

中華民國第 56 屆中小學科學展覽會

作品說明書

國小組 生活與應用科學科

佳作

080831

日光建影-日照與建物陰影遮蔽模型程式設計研究

學校名稱：新北市板橋區沙崙國民小學

作者： 小六 鍾承妤 小六 陳雅亭 小六 蔡宜瑾 小六 梁耘頌 小六 陳喻安	指導老師： 黃淳霖
---	------------------

關鍵詞：日照不均、偽影、建築物陰影遮蔽程式

摘要

土地有限，建築物不斷向上發展，如果沒有適當的規劃就興樓建厝，會造成日照分配不均更造成居家安全疑慮及能源使用的浪費。為了解決這個困境，我們想建立一套能準確、快速且能自動描繪建築物間影子遮蔽情形的程式，以達成智慧建築「節能永續」及「便利舒適」的目標。

我們用自製建物模型、方位盤、模擬太陽的平行光源，探討不同情況下建築物間影子相互影響的關係。我們發現建築物的影子會隨地理位置、建築物尺寸而有規律的變化。因此我們利用三角函數精確地找出影子的高度= $Hb - \Delta x * \tan(\theta) / \sin(\varphi)$ 、寬度= $P_{max} - P_{min}$ 。

最後，我們利用 Microsoft Excel 軟體，建立成一份能夠快速且能視覺化自動描繪建築物影子遮蔽情況的程式-「日照與建物陰影遮蔽模型程式」，希望未來能提供給需要的大眾使用。

壹、 研究動機

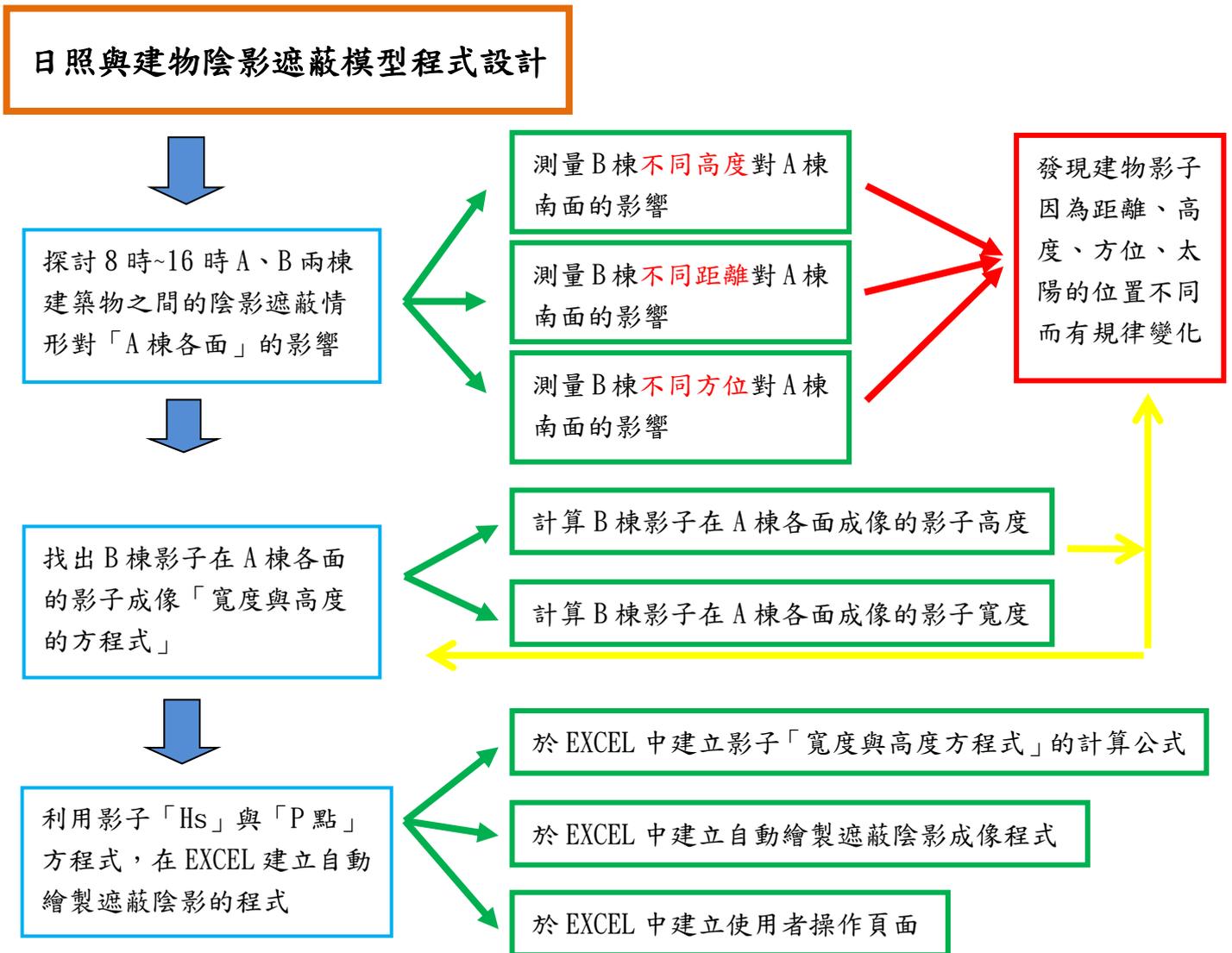
現代科技越來越進步，建築物的高度也越蓋越高。可是台灣這麼小，大樓林立的結果就是造成許多矮小的房子，長時間受到鄰近大樓影子的「蔽蔭」，進而衍生出日照權力不均的問題...

在五年級的自然課曾經認識過太陽以及竿影有規律的成像、電腦課也曾經學過使用 EXCEL 幫助計算以及繪圖，因此我們想嘗試將這些不同領域的能力，融合在我們的研究當中。

貳、 研究目的

- 一、了解兩棟大樓，彼此的陰影遮蔽情形
- 二、找出建築物影子的計算方法
- 三、建立一套自動繪製建築物遮蔽陰影成像的程式

參、 研究架構圖

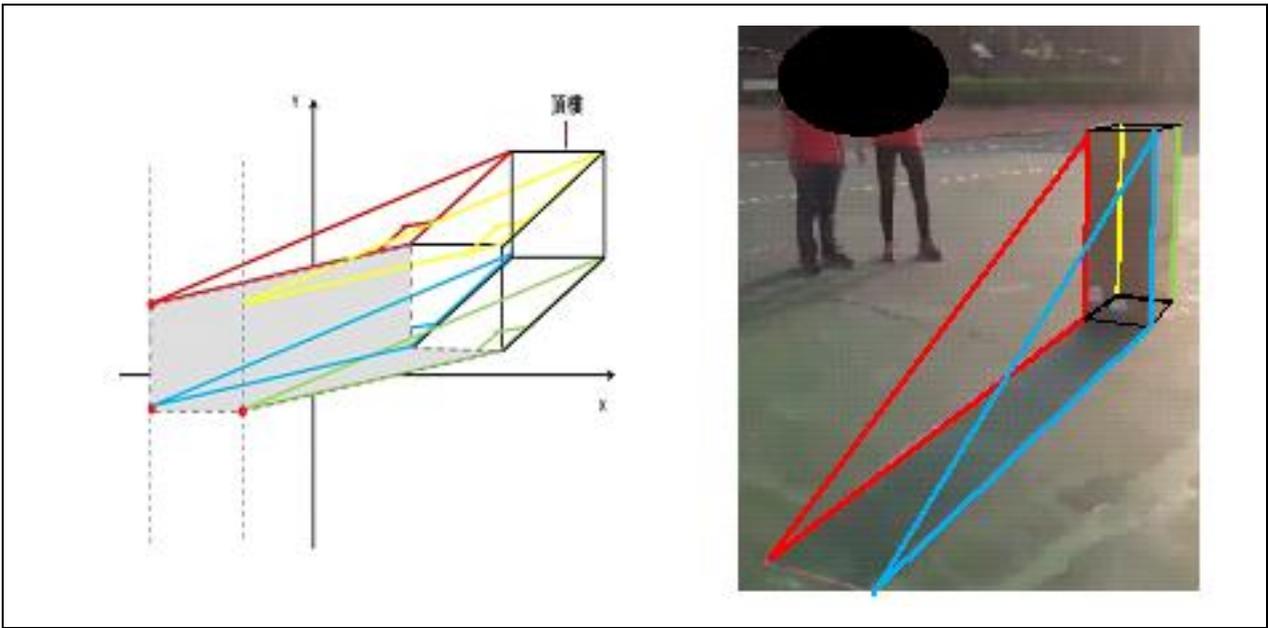


肆、 名詞解釋

在研究過程中，我們常使用以下幾個自定義的名詞：

一、建築物四樑柱影子定義

研究中我們發現，長方體建築物的影子成像都是由建築物四個角從地面直到頂樓的大型樑柱影子所組合而成。等同於四支高度一樣、位置不同的竿子的影子組成建築物的影子。如圖一、圖二所示。



[圖一、圖二] 建築物四樑柱影子示意圖

二、偽影定義

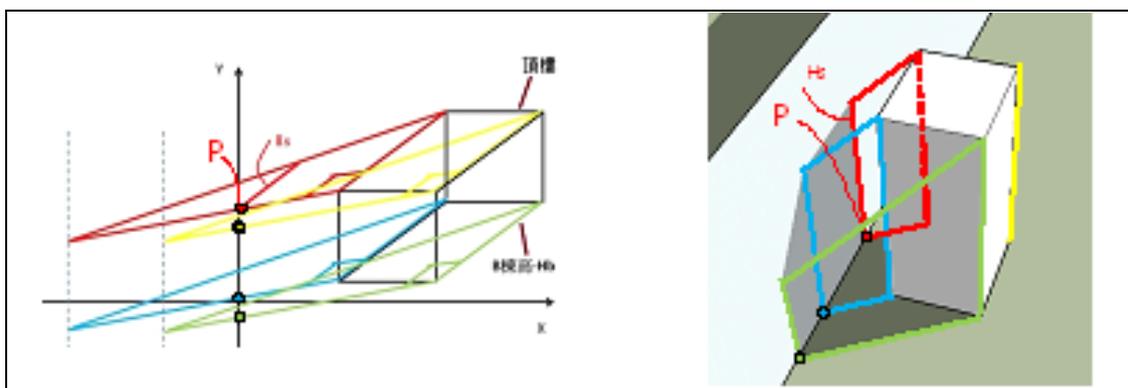
在計算建築物的四樑柱直角三角形影子成像的時候，我們發現圖一所呈現的，四根樑柱產生的影子成像並不是全部都會真正的影子，如圖一中的東北角的黃色樑柱產生的影子，會因為建築物與太陽方位角的相對位置而朝向建築物的內部，因此不可能出現該樑柱的影子，我們將這種情況的影子定義為「偽影」。

