略可得右表

以下類似例子之運算皆把"＋"省略

2. $<a_0>$≡ a b c d e 〔$<a_0>$ 有 5 個數 a b c d e 不是 0 就是 m〕

a	b	c	d	e
ab	bc	cd	de	ea
ac	bd	ce	da	eb
acbd	bdce	ceda	daeb	ebac
ae	ba	cb	dc	ed
eb	ac	bd	ce	da
ebac	acbd	bdce	ceda	daeb
ed	ae	ba	cb	dc
da	eb	ac	bd	ce
daeb	ebac	acbd	bdce	ceda
dc	ed	ae	ba	cb
ce	da	eb	ac	bd
ceda	daeb	ebac	acbd	bdce
cb	dc	ed	ae	ba
bd	ce	da	eb	ac
bdce	ceda	daeb	ebac	acbd
ba	cb	dc	ed	ae

表五：含 5 個數之數列其循環節次為 15

3. $<a_0>$≡ a b c d e f 〔$<a_0>$ 有6個數 a b c d e f不是0就是m〕

a	b	c	d	e	f
ab	bc	cd	de	ef	fa
ac	bd	ce	df	ea	fb
acbd	bdce	cedf	dfea	eafb	fbac
ae	bf	ca	db	ec	fd
aebf	bfca	cadb	dbec	ecfd	fdae
ec	fd	ae	bf	ca	db
ecfd	fdae	aebf	bfca	cadb	dbec
ca	db	ec	fd	ae	bf

表六：含 6 個數之數列其循環節次為 6

4. $<a_0>$≡ a b c …… j 〔$<a_0>$ 有10個數 a b c…j不是0就是m〕

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
ab	bc	cd	de	ef	fg	gh	hi	ij	ja
ac	bd	ce	df	eg	fh	gi	hj	ia	jb
acbd	bdce	cedf	dfeg	egfh	fhgi	gihj	hjia	iajb	jbac
ae	bf	cg	dh	ei	fj	ga	hb	ic	jd
aebf	bfcg	cgdh	dhei	eifj	fjga	gahb	hbic	icjd	jdae
aecgbfdh	bfdhcgei	cgeidhfj	dhfjeiga	eigafjhb	fjhbgaic	gaichbjd	hbjdicae	icaejdbf	jdbfaecg
ai	bj	ca	db	ec	fd	ge	hf	ig	jh
ic	jd	ae	bf	cg	dh	ei	fj	ga	hb
icjd	jdae	aebf	bfcg	cgdh	dhei	eifj	fjga	gahb	hbic
icae	jdbf	aecg	bfdh	cgei	dhfj	eiga	fjhb	gaic	hbjd
icaejdbf	jdbfaecg	aecgbfdh	bfdhcgei	cgeidhfj	dhfjeiga	eigafjhb	fjhbgaic	gaichbjd	hbjdicae
ig	jh	ai	bj	ca	db	ec	fd	ge	hf
igjh	jhai	aibj	bjca	cadb	dbec	ecfd	fdge	gehf	hfig
ga	hb	ic	jd	ae	bf	cg	dh	ei	fj
gahb	hbic	icjd	jdae	aebf	bfcg	cgdh	dhei	eifj	fjga
gaic	hbjd	icae	jdbf	aecg	bfdh	cgei	dhfj	eiga	fjhb

gaichbjd	hbjdicae	icaejdbf	jdbfaecg	aecgbfdh	bfdhcgei	cgeidhfj	dhfjeiga	eigafjhb	fjhbgaic
ge	hf	ig	jh	ai	bj	ca	db	ec	fd
gehf	hfig	igjh	jhai	aibj	bjca	cadb	dbec	ecfd	fdge
ei	fj	ga	hb	ic	jd	ae	bf	cg	dh
eifj	fjga	gahb	hbic	icjd	jdae	aebf	bfcg	cgdh	dhei
eiga	fjhb	gaic	hbjd	icae	jdbf	aecg	bfdh	cgei	dhfj
ec	fd	ge	hf	ig	jh	ai	bj	ca	db
ecfd	fdge	gehf	hfig	igjh	jhai	aibj	bjca	cadb	dbec
cg	dh	ei	fj	ga	hb	ic	jd	ae	bf
cgdh	dhei	eifj	fjga	gahb	hbic	icjd	jdae	aebf	bfcg
cgeidhfj	dhfjeiga	eigafjhb	fjhbgaic	gaichbjd	hbjdicae	icaejdbf	jdbfaecg	aecgbfdh	bfdhcgei
ca	db	ec	fd	ge	hf	ig	jh	ai	bj

