

# 中華民國第 57 屆中小學科學展覽會

## 作品說明書

---

國中組 物理科

佳作

030114

收放自如~實驗探討線軸展開或捲縮的條件

學校名稱：彰化縣立陽明國民中學

作者：  國二 徐翊芹  國二 尤泓霖  國二 尤奕賢	指導老師：  蔡名峯  韓顏吉
-----------------------------------------------	-----------------------------

關鍵詞：線軸、摩擦力、臨界角

## 摘要

生活中發現線軸會因拉線角度的不同而收放自如，此現象激起了想探究的決心。我們初步發現線軸在不同變因下會有一個特定的**臨界角 $\theta_c$** 而改變其滾動方向，因此本組選擇了**拉力大小、線軸重量、線軸內外徑比值及不同接觸面性質(靜摩擦係數)**作為實驗的四種變因，並設計了「線軸收放儀器」來進行實驗探討。為了精確測量臨界角，實驗時儀器中的粗調裝置是利用螺帽固定螺旋桿以大範圍調整定滑輪的升降高度，微調則利用指針帶動螺旋桿轉動角度來微調定滑輪的升降，將實驗過程攝影記錄，並再利用 **Tracker** 分析物體改變滾動方向時的臨界角。實驗顯示，影響線軸滾動方向的臨界角大小，和線軸之拉力大小、線軸重量及接觸面性質皆無關，**只和線軸內外徑的比值有關，即 $\cos \theta_c = \frac{r}{R}$** 。

## 壹、研究動機

有次在上美術課時，需要用到緞帶裝飾，組員觀察到緞帶的線軸會隨著拉緞帶與地面間夾角改變而前後滾動，而引起對此的好奇心。後來又有一次在校園內看到施工的叔叔使用電纜線(圖 1-1 及圖 1-2)收放時，不是推拉線軸，而是把電纜線依高低不同的位置拉動即可讓線軸收放自如，更激起本組想探究此現象的決心。經過上網看到了「聽話的線軸」(網路影片，圖 2)及 91 年大學指考題目(圖 3)後，發現改變線軸滾動方向的原因很值得探討。剛好在國二自然與生活科技(第 4 冊第 6 單元)中學習到了力及摩擦力的概念，使本組啟動了探究線軸收放自如的變因。



圖 1-1 校園中工人拉動線軸情形 1



圖 1-2 校園中工人拉動線軸情形 2



圖 2 網路影片「聽話的線軸」

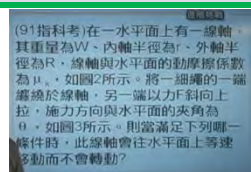


圖 3 91 年指考題目

## 貳、研究目的

- 一、設計「線軸收放」的實驗儀器
- 二、探討**施力大小**對線軸滾動方向的影響
- 三、探討**線軸內外徑比值**對線軸滾動方向的影響
- 四、探討**線軸重量**對線軸滾動方向的影響
- 五、探討**接觸面材質(靜摩擦係數)**對線軸滾動方向的影響

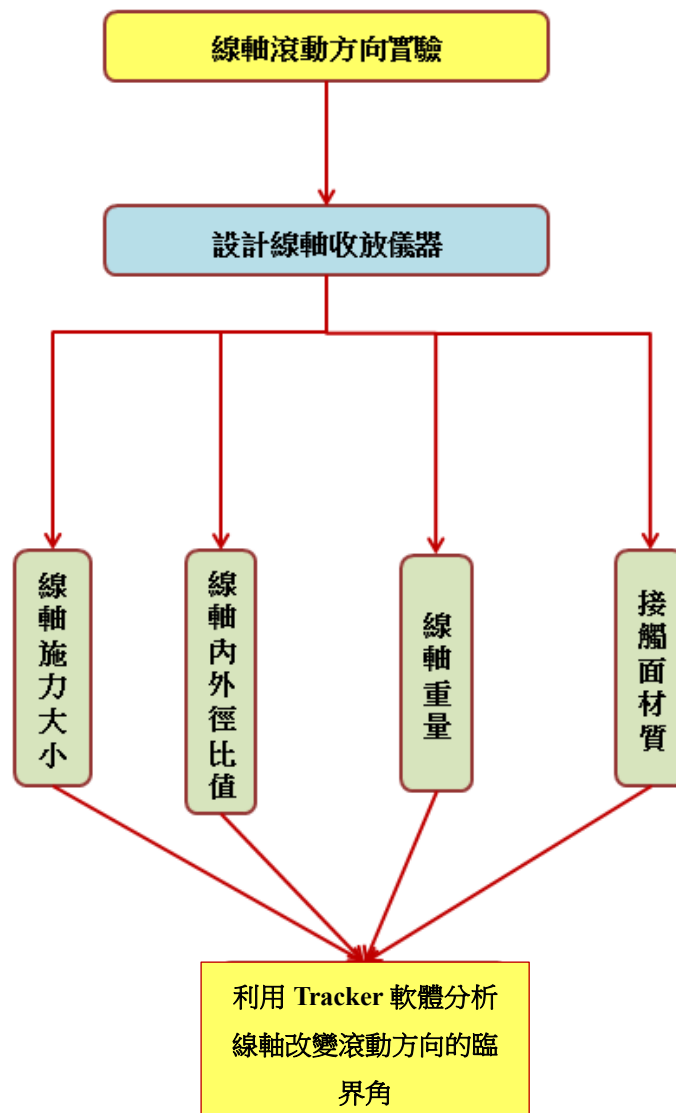


圖 4 實驗流程圖

## 參、研究設備及器材

### 一、材料及設備



圖 5 木板



圖 6 游標尺



圖 7 砝碼



圖 8 鑽頭



圖 9 水平儀



圖 10 各式線軸

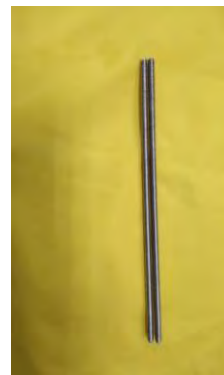


圖 11 螺桿

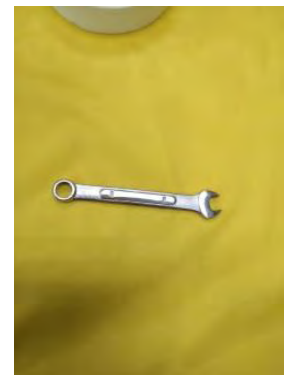


圖 12 板手



圖 13 電子秤



圖 14 膠帶

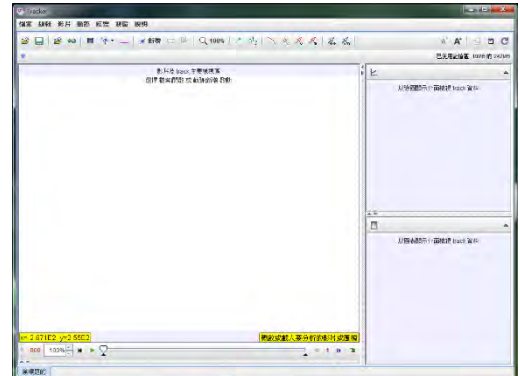


圖 15 電腦軟體 Tracker

## 二、「線軸收放儀器」之設計與製作

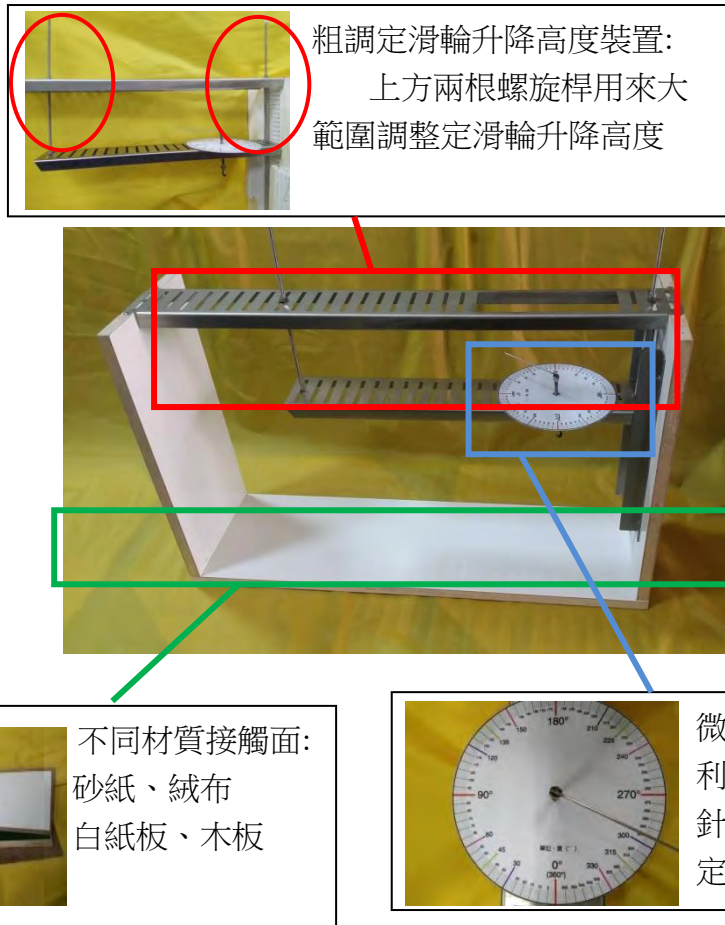
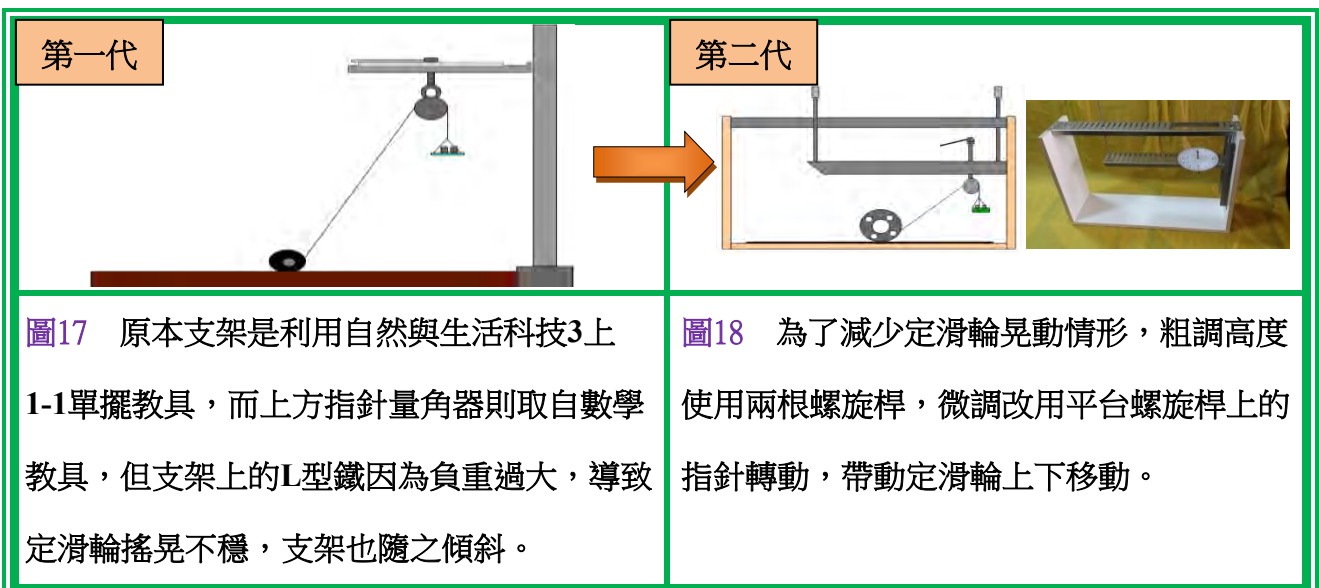


圖 16 線軸收放儀器之設計

## 肆、研究過程與方法

### 一、線軸收放儀器初步設計圖



## 二、概念演進

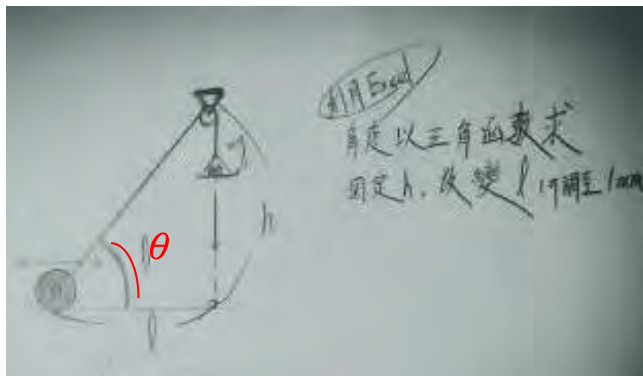


圖 19 實驗起初想法:

本組原本為了求出出現軸軸滾動方向 $\theta_c$ 的臨界角度，固定定滑輪高度  $h$ ，改變其水平長度  $l$ ，再將測量數據代入 Excel，以三角函數的公式求得線軸滾動方向的臨界角度。

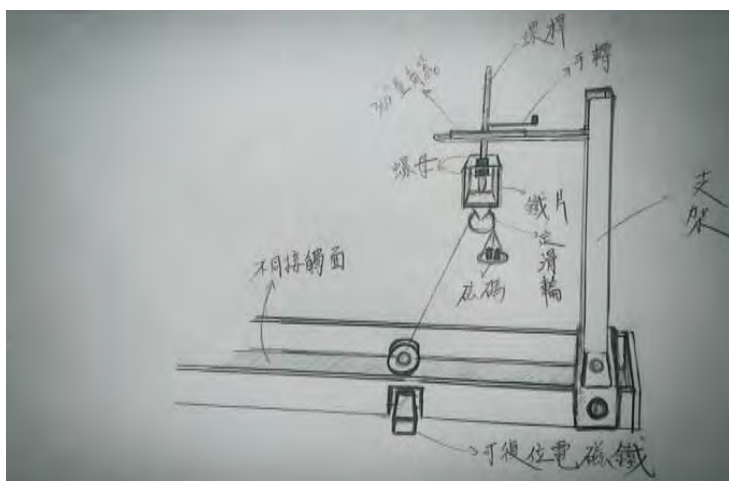


圖 20 第一代儀器:

原本本組利用單擺實驗儀器(理化第五冊 1-1 時間的計算)加上摩擦力實驗組(理化第四冊 6-3 摩擦力)，將 L 型鐵加在上方，在 L 型鐵加上量角器及螺絲並在螺絲上加裝握把，用其裝置調整高度。

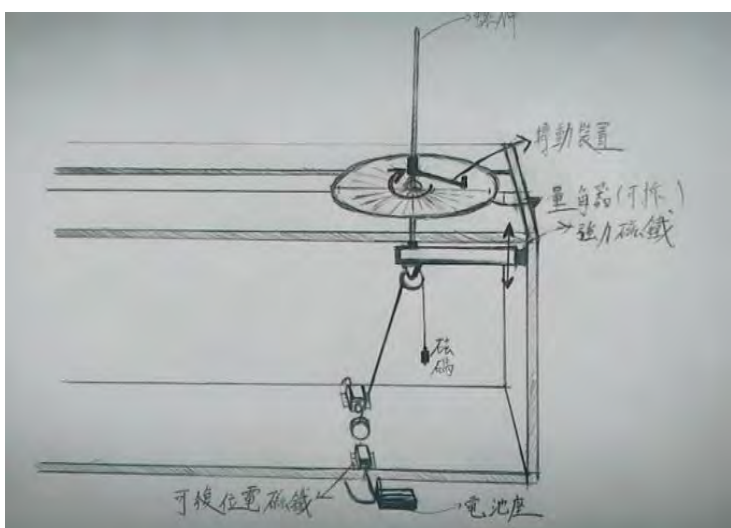


圖 21 第一代改進:

第一代儀器上方的 L 型鐵容易搖晃，本設計將其固定在木板上以解決問題，但使用木板固定不易調整高低，因此設計出了第二代「線軸收放儀器」。

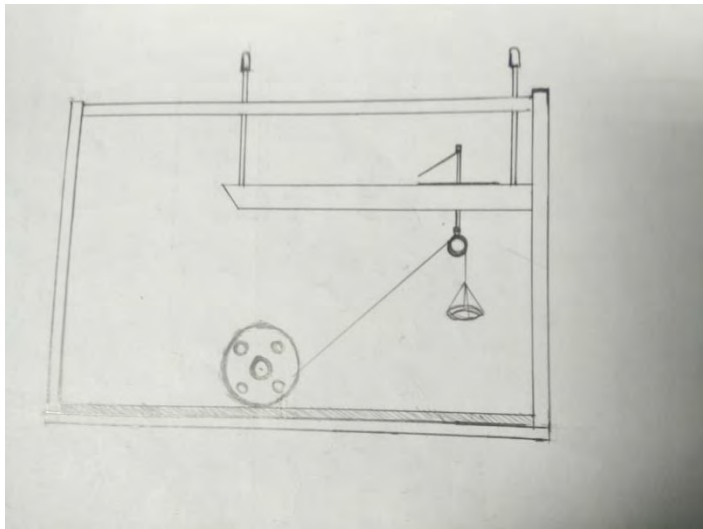


圖 22 第二代儀器:

本設計將上方木板改成兩片鐵板，一片直接固定在上方，另一片使用螺桿以及螺母做成活動式的，以便調整定滑輪高低及水平。

### 三、組裝器材



圖 23 將裁切好木板組裝



圖 24 將組裝好木板磨平



圖 25 完成線軸收放儀器

### 四、實驗步驟:

#### 1. 製作實驗

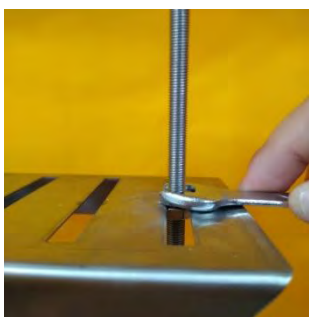


圖 26 實驗前，先將上方粗調裝置調至水平



圖 27 測量秤盤及砝碼重量(即為拉力)



圖 28 轉動微調升降裝置，控制線軸轉動

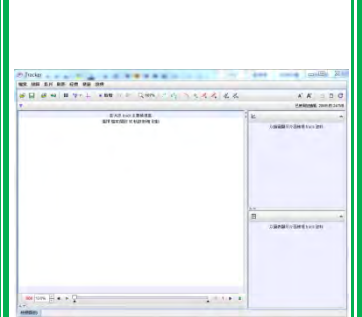


圖 29 將線軸滾動過程用攝影機記錄，以電腦軟體 Tracker 加以分析

## 2.數據分析

98							
	第一次	第二次	第三次				
	67.3	65.6	64.8				
	67.9	66	64.4				
	67.6	65.8	64.6				
					39.84		49.84
				Q	cos	Q	
	98	63.7	0.443071	55.26667			
	108	63.633	0.444119	54.3			
	118	65.1833	0.419717	53.9525			
	128	65.1	0.421036	58.00833			
	138	65.0667	0.421563	56.25			
	148	65.3667	0.416809	54.9			

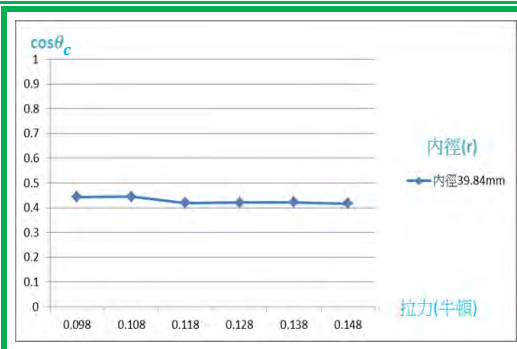


圖 30 將 Tracker 分析出的數據輸入 Excel

圖 31 彙整數據將  $\theta_c$  值代入  $\cos(\theta * 180/\pi)$  求得  $\cos\theta_c$

圖 32 將彙整之  $\cos\theta_c$  值做成關係圖

## 3.改變內外徑



圖 33 本組在改變線軸內外徑時，使用油漆用膠帶(黏性較小)，纏繞在線軸的內徑上，並用游標尺測量，改變線軸的內外徑比。  
在製作時，本組從最粗的內徑開始測量，並於縮小內徑(撕膠帶)後，加上紙黏土(對稱黏在線軸上)，以控制線軸重量這變因。