三、Hs 定義

我們把建築物四樑柱產生的直角三角形影子，通過某面牆壁的高度定義為 H_s 。以圖三、圖四為例，假想為通過以 Y 軸垂直向上延伸的牆面時的 H_s 。

四、P 點定義

如圖三、圖四所示，可以發現四樑柱的影子通過東面地上的時候，位置會不一樣，因此我們將這個位置稱為 P 點。



[圖三、圖四] 建築物影子 H_s 與 P 點示意圖

伍、 文獻探討

從「三維地理資訊系統在都市建築日照之應用－以陰影遮蔽及太陽輻射效能分析為例 Study of building solar insolation with 3D GIS–Analysis of shadow shading and solar radiation」中，藉由地理資訊系統 ArcGIS 分析建築物陰影遮蔽情形，以及利用了 Visual Basic 軟體設計陰影遮蔽演算法公式，兩者結合探討建築物的陰影遮蔽情形。

詳讀這份論文之後，我們認為文中利用的軟體、技術很難讓一般的大眾了解其成因，而且在文中 P78 的圖 4-17 也發現到該計算系統的缺點-受制於設定邊界的緣故，特定情況下無法完整呈現建築物的陰影。

因此我們決定用更簡單的計算(三角函數)、以及軟體(EXCEL)，來完成一套簡而易懂的陰影遮蔽程式。

陸、 研究設備及器材

一、模擬建築物與太陽位置的陰影遮蔽情形

器材名稱	數量
大型方位盤 70cmx70cm	1 張
太陽平行光源模擬器	1 座
建築物模型	數個
陰影方格紀錄紙	數張

[表 1]實驗一器材

二、建立自動繪製陰影遮蔽程式

器材名稱	數量
電腦	1 台
Microsoft Excel 2010	
星圖軟體 Stellarium	
繪圖軟體 SketchUp2016	

[表 2]實驗三器材



[圖五] 自製大型方位盤 70cmx70cm

自製模擬太陽平行光源

自製建築物模型

柒、 研究過程或方法

一、實驗前準備工作

(一)製作陰影方格紀錄紙:

- 1.將建築物的四面外牆繪製成表格，便於紀錄影子形狀與面積。

(二)製作建築物模型:

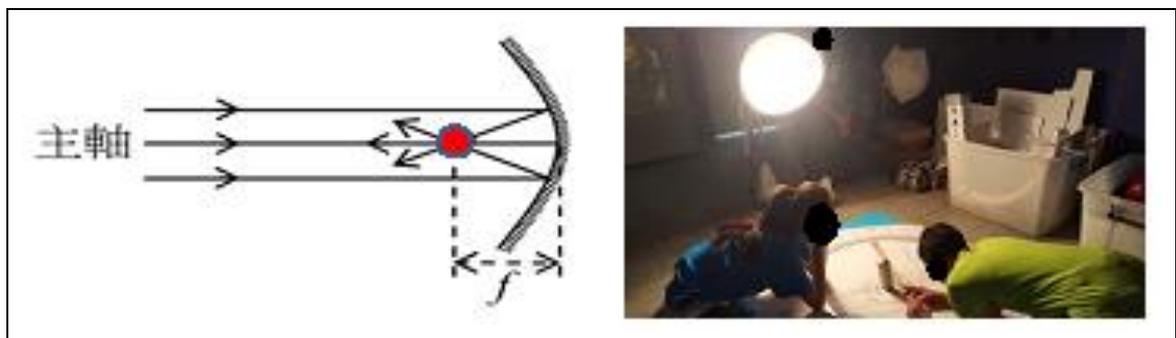
- 1.以 1:300(cm)的縮小比例做建築物模型，為了能清楚分辨建築物牆面上的影子，我們將建築物外部貼上 1x1cm 的方格紙，以便於觀測。

(三)製作大型方位盤:

- 裁切 70x70 的塑膠瓦楞板，並繪製出大型的方位盤，方位角依次為:北-0(360)度、東-90度、南-180度、西-270度。

(四)製作太陽平行光源模擬器:

- 1.由「球面鏡成像」以及「光反射原理」得知，近似平行於主軸(半徑 r)的入射光線，其反射線大致均通過主軸上的焦點 F ，如圖六所示。焦點與球面鏡頂之間的距離稱為焦距 f ；則半徑 r 與焦距 f 的關係式: $r=2f$ 。反之，若將一光源至於焦點 F 處，則可以產生平行於半徑 r 的平行反射光。
- 2.將燈泡至於焦點處，則所需的球面鏡燈罩半徑為 $(2f)$ 。
- 3.將壓克力半圓形球罩內部塗上白色顏料，增加光線反射。
- 4.將球罩安裝於相機腳架上，以便於調整光源照射角度(模擬太陽仰角)。



[圖六] 光反射原理示意圖

二、實驗一：探討 A、B 兩棟建築物之間的陰影遮蔽情形對「A 棟南面」的影響

(一)將自製模擬太陽平行光源以及大型方位盤放置仰角與方位對應的位置:

- 1.腳架最後面的支架、方位盤上方位標準線、方為盤中心建築物、燈泡，四者必須連

成一線，方可確認對準目標建築。

(二)調整光源仰角及方位角:

- 1.依照不同的時間調整光源的仰角和方位盤的方位角。
- 2.將建築物模型放至於方位盤中心。
- 3.打開光源後，測量建築物的影子末端到建築物頂點連線與地面之夾角(仰角)。
- 4.確認量出的仰角和光源設定仰角相同(與模擬的太陽仰角相同)，如果有誤則移動方位盤的前後位置調整仰角，並再次檢查，直到符合為止才進行實驗。

(三)測量「A、B 兩棟建築物在不同距離時」B 棟對 A 棟南面的影子遮蔽情形

- 1.將 A 棟建築(4x4x12 cm)放置於方位盤中心。
- 2.將 B 棟建築(4x4x12 cm)放置於 A 棟正南方「1 cm~5 cm」。
- 3.依序調整 8 時~16 時的模擬太陽平行光源對應的仰角與方位盤方位。
- 4.紀錄 1 cm~5 cm 的 9 個時間點 A 棟建築物南面牆壁上的影子遮蔽情形。

(四)測量「A、B 兩棟建築物在不同高度時」B 棟對 A 棟南面的影子遮蔽情形

- 1.將 A 棟建築(4x4x12 cm)放置於方位盤中心。
- 2.將 B 棟建築(4x4x12 cm~20 cm)放置於 A 棟正南方 3cm。
- 3.依序調整 8 時~16 時的模擬太陽平行光源對應的仰角與方位盤方位。
- 4.紀錄 B 棟高度 12 cm~20 cm 的 9 個時間點 A 棟建築物南面牆壁上的影子遮蔽情形。

(五)測量「A、B 兩棟建築物在不同相對方位時」B 棟對 A 棟南面的影子遮蔽情形

- 1.將 A 棟建築(4x4x12 cm)放置於方位盤中心。
- 2.將 B 棟建築(4x4x12 cm)放置於 A 棟「正南方」3cm。
- 3.依序調整 8 時~16 時的模擬太陽平行光源對應的仰角與方位盤方位。
- 4.紀錄這 9 個時間點 A 棟建築物南面牆壁上的影子遮蔽情形。
- 5.將 B 棟建築物放置於 A 棟建築物的西南方、西方、西北方、北方、東北方、東方、東南方等 8 個方位，並重複步驟 1~4。

三、實驗二：利用三角函數計算 B 棟影子在 A 棟各面的影子成像「寬度與高度的方程式」

(一)從實驗一、二的研究中，我們發現建築物的影子會有以下這些規律：

- 1.影子長度會隨著太陽仰角的不同，呈現出規律的變化。

太陽仰角範圍從 0~90 度，影子長度隨仰角上升遞減，0 度時為最長、90 度時最小。

2. 影子寬度會因為太陽方位角的不同而有規律變化。

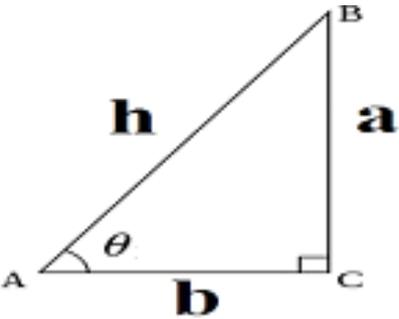
寬度最大時等於建築物底面積對角線長；寬度最小時等於建築物底面的短邊。

3. 影子成像的方位會因為太陽方位角的不同，而成像到與入射光源方向相反的方向。

4. 由以上 1~3 點，我們希望能找出快速得知影子的形狀、高度以及方位的方法，因此我們進行了實驗二。

(二)在繪製建築物、影子與太陽光的相對關係圖的時候，我們時常畫出許多長相類似的「直角三角形」，而且我們發現這些三角形的某些邊長與我們繪製出來的建築物影子寬度、高度常常會重疊，似乎具有某種關聯。請教老師之後我們知道了原來這些特別的「相似直角三角形」能夠利用「三角函數」這個工具來計算出邊長與角度。

三角函數在直角三角型中，是一個關於三角形內角與其中兩個邊長比值之間關係的函數，在本研究中使用以下這三個常見的三角函數：

正弦函數	$\sin \theta = \frac{a}{h}$	
餘弦函數	$\cos \theta = \frac{b}{h}$	
正切函數	$\tan \theta = \frac{a}{b}$	