表七：含 10 個數之數列其循環節次為 30

由表四、表五、表六、表七知

數列〈a_0〉（ 個數不是 2^n ）經有限次減法運算必遞減成只含 0、m 兩種數之數列〈a_i〉，再由「加法」運算必可找出其循環節次

(三)當數列個數為2^n，其中$a_i \in \{0、m\}$且含偶數個 m 則其運算次數至2^n-1次就歸零終止。

底下先證明引理Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ

引理Ⅰ：形如 1 0 0 0 1 0 1 0 …… 1，首項末項皆為 1 之數列，其變號數必為偶數。

證明：原始數列只有兩個 1，〈a_0〉≡11 其變號數為 0

1 1 變號數為 0，中間插入 0 得 1 0 1，變號數為 0＋2 是偶數。

中間插入 1 得 1 1 1，變號數仍為 0 是偶數。

1 0 1 變號數為 2，中間插入 0 得 1 0 0 1，變號數不變仍為 2

中間插入 1 得 1 1 0 1，變號數不變仍為 2

1 1 0 1 變號數為 2，中間插入 0 得 1 0 0 0 1，變號數仍為 2

中間插入 1 得 1 1 0 0 1 或 1 0 1 0 1，

則變號數不變或者增加 2，所以變號數仍為偶數。

1 1 0 0 1 中間插入 0 得 1 1 0 0 0 1，變號數不變仍為 2

中間插入 0 得 1 0 1 0 0 1，變號數增加 2，總變號數仍為偶數

而任意數列〈a_n〉$\forall\ a_i \in \{0、1\}$，形如〈a_n〉≡1 0 0 1 0 1 0 0……0

其運算時必須再重複把首項 1 填到末尾，變成 1 0 0 1 0 1 0 0……0 1

此數列是由原始數列只有兩個 1〈a_0〉≡1 1，中間填入若干個 0 或 1 所形成之數列，由上述之討論，其變號數不是不變就是增加偶數個。

故形如 1 0 0 0 1 0 1 0 …… 1，首項末項皆為 1 之數列，其變號數恆為偶數。

引理Ⅱ：數列個數不為2^n個時此數列經有限次運算必遞減成只含 0、m 兩個數，

且此時數列必含偶數個 m。

證明：形如數列〈a_n〉≡〈m 0 0 m……m〉，由引理Ⅰ知其有偶數個變號數，表有偶數個 0 m，經運算一次後所產生的新數列，必含有偶數個m。

引理Ⅲ：任意數列經有限次運算後，必可得某一數列，其總和為 0。

由定義m＋m ≡ m－m ≡0，故2 m≡0，$\sum_{k=1}^{n} b_k$ ≡偶數個m≡0

引理Ⅳ：n、k∈N，則$C_k^{2^n-1}$ 必為奇數。

證明：$C_k^{2^n-1} = \frac{(2^n-1)!}{k!(2^n-1-k)!} = \frac{(2^n-1)(2^n-2)\cdots(2^n-k)}{1 \times 2 \cdots\cdots \times k}$，

k 與2^n-k，含有相同的 2 的次方之因子，所以約分後，分子分母皆為奇數，又

$C_k^{2^n-1} \in N$，所以$C_k^{2^n-1}$必為奇數。

以下我們先舉幾個例子證明：

①當數列個數為2^2時，其中$a_i \in \{0、m\}$且含有偶數個 m

則其運算次數至2^2-1就歸零終止

9	8	7	6
1	1	1	3

加法省略

a	b	c	d
ab	bc	cd	da
ac	bd	ca	db
acbd	bdca	cadb	dbac

0	0	2	2	〈a_0〉
0	2	0	2	
2	2	2	2	
0	0	0	0	〈a_3〉

a	b	c	d
a＋b	b＋c	c＋d	d＋a
a＋c	b＋d	c＋a	d＋b
a＋c＋b＋d	b＋d＋c＋a	c＋a＋d＋b	d＋b＋a＋c

表八：數列個數為2^2之運算對照表

由表八知〈a_3〉的每一項＝a＋b＋c＋d，**皆為原始數列**〈a_0〉各項之總和，

由引理Ⅲ知：a＋b＋c＋d＝0，故〈a_3〉≡0　0　0　0

所以運算$2^2-1=3$次就歸零終止。

②當數列個數為2^3時，其中$a_i \in \{0、m\}$且含有偶數個m，則其運算次數至2^3-1就歸零終止，如下表

9	8	7	6	5	4	3	2
1	1	1	1	1	1	1	7
0	0	0	0	0	0	6	6
0	0	0	0	0	6	0	6
0	0	0	0	6	6	6	6
0	0	0	6	0	0	0	6
0	0	6	6	0	0	6	6
0	6	0	6	0	6	0	6
6	6	6	6	6	6	6	6
0	0	0	0	0	0	0	0

〈a_0〉	a	b	c	d	e	f	g	h
	ab	bc	cd	de	ef	fg	gh	ha
	ac	bd	ce	df	eg	fh	ga	hb
	acbd	bdce	cedf	dfeg	egfh	fhga	gahb	hbac
	ae	bf	cg	dh	ea	fb	gc	hd
	aebf	bfcg	cgdh	dhea	eafb	fbgc	gchd	hdae
	aecg	bfdh	cgea	dhfb	eagc	fbhd	gcae	hdbf
〈a_7〉	aecgbfdh	bfdhcgea	cgeadhfb	dhfbeagc	eagcfbhd	fbhdgcae	gcaehdbf	hdbfaecg