## 4.TRACKER使用方式

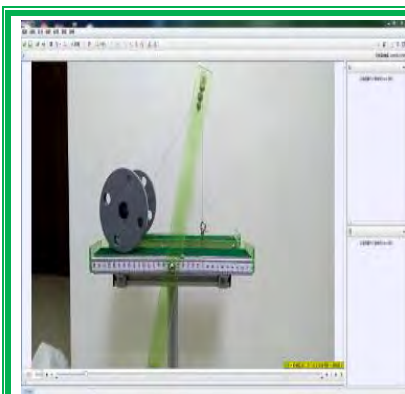


圖 34 將實驗影片置入 Tracker

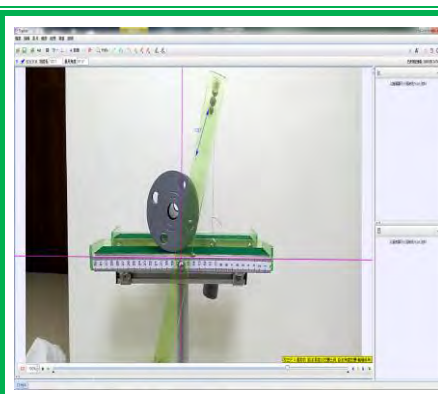


圖 35 再線軸停止時插入座標軸及校準尺



圖 36 上方所示即為  $\theta_c$ ，再帶入公式求得  $\cos\theta_c$ ，並繪製成折線圖



## 5. 改變線軸重量



圖 37 在**控制線軸重量**的實驗時，將紙黏土平均的放入線軸的中心軸內(並儘量將其壓到最緊)。



圖 38 在每次實驗前，都會重新測量線軸的重量，以免因水分蒸發而影響實驗結果。

## 6. 改變接觸面的材質



圖 39 本組在器材底部的接觸面，選擇了 4 種接觸面:砂紙、絨布、木板、白紙板

## 7. 靜摩擦係數測量



圖 40 將線軸直放於接觸面上



圖 41 將接觸面抬起到線軸滑落動並利用 Tracker 分析角度，求出值，代入  $\tan \theta$   $\theta = (\text{值} * 180) / \pi$

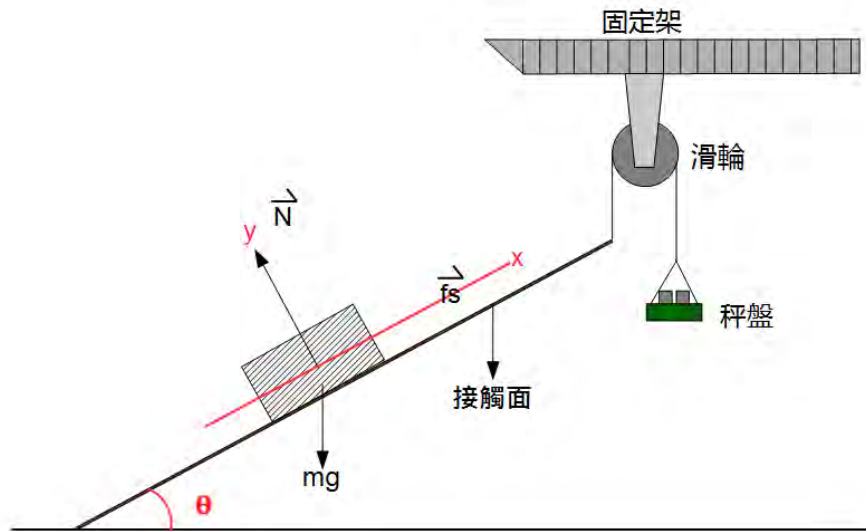


圖 42 實驗示意圖

改變秤盤上之砝碼，設物體恰要開始滑動時 $\theta = \theta_s$

$$\Rightarrow \Sigma F_x = f_{sM} - mg \sin \theta_s = 0 \quad (1)$$

$$\Rightarrow \Sigma F_y = N - mg \cos \theta_s = 0 \quad (2)$$

$$\Rightarrow f_{sM} = \mu_s N \quad (3)$$

$$(3) \cdot (2) \text{ 代入 } (1) \Rightarrow \mu_s mg \cos \theta_s = mg \sin \theta_s$$

$$\Rightarrow \mu_s = \frac{\sin \theta_s}{\cos \theta_s} = \tan \theta_s$$

名稱	圖 43 砂紙	圖 44 絨布	圖 45 白板(滑)	圖 46 木板
圖片				
靜摩擦係數	<b>0.71</b>	<b>0.36</b>	<b>0.33</b>	<b>0.32</b>

## 五、實驗遭遇到的困難

### (一)困難

#### 1. 設計實驗器材時:

- (1) 問題及解決:本組大概畫了十幾種儀器的草圖，但有些礙於本組現在的技術做不到，或是在實驗後不可行，在多次修正後，才做出了現在的「線軸收放儀器」。
- (2) 省思:有時候想的跟做的不一定相同，與其紙上談兵不如實際操作，並從失敗中學習。

#### 2. 製作儀器時:

- (1) 問題及解決:在製作時我們有些原理不太了解，因此在設計上很困難，但秉持著恆心與毅力，本組多次請教老師，終於完成「線軸收放儀器」。

#### 3. 製作實驗時:

- (1) 問題與解決 1:進行測量時，難免會有一些誤差，因此本組至少會測量 3 次以上，取平均值，以減少誤差。
- (2) 省思 1:在這次科展前，很少實際操作，但在這次科展後，我們學習到了做實驗的技巧，也對實驗中的步驟更加理解。
- (3) 問題與解決 2:本組在製作時，常常會遇到器材故障的問題，本組運用反向思考，一一解決。
- (4) 省思 2:雖然困難重重，但本組憑著努力不放棄的精神，冷靜思考，經過這次深深讓本組了解到思考的重要。

#### 4. 分析實驗時:

- (1) 問題與解決:本組在分析實驗數據時，對線軸滾動臨界角測量產生困擾，經請教老師後，最後選擇 tracker 這個軟體來應用。
- (2) 省思:本組學到要有發問的精神，不要一直自己鑽牛角尖，人多力量大，多聆聽別人意見，就可激發出意外的收穫

#### 5. 撰寫報告時:

- (1) 問題與解決:網路上雖然有人提出相關問題，但都只是輕描淡寫而已，因此本組在分析實驗時十分的困難，但是本組仍不放棄，不斷的向老師請教與討論，最後終於推出了公式
- (2) 省思:雖然本組一路上遇到了許多困難，但幸虧有老師的陪伴，以及家長的支持，成功的度過了一切，也許過程中有喜有哀，也一度曾經想放棄，但當完成實驗時，所得到的成就感卻是無價的，也許這就是驅使我們繼續往前進的動力吧!

## 六、選擇線軸

本組在選擇線軸時，總共收集了3種材質(木頭製、光碟製、水管製)的線軸，其中本組選擇以水管線軸做實驗，因為在施力時，會產生一股力量將線軸向上拉，然而木頭線軸、光碟線軸重量較輕，較容易因此而影響實驗結果，故最後選擇重量最重的水管製線軸來進行此次的實驗。

## 伍、研究結果與討論

會影響線軸前後滾動的是臨界角，而是什麼變因會影響臨界角呢？於是本組根據理論判斷，共列出四種變因，分別是拉力大小、內外徑比值、線軸重量及靜摩擦係數進行研究。

### 一、探討拉力大小對線軸滾動方向之影響：

在此實驗中本實驗中本組藉由改變砝碼重量來調整拉力大小，並為了增加實驗準確度，分別對五種不同的內外徑比進行實驗，結果如下表

#### (一)實驗數據

▼ 內徑39.84mm，外徑94.94mm：

操縱變因：拉力大小

控制變因：不同接觸面(靜摩擦係數)、線軸重量、線軸內外徑比值

應變變因：線軸滾動方向的臨界角  $\cos \theta_c$

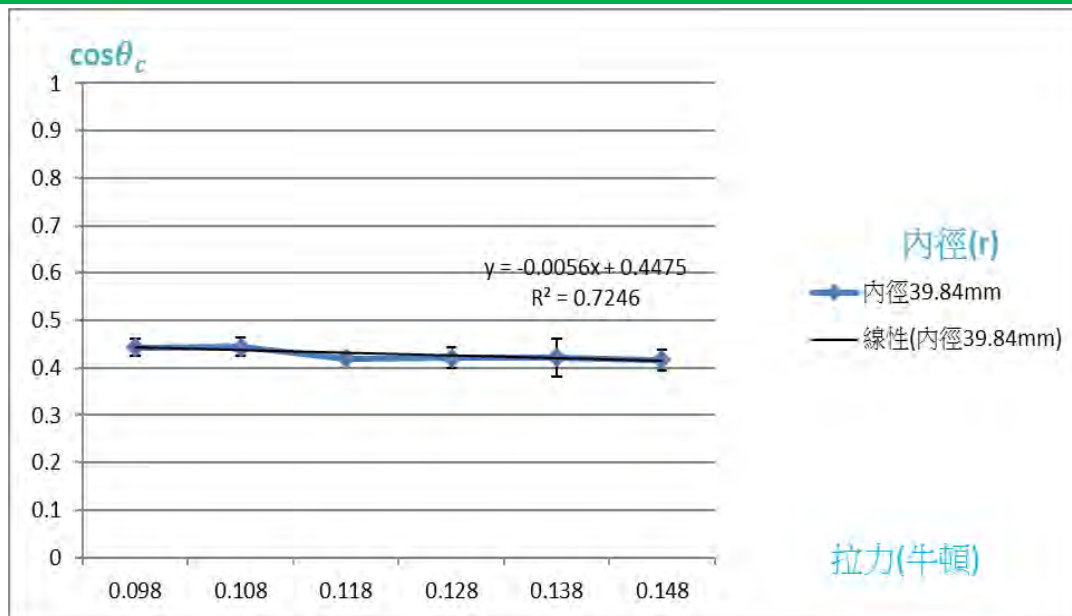


圖 47  $\cos \theta_c$ 與拉力大小之關係圖

從圖 47 中顯示：隨著拉力大小的增加， $\cos \theta_c$ 的變化卻極小，故推斷拉力大小對  $\cos \theta_c$ 沒有影響。

▼ 內徑49.84mm，外徑94.94mm：

操縱變因: 拉力大小

控制變因: 不同接觸面(靜摩擦係數)、線軸重量、線軸內外徑比值

應變變因: 線軸滾動方向的臨界角  $\cos \theta_c$

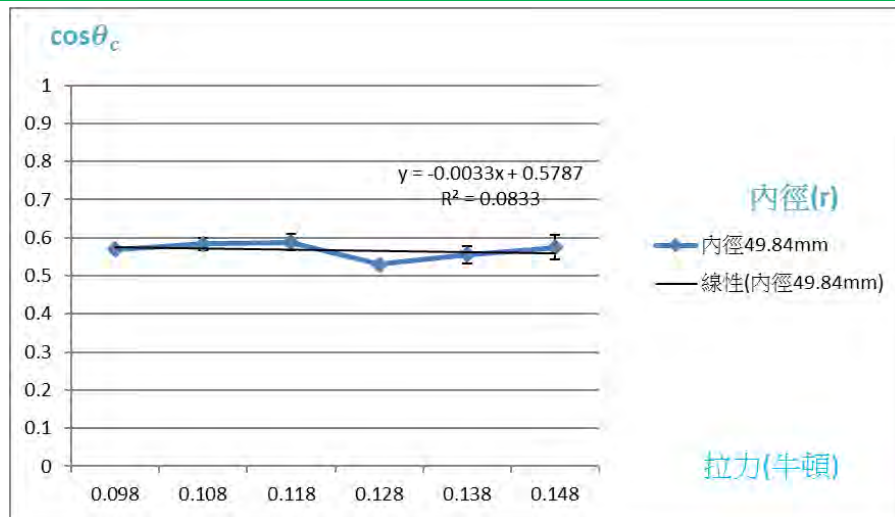


圖 48  $\cos \theta_c$ 與拉力大小之關係圖

從圖 48 中顯示：隨著拉力大小的增加， $\cos \theta_c$ 的變化卻極小，故推斷拉力大小對  $\cos \theta_c$  沒有影響。

▼ 內徑59.84mm，外徑94.94mm：

操縱變因: 拉力大小

控制變因: 不同接觸面(靜摩擦係數)、線軸重量、線軸內外徑比值

應變變因: 線軸滾動方向的臨界角  $\cos \theta_c$

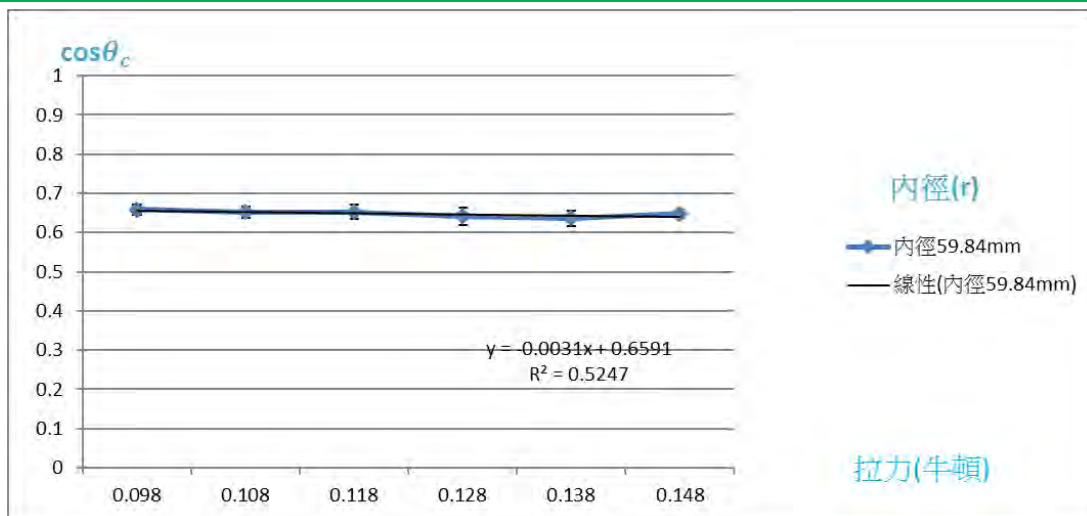


圖 49  $\cos \theta_c$ 與拉力大小之關係圖

從圖 49 中顯示：隨著拉力大小的增加， $\cos \theta_c$ 的變化卻極小，故推斷拉力大小對  $\cos \theta_c$  沒有影響。

▼ 內徑69.84mm，外徑94.94mm：

操縱變因: 拉力大小

控制變因: 不同接觸面(靜摩擦係數)、線軸重量、線軸內外徑比值

應變變因: 線軸滾動方向的臨界角  $\cos \theta_c$

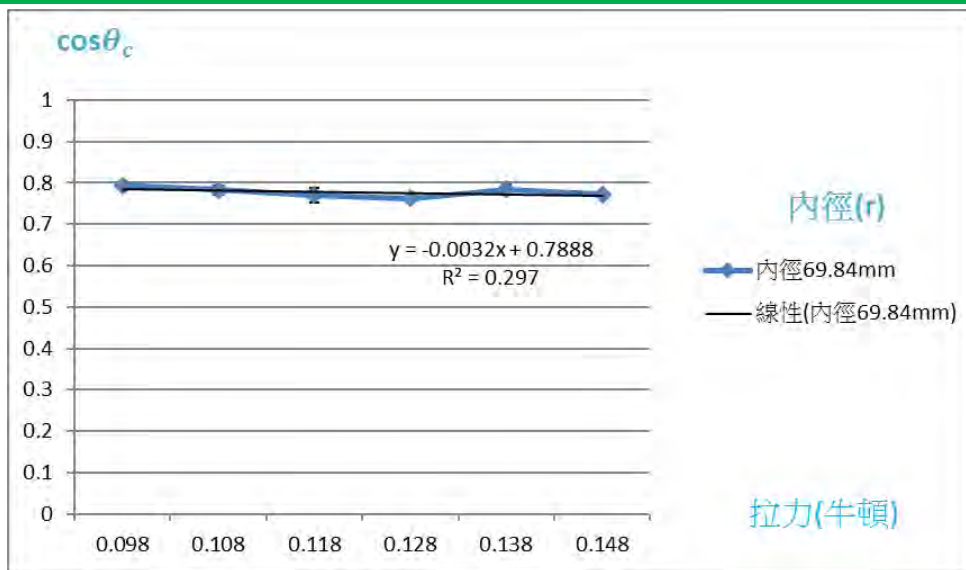


圖 50  $\cos \theta_c$ 與拉力大小之關係圖

從圖 50 中顯示：隨著拉力大小的增加， $\cos \theta_c$ 的變化卻極小，故推斷拉力大小對  $\cos \theta_c$  沒有影響。

▼ 內徑79.84mm，外徑94.94mm：

操縱變因: 拉力大小

控制變因: 不同接觸面(靜摩擦係數)、線軸重量、線軸內外徑比值

應變變因: 線軸滾動方向的臨界角  $\cos \theta_c$

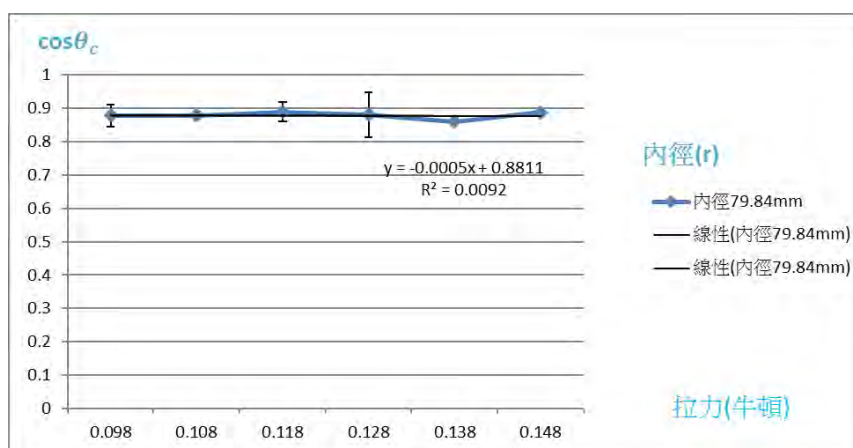


圖 51  $\cos \theta_c$ 與拉力大小之關係圖

從圖 51 中顯示：隨著拉力大小的增加， $\cos \theta_c$ 的變化卻極小，故推斷拉力大小對  $\cos \theta_c$  沒有影響。

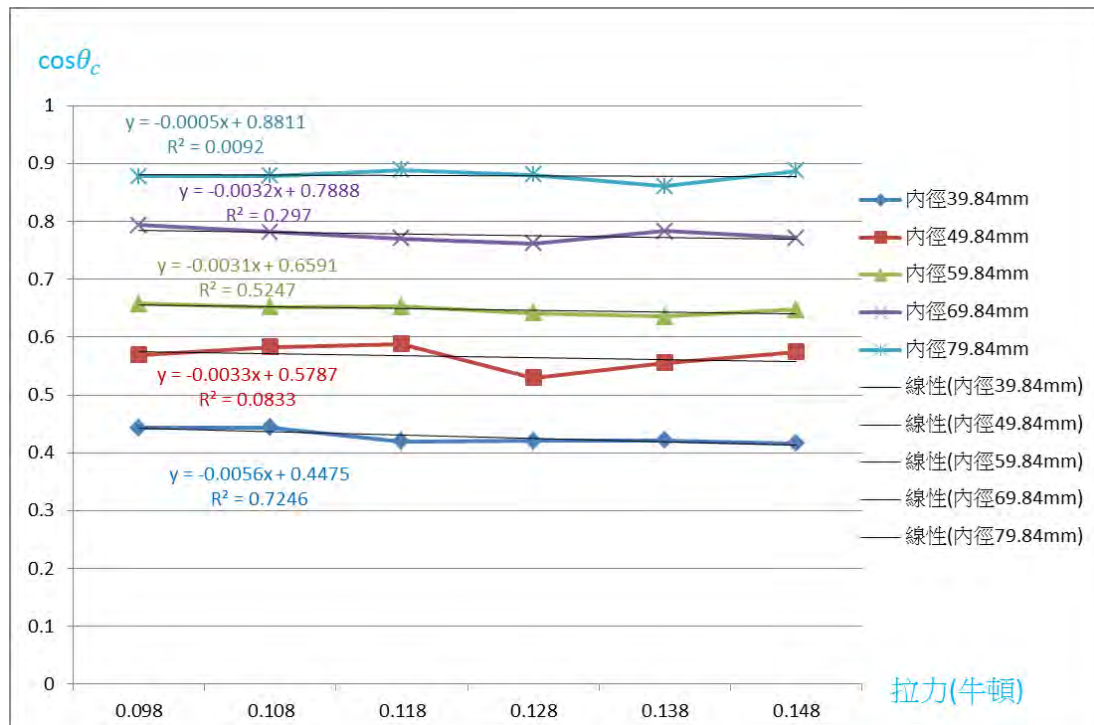


圖 52  $\cos \theta_c$ 與拉力大小之關係圖(總和)