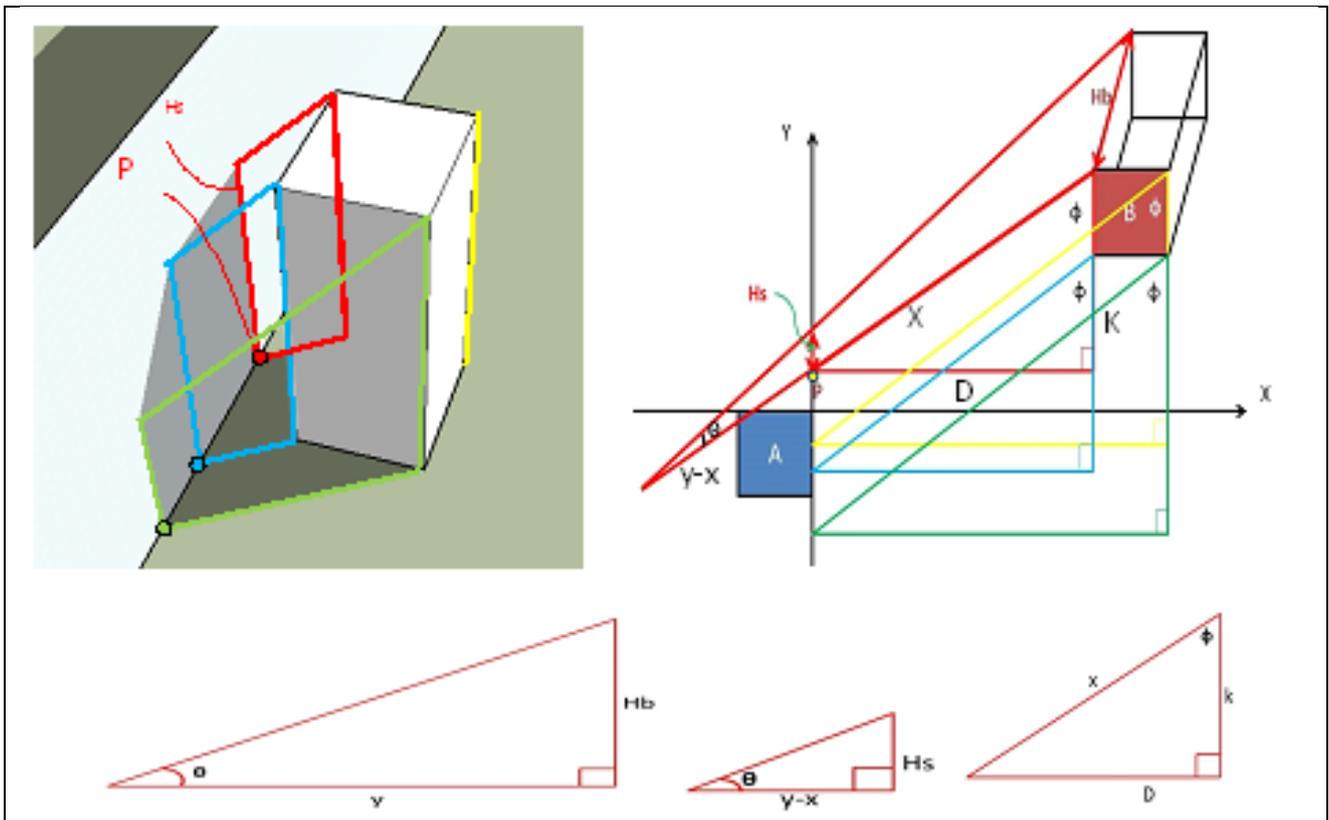
[表三] 常用三角函數列表

(三)B 棟建築物影子 P 點以及影高 Hs 方程式計算

1. B 棟建築物影子 P 點方程式及寬度計算過程

(1)由圖七我們發現 B 棟四個樑柱產生垂直於地面的四個立體直角三角形影子，通過 A 棟東面牆壁地面的位置(P 點)，並不完全相同。

(2)「最北端紅色 P 點以及最南端綠色 P 點之間的距離」正好是 B 棟影子照射到東面牆壁時的影子寬度。因此我們透過圖八的計算過程，嘗試計算出 B 棟四個立體直角三角形影子通過 A 棟東面牆壁地面時的影子寬度方程式。



[圖七] B 棟建築物影子在 A 棟建築物東面的分析圖

令 B 棟西北方樑柱的影子通過 A 棟東面牆壁地面的位置為 P 點、
 B 棟西北點到 A 棟東面的垂直距離為 D、

$$D = \text{絕對值}(B \text{ 西北 } x - A \text{ 東 } x) \quad \tan \theta = \frac{D}{K} \quad \therefore K = \frac{D}{\tan \theta}$$

則由圖可知位置座標 $P = B \text{ 西北 } y - K = B \text{ 西北 } y - \frac{D}{\tan \theta}$

$$\therefore P = B \text{ 西北 } y - \frac{\text{絕對值}(B \text{ 西北 } x - A \text{ 東 } x)}{\tan \theta} \quad \text{則，寬度} = P_{\max} - P_{\min}$$

[圖八] P 點計算過程

2. B 棟建築物影子 P 點方程式及寬度計算過程

(1)由圖七我們發現 B 棟建築物的影子是由 B 棟建築物「四個角落的樑柱投影在地面」形成的「四個垂直於地面的立體直角三角形」影子所組合而成。

(2)當 B 棟產生的「四個垂直於地面的立體直角三角形」影子照射在 A 棟東面牆壁上的時候，所產生的在東面牆壁上的影子高度 Hs 並不完全相同，因此我們透過圖九的計算過程，計算出 B 棟樑柱產生在 A 棟東面牆壁上的影子高度 Hs 方程式。

令 B 棟西北方樑柱垂直於地面的直角三角形影子。

通過 A 棟東面的高度為 H_s 、影長= y 、西北點至東面的影長= x 。

$$\tan\theta = \frac{H_b}{y} \quad \therefore y = \frac{H_b}{\tan\theta} \quad \sin\phi = \frac{D}{x} \quad \therefore x = \frac{D}{\sin\phi}$$

$$\tan\theta = \frac{H_s}{(y-x)} = \frac{H_s}{\frac{H_b}{\tan\theta} - \frac{D}{\sin\phi}}$$

$$\therefore H_s = H_b - \text{絕對值}(B \text{ 西北 } x - A \text{ 東 } x) \frac{\tan\theta}{\sin\phi}$$

[圖九] 影高 H_s 計算過程

四、利用影子「 H_s 」與「P 點」方程式，在 EXCEL 建立函數並自動繪製遮蔽影子成像圖形

(一)在電腦課時，曾經學過利用 EXCEL 繪製折線圖以及長條圖，因此我們認為也許能夠利用 EXCEL，將 B 棟影子照射在 A 棟各面牆壁上的遮蔽情形繪製出來。於是我們請教老師更深入的 EXCEL 使用方式。

(二) 我們嘗試在 EXCEL 中把我們計算出來的公式直接建立起來，然而卻發現並不如我們所想的方式一樣。

1.經過請教老師以及查詢資料後，我們了解到 EXCEL 軟體中的任何計算，必須要一步一步地建立起來，而且不只是公式的建立，計算的時候也有許多不同的「選擇」過程需要建立函數，透過許多步驟才能夠順利的進行計算。

以下是我們比較常用到的函數：

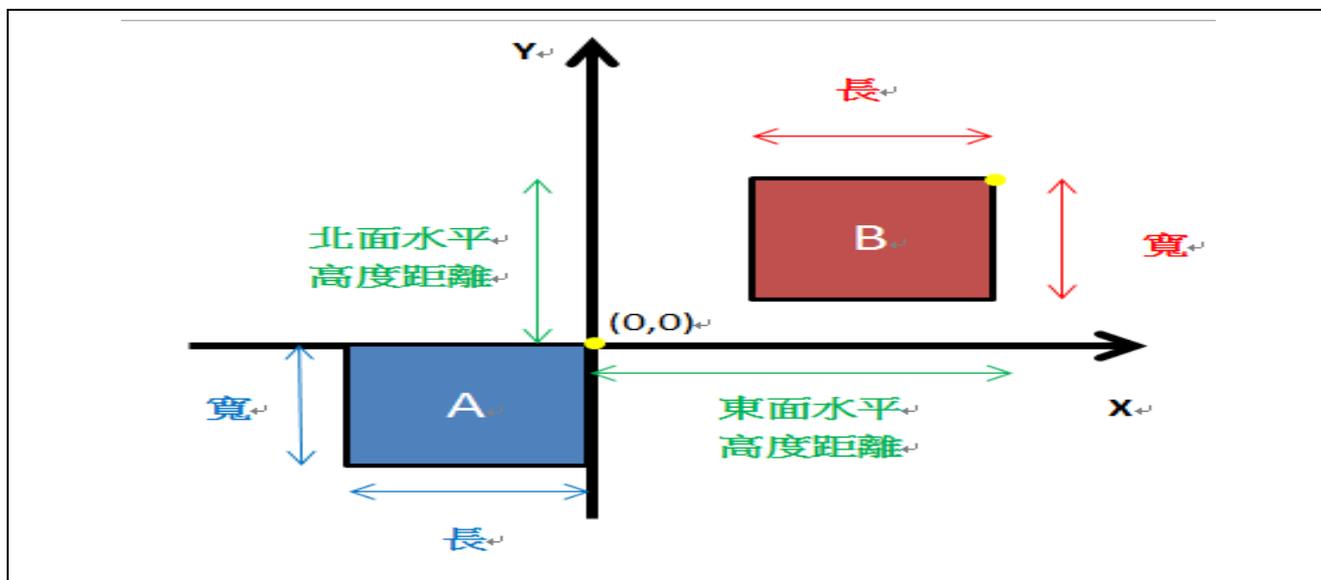
=if	=if(計算規則,正確就傳回此位置的值或規則,不正確就傳回此位置的值或規則)
=or	=or(計算規則 1,計算規則 2...)任何一者符合就回傳 TRUE 反之回傳 FALSE
=and	=and(計算規則 1,計算規則 2...)皆符合就回傳回傳 TRUE,任一者不符合回傳 FALSE
=abs	=abs(計算規則或某值) 傳回計算後的絕對值
=large	=large(某範圍,K) 傳回某範圍內，第 K 大的數值
=small	=small(某範圍,K) 傳回某範圍內，第 K 小的數值
=match	=match(尋找某值,某範圍,0)在某範圍內，尋找某值，0=完全符合
=pi()/180	=某值 pi()/180 將某值轉換為弧度，因為 EXCEL 中三角函數計算只能使用弧度

[表四] 使用 EXCEL 建立日照與建物陰影遮蔽模型程式中常用到的函數

(三)在 EXCEL 繪製圖形時，需將 A、B 兩棟建築物的相對位置定位出來，才能夠進行後續的計算。因此我們決定將 A、B 兩棟建築物進行 X-Y 座標化。

1.將 A 棟建築物東北角置於偏西南方，東北角定義為(0,0)原點，便於後續計算。

2.以下為座標建立過程：



[圖十] A、B 棟座標化示意圖

	東北點座標	東南點座標	西北點座標	西南點座標
A 棟建築物	原點 (0,0)	(0,0-A 棟寬)	(0-A 棟長,0)	(0-A 棟長, 0-A 棟寬)
B 棟建築物	(東面水平距離+B 棟長,北面垂直距離+B 棟寬)	(東面水平距離+B 棟長,北面垂直距離)	(東面水平距離,北面垂直距離+B 棟寬)	(東面水平距離,北面垂直距離)

[表五] 建立 A、B 棟建築物各點的座標

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
3		0	0	-4	0	0	-4	-4	-4
4	B棟座標	x	y	x	y	x	y	x	y
5		10	8	6	8	10	4	6	4
6	A棟高	12							
7	B棟高	12							

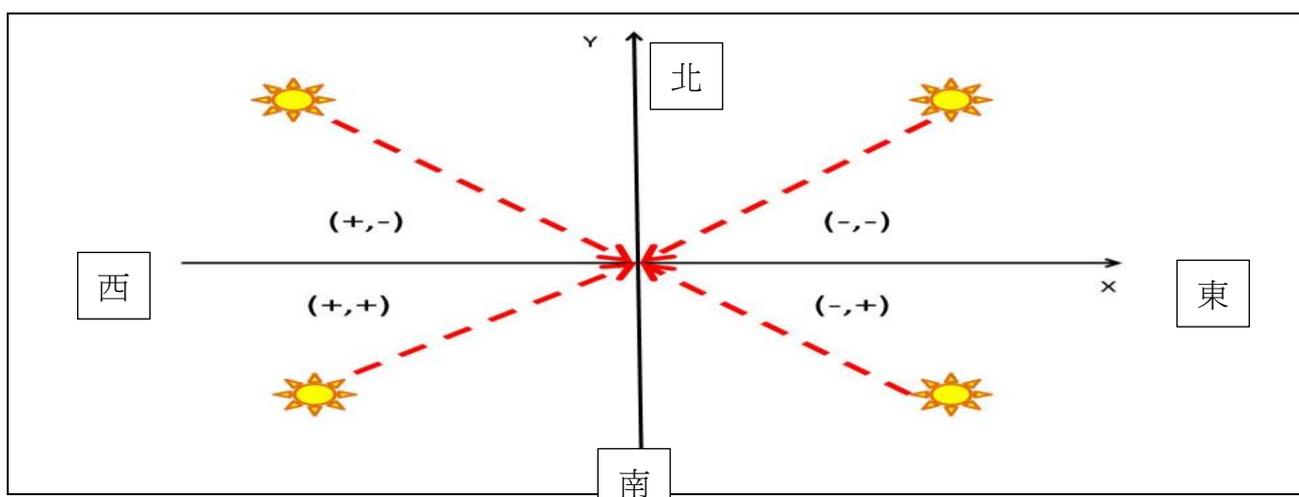
[圖十一] 在 EXCEL 中建立建築物座標

(三)建立 B 棟產生的遮蔽影子「寬度」與「高度」方程式計算公式

- 1.因為太陽距離地球極遠，因此太陽光進入照射到地球時已經近似於平行光，所以太陽方位角等太陽光照射的角度。
- 2.將太陽方位角與仰角轉換成弧度表示，如圖十二所示。
- 3.建立太陽光方向向量：
 - (1)將太陽方位角 0 至 360 度平均化分為 4 個區塊，並將太陽光往原點照射的方向定義為陽光向量。
 - (2)如圖十三所示，當太陽方位角為 0~90 度時，陽光向量為(-,-)；當太陽方位角為 90~180 度時，陽光向量為(-,+); 當太陽方位角為 180~270 度時，陽光向量為(+,+); 當太陽方位角為 270~360 度時，陽光向量為(+,-)。