表九：數列個數為2^3之運算對照表

由表九知:〈a_7〉的每一項 =a+b+c+d+e+f+g+h 皆為原始數列〈a_0〉之總和。

由引理Ⅲ知 a+b+c+d+e+f+g+h≡0 故〈a_7〉的每一項皆為 0，故個數為2^3之數列其歸零終止之次數為2^3-1。

由表八、表九可看出個數為2^2 、2^3 之數列經運算(加法)，可看出其運算次數為2^2-1 、2^3-1 次後分別歸零終止，因此我們歸納出：數列〈a_{2^n}〉個數為2^n個其中 $a_i \in \{0、m\}$且含有偶數個 m，此數列經運算2^n-1次必歸零而終止運算。定理丁證明如下：

定理丁：數列個數為2^n其中$a_i \in \{0、\ m\}$且含有偶數個 m，則此數列經運算2^n-1次必歸零終止成每一項皆為 0 的數列

a_1 ， a_2 ， a_3 ，……，a_{2^n}

運算 1 次 a_1+a_2 ，a_2+a_3 ，a_3+a_4 ， …… ， $a_{2^n}+a_1$

2 次 $C_0^2a_1+C_1^2a_2+C_2^2a_3$ ， $C_0^2a_2+C_1^2a_3+C_2^2a_4$ ，……，$C_0^2a_{2^n}+C_1^2a_1+C_2^2a_2$

3 次 $C_0^3a_1+C_1^3a_2+C_2^3a_3+C_3^3a_4$ ，……，$C_0^3a_{2^n}+C_1^3a_1+C_2^3a_2+C_3^3a_3$

運算2^n-1 次得數列： A_1 ， A_2 ， A_3 ，……，A_{2^n}

由引理Ⅲ、Ⅳ

$$A_1=C_0^{2^n-1}a_1+C_1^{2^n-1}a_2+\cdots+C_{2^n-2}^{2^n-1}a_{2^n-1}+C_{2^n-1}^{2^n-1}a_{2^n}$$
$$=a_1+a_2+\cdots+a_{2^n}\equiv 0$$

$$A_2=C_0^{2^n-1}a_2+C_1^{2^n-1}a_3+\cdots+C_{2^n-2}^{2^n-1}a_{2^n}+C_{2^n-1}^{2^n-1}a_1$$
$$=a_2+a_3+\cdots+a_{2^n}+a_1\equiv 0$$

$$A_k=C_0^{2^n-1}a_k+C_1^{2^n-1}a_{k+1}+\cdots+C_{2^n-k}^{2^n-1}a_{2^n}+C_{2^n-k+1}^{2^n-1}a_1+\cdots C_{2^n-2}^{2^n-1}a_{k-2}+C_{2^n-1}^{2^n-1}a_{k-1}$$
$$=a_k+a_{k+1}+\cdots+a_{2^n}+a_1+\cdots+a_{k-2}+a_{k-1}\equiv 0$$

故運算2^n-1 次後每一項皆歸零得數列為 $\overbrace{0\,0\,0\cdots 0}^{2^n個}$ 終止運算，定理丁得證。

(四)數列個數為2^n-1 時，其中$a_i \in \{0、\ m\}$且含有偶數個 m，其循環節次為2^n-1。

先舉幾個例子說明：

1. $n=2^2-1=3$

0000	a	b	c
0001	ab	bc	ca
0002	ac	ba	cb
0003	cb	ac	ba
0004	ba	cb	ac

表十：數列個數為2^2-1 其循環節次為2^2-1

2. $n=2^3-1=7$

次數	1	2	3	4	5	6	7
0000	a	b	c	d	e	f	g
0001	ab	bc	cd	de	ef	fg	ga
0002	ac	bd	ce	df	eg	fa	gb
0003	acbd	bdce	cedf	dfeg	egfa	fagb	gbac
0004	ae	bf	cg	da	eb	fc	gd
0005	aebf	bfcg	cgda	daeb	ebfc	fcgd	gdae
0006	aecg	bfda	cgeb	dafc	ebgd	fcae	gdbf
0007	ecgbfd	fdacge	gebdaf	afcebg	bgdfca	caegdb	dbfaec
0008	ba	cb	dc	ed	fe	gf	ag

表十一：數列個數為2^3-1 其循環節次為2^3-1

由表十、表十一知數列個數為 2^2-1、2^3-1，其循環節次分別為2^2-1、2^3-1

定理戊：數列個數為2^n-1 時，其中$a_i \in \{0、\ m\}$且含有偶數個 m，若不歸零，則其循環節次為2^n-1

證明過程如下：

原始數列 a_1 ， a_2 ， a_3 ， …… ， a_k ，

…… ， a_{2^n-1}

運算 1 次 a_1+a_2 ， a_2+a_3 ， a_3+a_4 ， ……，a_k+a_{k+1} ，……， $a_{2^n-1}+a_1$

運算 2 次 $C_0^2a_1+C_1^2a_2+C_2^2a_3$ ， $C_0^2a_2+C_1^2a_3+C_2^2a_4$ ，…… ，$C_0^2a_{2^n-1}+C_1^2a_1+C_2^2a_2$

設運算2^n-1 次得數列 A_1 ， A_2 ， A_3 ……， A_K ，…… ，A_{2^n-1}

第 1 項 $A_1=\ C_0^{2^n-1}a_1+C_1^{2^n-1}a_2+\cdots\cdots+\ C_{2^n-2}^{2^n-1}a_{2^n-1}+C_{2^n-1}^{2^n-1}a_1$