## (二)結果與討論

由圖 47~52，可得知拉力的大小對線軸滾動方向，並沒有影響，本組在做拉力實驗時，為了避免只做一種內外徑比值，所造成的不客觀，因此本組在做各種內外徑比值時，都會使用六種拉力，以增加實驗可信度。

### 二、探討線軸內外徑比值對線軸滾動方向之影響

#### (一)實驗數據

本組在此實驗中選用了五種不同的內外徑比，如下表所示:

表 2 內外徑比值(下方折線圖，本組只顯示內外徑比值)

內徑 r (mm)	外徑 R (mm)	內徑 r/外徑 R(比值)
39.84	94.94	0.4196335
49.84	94.94	0.5249631
59.84	94.94	0.6302928
69.84	94.94	0.7356225
79.84	94.94	0.8409522

▼ 拉力0.098牛頓:

操縱變因:線軸內外徑比值

控制變因:拉力大小、線軸重量、不同接觸面(靜摩擦係數)

應變變因: 線軸滾動方向的臨界角  $\cos \theta_c$

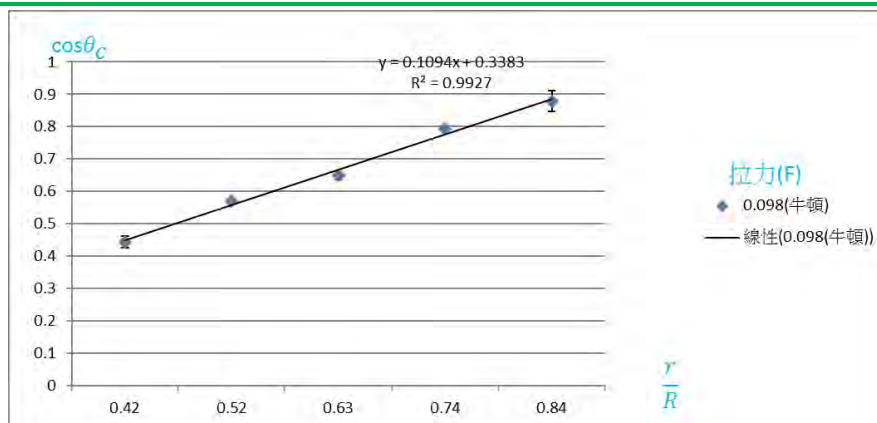


圖53  $\cos \theta_c$ 與線軸內外徑比值之關係圖

從 圖53中顯示：隨著內外徑比值愈大， $\cos \theta_c$ 呈現上升的趨勢，故推斷 $\cos \theta_c$ 與內外徑比值呈線性關係。

▼ 拉力0.108牛頓:

操縱變因:線軸內外徑比值

控制變因:拉力大小、線軸重量、不同接觸面(靜摩擦係數)

應變變因: 線軸滾動方向的臨界角  $\cos \theta_c$

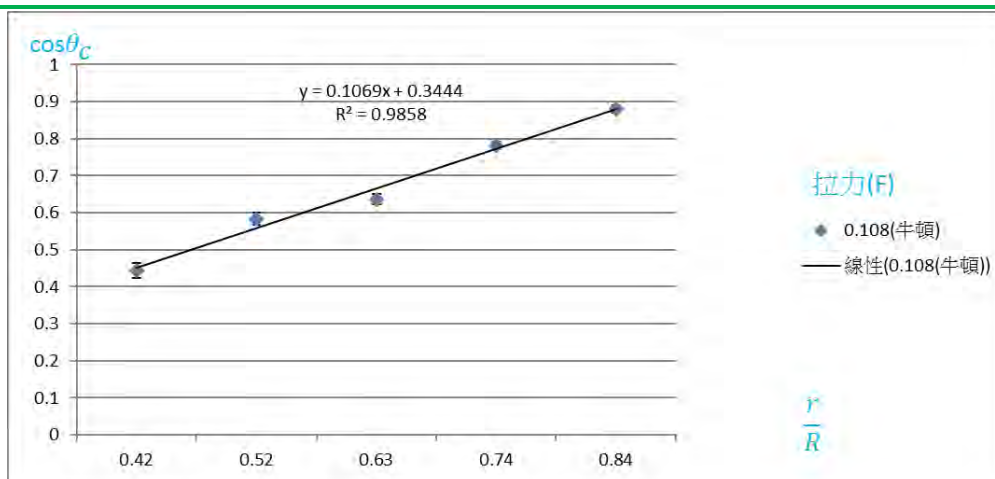


圖54  $\cos \theta_c$ 與線軸內外徑比值之關係圖

從 圖54中顯示：隨著內外徑比值愈大， $\cos \theta_c$ 呈現上升的趨勢，故推斷 $\cos \theta_c$ 與內外徑比值呈線性關係。



▼拉力0.118牛頓:

操縱變因:線軸內外徑比值

控制變因:拉力大小、線軸重量、不同接觸面(靜摩擦係數)

應變變因: 線軸滾動方向的臨界角  $\cos \theta_c$

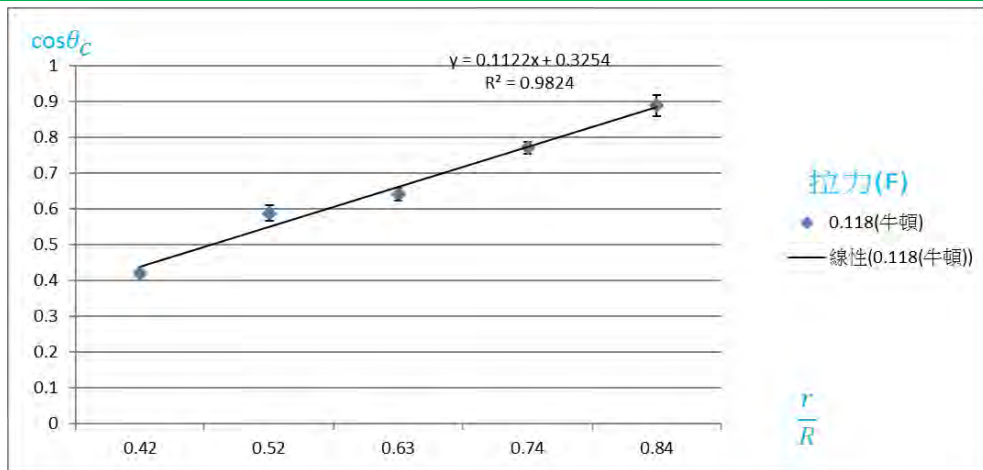


圖55  $\cos \theta_c$ 與線軸內外徑比值之關係圖

從 圖55中顯示：隨著內外徑比值愈大， $\cos \theta_c$ 呈現上升的趨勢，故推斷 $\cos \theta_c$ 與內外徑比值呈線性關係。

▼拉力0.128牛頓:

操縱變因:線軸內外徑比值

控制變因:拉力大小、線軸重量、不同接觸面(靜摩擦係數)

應變變因: 線軸滾動方向的臨界角  $\cos \theta_c$

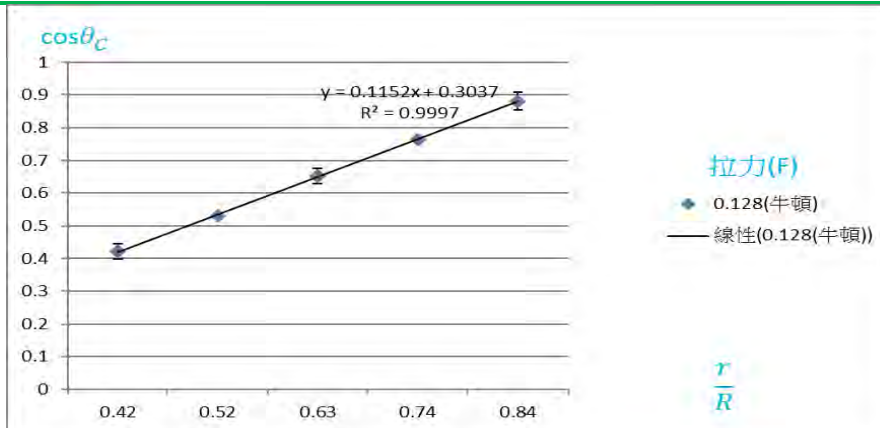


圖56  $\cos \theta_c$ 與線軸內外徑比值之關係圖

從 圖56中顯示：隨著內外徑比比值愈大， $\cos \theta_c$ 呈現上升的趨勢，故推斷 $\cos \theta_c$ 與內外徑比值呈線性關係。

▼拉力0.138牛頓:

操縱變因:線軸內外徑比值

控制變因:拉力大小、線軸重量、不同接觸面(靜摩擦係數)

應變變因: 線軸滾動方向的臨界角  $\cos \theta_c$

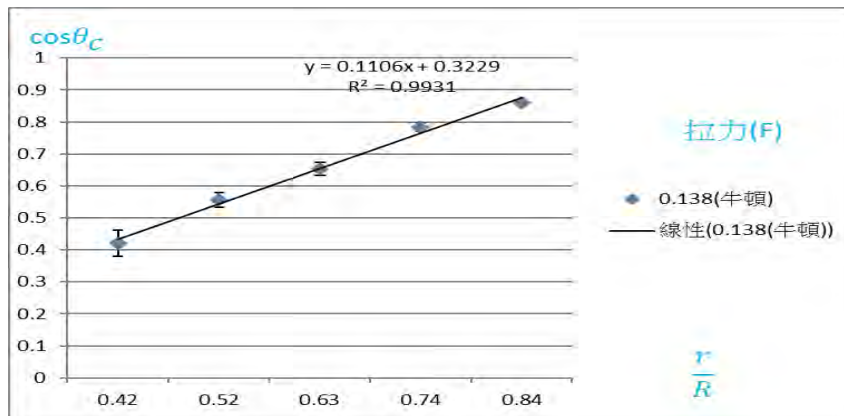


圖57  $\cos \theta_c$ 與線軸內外徑比值之關係圖

從 圖57中顯示：隨著內外徑比值愈大， $\cos \theta_c$ 呈現上升的趨勢，故推斷 $\cos \theta_c$ 與內外徑比值呈線性關係。

▼拉力0.148牛頓:

操縱變因:線軸內外徑比值

控制變因:拉力大小、線軸重量、不同接觸面(靜摩擦係數)

應變變因: 線軸滾動方向的臨界角  $\cos \theta_c$

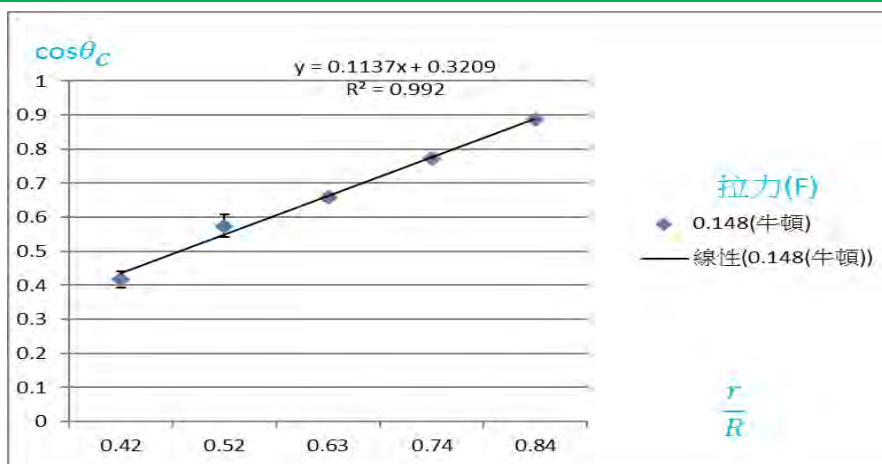


圖58  $\cos \theta_c$ 與線軸內外徑比值之關係圖

從 圖58中顯示：隨著內外徑比值愈大， $\cos \theta_c$ 呈現上升的趨勢，故推斷 $\cos \theta_c$ 與內外徑比值呈線性關係。

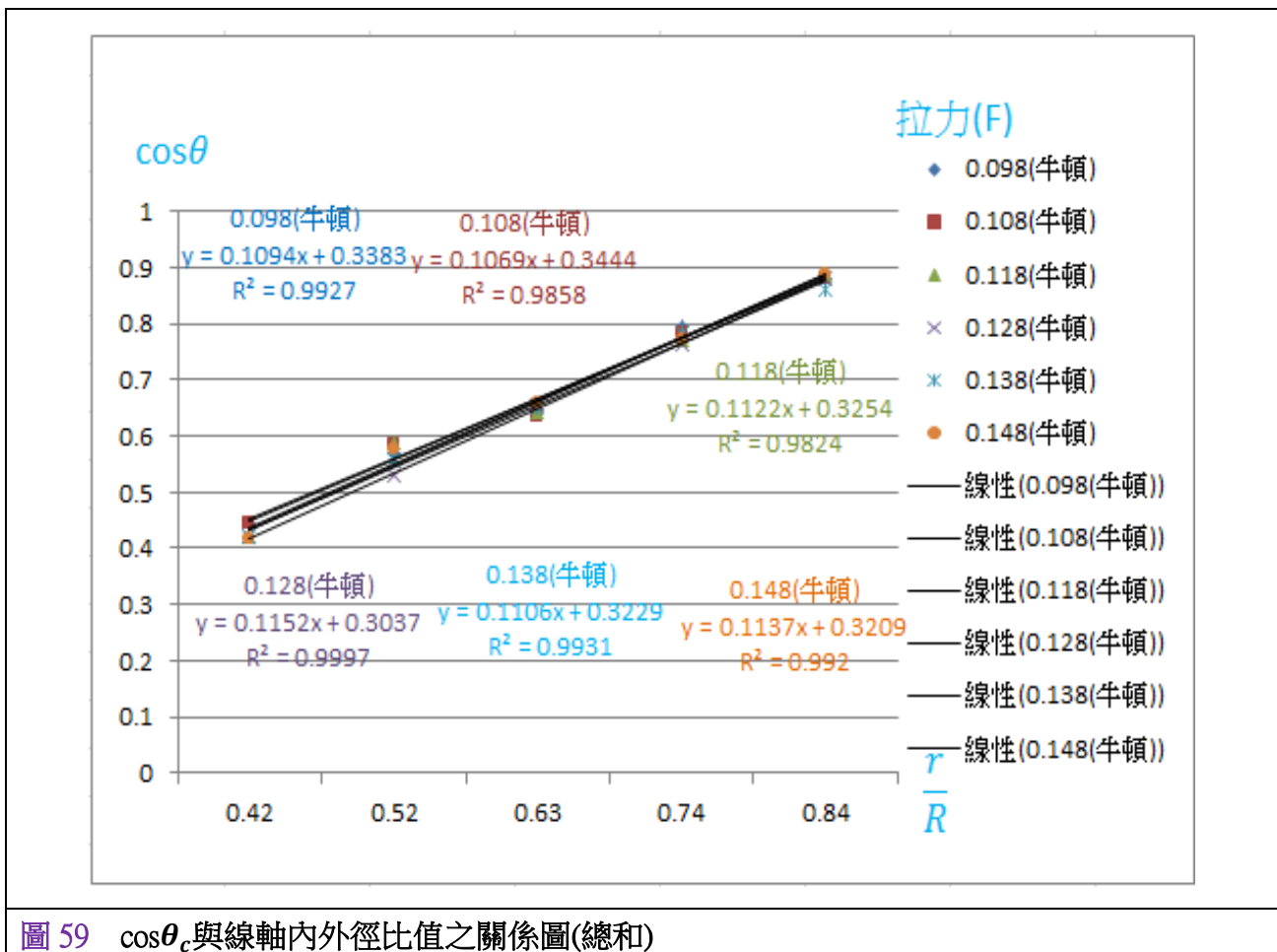


圖 59  $\cos\theta_c$ 與線軸內外徑比值之關係圖(總和)

## (二)結果與討論

由圖53~59可知線軸內外徑比值的大小與線軸滾動之臨界角大小成線性關係，本組在此次實驗也同樣使用了6種拉力(為了避免因為拉力大小而影響實驗結果)。

本組在此實驗的圖形上再次證明拉力大小與線軸滾動方向之關聯性不高

由上圖59可再次證明拉力大小不會影響線軸轉動的方向

## 三、探討線軸重量對線軸滾動方向之影響

在線軸重量的，本組採取了4種不同的重量進行實驗(每次遞增10公克)，並測試多組數據，可得結果如下

(一)實驗數據(以下實驗皆是內徑39.84mm，外徑94.94mm)

### ▼拉力0.098牛頓:

操縱變因:線軸重量

控制變因:拉力大小、線軸內外徑比值、不同接觸面(靜摩擦係數)

應變變因:線軸滾動方向的臨界角  $\cos\theta_c$

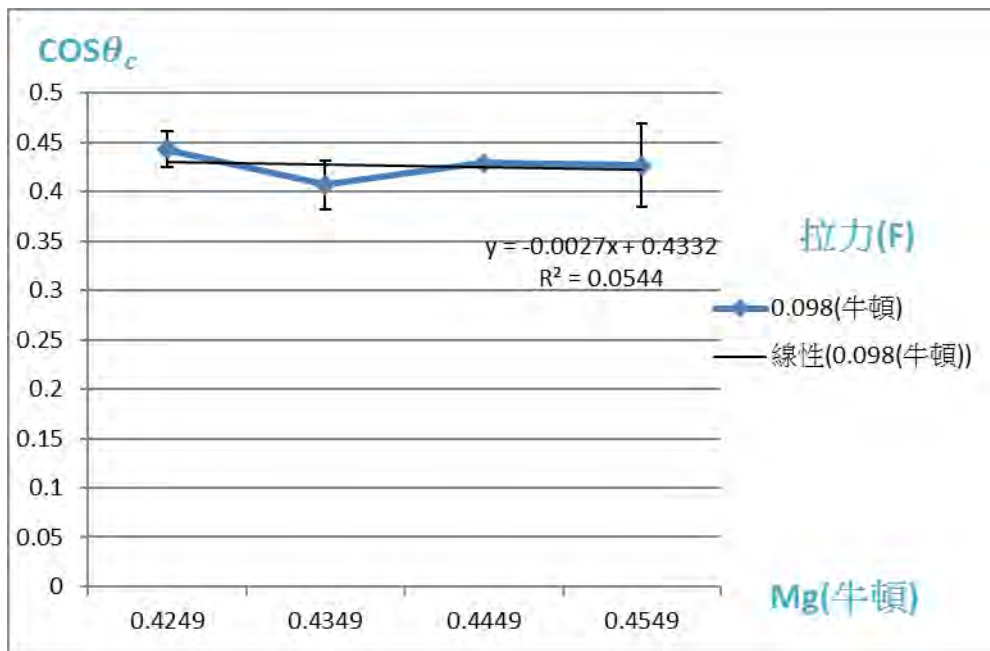


圖60  $\cos \theta_c$ 與線軸重量之關係圖

從 圖60中顯示：隨著線軸重量增加， $\cos \theta_c$ 並無明顯改變，故推斷 $\cos \theta_c$ 與線軸重量無關。

▼ 拉力0.108牛頓:

操縱變因:線軸重量

控制變因:拉力大小、線軸內外徑比值、不同接觸面(靜摩擦係數)

應變變因: 線軸滾動方向的臨界角  $\cos \theta_c$

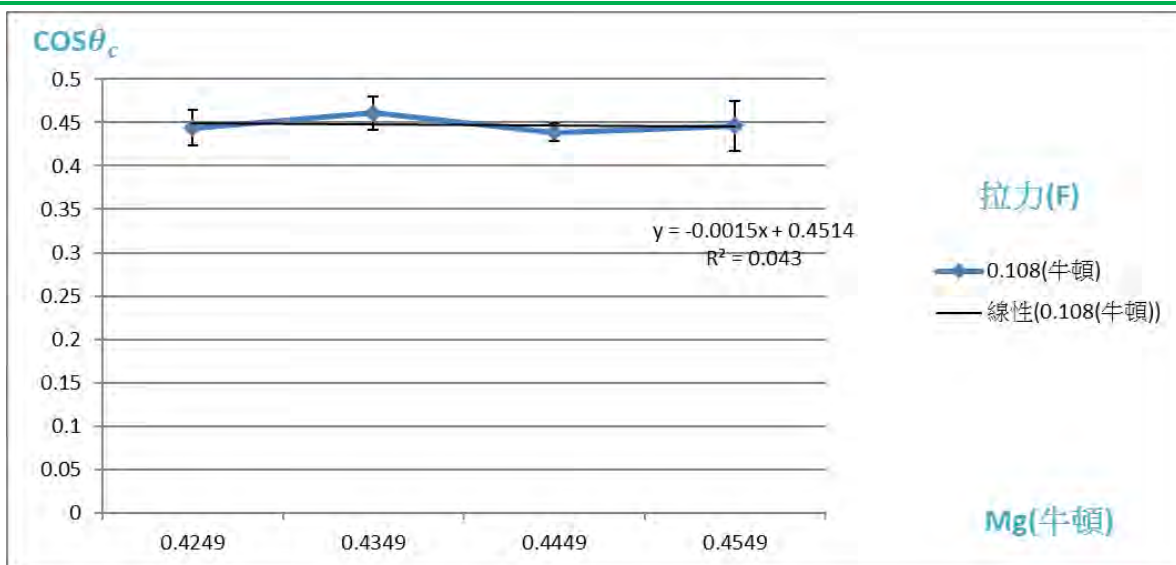


圖61  $\cos \theta_c$ 與線軸重量之關係圖

從 圖61中顯示：隨著線軸重量增加， $\cos \theta_c$ 並無明顯改變，故推斷 $\cos \theta_c$ 與線軸重量無關。

▼ 拉力0.118牛頓:

操縱變因:線軸重量

控制變因:拉力大小、線軸內外徑比值、不同接觸面(靜摩擦係數)

應變變因: 線軸滾動方向的臨界角  $\cos \theta_c$

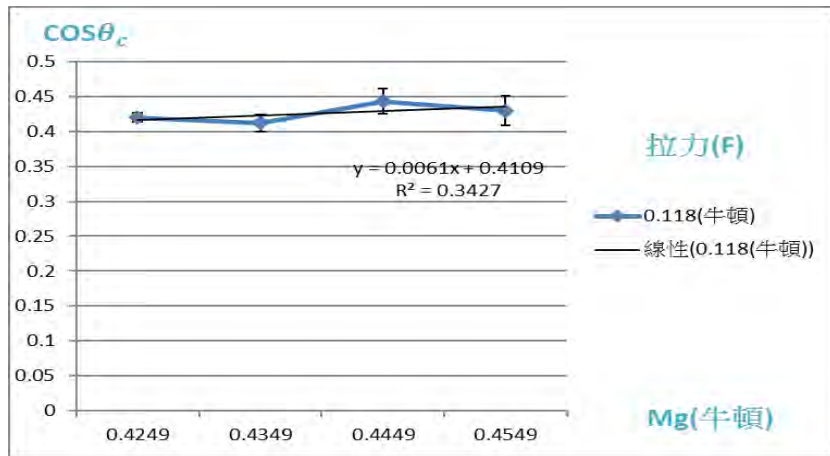


圖62  $\cos \theta_c$ 與線軸重量之關係圖

從 圖62中顯示：隨著線軸重量增加， $\cos \theta_c$ 並無明顯改變，故推斷 $\cos \theta_c$ 與線軸重量無關。

▼ 拉力0.128牛頓:

操縱變因:線軸重量

控制變因:拉力大小、線軸內外徑比值、不同接觸面(靜摩擦係數)

應變變因: 線軸滾動方向的臨界角  $\cos \theta_c$

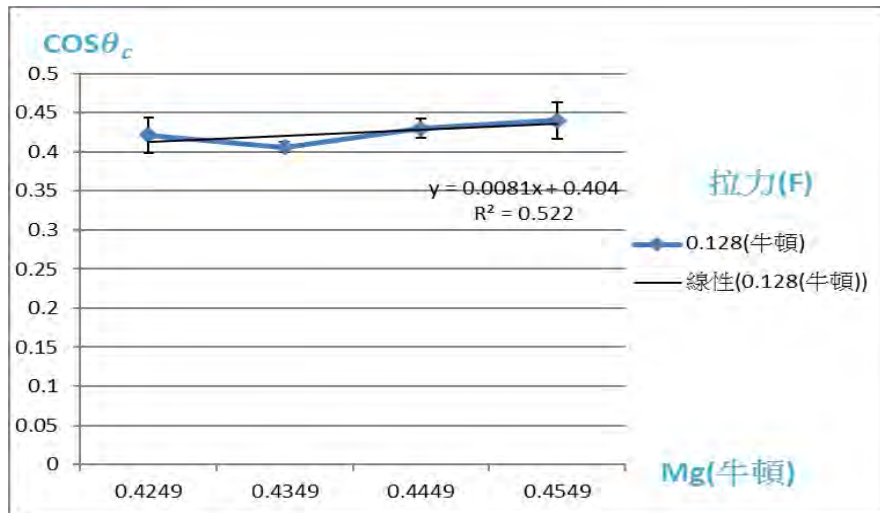


圖63  $\cos \theta_c$ 與線軸重量之關係圖

從 圖63中顯示：隨著線軸重量增加， $\cos \theta_c$ 並無明顯改變，故推斷 $\cos \theta_c$ 與線軸重量無關。

▼ 拉力0.138牛頓:

操縱變因:線軸重量

控制變因:拉力大小、線軸內外徑比值、不同接觸面(靜摩擦係數)

應變變因: 線軸滾動方向的臨界角  $\cos \theta_c$

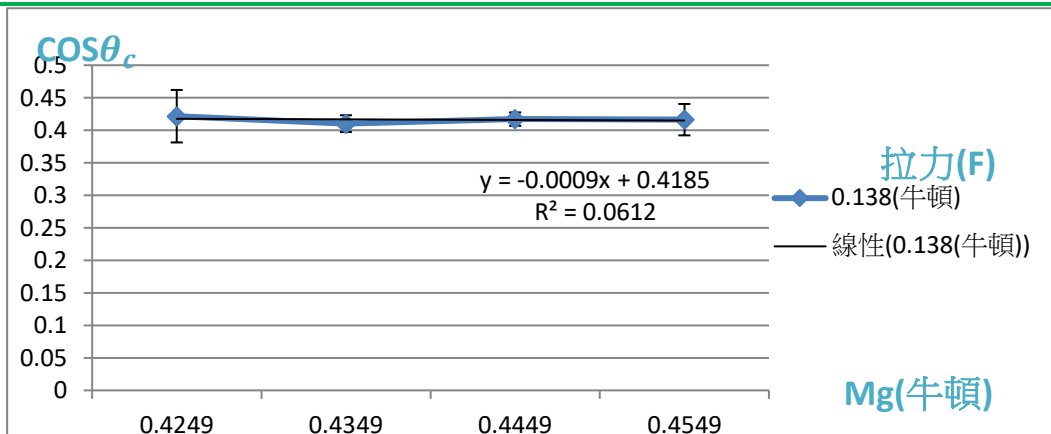


圖64  $\cos \theta_c$ 與線軸重量之關係圖

從 圖64中顯示：隨著線軸重量增加， $\cos \theta_c$ 並無明顯改變，故推斷 $\cos \theta_c$ 與線軸重量無關。

▼ 拉力0.148牛頓:

操縱變因:線軸重量

控制變因:拉力大小、線軸內外徑比值、不同接觸面(靜摩擦係數)

應變變因: 線軸滾動方向的臨界角  $\cos \theta_c$

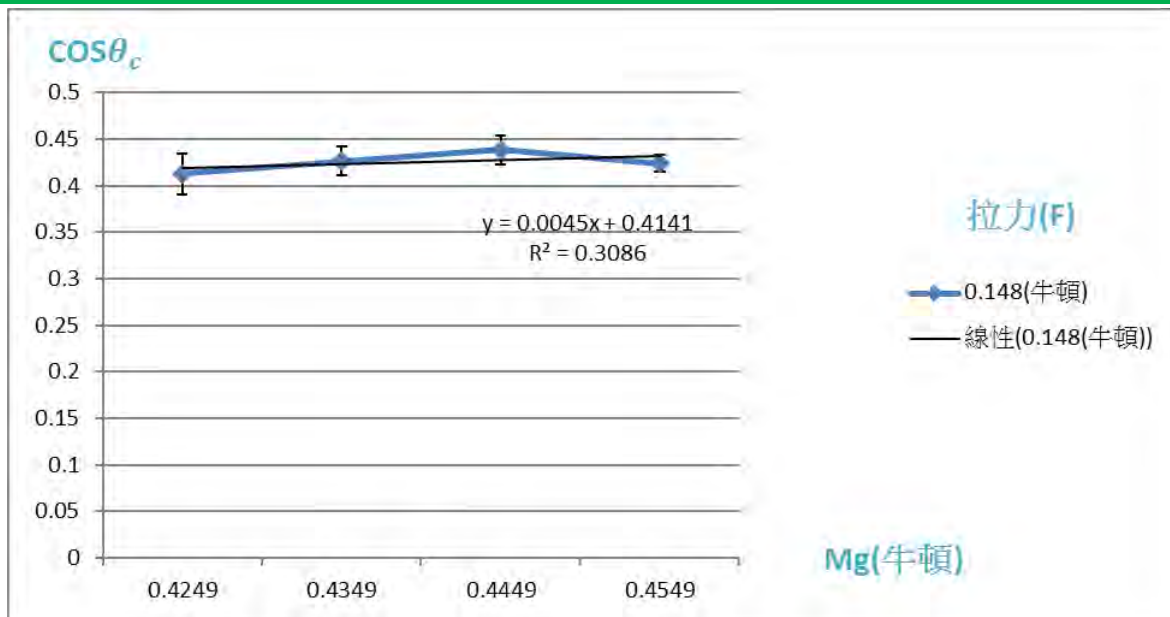


圖65  $\cos \theta_c$ 與線軸重量之關係圖

從 圖65中顯示：隨著線軸重量增加， $\cos \theta_c$ 並無明顯改變，故推斷 $\cos \theta_c$ 與線軸重量無關。

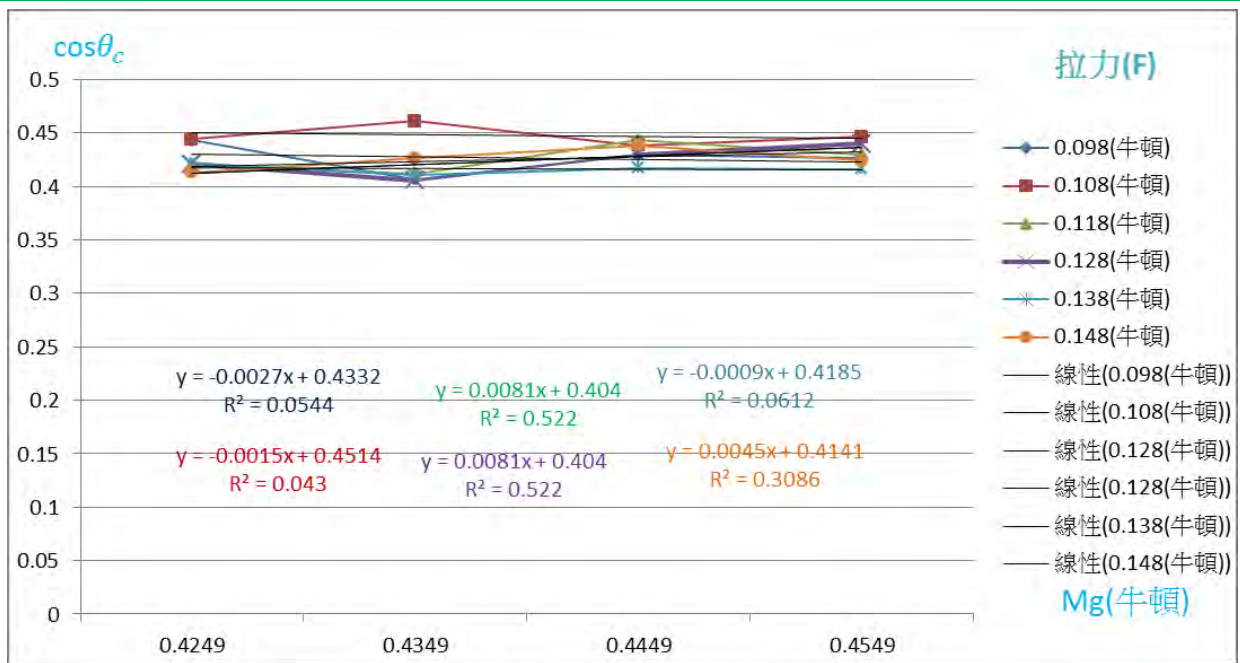


圖 66  $\cos \theta_c$ 與線軸重量之關係圖(總和)

## (二)結果與討論

由圖 60~66 可得知線軸重量並不會影響線軸滾動方向，在此實驗中本組同樣使用 6 種拉力，以避免因拉力而影響實驗結果。

由圖66，本組可再次證明拉力不會影響線軸轉動的方向

## 四、探討接觸面材質(靜摩擦係數)對線軸滾動方向之影響

### (一)實驗數據(以下實驗皆是內徑 9.84mm，外徑 94.94mm)

#### ▼ 拉力0.98牛頓:

操縱變因:不同接觸面(靜摩擦係數)

控制變因:拉力大小、線軸重量、線軸內外徑比值

應變變因:線軸滾動方向的臨界角  $\cos \theta_c$

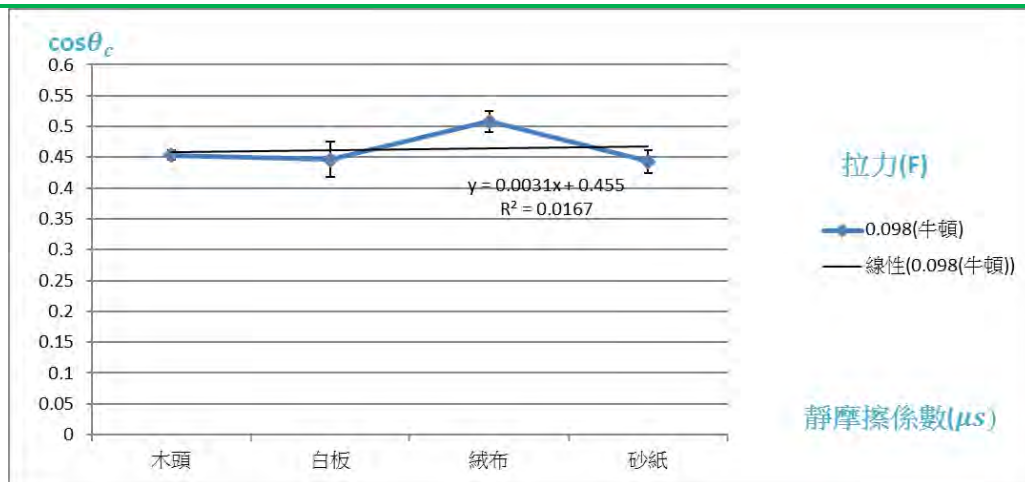


圖67  $\cos \theta_c$ 與靜摩擦係數之關係圖

從圖67中顯示：隨著摩擦係數改變， $\cos \theta_c$ 並無明顯改變，故推斷 $\cos \theta_c$ 與接觸面材質無關。

▼ 拉力0.108牛頓:

操縱變因:不同接觸面(靜摩擦係數)

控制變因:拉力大小、線軸重量、線軸內外徑比值

應變變因:線軸滾動方向的臨界角  $\cos \theta_c$

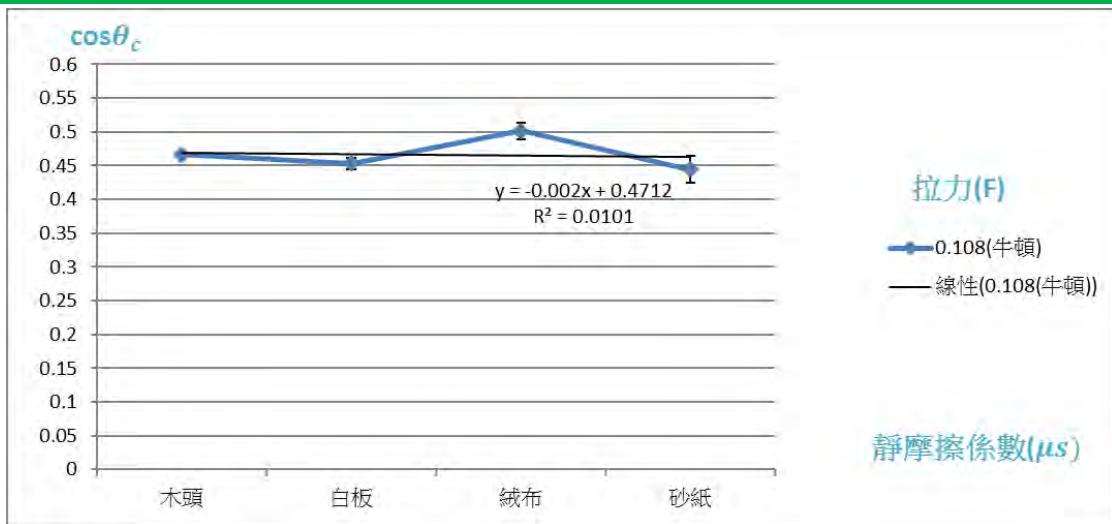


圖68  $\cos \theta_c$ 與靜摩擦係數之關係圖

從圖68中顯示：隨著摩擦係數改變， $\cos \theta_c$ 並無明顯改變，故推斷 $\cos \theta_c$ 與接觸面材質無關。

▼ 拉力0.118牛頓:

操縱變因:不同接觸面(靜摩擦係數)

控制變因:拉力大小、線軸重量、線軸內外徑比值

應變變因:線軸滾動方向的臨界角  $\cos \theta_c$

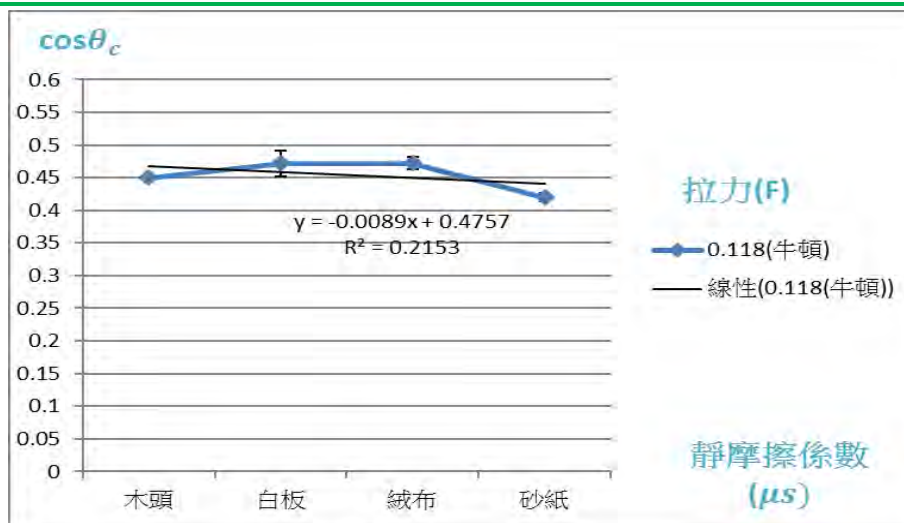


圖69  $\cos \theta_c$ 與靜摩擦係數之關係圖

從圖69中顯示：隨著摩擦係數改變， $\cos \theta_c$ 並無明顯改變，故推斷 $\cos \theta_c$ 與接觸面材質無關。



▼ 拉力0.128牛頓:

操縱變因:不同接觸面(靜摩擦係數)