	A	B
1	太陽方位角	太陽仰角
2	150	50
3	方位(弧)	仰角(弧)
4	2.617993878	0.872664626

[圖十二] 在 EXCEL 中建立太陽方位角與仰角轉換成弧度



[圖十三] 當太陽在不同方位時的陽光向量示意圖

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	太陽光方向向量							
2	方位角(1~89度)		方位角(91~179度)		方位角(181~269度)		方位角(271~359度)	
3	x	y	x	y	x	y	x	y
4	-	-	-	+	+	+	+	-
5	正北(0度)		正東(90度)		正南(180度)		正西(270度)	
6	x	y	x	y	x	y	x	y
7	0	-	-	0	0	+	+	0

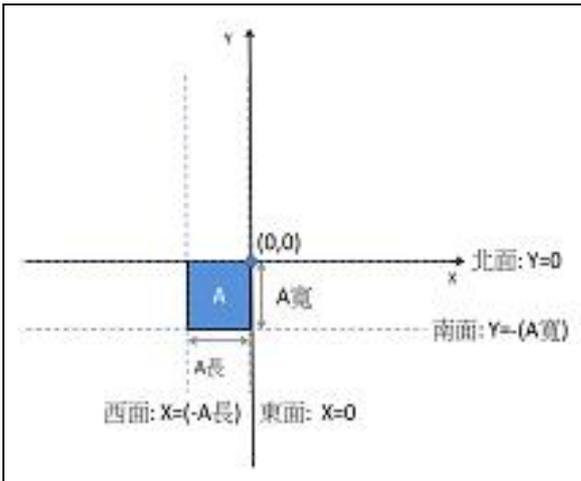
[圖十四] 計算不同位方位的太陽光方向向量正、負號

4. 建立 A 棟各面牆壁方程式，以便於判斷 B 棟影子是否成像於各面牆壁上。

(1) 由圖十五所示，可知道 A 棟各面方程式為：

東面牆壁 $X=0$ ；西面牆壁 $X=-A$ 棟長；南面牆壁 $Y=-A$ 棟寬；北面牆壁 $Y=0$

(2) 如圖十六所示，將 A 棟各面方程式建立到 EXCEL 中



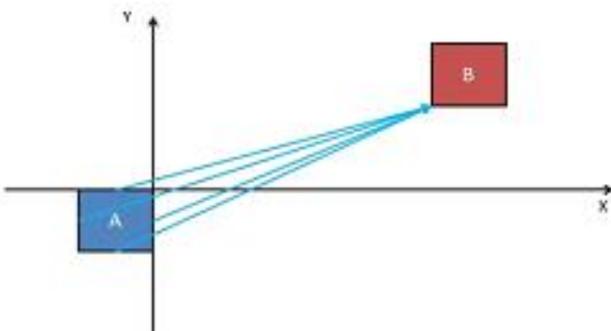
[圖十五] A 棟各面牆壁圖例

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	A棟各面牆壁方程式								
	A棟東面	X	A棟西面	X	A棟南面	Y	A棟北面	Y	
2			0		-A		-A		0

[圖十六] 在 EXCEL 中建立 A 棟各面方程式

5. 建立從 A 棟各牆面往 B 棟看過去的向量

(1) 由圖十七以及圖十八可以得知各面看 B 棟四點的方向向量分別為：



[圖十七] A 棟各面牆壁往 B 棟西南點看的向量圖例

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	從A各面往B棟看的向量								
2		東北點		東南點		西南點		西北點	
3		x	y	x	y	x	y	x	y
4	從東面 x=0	10		10		6		6	
5		+		+		+		+	
6	從西面 x=-4	14		14		10		10	
7		+		+		+		+	
8	從南面 y=-4		12		8		8		12
9		+		+		+		+	
10	從北面 y=0		8		4		4		8
11		+		+		+		+	

[圖十八] 在 EXCEL 中建立向量及正、負號

	東北點	正負值	東南點	正負值	西北點	正負值	西南點	正負值
東面	X=10	+	X=10	+	X=6	+	X=6	+
西面	X=14	+	X=14	+	X=10	+	X=10	+
南面	Y=12	+	Y=8	+	Y=8	+	Y=12	+
北面	Y=8	+	Y=4	+	Y=4	+	Y=8	+

[表六] A 棟各面看向 B 棟四點的向量以及正、負號

6. 第一次篩選：

由「3.太陽光方向向量」以及「5.A 棟各面向 B 棟看過去的方向向量」兩者比對，篩選出 B 棟不會在 A 棟該面形成影子的座標點

(1)如圖十八及表六可發現 A 棟東面往 B 棟東北點看的向量 X 為“+”號；太陽光方向向量 X 為“-”號，兩者的 X 值正、負號並不相同，因此判斷 B 棟東北點此時產生的影子有可能會遮蔽在 A 棟東面牆壁上。

(2)如圖十八及表六可發現 A 棟南面往 B 棟東北點看的向量 Y 為“+”號；太陽光方向向量 Y 為“-”號，兩者的 Y 值正、負號並不相同，因此判斷 B 棟東北點此時產生的影子不可能會遮蔽在 A 棟南面牆壁上。

7. 計算 B 棟建築物四樑柱的直角三角形影子，於 A 棟各面牆壁位置座標 P 點

(1)由實驗二：B 棟影子在 A 棟各面的影子成像「P 點與 Hs 的方程式」得知，B 棟各樑柱的影子於 A 棟各面牆壁的位置座標 P 點方程式如下：

東面	$P \text{ 點} = B_y - \text{abs}((B_x - A \text{ 東 } x) / \tan(\varphi))$
西面	$P \text{ 點} = B_y - \text{abs}((B_x - A \text{ 西 } x) / \tan(\varphi))$
南面	$P \text{ 點} = B_x - \text{abs}((B_y - A \text{ 南 } y) * \tan(\varphi))$
北面	$P \text{ 點} = B_x - \text{abs}((B_y - A \text{ 北 } y) * \tan(\varphi))$

[表七] B 棟建築物四樑柱的直角三角形影子，於 A 棟各面牆壁位置座標 P 點

(2)如表七所示，B 棟東北點在東面呈現的影高方程式因為 EXCEL 軟體輸入公式的規則，需進行適當的修改，如下表所示。

修改前	$P \text{ 點} = B_y - \text{abs}((B_x - A \text{ 東 } x) / \tan(\varphi))$
修改後	$P \text{ 點} = \text{IF}(L16 = "o", \text{IF}(\text{OR}(K2 = 90, K2 = 270), C28, C28 - \text{ABS}(B28 - C11) / \tan(K4)), "NaN")$

[表八] 將四樑柱的在東面的位置座標 P 點建立到 EXCEL 中

(3)由圖十九可以發現 B 棟四點在 A 棟南面以及北面的位置座標 P 點為「NaN」，是因為此時 B 棟四樑柱影子不可能遮蔽到 A 棟南面以及北面，因此圖二十一的遮蔽情形皆表示為 X。此時判斷影子不會成像成立，因此顯示為「NaN」。

	A	B	C	D	E
1		東北點	西北點	東南點	西南點
2	東面位置座標	25.32050808	18.39230485	21.32050808	14.39230485
3	西面位置座標	32.24871131	25.32050808	28.24871131	21.32050808
4	南面位置座標	NaN	NaN	NaN	NaN
5	北面位置座標	NaN	NaN	NaN	NaN
6					

[圖十九] B 棟影子在 A 棟各面的 P 點判斷情形

8.計算 B 棟建築物四樑柱產生的影子高度 Hs

(1)由實驗二：B 棟影子在 A 棟各面的影子成像「寬度與高度的方程式」得知，B 棟四樑柱影子通過 A 棟各面的影高 Hs 分別如下：

東面	$H_s = H_b - \text{abs}((B_x - A_{\text{東}x}) * \tan(\theta) / \sin(\varphi))$
西面	$H_s = H_b - \text{abs}((B_x - A_{\text{西}x}) * \tan(\theta) / \sin(\varphi))$
南面	$H_s = H_b - \text{abs}((B_y - A_{\text{南}y}) * \tan(\theta) / \cos(\varphi))$
北面	$H_s = H_b - \text{abs}((B_y - A_{\text{北}y}) * \tan(\theta) / \cos(\varphi))$

[表九] B 棟四樑柱影子高度 Hs 方程式

(2)如[表九]所示，B 棟東北方樑柱在東面呈現的 Hs 方程式，因為 EXCEL 軟體輸入公式的規則，需進行適當的修改，如下表所示。

修改前	$=H_b - \text{abs}((B_x - A_{\text{東}x}) * \tan(\theta) / \sin(\varphi))$
修改後	$=\text{IF}(L16="O", B30 - \text{ABS}(B28 - C11) * \tan(L4) / \sin(K4), "NaN")$

[表十] 將影子高度方程式 Hs 建立到 excel 中

(3)由[圖二十]可以發現，B 棟四點在 A 棟南面以及北面的影子高度為「NaN」，是因為此時 B 棟四樑柱影子不可能遮蔽到 A 棟南面幾及北面，因此圖二十一的遮蔽情形皆表示為 X。此時判斷影子不會成像成立，因此顯示為「NaN」。



[圖二十] B 棟各點於 A 棟各面的影高 Hs [圖二十一] 建立是否遮蔽的判斷表

8. 於 EXCEL 中建立自動繪製繪製 B 棟影子在 A 棟各面牆壁上的成像圖形

(1)將 B 棟各樑柱的對應在 A 棟各面的「P 點」、「Hs」排列出來。

(2)將 P 點定為座標 x；Hs 定義為座標 y。

	A	B	C
1	東面	水平座標x	影高座標y
2	東北點	25.32050808	-11.83507185
3	西北點	18.39230485	-2.301043111
4	東南點	21.32050808	-11.83507185
5	西南點	14.39230485	-2.301043111