由引理Ⅲ、Ⅳ

知$C_k^{2^n-1}$恆為奇數且偶數個a_k之和恆等於 0，故$A_1=a_1+a_2+a_3+\ \ldots\ldots+a_{2^n-1}+a_1$

又由引理Ⅲ知 $\sum_{k=1}^{2^n-1} a_k \equiv 0$ ∴ $A_1\equiv 0+a_1=a_1$

第 2 項 $A_2 = C_0^{2^n-1}a_2 + C_1^{2^n-1}a_3 + \cdots\cdots + C_{2^n-2}^{2^n-1}a_1 + C_{2^n-1}^{2^n-1}a_2 = \sum_{k=1}^{2^n-1} a_k + a_2 \equiv 0 + a_2 = a_2$

第 K 項 $A_k = C_0^{2^n-1}a_k + C_1^{2^n-1}a_{k+1} + \cdots\cdots + C_{2^n-2}^{2^n-1}a_{k-1} + C_{2^n-1}^{2^n-1}a_k$

$$= \sum_{k=1}^{2^n-1} a_k + a_k \equiv 0 + a_k = a_k$$

第2^n-1項 $A_{2^n-1} =$

$$C_0^{2^n-1}a_{2^n-1} + C_1^{2^n-1}a_1 + C_2^{2^n-1}a_2 + \cdots\cdots + C_{2^n-2}^{2^n-1}a_{2^n-2} + C_{2^n-1}^{2^n-1}a_{2^n-1}$$

$$= \sum_{k=1}^{2^n-1} a_{k-1} + a_{2^n-1} \equiv 0 + a_{2^n-1} = a_{2^n-1}$$

故運算2^n-1次後得數列

a_1　a_2　a_3　……　a_k　……　a_{2^n-1}即為原始數列

會產生循環，循環節次為2^n-1，故定理戊得證

柒、結論與展望

一、結論

經過"陸、理論證明與討論過程"我們得到以下之結論

(一)、任意 n 個正整數之數列依此運算具有循環性。

定理甲：數列$\langle a_0\rangle$含有三個相異數以上，經有限次運算後，則M_0一定會遞減

定理乙：$\langle a_0\rangle$經有限次運算後不是均變為 0，就是變成 0、m 兩種數字

定理丙：數列個數不是2^n個且$a_i \in \{0、m\}$時，經有限次運算則產生循環或歸零

(二)、任意 n 個正整數之數列依此運算，必可找出其循環節次。

定理丁：數列個數為2^n其中$a_i \in \{0、 m\}$且含有偶數個 m，則此數列經運算2^n-1次必歸零終止成每一項皆為 0 的數列

定理戊：數列個數為2^n-1時，其中$a_i \in \{0、 m\}$且含有偶數個 m，若不歸零，則其循環節次為2^n-1

二、展望

若數列<a_n><b_n>運算皆不歸零，且數列<b_n>的個數為數列<a_n>的個數的2倍時，數列<b_n>的運算循環節次為數列 <a_n>的2倍是否會成立 ？

例：數列個數3的運算循環節次為3

次數	1	2	3
0000	8	2	4
0001	6	2	4
0002	4	2	2
0003	2	0	2
0004	2	2	0
0005	0	2	2
0006	2	0	2

數列個數 6 的運算循環節次為 6

次數	1	2	3	4	5	6
0000	3	5	2	0	2	0
0001	2	3	2	2	2	3
0002	1	1	0	0	1	1
0003	0	1	0	1	0	0
0004	1	1	1	1	0	0
0005	0	0	0	1	0	1
0006	0	0	1	1	1	1
0007	0	1	0	0	0	1
0008	1	1	0	0	1	1

我們用電腦程式試了很多這樣的例子，而 6 個數之數列其運算節次為 6，3 個數之數列其運算節次為 3，6 個數之數列其運算節次為 3 個數之運算節次的 2 倍，唯獨數列<b_n>的個數為數列<a_n>的個數的 2 倍時，且運算過程中不會產生雙循環(或多循環)，則數列<b_n>的運算循環節次為數列<a_n>的 2 倍會成立。

雙循環定義:

一數列經運算至只含 0 和 m 兩種數字，若此數列的前半部與後半部有相同排列

如此數列

次數	1	2	3	4	5	6
0000	3	2	3	4	7	0
0001	1	1	1	3	7	3
0002	0	0	2	4	4	2
0003	0	2	2	0	2	2
0004	2	0	2	2	0	2
0005	2	2	0	2	2	0
0006	0	2	2	0	2	2

本數列個數為 6，因為運算過程遇到雙循環，所以其循環節次減半為 3

可視為數列〈0 2 2〉的重複運算，所以數列〈0 2 2 0 2 2〉的運算會產生雙循環。

又數列個數10的運算循環節次為30(但產生雙循環的數列其循環節次只有15)，

數列個數 5的運算循環節次為15

數列個數9其循環節次為63，數列個數3其循環節次為3，9個數之數列其循環節次並非3個數之數列循環節次的3倍。

我們用電腦程式試了很多這樣的例子，數列個數為2倍時，循環節次亦為2倍，但數列個數為3倍時，循環節次卻不為3倍，感到疑惑，有待我們深入探討

捌、文獻及參考資料

一. 游森棚(民 105 年)高中數學第二冊的第二章排列組合 (翰林版)。

二.第三十五屆科展(民 84 年)高中組數學科第三名作品－方塊數論，如附件 A。

三. 1. 林聰源譯，整數論問題 (凡異出版社)