控制變因:拉力大小、線軸重量、線軸內外徑比值

應變變因:線軸滾動方向的臨界角  $\cos \theta_c$

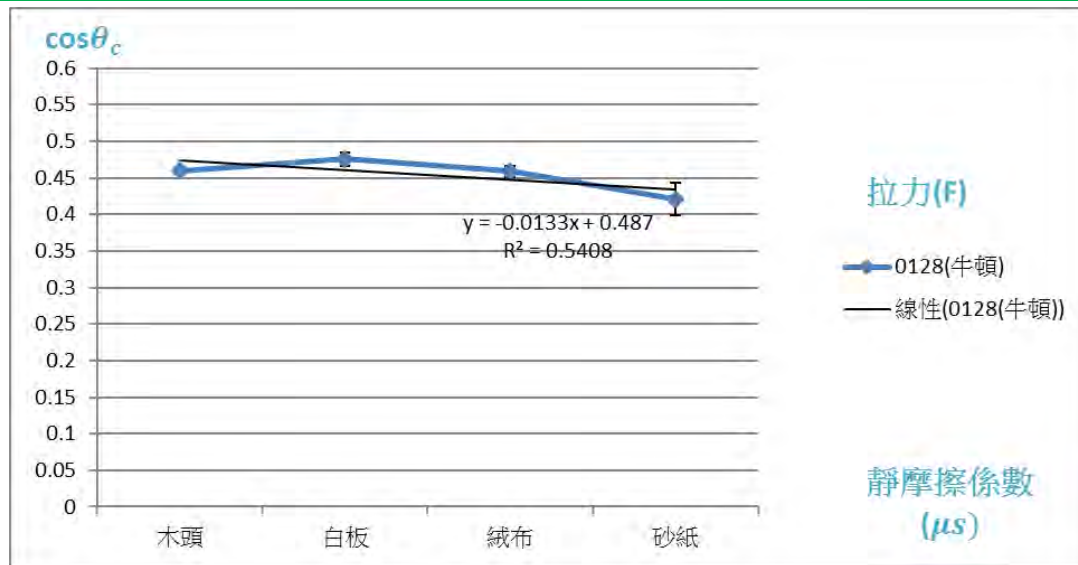


圖70  $\cos \theta_c$ 與靜摩擦係數之關係圖

從圖70中顯示：隨著摩擦係數改變， $\cos \theta_c$ 並無明顯改變，故推斷 $\cos \theta_c$ 與接觸面材質無關。

▼ 拉力0.138牛頓:

操縱變因:不同接觸面(靜摩擦係數)

控制變因:拉力大小、線軸重量、線軸內外徑比值

應變變因:線軸滾動方向的臨界角  $\cos \theta_c$

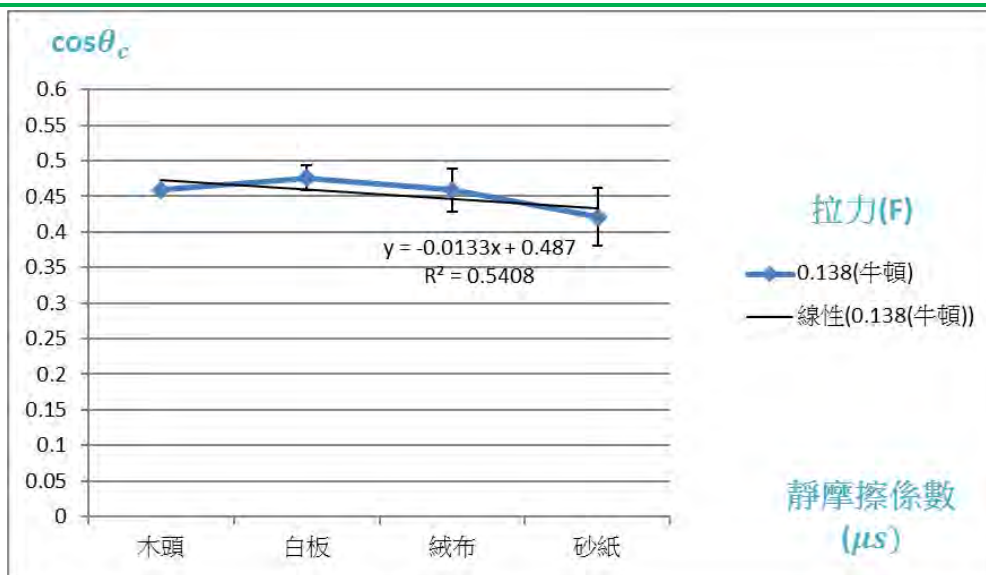


圖71  $\cos \theta_c$ 與靜摩擦係數之關係圖

從圖71中顯示：隨著摩擦係數改變， $\cos \theta_c$ 並無明顯改變，故推斷 $\cos \theta_c$ 與接觸面材質無關。

▼ 拉力0.148牛頓:

操縱變因:不同接觸面(靜摩擦係數)

控制變因:拉力大小、線軸重量、線軸內外徑比值

應變變因:線軸滾動方向的臨界角  $\cos \theta_c$

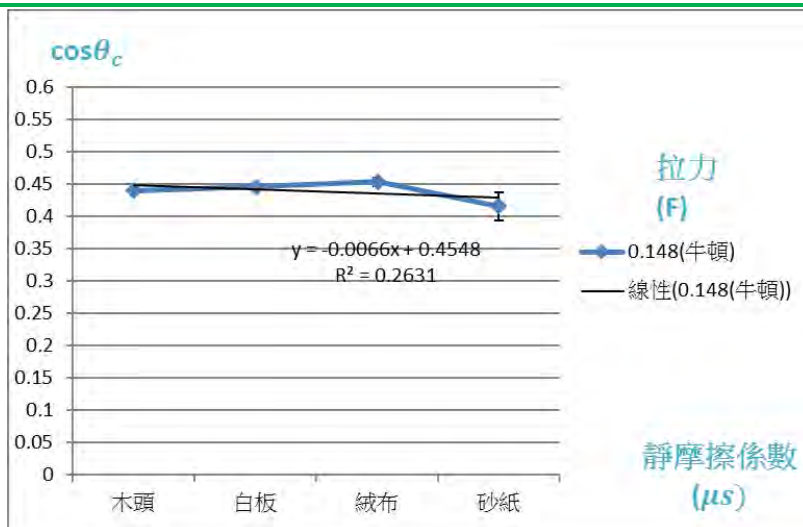


圖72  $\cos \theta_c$ 與靜摩擦係數之關係圖

從圖72中顯示：隨著摩擦係數改變， $\cos \theta_c$ 並無明顯改變，故推斷 $\cos \theta_c$ 與接觸面材質無關。

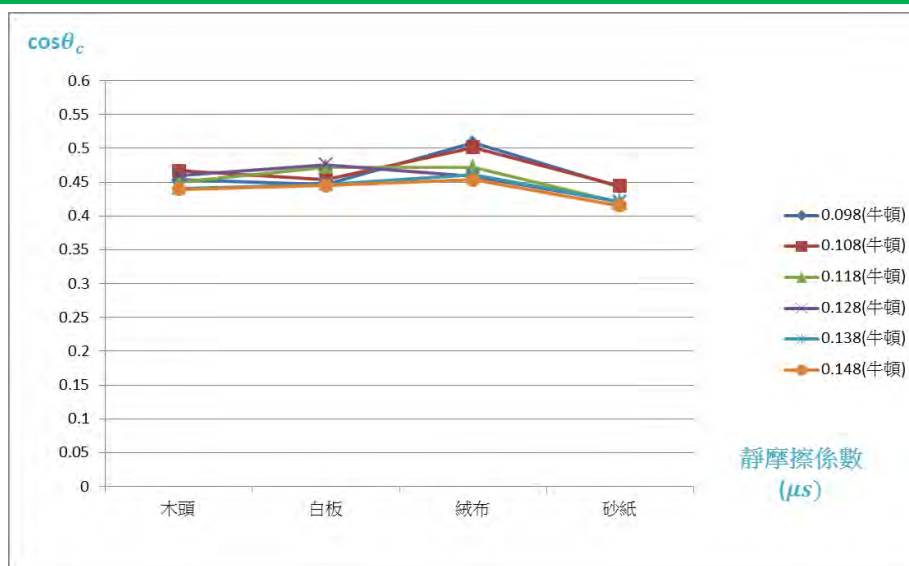


圖73  $\cos \theta_c$ 與靜摩擦係數之關係圖(總和)

(二)結果與討論

從圖 67~73，可得知靜摩擦力( $f_s$ )對於線軸滾動的方向沒有影響的，上方數據之所以會有微小起伏，是因為本實驗所使用的材質並非剛體，所以可能在滾動時可能會產生凹陷等問題，因此數據會有一些微小誤差。

由圖73，本組可再次證明拉力不會影響線軸轉動的方向

## 五、探討當內徑大於外徑時，線軸的滾動

同學看到本組實驗後，產生好奇，並提出問題:如果線軸內徑大於外徑時，結果是否會符合公式呢?因此本組便製作以下實驗:

### (一)實驗結果

因為若線軸內徑大於外徑時，內徑便會接觸，因此我們便設計出第三代儀器。

當內徑  $r >$  外徑  $R$ ，則:

$$\cos \theta_c = \frac{r}{R} > 1$$

但  $\cos$  的值必定介於-1 和 1 之間，不可能大於 1，臨界角為何?因內徑大於外徑在第二代的測試儀器無法測試，因此設計第三代測試儀器如圖 :經測試不管拉力角度多少，線軸均往展開的方向轉動，找不到臨界角。

實驗結果：內徑大於外徑找不到臨界與  $\cos$  的值大於 1：無解，與實驗結果吻合。

### (二)意外收穫

因第三代測試可 360 度測試，無意間發現除了測試上方有一臨界角，在其下方亦發現另一臨界角，根據本組測試後發現我們發現如果上方臨界角為  $\theta$  則下方臨界角約為  $-\theta$ ，後來我們找到在三角函數負角關係式  $\cos(-\theta)=\cos(\theta)$  因此下方臨界角一樣符合  $\cos \theta_c = \frac{r}{R}$

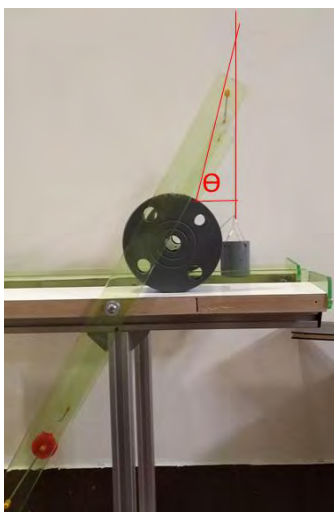


圖 74 上方臨界角

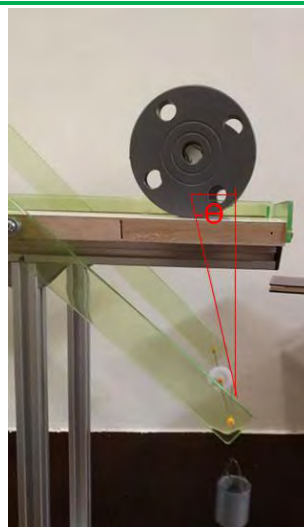


圖 75 下方臨界角

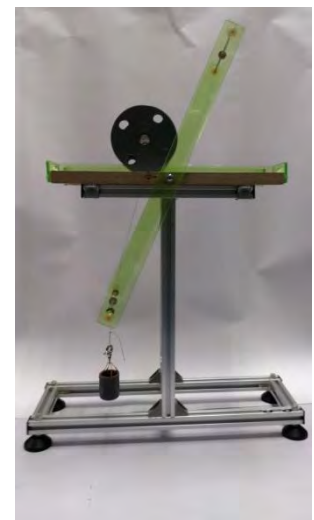


圖 76 第三代實驗儀器

## 六、推導公式

### (一)線軸純滾動時之理論推導

本組在拉力、內外徑比、線軸重量對線軸滾動方向的影響實驗中，接觸面(靜摩擦係數)選擇以砂紙做實驗，是因為在本組所選4種材質中，以砂紙靜摩擦係數最大(線軸較不容易空轉、滑動)，可以避免一些實驗上的誤差。

若線軸是純滾動(僅移動和轉動，沒有滑動)，則從實驗(一)到(四)的實驗歸納結果可知  $\cos \theta_c = \frac{r}{R}$ ，故影響線軸滾動方向的拉力角度  $\theta_c$  僅與  $\frac{r}{R}$  的比有關，根據以上結果本組從理論來探討為什麼會如此，當線軸純滾動時，理論計算如下：

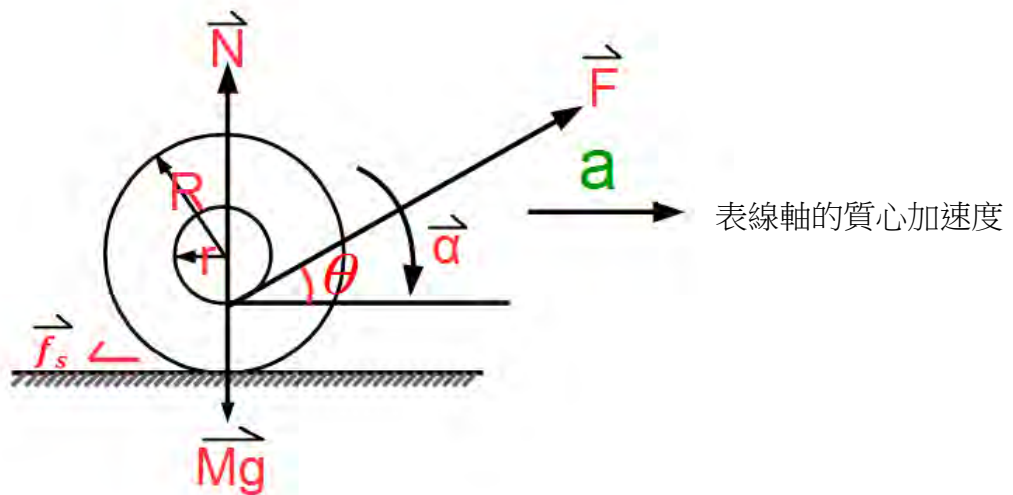


圖77 線軸滾動示意圖

$$\sum F_x = F \cos \theta - f_s = Ma \quad (1)$$

$$\sum F_y = N + F \sin \theta - Mg = 0 \quad (2)$$

$$\sum \tau_0 = R f_s - r F = I \alpha \quad (3)$$

$$a = R \alpha \text{ (因為純滾動)} \quad (4)$$

$$f_s \leq \mu_s N \quad (5)$$

$$\text{由(4)帶入(3)} \Rightarrow R f_s - r F = I \frac{a}{R}$$

$$\Rightarrow f_s - \frac{r}{R} F = \frac{I}{R^2} a \quad (6)$$

$$(1)+(6) \Rightarrow F \cos \theta - \frac{r}{R} F = \left( M + \frac{I}{R^2} \right) a$$

$$\Rightarrow a = \frac{F \cos \theta - \frac{r}{R} F}{M + \frac{I}{R^2}}$$

所以 當  $a > 0$  時，線軸向右滾動

當  $a = 0$  時，線軸靜止

當  $a < 0$  時，線軸向反方向滾動

設 $a=0$ 時， $\theta = \theta_c \Rightarrow F \cos \theta_c - \frac{r}{R}F = 0 \Rightarrow \cos \theta_c = \frac{r}{R}$

$\therefore \theta_c$  僅與 $\frac{r}{R}$ 的比值有關，與接觸面材質( $\mu_s$ )、拉力大小( $F$ )、線軸重量( $Mg$ )均無關

但此公式是針對剛體所推導出來的，因此本組在進行實驗時，所得到的數據會有些小變化，可能是受材質本身及接觸面的凹陷所影響。

(二)線軸純滾動又滑動時之理論推導

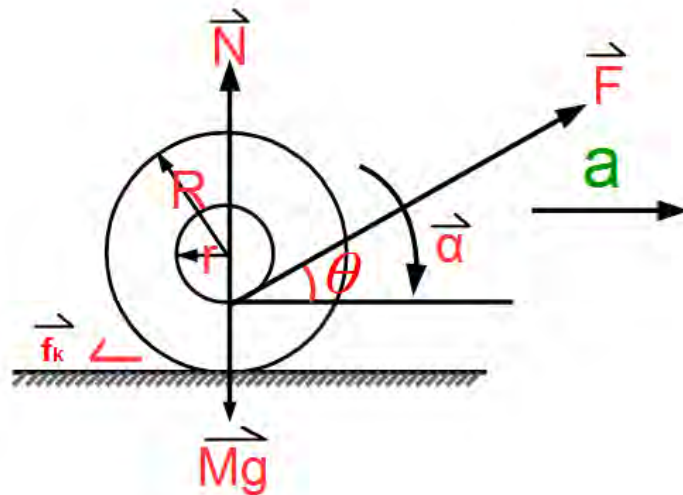


圖78軸純滾動又滑動之示意圖

設線軸有滑動，且向右滑動

$$\sum F_x = F \cos \theta - f_k =$$

$$ma \tag{1}$$

$$\sum F_y = N + F \sin \theta - mg = 0 \tag{2}$$

$$\sum \tau_0 = R f_k - r F = I \alpha \tag{3}$$

$$f_k = \mu_k N \tag{4}$$

由圖示知，當 $\alpha > 0$ 時，線軸捲起來

當 $\alpha = 0$ 時，線軸不轉動，僅滑動

當 $\alpha < 0$ 時，線軸展開

$\therefore$ 令(3)式=0，且此時 $\theta = \theta_c$ (臨界角)

$$\Rightarrow R[\mu_k(mg - F \sin \theta_c)] - rF = 0$$

$$\Rightarrow \mu_k R(mg - F \sin \theta_c) = rF$$

$$\Rightarrow \mu_k Rmg - \mu_k RF \sin \theta_c = rF$$

$$\Rightarrow \mu_k RF \sin \theta_c = \mu_k Rmg - rF \Rightarrow \sin \theta_c = \frac{\mu_k Rmg - rF}{\mu_k RF}$$

此時 $\theta_c$ 與 $\mu_k$ 、 $R$ 、 $r$ 、 $F$ 、 $m$ 皆有關，即與 $\theta_c$ 有關的變數會很多

## 陸、結論

- 一、設計「線軸收放儀器」實驗裝置，且利用螺旋指針微調定滑輪的升降及微調拉力與水平方向的夾角，以及使用Tracker軟體來精確測量臨界角，是本組的巧思。
- 二、拉力大小對線軸滾動方向沒有影響
- 三、線軸重量對線軸滾動方向沒有影響
- 四、由以上結果可推知，只有線軸內外徑比值會影響線軸的臨界角( $\cos \theta_c = \frac{r}{R}$ )，而且線軸內外徑比值愈大時，使線軸往反方向滾動的臨界角角度 $\theta_c$ 就愈小
- 五、改變接觸面材質(靜摩擦係數)對線軸滾動方向沒有影響
- 六、因為 $\cos \theta_c = \frac{r}{R}$ ，所以當內徑 > 外徑時，cos 值會大於 1，但 cos 值只介於 -1 ~ 1，算出來為無解，所以沒有臨界角，線軸就只會往展開的方向滾。
- 七、拉線在上方的臨界角會等於下方的臨界角  $\cos(-\theta)=\cos(\theta)$ ，因此拉線在下方的臨界角一樣符合  $\cos \theta_c = \frac{r}{R}$

## 柒、未來展望與應用

- 一、本組在設計實驗時，曾想過使用 3D 列印機來調整高低(運用電腦控制)，使數據更加精確，但因為以本組現在的能力，實在難以達成。希望日後可以朝此目標前進
- 二、本組也期許可以以 3D 列印機印出所需的線軸，可以用更簡易方式控制線軸的尺寸，使實驗更加精確。
- 三、本組在設計實驗器材之初，有考慮過各種不同的方法，也畫了各種不同的設計圖，希望日後可以探討各種儀器設計的優劣及誤差。

## 捌、參考資料

- 一、 三采文化股份有限公司(2009)。科學實驗王 2:牛頓運動定律。
- 二、 三采文化股份有限公司(2009)。科學發明王8：摩擦力的大小。
- 三、 康軒文教事業(2015)。自然與生活科技第四冊。第六章 力。台北：康軒文教事業。
- 四、 科展群傑廳：<http://science.ntsec.edu.tw/Science.aspx?cat=21&a=6821>
- 五、 維基百科. 靜摩擦力.(2017 年 5 月 24 日).擷取自  
<https://zh.wikipedia.org/wiki/%E9%9D%99%E6%91%A9%E6%93%A6%E5%8A%9B>
- 六、 力矩實驗影片 <http://www.balloon.com.tw/force2.htm>
- 七、 維基百科. 加速度.(2017 年 5 月 17 日):  
<https://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%8A%A0%E9%80%9F%E5%BA%A6>
- 八、 維基百科. 臨界角.(2017 年 5 月 26 日):  
<https://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%85%A8%E5%85%A7%E5%8F%8D%E5%B0%84#.E4.B8.B4.E7.95.8C.E8.A7.92>
- 九、 維基百科.摩擦係數.(2016 年 8 月 9 日):  
<https://zh.wikipedia.org/wiki/%E6%91%A9%E6%93%A6%E7%B3%BB%E6%95%B0>

## 【評語】 030114

能從力學分析來解釋現象，具有實用性。測量儀器的設計與製作均完善，才会有如此精準的數據測量與實驗分析。相信能從研究中得到相當多的知識與技術，更能獲得樂趣與成就。

作品海報



# 壹、摘要

本組發現線軸在不同變因下會有一個特定的**臨界角 $\theta_c$** 改變其滾動方向，本組選擇了**拉力大小、線軸重量、線軸內外徑比值及不同接觸面性質(靜摩擦係數)**四種變因，並設計了「線軸收放儀器」來進行實驗探討。儀器中的粗調裝置大範圍調整定滑輪的升降高度，微調則利用指針帶動螺旋桿轉動，將實驗過程攝影記錄，並再利用**Tracker**分析。實驗顯示，影響線軸滾動方向的臨界角大小，**只和線軸內外徑的比值有關，即  $\cos \theta_c = \frac{r}{R}$** 。