[圖二十二] 將 B 棟各樑柱的對應在 A 棟各面的「P 點」、「影高」建立在 EXCEL 中

(3)第二次篩選「偽影」篩選：

如[圖二十三]所示將位置座標 P 點 max 與 min 的兩組座標選出來，再從剩餘的兩組座標中，選出影高 Hs 座標較大的該組座標。標記顏色處所用函數如[表十]對應所示：

第二次篩選:去除偽影(保留Pmax、Pmid、Pmin以及相對應的影高)							
繪圖-取東面水平、影高座標值							
東面	P點x	影高座標y	找出非Pmax、Pmin的座標				
東北點	25.32	-11.83	P點	對應影高	P點x	影高	
西北點	18.39	-2.301	P點最大值	25.32	-11.83		
東南點	21.32	-11.83	P點最小值	14.39	-2.301	18.39	-2.301
西南點	14.39	-2.301	P點的中間值	18.39	-2.301	21.32	-11.83

[圖二十三] 偽影篩選

	=LARGE(B46:B49,1)
	=SMALL(B46:B49,1)
	=IF(OR(B47=G46,B47=G47),"",C47)
	=IF(OR(B46=G46,B46=G47),"",B46)
	=IF(OR(K2=90,K2=270,COUNT(C46:C49)<3),"",LARGE(J46:J49,1))

[表十] 偽影篩選的函數

經過偽影篩選後的 B 棟影子成像座標如下表所示

	x	y
X-max	25.32	-11.83
mid	18.39	-2.301
X-min	14.39	-2.301

[表十一] B 棟樑柱成像的三組座標

	=G46
	=H46

[表十二] 選擇 B 棟樑柱成像座標的函數

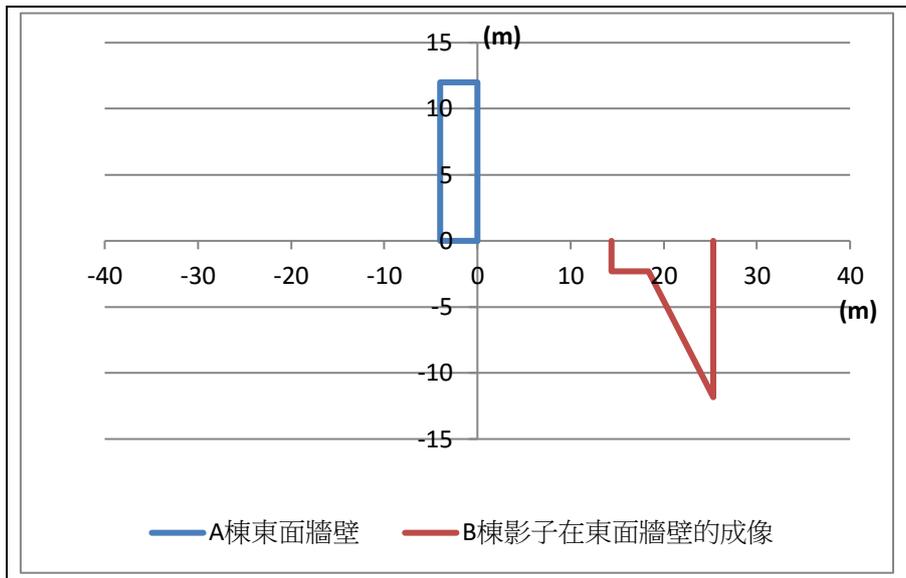
(4)利用 xy 散佈圖中-帶有直線的 xy 散佈圖繪製圖形

將 A 棟牆面座標、B 棟四樑柱影子座標排列整理以符合繪製圖形所需格式，如下圖所示：

	A	B	C	D	E	F
1	A棟東面	x	y	B棟影子	x	y
2		0	0		25.32051	0
3		-4	0		25.32051	-11.8351
4		-4	12		18.3923	-2.30104
5		0	12		14.3923	-2.30104
6		0	0		14.3923	0
7						

[圖二十四] 整理 A 棟牆面與 B 棟樑柱影子座標

將[圖二十四]的座標，以 xy 散佈圖中-帶有直線的 xy 散佈圖作圖，即可得到以下圖形。



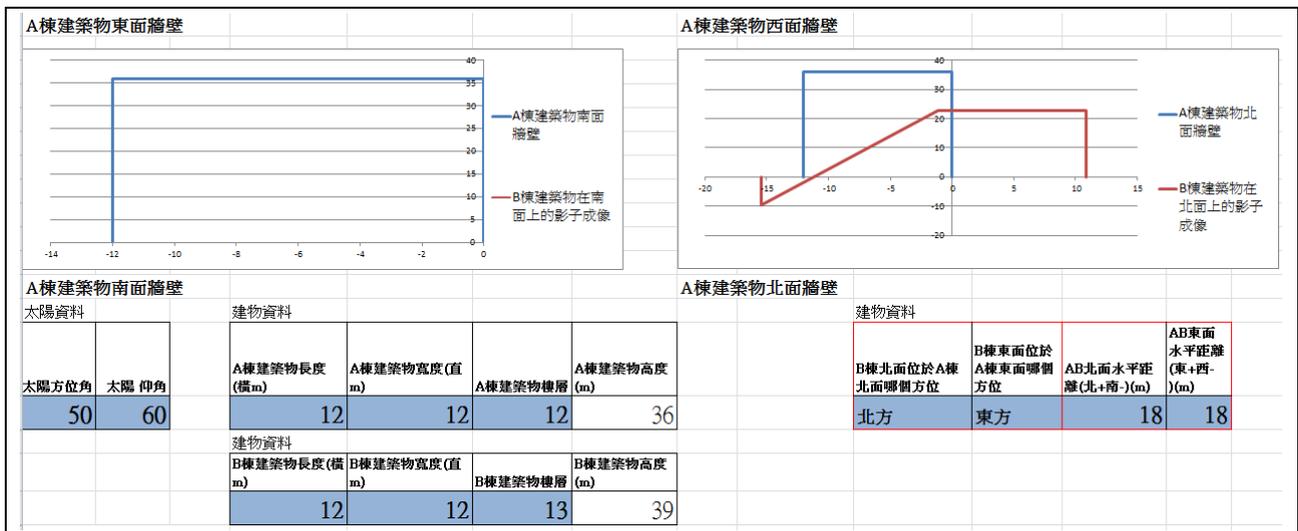
[圖二十五] B 棟影子在 A 棟東面的情形

(四)於 EXCEL 中建立使用者操作頁面

1.將以下影響影子遮蔽的變因建立到使用者操作頁面，如[圖二十六]所示。

(1)各棟建築物的基本資料 (長、寬、高)
(2)各棟建築物的相對位置 (東面之間以及北面之間的距離)
(3)日期與時間 (影響太陽方位角與仰角)

[表十三] 影響影子遮蔽的變因



[圖二十六] 使用者操作頁面

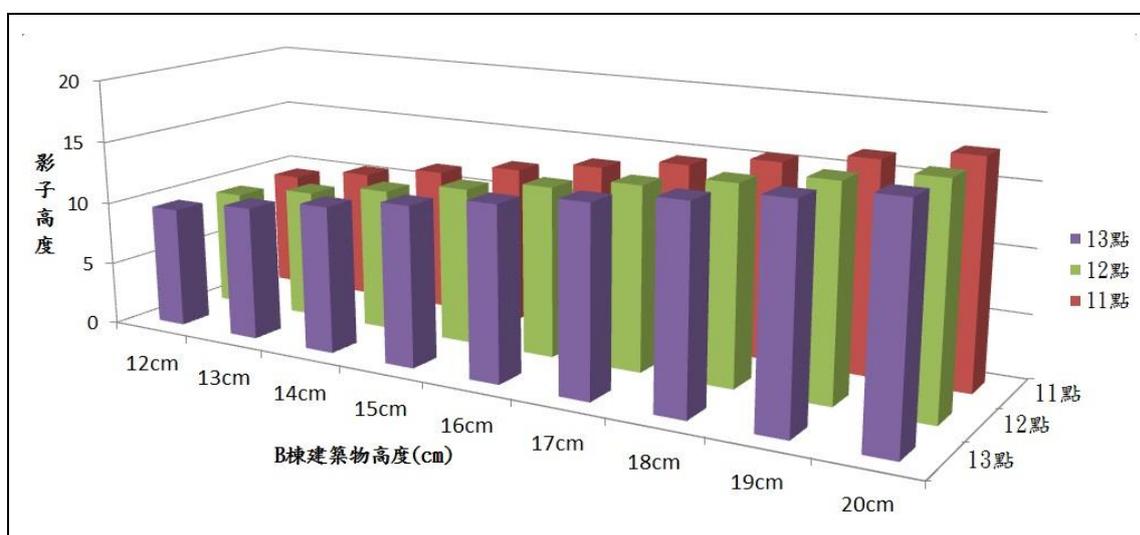
捌、 研究結果

一、實驗一：探討 A、B 兩棟建築物之間的陰影遮蔽情形對「A 棟南面」的影響

(一)B 棟「不同高度」對 A 棟南面的陰影遮蔽結果

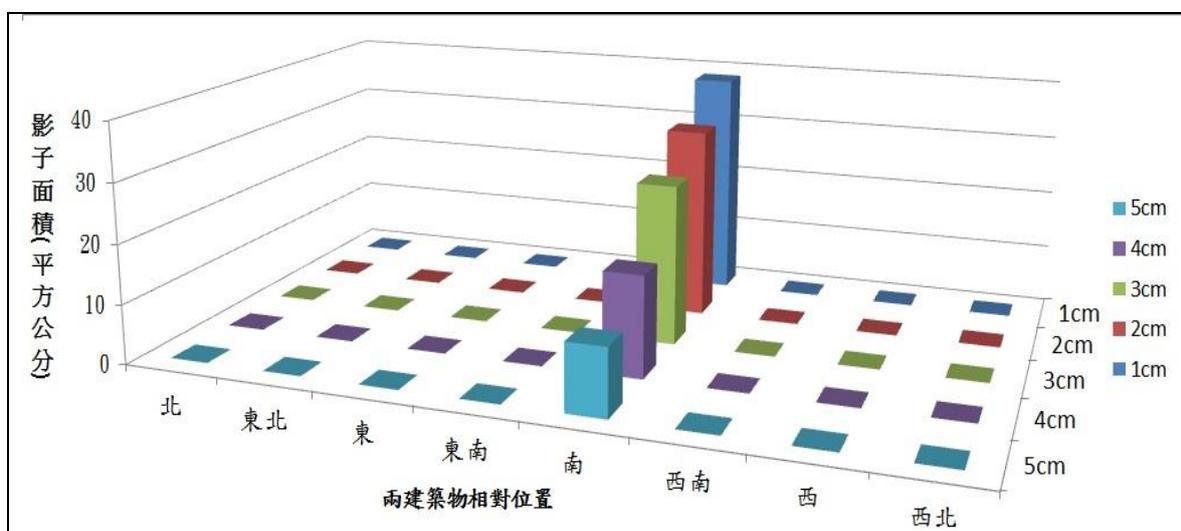
高度 時間	12cm	13cm	14cm	15cm	16cm	17cm	18cm	19cm	20cm
10:00	9.94	10.94	11.94	12.94	13.94	15.94	16.94	17.94	18.94
11:00	9.49	10.49	11.49	12.49	13.49	14.49	15.49	16.49	17.49
12:00	9.34	10.34	11.34	12.34	13.34	14.34	15.34	16.34	17.34
13:00	9.58	10.58	11.58	12.58	13.58	14.58	15.58	16.58	15.58
14:00	10.08	11.08	12.08	13.08	14.08	15.08	16.08	17.08	18.08