2. 常庚哲譯，奇數與偶數 (凡異出版社)

玖、附錄

附件 A：第三十五屆方塊數論

附件 B: 數字運算之循環操作 （以數列（２３４２３）為例）

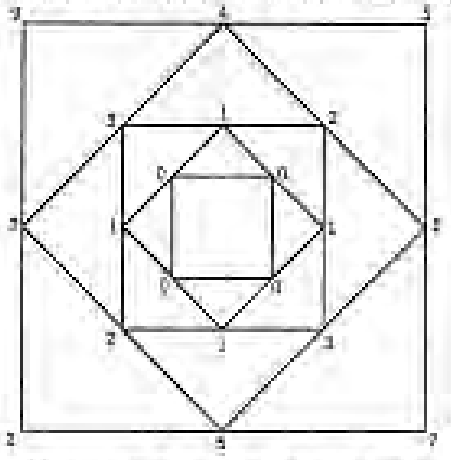
附件 C: 以ａｂｃ……代表數字運算之循環操作（以數列（ａ ｂ ｃ ｄ ｅ ｆ ）為例）

附件 A：第三十五屆方塊數論

方塊數論

一、前言：

偶然在中國時報益智專欄中，看到一個有趣的數學問題，名為「數學方塊」，題目是：在一個正方形的四角寫上任意四個正整數，再角數值差的絕對值寫在共同邊上的中點，將此四邊中點連接再畫一個正方形，重複這個程序，最後有一個方塊的四個中點數都為零，如圖(一)，為了方便，我們將上述計算程序稱為"運算"。



圖一：任意四個整數為3,5,7,2

二、動機與目的：

這個"運算"規則簡單，只要懂算術的學齡兒童都會，但其中蘊含的一些觀念和定理卻很奧妙，值得深入探討，今我們想要探討下列幾個目的：

(一)設計四個整數(三、五皆可)能重複"運算"之電腦繪圖程式，操作實驗，驗証最後一個方塊的中點數是否都為零。

(二)証明四個整數經"運算"後必得四個整數皆為零。

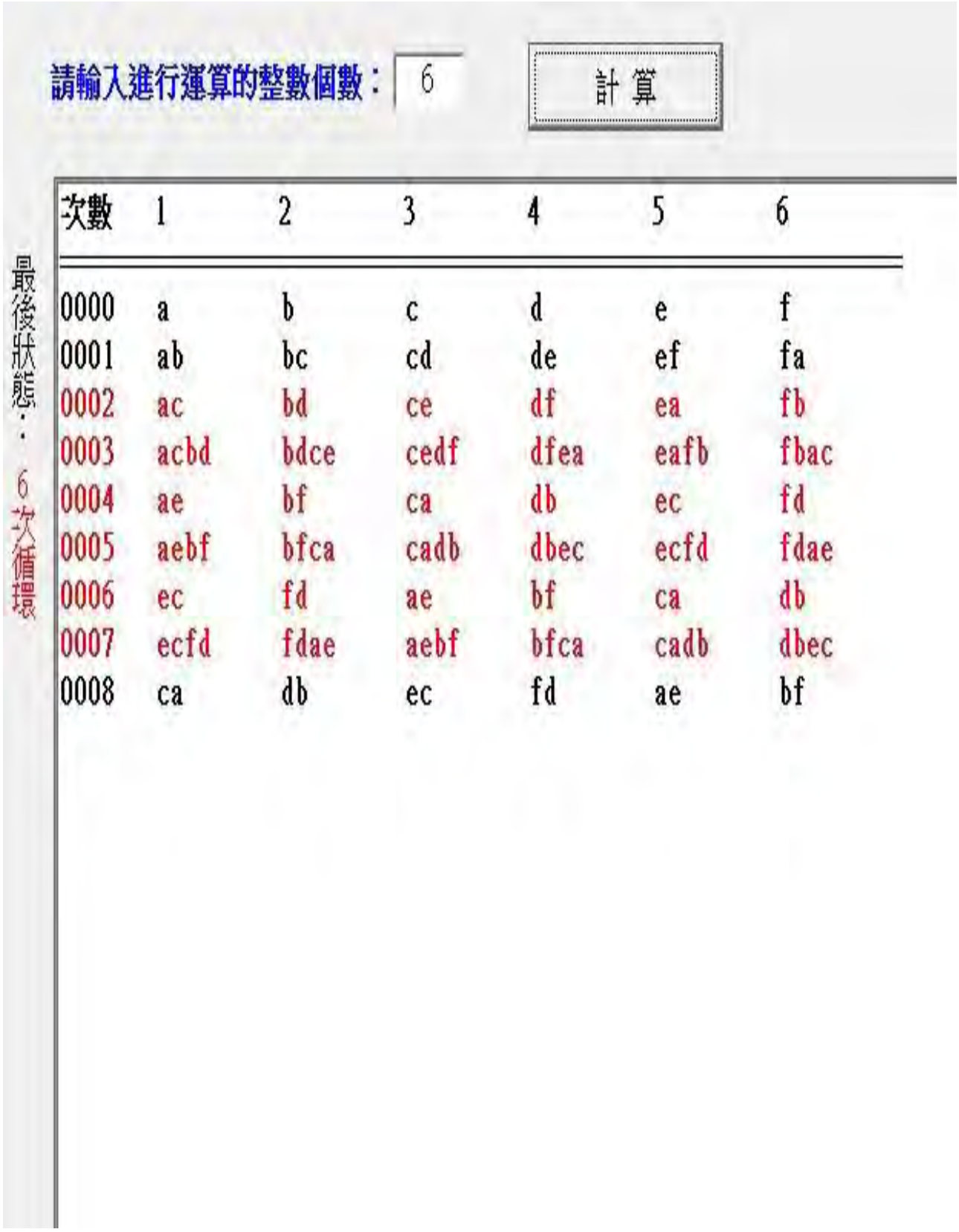
(三)設計2^3，2^4，2^5個整數能重複"運算"之電腦列表程式，操作實驗，驗証最後一列的所有整數是否都會是零？