# 貳、研究動機

有次組員觀察到緞帶的線軸會隨著拉緞帶與地面間夾角改變而前後滾動，又有一次在校園內看到。學習到了力及摩擦力的概念，後來在網路上看到一部實驗影片，更引起本組的好奇，使本組開始**探究線軸收放自如的變因**。

# 參、研究設備與器材

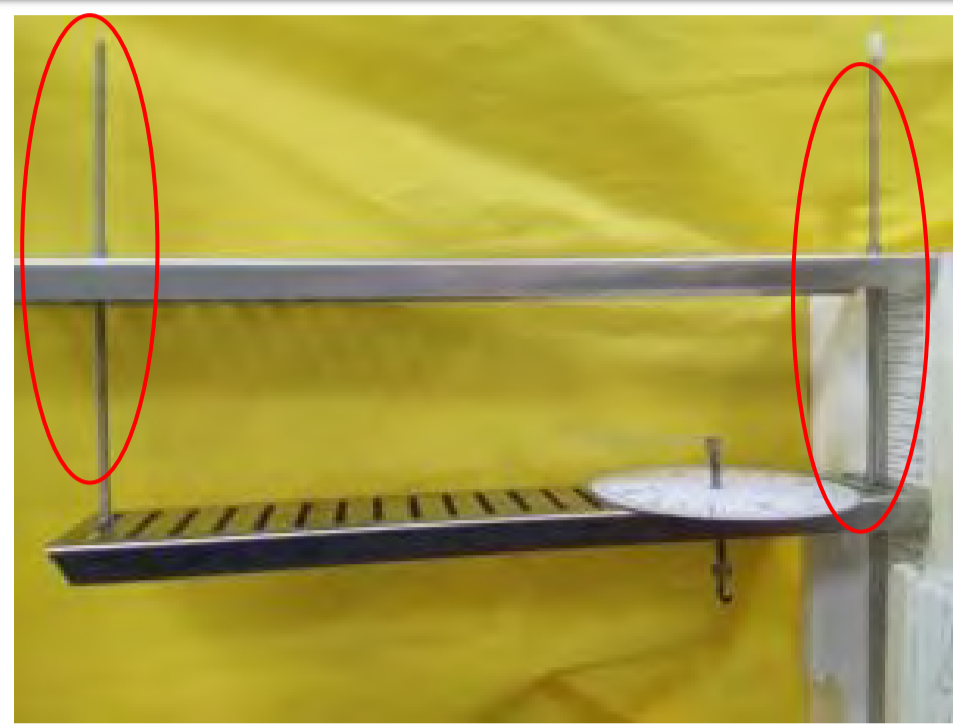


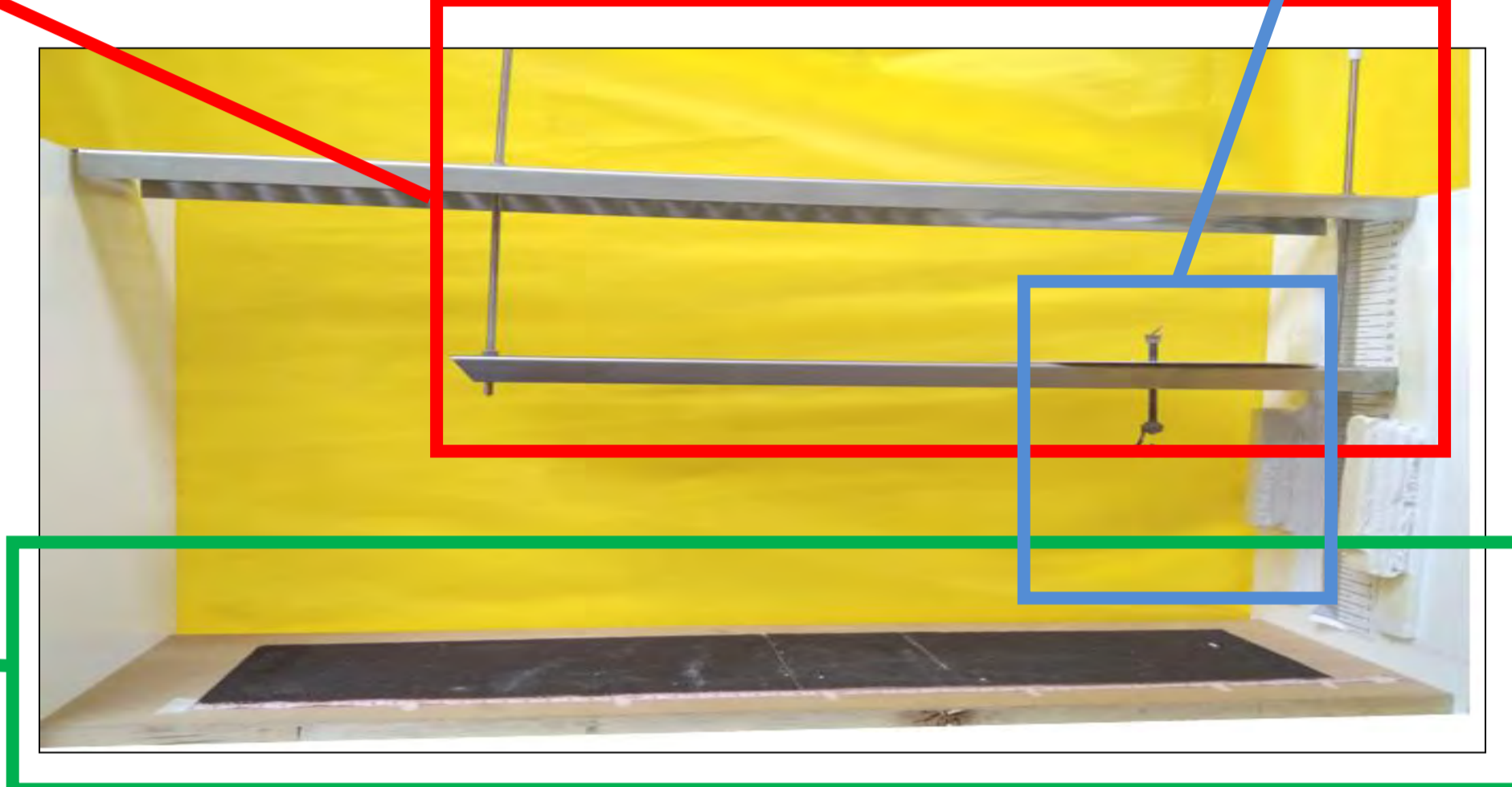
圖1 粗調定滑輪升降高度裝置：  
上方兩根螺旋桿用來大範圍調整定滑輪升降高度



圖3 微調高度裝置：  
利用螺旋桿黏上的指針，藉由轉動指針來微調定滑輪升降高度



圖2 不同材質接觸面：  
砂紙、絨布、白紙板、木板



# 肆、研究過程與方法

## 一、線軸收放儀器初步設計圖

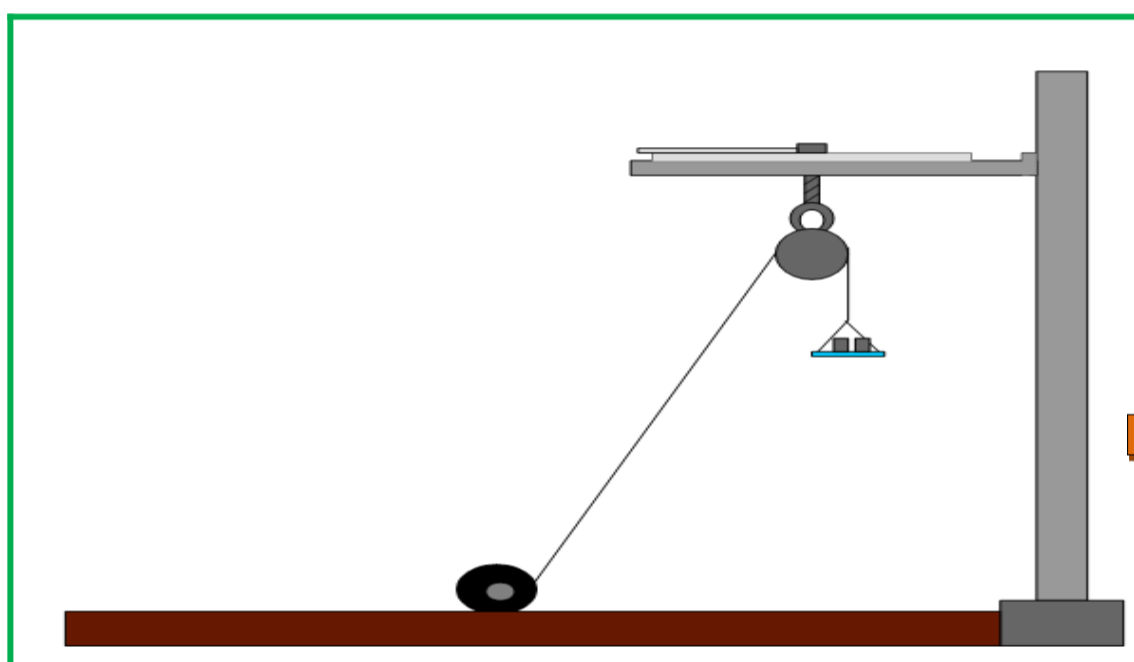


圖4 第一代儀器

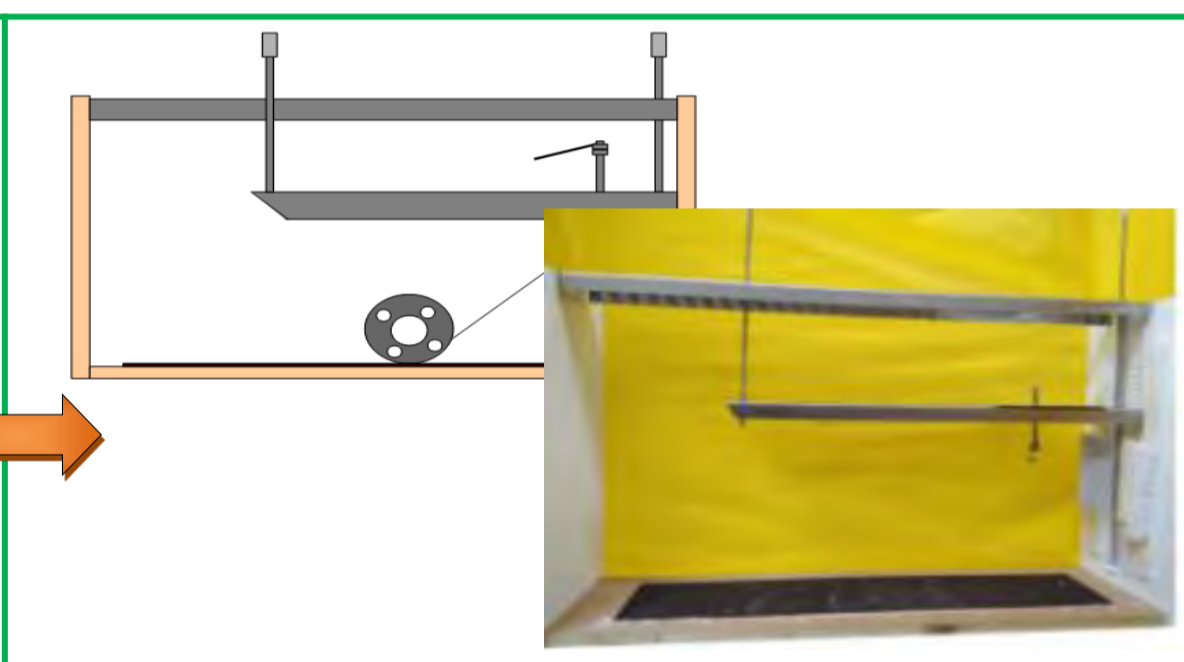


圖5 第二代儀器

## 二、概念演進



圖6 實驗起初想法：  
以三角函數公式帶入，  
球出線與接觸面之夾角。

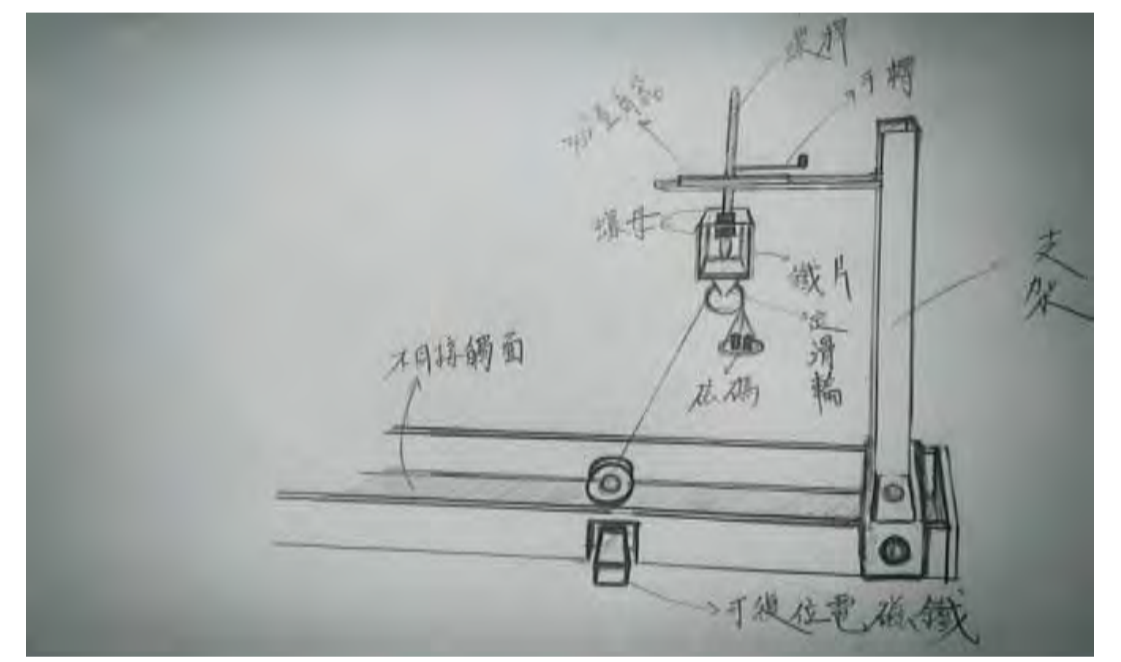


圖7 第一代儀器：  
本組利用單擺實驗儀器加上摩7實驗組進行實驗

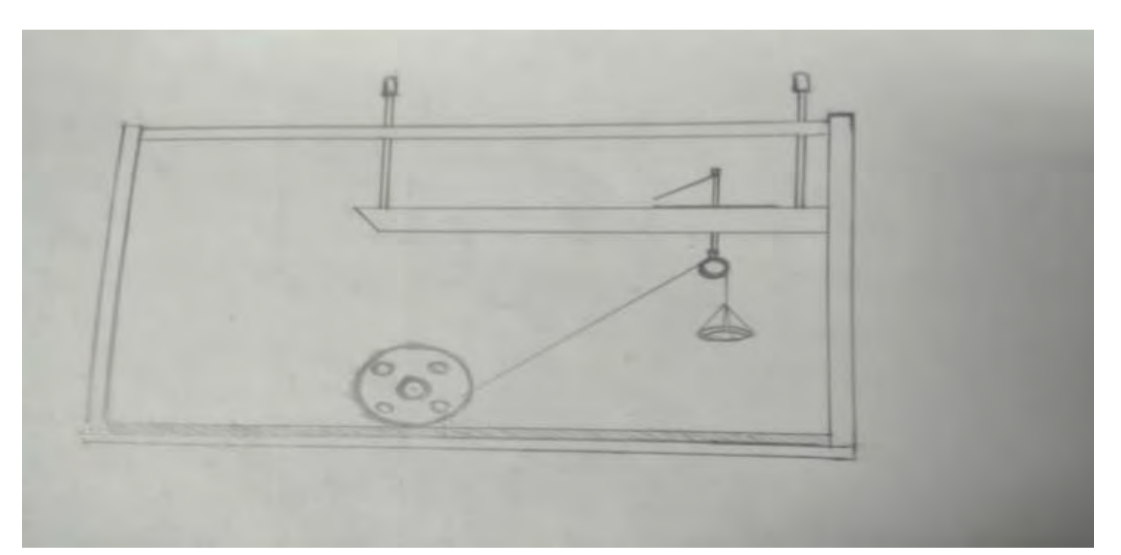


圖8 第二代儀器：  
利用初調及微調裝置調整滑輪高低，改變夾角。

## 三、實驗步驟:

### 1. 製做實驗

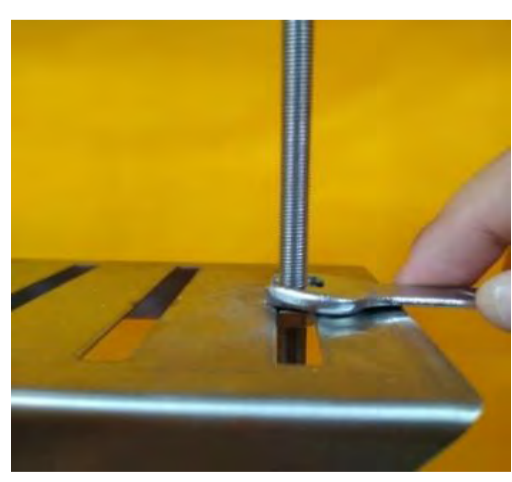


圖9 調整水平

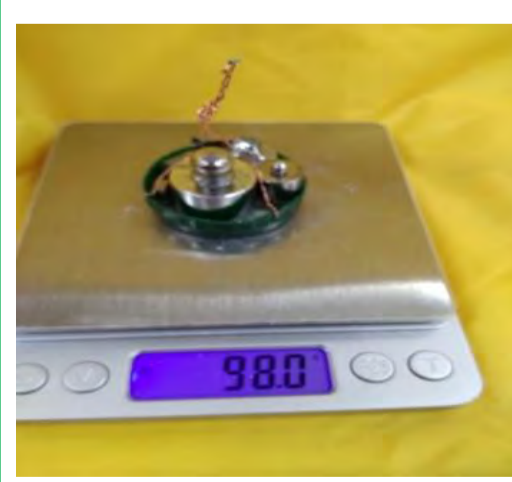


圖10 測量重量



圖11 轉動指針

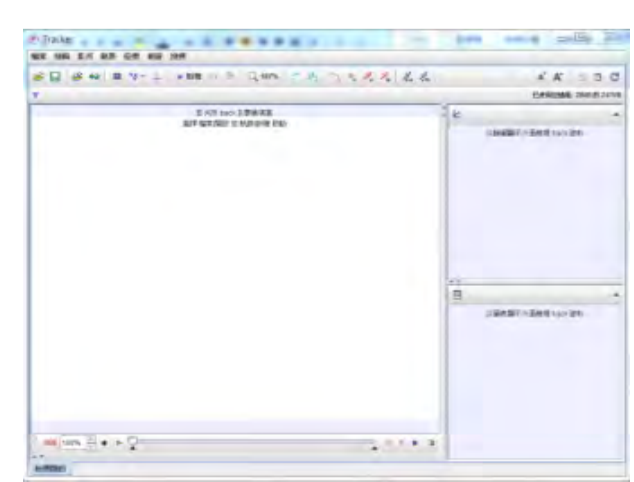


圖12 Tracker分析

### 2. 數據分析

98		
第一次	第二次	第三次
67.3	65.6	64.8
67.9	66	64.4
67.6	65.8	64.6

圖13 將分析出的數據輸入Excel

	39.84	49.84
Q	cos	Q
98	63.7	0.443071
108	63.633	0.444119
118	65.1833	0.419717
128	65.1	0.421036
138	65.0667	0.421563
148	65.3667	0.416809