[表十四] 不同高度的 B 棟建築物對 A 棟的陰影遮蔽情形



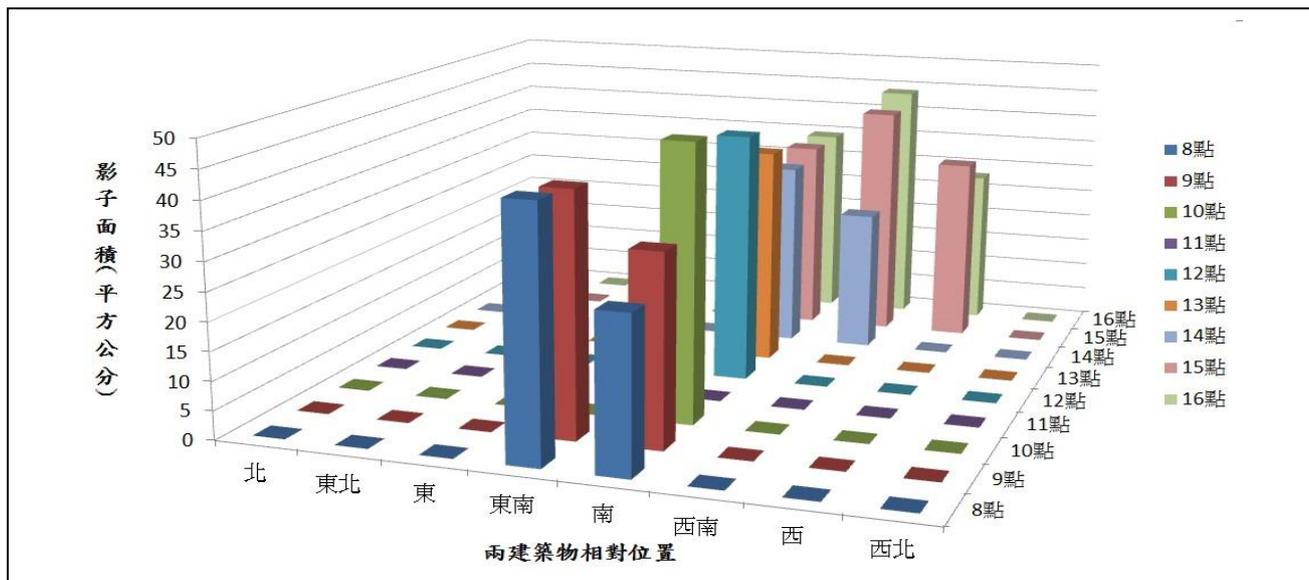
[圖二十七] 不同高度的 B 棟建築物對 A 棟的陰影遮蔽情形

(二)B 棟「不同距離」對 A 棟南面的陰影遮蔽情形



[圖二十八] 不同距離的 B 棟建築物對 A 棟南面的遮蔽情形

(三)B 棟「不同方位」對 A 棟南面的陰影遮蔽情形



[圖二十九] 不同相對位置的 B 棟建築物對 A 棟的陰影遮蔽情形

三、實驗二：利用三角函數計算 B 棟影子在 A 棟各面的影子成像「P 點與 Hs 的方程式」

東(西)面 P 點	$=By - (B \text{ 棟各點的 } x - A \text{ 東(西)}x) / \tan(\varphi)$
南(北)面 P 點	$=Bx - (B \text{ 棟各點的 } y - A \text{ 南(北)}y) * \tan(\varphi)$

[表十五] 影子 P 點方程式

影子寬度方程式即為：

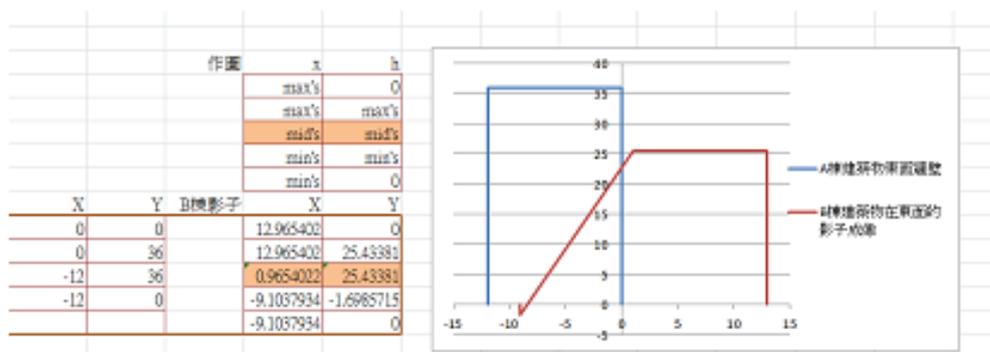
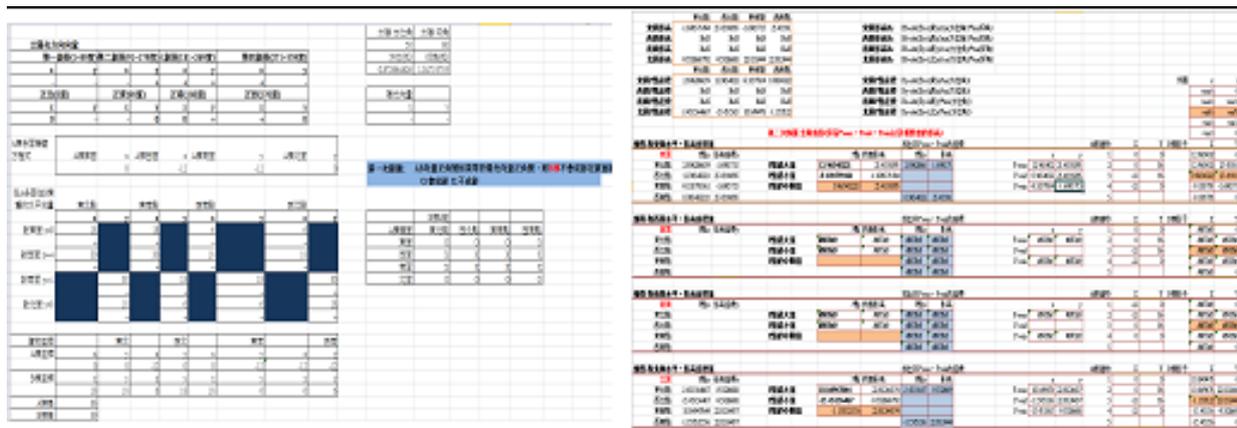
東(西)面影子寬度	$=B \text{ 棟在東(西)面各點的 } P_{\max} - P_{\min}$
南(北)面影子寬度	$B \text{ 棟在東(西)面各點的 } P_{\max} - P_{\min}$

[表十六] 影子寬度方程式

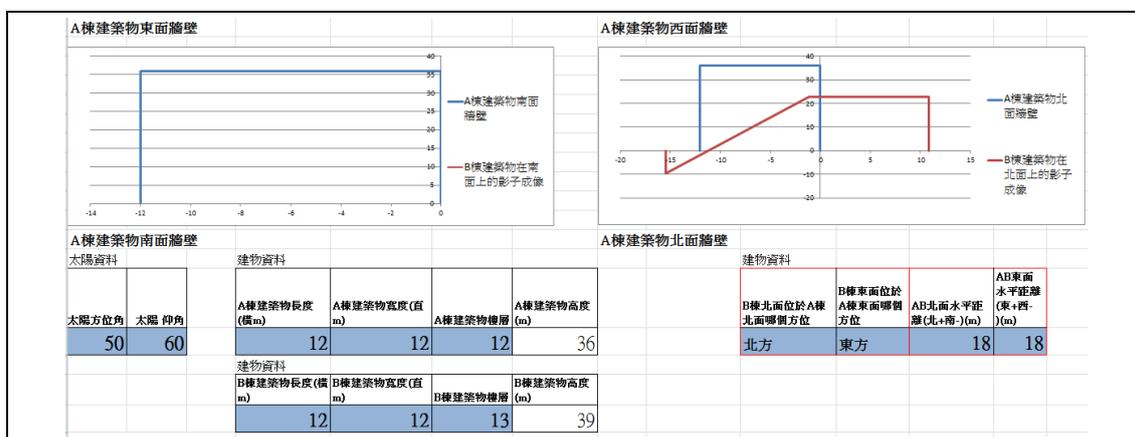
東(西)面影子高度	$=Hb - (B \text{ 棟各點的 } x - A \text{ 東(西)}x) * \tan(\theta) / \sin(\varphi)$
南(北)面影子高度	$=Hb - (B \text{ 棟各點的 } y - A \text{ 南(北)}y) * \tan(\theta) / \cos(\varphi)$

[表十七] 影子高度 Hs 方程式

四、實驗三：利用遮蔽影子「P 點」與「Hs」方程式，在 EXCEL 建立自動繪製遮蔽影子的程式



[圖三十]自動繪製遮蔽影子程式-主要公式計算頁面



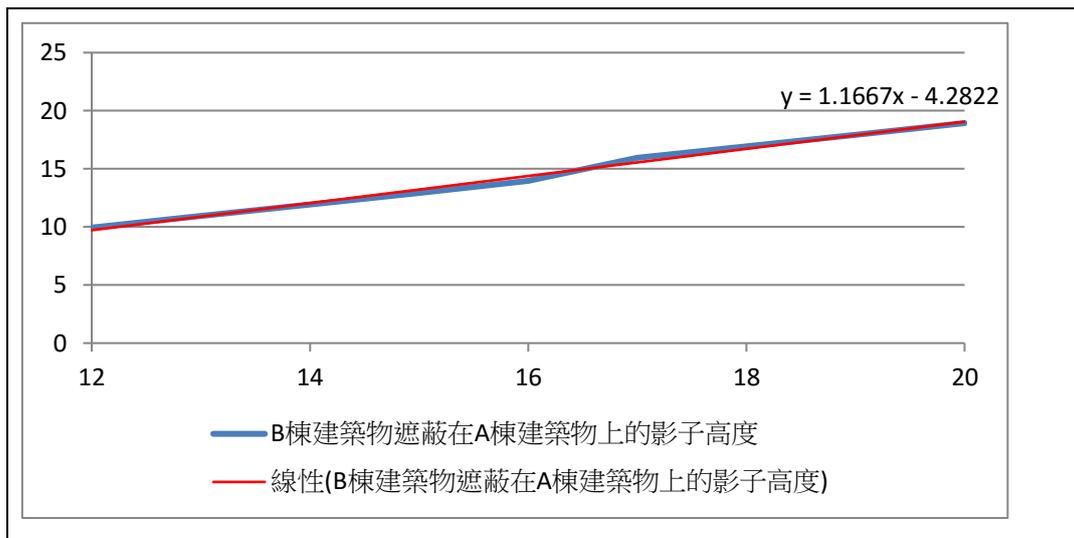
[圖三十一] 自動繪製遮蔽影子程式-操作者頁面

玖、 討論

一、**實驗一**：探討 A、B 兩棟建築物之間的陰影遮蔽情形對「A 棟南面」的影響

(一)討論 B 棟「不同高度」對 A 棟南面的陰影遮蔽情形(以下摘錄自實驗結果一表十四)