(四)用數學理論証明2^n個整數經此"運算"，最後亦可得全是零。

附件 B: 數字運算之循環操作

次數	1	2	3	4	5	最大值
0000	2	3	4	2	3	4
0001	1	1	2	1	1	2
0002	0	1	1	0	0	1
0003	1	0	1	0	0	1
0004	1	1	1	0	1	1
0005	0	0	1	1	0	1
0006	0	1	0	1	0	1
0007	1	1	1	1	0	1
0008	0	0	0	1	1	1
0009	0	0	1	0	1	1
0010	0	1	1	1	1	1
0011	1	0	0	0	1	1
0012	1	0	0	1	0	1
0013	1	0	1	1	1	1
0014	1	1	0	0	0	1
0015	0	1	0	0	1	1
0016	1	1	0	1	1	1
0017	0	1	1	0	0	1

附件 C: 以ａｂｃ……代表數字運算之循環操作



次數	1	2	3	4	5	6
0000	a	b	c	d	e	f
0001	ab	bc	cd	de	ef	fa
0002	ac	bd	ce	df	ea	fb
0003	acbd	bdce	cedf	dfea	eafb	fbac
0004	ae	bf	ca	db	ec	fd
0005	aebf	bfca	cadb	dbec	ecfd	fdae
0006	ec	fd	ae	bf	ca	db
0007	ecfd	fdae	aebf	bfca	cadb	dbec
0008	ca	db	ec	fd	ae	bf

【評語】050403

1. 延續以前別人對 n 為 2 的某次方的主題，對更一般的情況，得到定理甲、乙，可視為整體研究的亮點。
2. 研究方法適切，計畫完整。
3. 團隊合作良好，現場報告表達能力佳。
4. 宜更確實作文獻探討，並說明參考資料與本作品之異同。

作品海報

壹、研究動機

有一天，我們翻閱第三十五屆的全國數學科展，證明了一個有趣的問題：方塊數論。藉此我們想深入推廣，繼續研究下面這個問題：

任意 n 個正整數之數列(n>1)其相鄰兩數相減之絕對值形成一新數列，重複這個"運算"，欲證明此"運算"的數列具有「循環性」，並找出其循環節次。

貳、研究目的

一、設計電腦程式來實驗任意 n 個正整數(n＞1)之數列依此"運算"是否具有循環性。

二、理論證明
- (一) 任意 n 個正整數之數列依此"運算"是否具有循環性。
- (二) 任意 n 個正整數之數列依此"運算"，找出其循環節次。

參、研究過程或方法

電腦程式設計之操作過程

一、 一般性的例子，以下數列"運算"的例子可造成"循環"。

例：任意填入 3 個整數之數列(如上表)，經重複"運算"必可得最後一列皆為"0"和"M_i"的整數並產生循環。

$\langle a_i \rangle$					最大值 $\langle M_i \rangle$	總和 $\langle S_i \rangle$	
0000	由此開始數列內的整數非0即1	2	4	9	9	15	
0001		2	5	7	7	14	
0002		3	2	5	5	10	
0003		1	3	2	3	6	
0004		2	1	1	2	4	
0005		1	0	1	1	2	環狀排列之循環
0006		1	1	0	1	2	
0007		0	1	1	1	2	
0008		1	0	1	1	2	

由此可知 M_i 遞減

直線排列之循環

表：任意 3 個整數之測試

理論證明與過程

一、任意有限數列經有限次運算必產生循環或歸零。

（下列論述均對有限數列而言）

(一)定理甲：數列$\langle a_0 \rangle$含有三個相異數以上，經有限次運算後，M_0一定會遞減

證明如下：

1. 若數列$\langle a_0 \rangle$中M_0的相鄰數是不為 0 且較M_0小的數，則M_0與此相鄰數相減必立即嚴格遞減。 例：$\langle a_0 \rangle$ 0 0 2 M_0 9 1 0 8