圖14 將 $\theta$ 值代入求得 $\cos\theta$

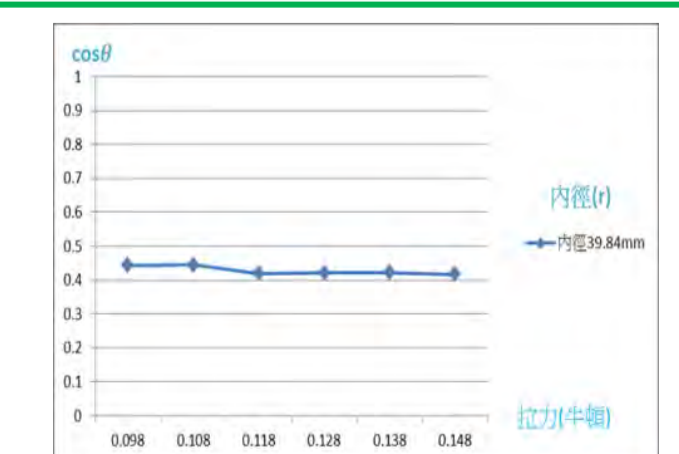


圖15 將彙整之 $\cos$ 值做成關係圖

### 3. 改變內外徑



圖16 本組使用油漆用膠帶並用游標尺測量，改變線軸的內外徑比。

圖17 在製作時，本組從最粗的內徑開始並控制線軸重量這變因。

線軸內外徑比值:本組在線軸內外徑比值的實驗中分成五種內外徑比值(如下表1):

表1 5種線軸內外徑比值

內徑(mm)	外徑(mm)	內徑/外徑(比值)
39.84	94.94	0.4196335
49.84	94.94	0.5249631
59.84	94.94	0.6302928
69.84	94.94	0.7356225
79.84	94.94	0.8409522

### 4. 改變線軸重量



圖18 在控制線軸重量的實驗時，將紙黏土平均的放入線軸的中心軸內。

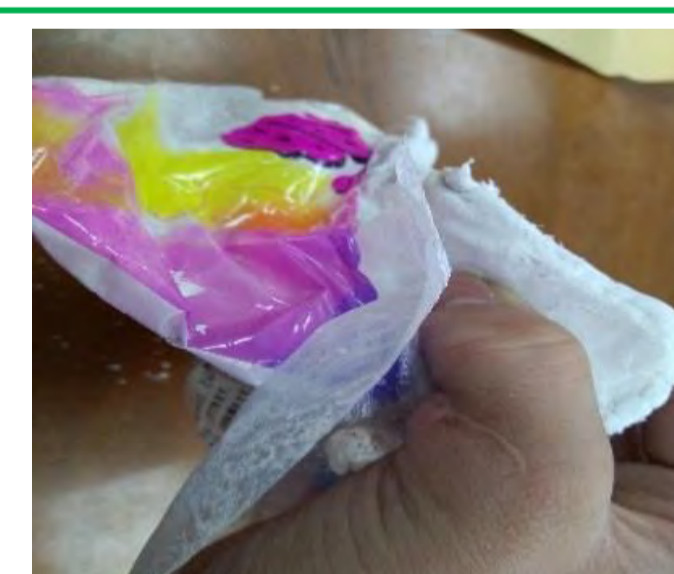


圖19 在每次實驗前，都會重新測量線軸的重量，以免因水分蒸發而影響實驗結果。

### 5. 改變接觸面的材質

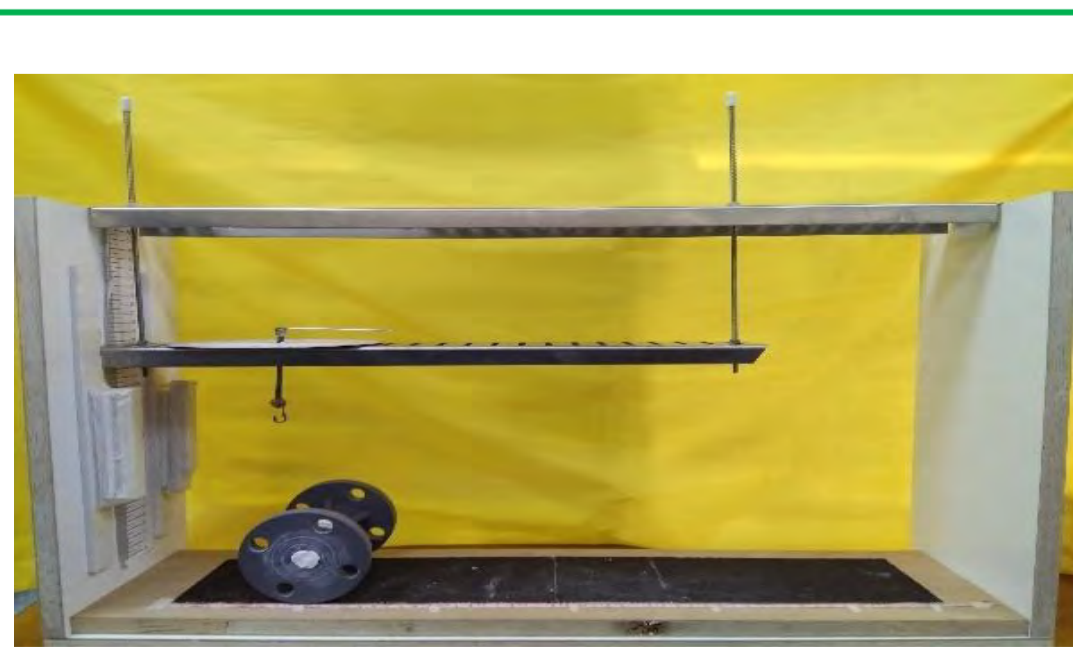


圖20、21 本組在器材底部的接觸面，選擇了4種接觸面：砂紙、絨布、木板、白紙板

## 五、探討當內徑大於外徑時，線軸的滾動

同學看到本組實驗後，產生好奇，並提問：如果線軸內徑大於外徑時，是否會符合公式呢？因此本組便製作以下實驗：

### (一)實驗結果

因為若線軸內徑大於外徑時，內徑便會接觸，因此我們便設計出第三代儀器。當內徑  $r >$  外徑  $R$ ，則： $\cos \theta_c = \frac{r}{R} > 1$  但  $\cos$  的值必定介於 -1 和 1 之間，不可能大於 1，臨界角為何？經測試不管拉力角度多少，線軸只會展開，找不到臨界角。

實驗結果：內徑大於外徑找不到臨界與  $\cos$  的值大於 1：無解，符合實驗結果。

### (二)意外收穫

因第三代測試可 360 度測試，無意間發現除了測試上方有一臨界角，在其下方亦發現另一臨界角，根據本組測試後發現我們發現如果上方臨界角為  $\theta$  則下方臨界角約為  $-\theta$ ，後來我們找到在三角函數負角關係式  $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$  因此下方

臨界角一樣符合  $\cos \theta_c = \frac{r}{R}$ 。



圖32上方臨界角



圖33下方臨界角



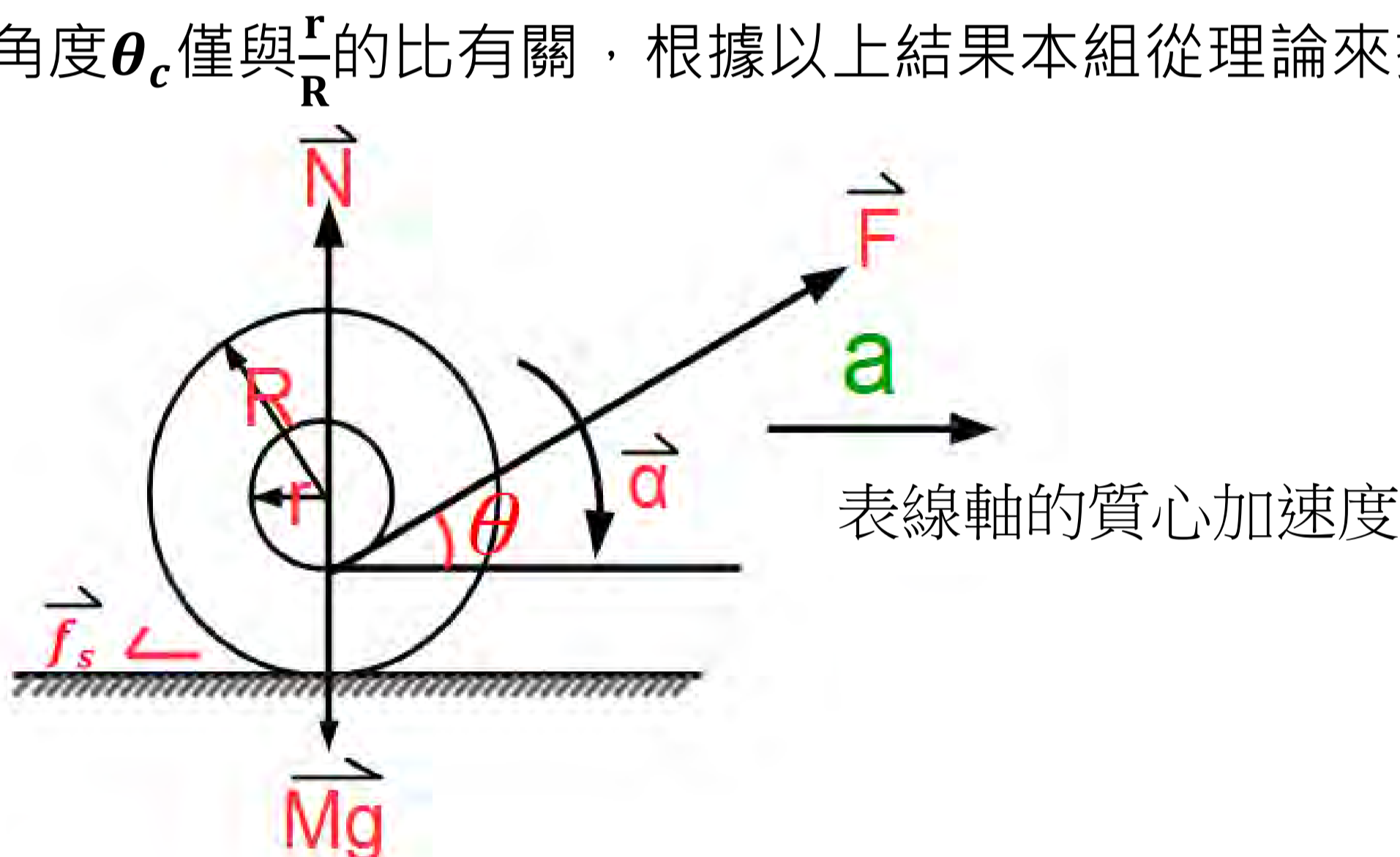
圖34第三代實驗儀器

## 六、推導公式

### (一)線軸純滾動時之理論推導

本組在實驗中，接觸面(靜摩擦係數)選擇以砂紙做實驗，是因為在本組所選 4 種材質中，以砂紙靜摩擦係數最大(線軸較不容易空轉、滑動)，可以避免一些實驗上的誤差。

若線軸是純滾動(僅移動和轉動，沒有滑動)，則從實驗(一)到(四)的實驗歸納結果可知  $\cos \theta_c = \frac{r}{R}$ ，故影響線軸滾動方向的拉力角度  $\theta_c$  僅與  $\frac{r}{R}$  的比有關，根據以上結果本組從理論來探討原因，當線軸純滾動時，理論計算如下：



$$\begin{aligned} \sum F_x &= F \cos \theta - f_s = Ma & (1) \\ \sum F_y &= N + F \sin \theta - Mg = 0 & (2) \\ \sum \tau_0 &= R f_s - r F = I \alpha & (3) \\ a &= R \alpha (\text{因為純滾動}) & (4) \\ f_s &\leq \mu_s N & (5) \end{aligned}$$

由(4)帶入(3)  $\Rightarrow R f_s - r F = I \frac{a}{R}$   
 $\Rightarrow f_s - \frac{r}{R} F = \frac{I}{R^2} a$  (6)  
 (1)+(6)  $\Rightarrow F \cos \theta - \frac{r}{R} F = (M + \frac{I}{R^2}) a$   
 $\Rightarrow a = \frac{F \cos \theta - \frac{r}{R} F}{M + \frac{I}{R^2}}$

所以 當  $a > 0$  時，線軸向右滾動 當  $a = 0$  時，線軸靜止 當  $a < 0$  時，線軸向反方向滾動

設  $a = 0$  時， $\theta = \theta_c \Rightarrow F \cos \theta_c - \frac{r}{R} F = 0 \Rightarrow \cos \theta_c = \frac{r}{R}$

$\therefore \theta_c$  僅與  $\frac{r}{R}$  的比值有關，與接觸面材質( $\mu_s$ )、拉力大小(F)、線軸重量(Mg)均無關

但此公式是針對剛體所推導，因此本組在進行實驗時，所得到的數據會有些小變化，可能是受材質及接觸面的凹陷所影響。

### (二)線軸純滾動又滑動時之理論推導

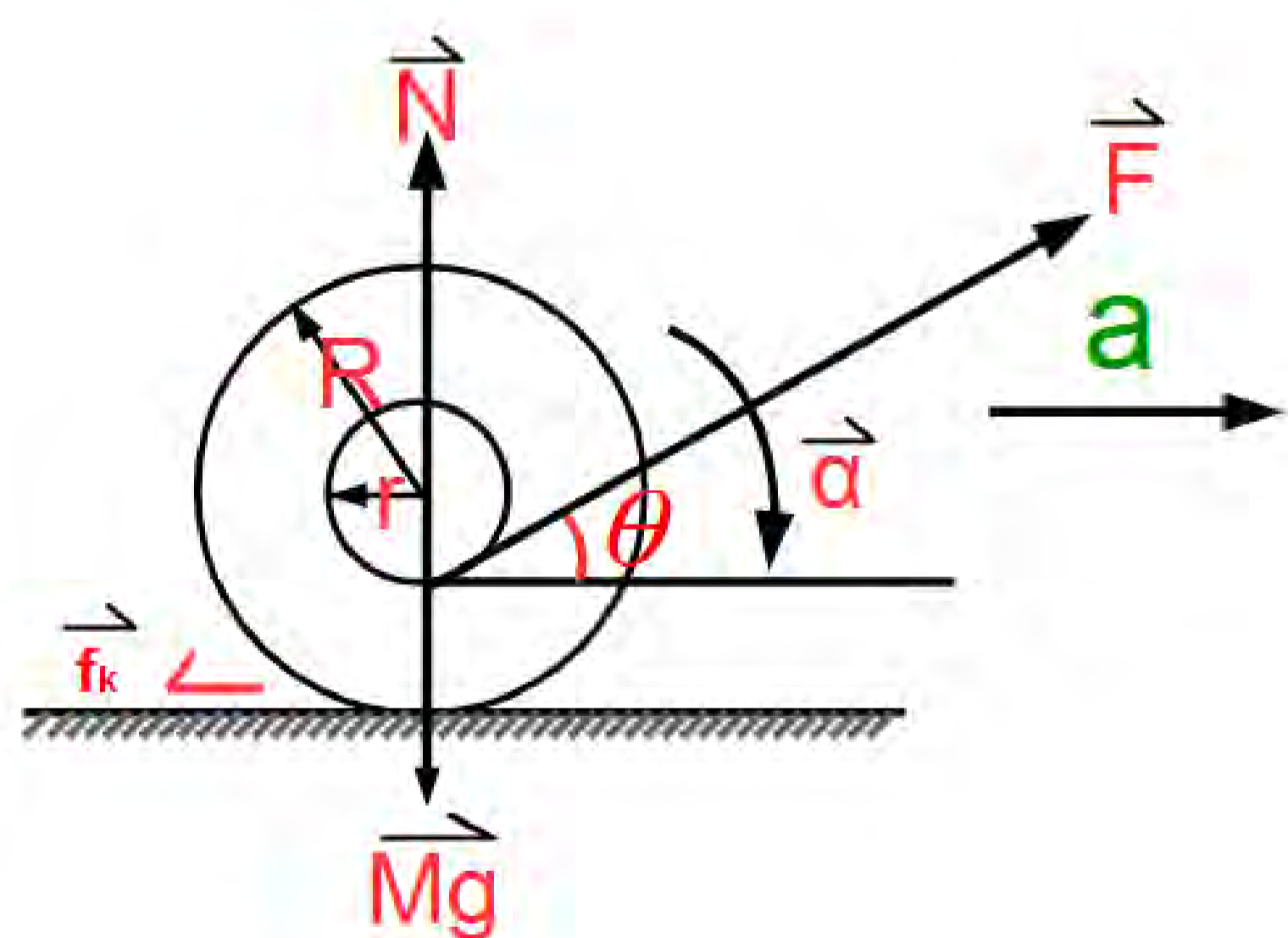


圖35軸純滾動又滑動之示意圖

設線軸有滑動，且向右滑動

$$\begin{aligned} F_x &= F \cos \theta - f_k = ma & (1) \\ F_y &= N + F \sin \theta - mg = 0 & (2) \\ \tau_0 &= R f_k - r F = I \alpha & (3) \\ f_k &= \mu_k N & (4) \\ a &\neq R \alpha (\text{因為有滑動}) & (5) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow R \mu_k mg - F \sin \theta_c - r F = 0$$

$$\Rightarrow \mu_k R mg - \mu_k R F \sin \theta_c = r F$$

$$\Rightarrow \sin \theta_c = \mu_k R mg - r F \mu_k R F$$

由圖示知，當  $\alpha > 0$  時，線軸捲起來

當  $\alpha = 0$  時，線軸不轉動，僅滑動

當  $\alpha < 0$  時，線軸展開

$\therefore$  令(3)式=0，且此時  $\theta = \theta_c$  (臨界角)

$$\Rightarrow \mu_k R mg - F \sin \theta_c = r F$$

$$\Rightarrow \mu_k R F \sin \theta_c = \mu_k R mg - r F$$

$$\Rightarrow \mu_k R F \sin \theta_c = \mu_k R mg - r F \Rightarrow \sin \theta_c = \frac{\mu_k R mg - r F}{\mu_k R F}$$

此時  $\theta_c$  與  $\mu_k$ 、 $R$ 、 $r$ 、 $F$ 、 $m$  皆有關，即與  $\theta_c$  有關的變數會很多

## 陸、結論

一、設計「線軸收放儀器」實驗裝置，且利用螺旋指針微調定滑輪的升降及微調拉力與水平方向的夾角，以及使用 Tracker 軟體來精確測量臨界角，是本組的巧思。

二、拉力大小、線軸重量、接觸面材質(靜摩擦係數)對線軸滾動方向沒有影響

三、由以上結果可推知，只有線軸內外徑比值會影響線軸的臨界角( $\cos \theta_c = \frac{r}{R}$ )，而且線軸內外徑比值愈大時，使線軸往反方向滾動的臨界角角度  $\theta_c$  就愈小

四、因為  $\cos \theta_c = \frac{r}{R}$ ，所以當內徑  $>$  外徑時， $\cos$  值會大於 1，但  $\cos$  值只介於 -1 ~ 1，算出來為無解，所以沒有臨界角，線軸就只會展開。

五、拉線在上方的臨界角會等於下方的臨界角  $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$ ，因此拉線在下方的臨界角一樣符合  $\cos \theta_c = \frac{r}{R}$

## 柒、參考文獻

一、力矩實驗影片 <http://www.balloon.com.tw/force2.htm>

二、維基百科臨界角: <https://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%85%A8%E5%85%A7%E5%8F%8D%E5%B0%84#.E4.B8.B4.E7.95.8C.E8.A7.92>