B 棟高度	12cm	13cm	14cm	15cm	16cm	17cm	18cm	19cm	20cm
10 時影子高度	9.94	10.94	11.94	12.94	13.94	15.94	16.94	17.94	18.94



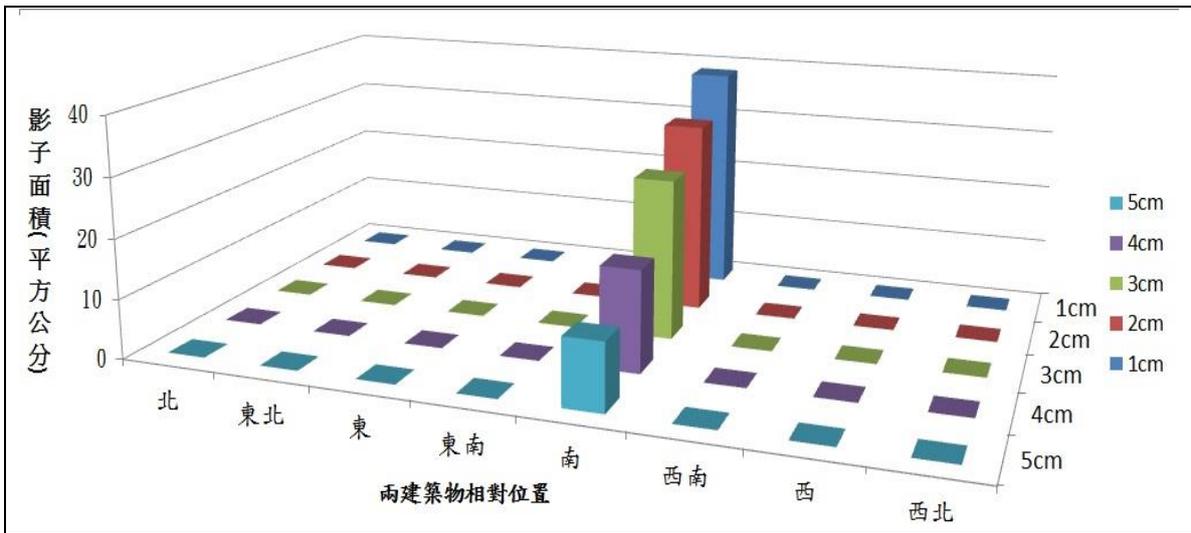
[圖三十二] 不同高度的 B 棟建築物在 A 棟上的影子高度變化圖

從上述圖表中，我們發現在同一時間點，當 A、B 棟建築物的距離不變、相對方位也沒有改變的時候，如果 B 棟建築物樓層越高，則 B 棟建築物遮蔽在 A 棟建築物上的影子高度也會越高，而且近乎呈正比。

(二)討論 B 棟「不同距離」對 A 棟南面的陰影遮蔽情形

由實驗結果-圖三十三，我們發現當 A、B 棟建築物的相對方位不變、高度也沒有改變，只改變 A、B 兩棟建築物之間距離的時候，A 棟建築物南面被遮蔽到的影子面積會隨著 A、B 兩棟距離越遠離，而遮蔽到越少的面積。

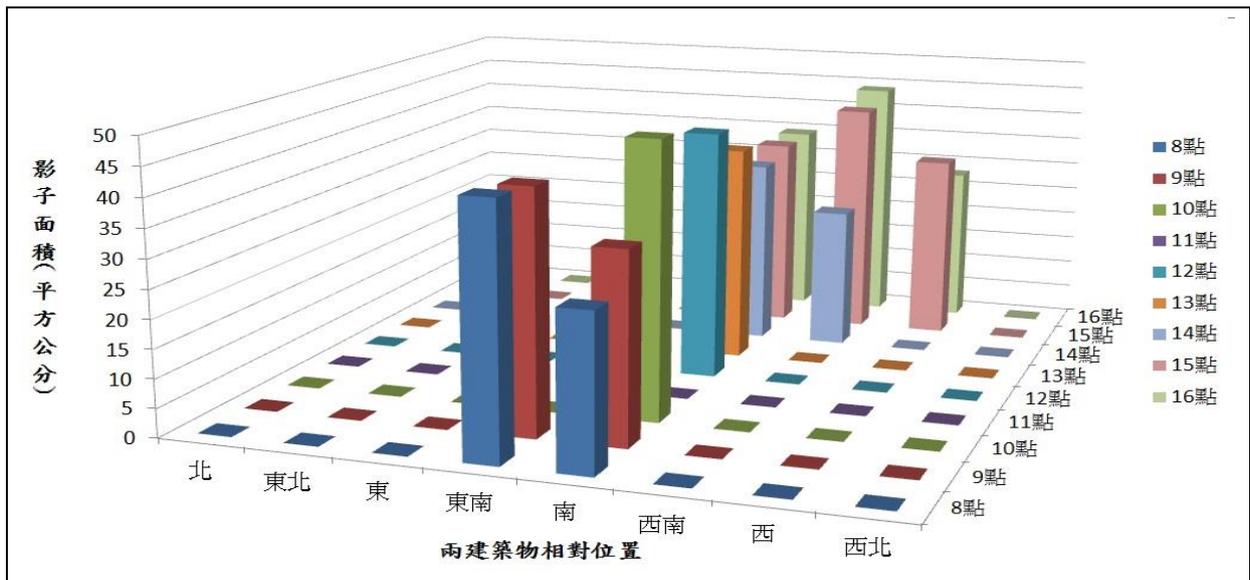
這一個發現與我們五年級課堂上進行竿影實驗發現的狀況不謀而合。因為在同一個時間點的情況下，如果竿子的高度不變，不管將竿子移動到同一平面上的任何位置，竿影的長度、面積也不會改變。



[圖三十三] 不同距離的 B 棟對 A 棟南面的遮蔽情形

(三)討論 B 棟「不同方位」對 A 棟南面的陰影遮蔽情形

由實驗結果的圖三十四，我們發現在同一時間點，當 A、B 棟建築物的距離、相對高度沒有改變時，A 棟建築物是否會受到 B 棟建築物的影子遮蔽似乎與方位有關。



[圖三十四] 不同相對位置的 B 棟建築物對 A 棟的陰影遮蔽情形

我們發現以下幾點特徵：

1. B 棟建築物在 A 棟建築物東南方時，除了 10:00 有遮蔽到 A 棟建築物以外，從 11:00 開始直到 14:00 為止都未再次遮蔽到 A 棟建築物。
2. B 棟建築物在 A 棟西南方時，從 10:00 開始直到 13:00 為止都未遮蔽到 A 棟建築物，但是從 14:00 開始遮蔽到 A 棟建築物。
3. 由於太陽的方位角在 10:00~14:00 這段時間對於台灣來說，正好是介於 150 度~220 度，也就是太陽在這段時間中從東南方移動到西南方。

透過以上 3 點我們推測 B 棟建築物與 A 棟建築物的相對方位，對於 B 棟建築物的影子能否遮蔽到 A 棟建築物來說有極大的可能。所以我們想嘗試利用數學精確地找出日照與建物陰影遮蔽規律。

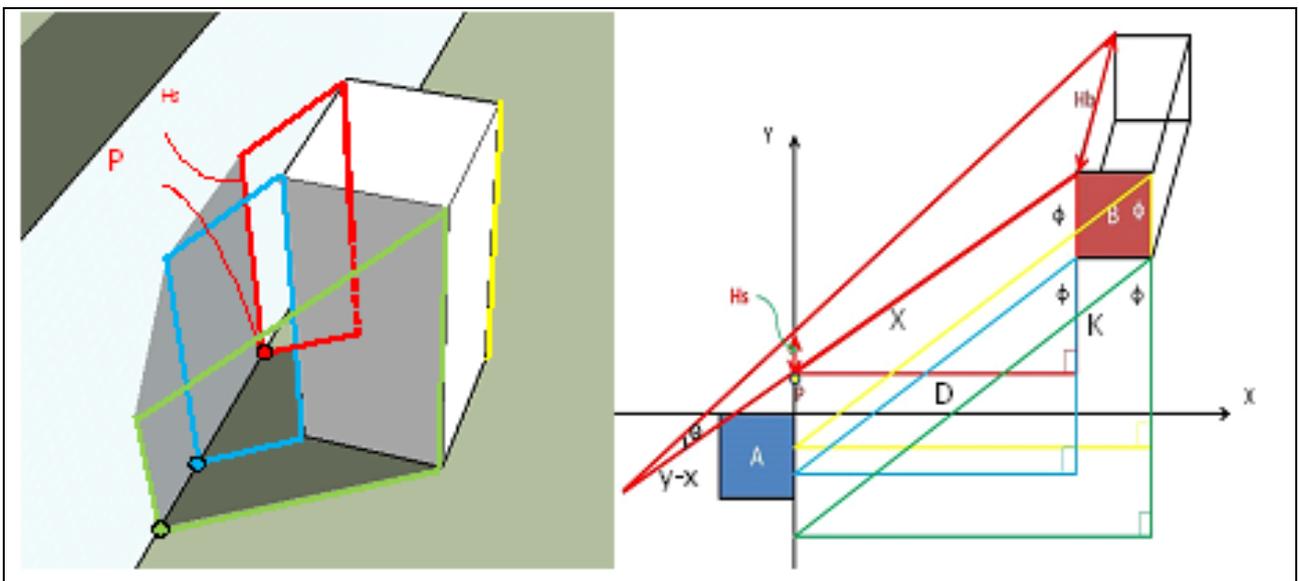
二、實驗二：利用三角函數計算 B 棟影子在 A 棟各面影子成像的「寬度與高度數學方程式」

(一)討論如何計算 B 棟影子在 A 棟各面的影子成像高度

- 1.剛開始在思考如何計算影子高度 H_s 的時候，我們發現 B 棟建築物的四樑柱如同竿影實驗一樣，都會產生方向、長度都一樣的影子，而且影子頂端與樑柱的連線，恰好形成垂直於地面的直角三角形。
- 2.進一步觀察這四個直角三角形之後，如同實驗二的[圖七]所示。我們發現這四個直角三角形通過 A 棟建築物的東面時，由於樑柱本身對於 A 棟東面的距離不同，所以直角三角形通過東面時，呈現在東面上的影子高度也不一樣。因此形成了許多三個內角角度一樣，然而邊長卻不同的「相似三角形」。
- 3.我們知道相似三角形的角度會一致，而且三個邊長會彼此成比例，所以能夠透過六年級數學學到的比與比值來進行計算。在我們練習計算的過程中，我們發現就算是不同樑柱產生的直角三角形，計算時的分子與分母都是用到互相對應的邊長。請教老師之後，我們了解了相似三角形的延伸計算方式-三角函數。
- 4.而後利用三角函數計算影子高度 H_s 之後，我們發現如實驗二的[圖七]中所示，紅色與藍色樑柱與 A 棟東面的水平距離一樣長，而黃色則與綠色樑柱與 A 棟東面的水平距離一樣長，所以紅、藍樑柱的直角三角形影子通過 A 棟東面產生的高度會一樣高；黃、綠樑柱的直角三角形影子通過 A 棟東面產生的高度會一樣高，而因為黃、綠樑柱相對於紅、藍樑柱更遠離 A 棟東面，黃、綠樑柱在東面產生的影高 H_s 會小於紅、藍樑柱產生的影高 H_s 。