   $\langle a_1 \rangle$ 0 2 7 8 1 8 8

   可看出M_0立即嚴格遞減

   若將不為 0 且較M_0小的M_0相鄰數設為 a

   設原始數列$\langle a_0 \rangle$＝0 a M_0 0 …… ，則運算時$M_0 - a < M_0$，即立即嚴格遞減

2. 若數列$\langle a_0 \rangle$中M_0的相鄰數是 0 則經有限次運算後也必遞減。

   舉一個例子證明：將數列 9 8 0 0 9 0 0 0 0 9 0 0 0 0 0 3 8 1 0 0 0

   繞排得 $\langle a_0 \rangle$為 1 0 0 0 9 8 0 0 9 0 0 0 0 9 0 0 0 0 0 3 8

數的循環

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
L線													R線							
1	0	0	0	9	8	0	0	9	0	0	0	0	9	0	0	0	0	0	3	8
1	0	0	9	1	8	0	9	9	0	0	0	9	9	0	0	0	0	3	5	7
1	0	9	8	7	8	9	0	9	0	0	9	0	9	0	0	0	3	2	2	6
1	9	1	1	1	1	9	9	9	0	9	9	9	9	0	0	3	1	0	4	5
8	8	0	0	0	8	0	0	9	9	0	0	0	9	0	3	2	1	4	1	4
0	8	0	0	8	8	0	9	0	9	0	0	9	9	3	1	1	3	3	3	4
8	8	0	8	0	8	9	9	9	9	0	9	0	6	2	0	2	0	0	1	4
0	8	8	8	8	1	0	0	0	9	9	9	6	4	2	2	2	0	1	3	4
8	0	0	0	7	1	0	0	9	0	0	3	2	2	0	0	2	1	2	1	4
8	0	0	7	6	1	0	9	9	0	3	1	0	2	0	2	1	1	1	3	4
8	0	7	1	5	1	9	0	9	3	2	1	2	2	2	1	0	0	2	1	4
8	7	6	4	4	8	9	9	6	1	1	1	0	0	1	1	0	2	1	3	4
1	1	2	0	4	1	0	3	5	0	0	1	0	1	0	1	2	1	2	1	4
0	1	2	4	3	1	3	2	5	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	3	3
1	1	2	1	2	2	1	3	5	1	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	3
0	1	1	1	0	1	2	2	4	1	0	0	0	0	0	0	0	2	2	3	2
1	0	0	1	1	1	0	2	3	1	0	0	0	0	0	0	2	0	1	1	2
1	0	1	0	0	1	2	1	2	1	0	0	0	0	0	2	2	1	0	1	1
1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	2	0	1	1	1	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	2	2	1	0	0	1	0	1

L線右移，R線左移至兩線重疊或交錯，此時最大數9必消失

(1)將L線置於表首項1右側，則最大數M_0(9)必不會在L線的左側出現。理由如下：

①運算方式為兩數之差置於左數之下方，L線左側這一行不是0，則此數與L線右側之數減左側之數的差必小於9

②若L線左方這一行出現0，則0的上方和右上方兩數必相同，則我們將這L線右移，直到L線左方那一數不為0為止，如此可保證L線左方相鄰之數必為非0之數。由①②知最大數9不會出現在L線之左側。

(2)將R線置於最右方的9之右側，可知9不會出現於R線的右側。

(3)由(1)(2)知9已被限定在L線及R線所夾的區間，今我們來證明此L線及R線所夾之區間必逐漸縮小，直至L線與R線重疊或交錯為止。

①R線左方之第一行必出現一個小於9之數，如表之R線左方的6

理由：L線左方必有一不為0且比9較小之數，此數經有限次運算一直朝左下移，最後碰到9相減得到6這個較小之數。

②此數6之下方不可能再出現最大數9，因為較小之數6與最大數9之差不可能為9。

③最大數9可能出現的區間少了一行，故R線向左移。

④由①②③的現象重複出現R線不斷向左移，而L線時而停止，時而向右移，最後L線與R線重疊或交錯，已沒有區間可容納最大數9，所以最大數9必消失。

由(1)(2)(3)知最大數9必消失得到一個較小數，故M_0必遞減，定理甲得證。

（二）定理乙：$\langle a_0\rangle$經有限次運算後不是均變為0，就是變成0、m兩種數字

1. 若數列$\langle a_0\rangle$內共有2^n個數經有限次運算後必全為0。（第三十五屆科展中已證明）
2. $\langle a_0\rangle$數列個數不是2^n個時，若$\langle a_0\rangle$中除了0與M_0外，尚有另一數M_i，而$M_i < M_0$ ，由定理甲得知M_0必會遞減，而一直遞減的結果，每一項均變為0，因為M_i必遞減，而底限為0，自然最後每一數均變為0，除非當$\langle a_i\rangle$數列中僅剩下0與M_i兩數，定理乙得證。

（三）定理丙：數列個數不是2^n個且$a_i \in \{0、m\}$時，經有限次運算則產生循環或歸零

當數列運算到只剩0、m兩種數字，若此數列中有k個整數，則由0、m組成k個的直線排列情形就只有2^k種，最多運算2^k+1次，必有重複的情況，此時便會產生循環或歸零，故定理丙得證。