三、科展群傑廳: <http://science.ntsec.edu.tw/Science.aspx?cat=21&a=6821>

## 7. 靜摩擦係數測量



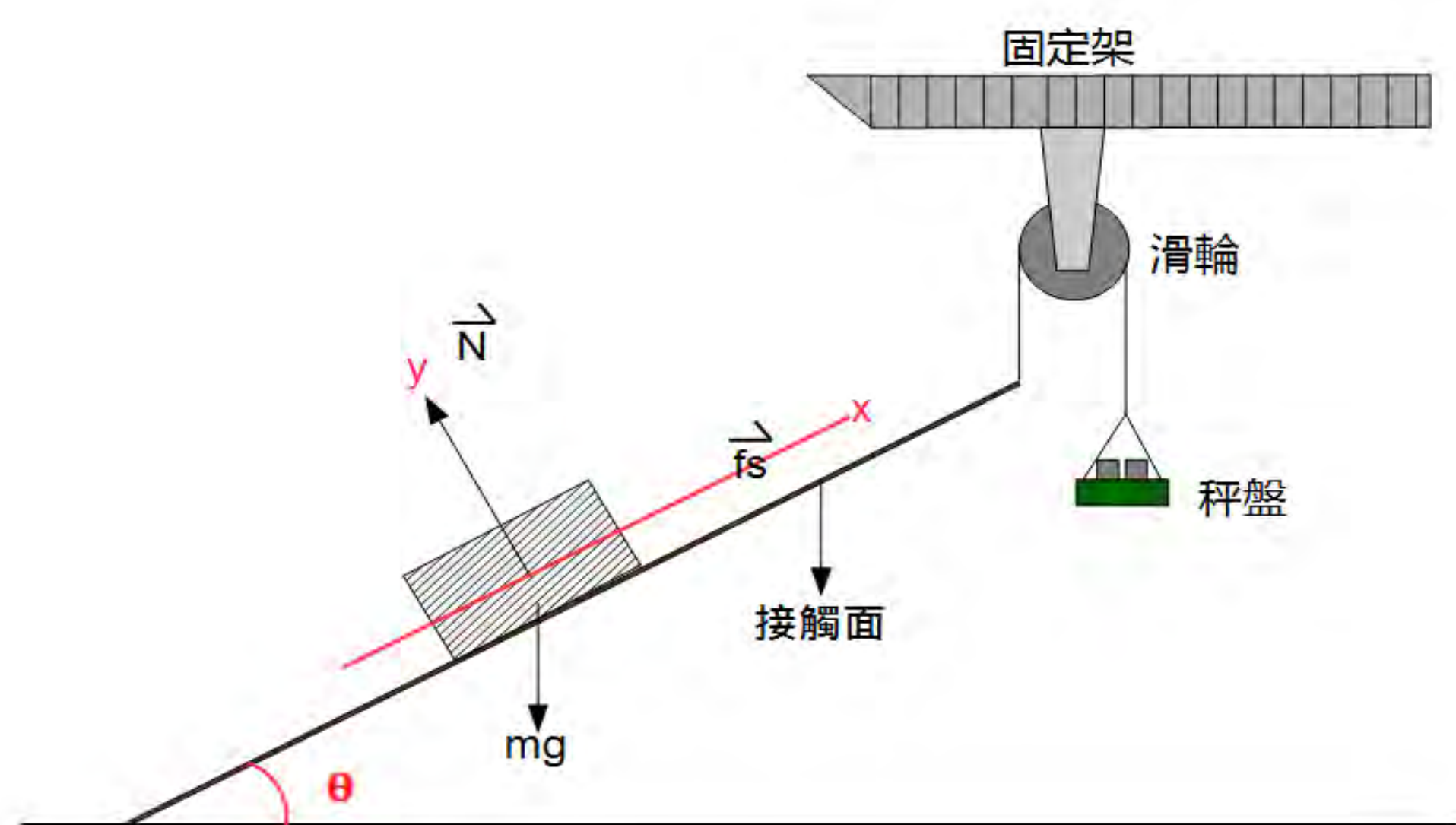
圖22將線軸直放於接觸面



圖23將接觸面抬起到線軸滑動動並利用Tracker分析角度，求出值，代入 $\tan \theta \quad \theta = (\text{值} * 180) / \pi$

名稱	圖24砂紙	圖25絨布	圖26 白板(滑)	圖27木板
圖片				
$\mu_s$	0.71	0.36	0.33	0.32

公式推導如下：



改變秤盤上之砝碼，設物體恰要開始滑動時 $\theta = \theta_s$

$$\Rightarrow \sum F_x = f_{SM} - mg \sin \theta_s = 0 \quad (1)$$

$$\Rightarrow \sum F_y = N - mg \cos \theta_s = 0 \quad (2)$$

$$\Rightarrow f_{SM} = \mu_s N \quad (3)$$

$$(3)、(2) \text{ 代入 } (1) \Rightarrow \mu_s mg \cos \theta_s = mg \sin \theta_s$$

$$\Rightarrow \mu_s = \frac{\sin \theta_s}{\cos \theta_s} = \tan \theta_s$$

## 六、選擇線軸

本組在選擇線軸時，總共收集了3種材質(木頭製、光碟製、水管製)的線軸，其中本組選擇以水管線軸做實驗，因為在施力時，會產生一股力量將線軸向上拉，然而木頭線軸、光碟線軸重量較輕，較容易因此而影響實驗結果，故最後選擇重量最重的水管製線軸來進行此次的實驗。

## 伍、研究結果與討論

會影響線軸前後滾動的是臨界角，而是什麼變因會影響臨界角呢?於是本組根據理論判斷，共列出四種變因，分別是拉力大小、內外徑比值、線軸重量及靜摩擦係數進行研究。

### 一、探討拉力大小對線軸滾動方向之影響

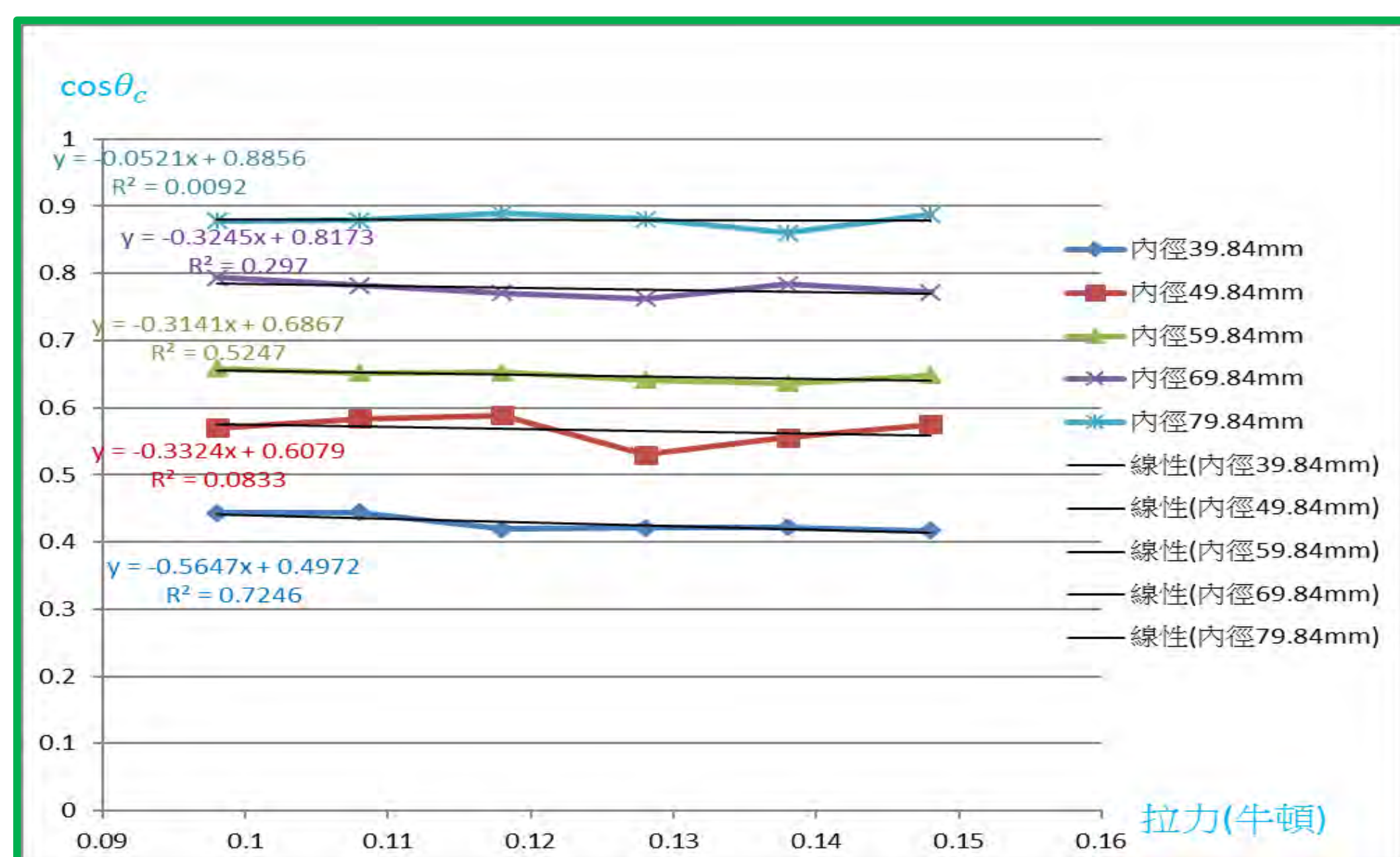


圖28  $\cos \theta_c$ 與拉力大小之關係圖(總和)

由圖28可得知拉力的對線軸滾動方向，並沒有影響，本組在做拉力實驗時，為了避免只做一種內外徑比值，所造成的不客觀，因此本組在做各種內外徑比值時，都會使用六種拉力，以增加實驗可信度。

### 三、探討線軸重量對線軸滾動方向之影響

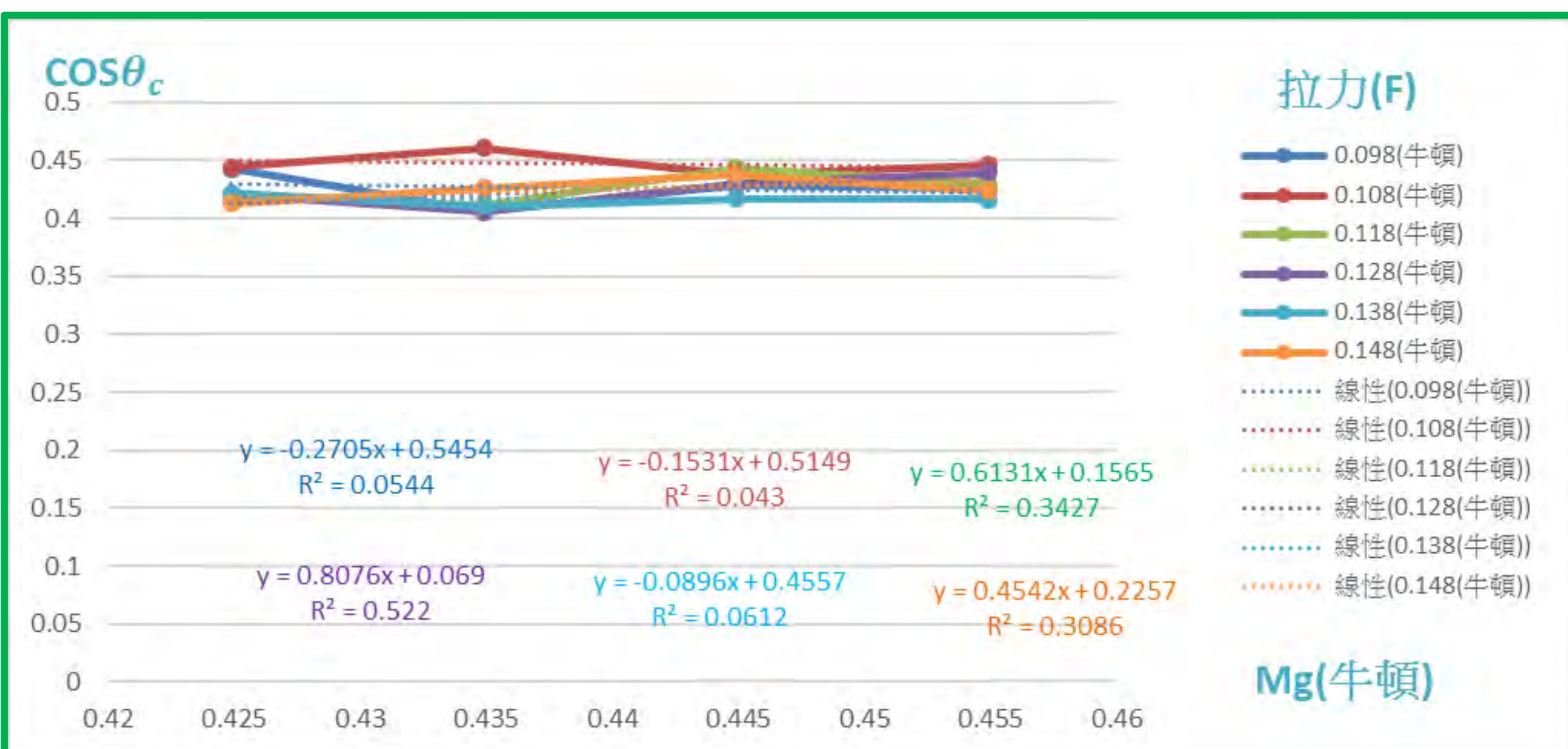


圖30  $\cos \theta_c$ 與線軸重量之關係圖(總和)

由圖30可得知線軸重量並不會影響線軸滾動方向，在此實驗中本組同樣使用6種拉力，以避免因拉力而影響實驗結果。

### 二、探討線軸內外徑比值對線軸滾動方向之影響

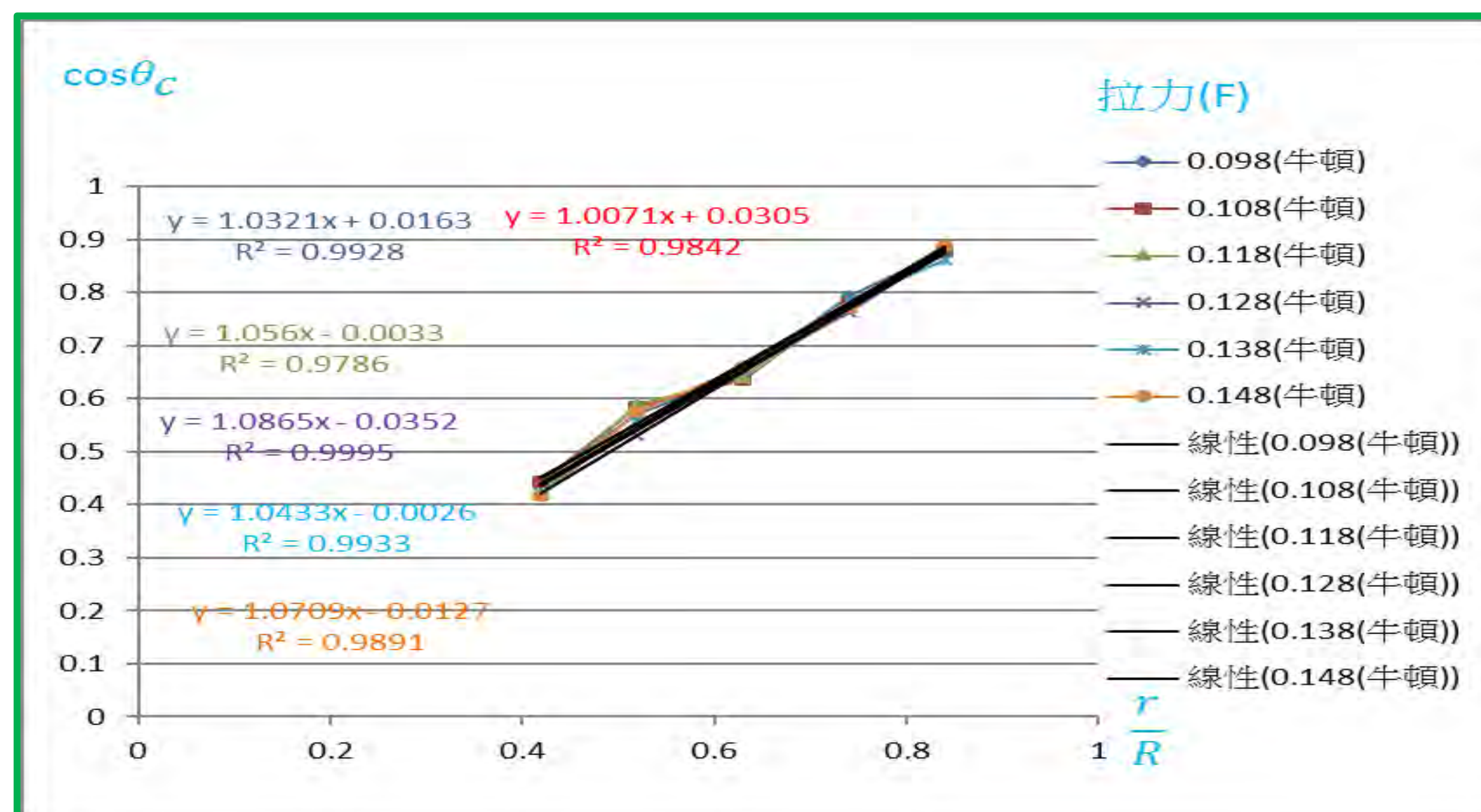


圖29  $\cos \theta_c$ 與線軸內外徑比值之關係圖(總和)

由圖29可知線軸內外徑比值的大小與線軸滾動之臨界角大小成線性關係，本組在此次實驗也同樣使用了6種拉力(為了避免因為拉力大小而影響實驗結果)。

### 四、探討接觸面材質(靜摩擦係數)對線軸滾動方向之影響

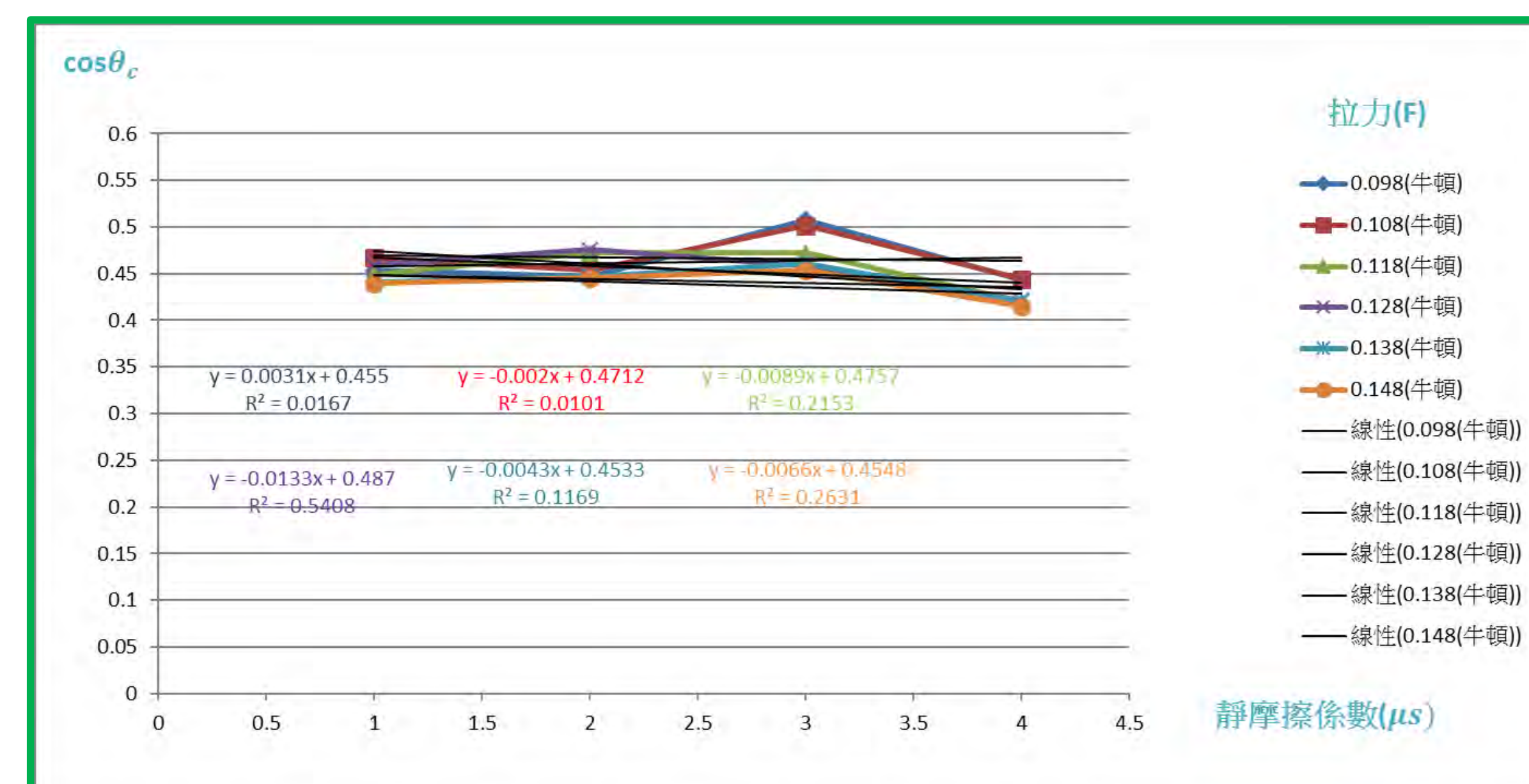


圖31  $\cos \theta_c$ 與靜摩擦係數之關係圖(總和)

從圖31可得知靜摩擦力( $f_s$ )對於線軸滾動的方向沒有影響的，上方數據之所以會有微小起伏，是因為本實驗所使用的材質並非剛體，所以可能在滾動時可能會產生凹陷等問題，因此數據會有一些微小誤差。