二、 除了數列個數為2^n個以外，其餘數列循環節次之計算與討論過程如下：

（一） 由定理乙$\langle a_0\rangle$經有限次運算後不是均變為0，就是變成0、m兩種數字時，

我們定義

$$m-0 \equiv m+0$$
$$m-m \equiv m+m \equiv 0$$
$$0-0 \equiv 0+0 \equiv 0$$

雖然我們的運算本來是減法，當數列經減法運算遞減至只含0、m兩種數字時，跟我們現在定義的加法運算是同構的。

運算由減法改為加法之原由：

例 $\langle a_0\rangle \equiv$ a b c ［ $\langle a_0\rangle$有3個數 a b c 不是0就是m ］

	a	b	c
減法運算一次得	a-b or b-a	b-c or c-b	c-a or a-c
	a	b	c
運算一次得	a＋b	b＋c	c＋a

由上可知，若利用減法運算一次後<a_0>中的每個數都有兩種情形，得 $2^3=8$ 種情形，其運算太過複雜，但若用加法來運算，則只會有一種情形，故我們定義用加法來運算。之後的證明其"運算"皆改為加法

（二） 今我們欲計算與證明如下數列之循環節次

<a_0>≡ a b c

	a	b	c
循環節次為3	ab	bc	ca
	ac	ba	cb
	cb	ac	ba
	ba	cb	ac

引理Ⅰ：形如 1 0 0 0 1 0 1 0 …… 1，首項末項皆為 1 之數列，其變號數必為偶數。

引理Ⅱ：數列個數不為2^n個時此數列經有限次運算必遞減成只含 0、m 兩個數，且此時數列必含偶數個 m。

引理Ⅲ：任意數列經有限次運算後，必可得某一數列，其總和為 0。

引理Ⅳ：n、k∈N，則$C_k^{2^n-1}$必為奇數。

定理丁：數列個數為2^n其中$a_i\in\{0、m\}$且含有偶數個 m，則此數列經運算2^n-1次必歸零終止成每一項皆為 0 的數列

a_1 ， a_2 ， a_3 ，……，a_{2^n}

運算 1 次 a_1+a_2 ，a_2+a_3 ，a_3+a_4 ， …… ， $a_{2^n}+a_1$

2 次 $C_0^2a_1+C_1^2a_2+C_2^2a_3$ ， $C_0^2a_2+C_1^2a_3+C_2^2a_4$ ，……，$C_0^2a_{2^n}+C_1^2a_1+C_2^2a_2$

3 次 $C_0^3a_1+C_1^3a_2+C_2^3a_3+C_3^3a_4$ ，……，$C_0^3a_{2^n}+C_1^3a_1+C_2^3a_2+C_3^3a_3$

運算2^n-1 次得數列： A_1 ， A_2 ， A_3 ，……，A_{2^n}

由引理Ⅲ、Ⅳ

$A_1=C_0^{2^n-1}a_1+C_1^{2^n-1}a_2+\cdots+C_{2^n-2}^{2^n-1}a_{2^n-1}+C_{2^n-1}^{2^n-1}a_{2^n}=a_1+a_2+\cdots+a_{2^n}\equiv 0$

$A_2=C_0^{2^n-1}a_2+C_1^{2^n-1}a_3+\cdots+C_{2^n-2}^{2^n-1}a_{2^n}+C_{2^n-1}^{2^n-1}a_1=a_2+a_3+\cdots+a_{2^n}+a_1\equiv 0$

$A_k=C_0^{2^n-1}a_k+C_1^{2^n-1}a_{k+1}+\cdots+C_{2^n-k}^{2^n-1}a_{2^n}+C_{2^n-k+1}^{2^n-1}a_1+\cdots C_{2^n-2}^{2^n-1}a_{k-2}+C_{2^n-1}^{2^n-1}a_{k-1}$

$=a_k+a_{k+1}+\cdots+a_{2^n}+a_1+\cdots+a_{k-2}+a_{k-1}\equiv 0$

故運算2^n-1 次後每一項皆歸零得數列為 $\underbrace{0\ 0\ 0\ \cdots\ 0}_{2^n個}$ 終止運算，定理丁得證

定理戊：數列個數為2^n-1 時，其中$a_i\in\{0、m\}$且含有偶數個 m，則其循環節次為2^n-1

肆、結論

（一）任意 n 個正整數之數列依此運算具有循環性。

定理甲：數列<a_0>含有三個相異數以上，經有限次運算後，則M_0一定會遞減

定理乙：<a_0>經有限次運算後不是均變為 0，就是變成 0、m 兩種數字

定理丙：數列個數不是2^n個且$a_i\in\{0、m\}$時，經有限次運算則產生循環或歸零

（二）任意 n 個正整數之數列依此運算，必可找出其循環節次。

定理丁：數列個數為2^n其中$a_i\in\{0、m\}$且含有偶數個 m，則此數列經運算2^n-1次必歸零終止成每一項皆為 0 的數列

定理戊：數列個數為2^n-1 時，其中$a_i\in\{0、m\}$且含有偶數個 m，則其循環節次為2^n-1

伍、參考資料

一. 游森棚(民 105 年)高中數學第二冊的第二章排列組合（翰林版）。

二. 彰化高中(民 84 年)第三十五屆科展高中組數學科第三名作品－方塊數論

三. 1. 林聰源譯，整數論問題 （凡異出版社）

2. 常庚哲譯，奇數與偶數 （凡異出版社）