(3)透過實驗二的[圖七]，我們能夠很清楚的看到 B 棟建築物東北角的黃色樑柱，本身所產生的影子會通過 B 棟建築物本身，所以黃色樑柱產生的直角三角形影子是「偽影」。該「偽影」通過東面的 P 點位置剛好在 P 點最大值以及 P 點最小值中間，而且 H_s 也比藍色樑柱的 H_s 還要低。

(4)後續當我們在繪製以及計算 B 棟四樑柱的直角三角形影子與 A 棟其他三個面的時候，我們也發現到「偽影」都會位於 P 點最大值以及 P 點最小值中間，而且偽影的 H_s 必然是扣除 P 點最大值與最小值兩對應 H_s 後的較小者。因此，這也讓我們想到如何將「偽影」過濾掉的方式。



[圖三十五] 摘錄自實驗二[圖七] B 棟建築物影子在 A 棟建築物東面的分析圖

(5)篩選的方式如下:

- a.先選出 P 點 max 以及其對應的 H_s
- b.選出 P 點 min 及其對應的 H_s
- c.最後剩餘的兩組樑柱三角形中，選出 H_s 較高者，最後未被選中的就是「偽影」。

(6)經過上述的討論，我們知道每一個樑柱產生的直角三角形影子在面上都會有一組對應的 P 點以及 H_s ，所以我們決定利用 EXCEL 中「帶有直線的 xy 散佈圖」繪製圖形。

位置座標 P 點	樑柱影高 H_s
max's	0
max's	max's
mid's	mid's
min's	min's
min's	0

[表十八] 整理 B 棟四樑柱影子在東面的 3 組座標

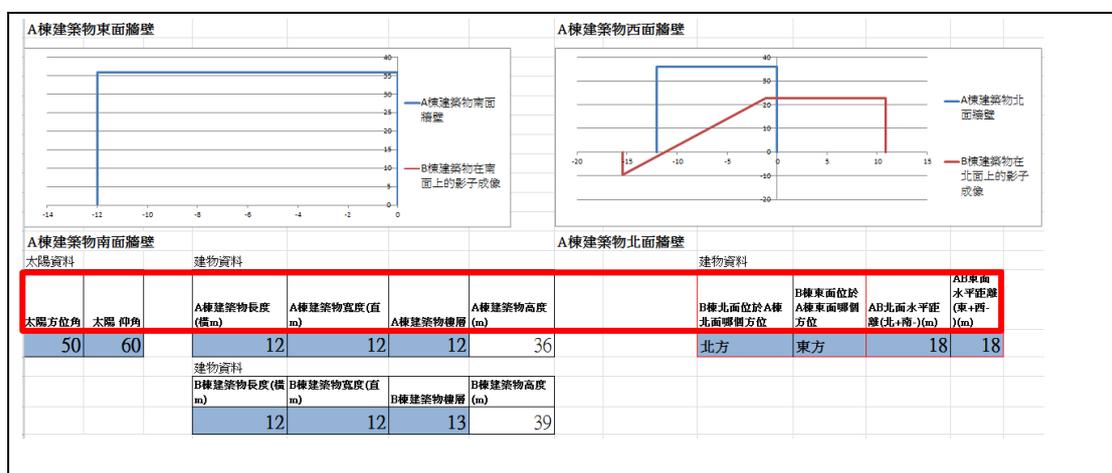
2.操作頁面的變數選擇討論：

透過實驗一、二的小型建築物模擬實驗，以及實驗三的影子高度 H_s 、 P 點的計算、影子寬度，我們發現影響到建築物影子的方向、高度、寬度、是否遮蔽到其他建築、遮蔽到之後產生的影子形狀等變化，都能夠歸因於以下幾個變因而導致的：

(1)各棟建築物的基本資料 (長、寬、高)
(2)各棟建築物的相對位置 (東面之間以及北面之間的距離)
(3)日期與時間 (影響太陽方位角與仰角)

[表十九] 影響影子遮蔽的變因

所以我們決定把這幾個變數放在操作頁面上如實驗三的圖三十六所示，讓使用者能夠依照不同的需求調整變數，更輕鬆的使用這套程式。



[圖三十六] 自動繪製遮蔽影子程式-操作者頁面

四、實測陽光有無直射對於室內溫度的影響

為了證實建築物被陰影擋住與否會進而影響到室內溫度，因此我們進行了以下的觀測。

(一)利用相機拍攝記錄實際的陽光照射情形





[圖三十七]校園中某建築物 8 時~16 時陰影遮蔽情形(拍攝角度-走廊 6/1 晴天)



[圖三十八]校園中某建築物 8 時~16 時陰影遮蔽情形(拍攝角度-科任辦公室 6/1 晴天)

(二)利用電子式溫度計記錄教室內溫度

時間	8:00	9:00	10:00	11:00	12:00	13:00	14:00	15:00	16:00
溫度	31.9	32	32.5	33.2	34	34.1	35	35.1	35.2

[表二十] 校園中某建築物 8 時~16 時陰影遮蔽情形 6/1 晴天

時間	8:00	9:00	10:00	11:00	12:00	13:00	14:00	15:00	16:00
溫度	29.1	29.4	29	28.6	28.1	28.9	29	29.2	29.1

[表二十一] 校園中某建築物 8 時~16 時陰影遮蔽情形 6/6 陰雨天

觀察[圖三十七]、[圖三十八]後，我們可以看到 6/1 日 8 時~11 時的 4 個小時之間，該建築物有一面是迎光面，因此另一面則可知道是背光面；12 點過後光照情形即相反。但是，比對表二十的溫度記錄後，卻發現室內溫度並沒有隨著迎光面(未被陰影遮蔽)轉為背光面(被建築物自身陰影擋住)而有降溫的趨勢，反而溫度逐漸升高。

我們推測可能有以下幾點原因所導致：

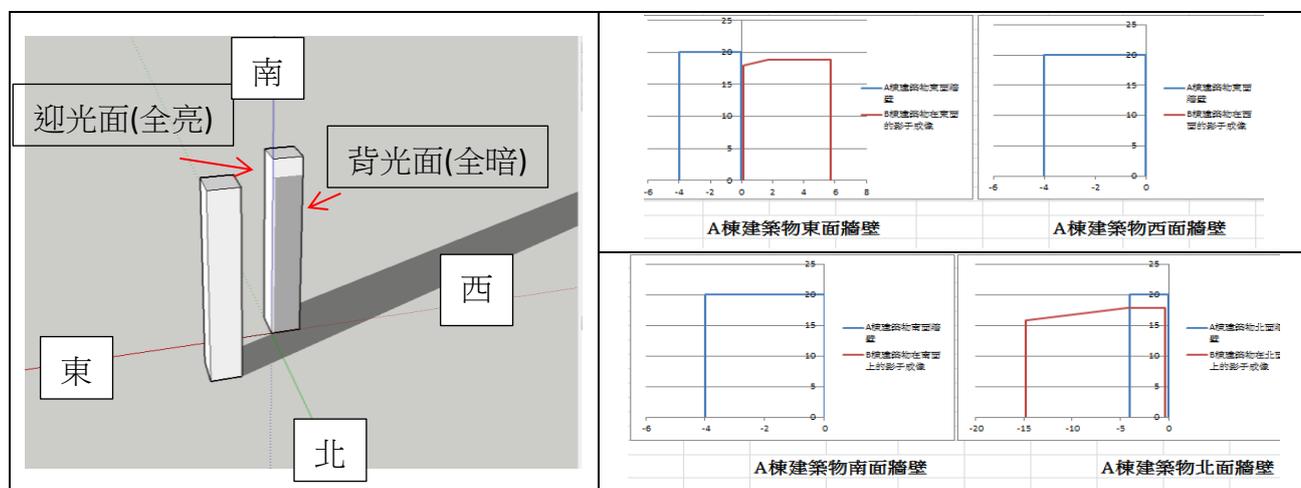
1. 教室空間太小，**室內溫度容易達到動態平衡**，所以在室內測得的溫度差異不明顯。
2. 8 時~12 時受到陽光照射因此**建築物吸熱**而且溫度上升，雖然 13 時~16 時處於背光面但是很有可能逐漸**釋放出吸收到的輻射熱**，因此溫度仍然上升。
3. 由表二十、表二十一早上 8 時~12 時的溫度記錄，可以發現 6/1 日晴天(迎光面)與 6/1 日陰雨天(背光面)溫度差異明顯，不過因為 6/6 日當天有下雨，因此**尚不能明確的認定建築物受到陰影遮蔽後溫度會有所影響**，只能作為合理的推論。

五、自製陰影遮蔽程式與 SketchUp 建築軟體比較及驗證

SketchUp 繪圖軟體是建築設計領域廣泛運用的繪圖軟體，具有一定的可信度，因此我們運用此軟體來驗證我們的程式是否準確。

(一)由[圖三十九]中可以看出 A 棟建築物的東、西、南面上的牆壁不會被 B 棟影子遮住，而北面牆壁上幾乎都被遮住，互相比對結果符合，因此證明**自製陰影遮蔽程式是正確的**。

(二)使用 SketchUp 繪圖軟體模擬要自己量尺寸、畫出建築物、設定時間，要先熟悉軟體的使用又花費時間。而我們的自製陰影遮蔽程式只需根據條件選擇數字即可，可以推論本研究的自製陰影遮蔽程式模擬速度較為快速。



[圖三十九] 自製陰影遮蔽程式與 SketchUp 模擬出 A 棟被遮蔽的影子圖形

六、研究限制與未來展望

(一)研究限制：

1. 檢測的建築物必須為南北走向。

(二)未來展望：

1. 呈現出建築物本身影子遮住的情況(背光面陰影)



[圖四十] 背光側與迎光側陰影遮蔽情形

2. 加入建築物位於不同高度(海拔)的變因控制。

3. 改善目前 2D 陰影成像方式，尋找並建立更加視覺化、直覺式的陰影成像方式。

4. 建立室內溫度變化與陰影遮蔽情形的變因控制

鑒於[討論四]的第 2、3 點，未來必須嘗試找出室溫變化與陰影遮蔽情形的關聯性，才能更進一步與智慧建築結合(自動控制溫度、亮度、節能)，達到如圖[圖四十一]的理想效果。



[圖四十一] 智慧建築節能省電構想

拾、結論

透過我們的研究，我們發現建築物受太陽光照射呈現的影子，會有規律變化。而且兩棟建築物之間的方向向量正、負值，如果與太陽光的方向向量正、負值相同，則建築物影子必定不會照射到該平面；任何建築物的影子成像，必定會有「偽影」出現。

因此，我們歸納出因為建築物的尺寸、建築物間的相對位置、地理位置不同、以及太陽的仰角、方位角，會讓影子產生有規律的變化，而且是能夠預測的。

透過我們建立的「日照與建物陰影遮蔽模型程式」，只要輸入建築物的長、寬、高、相對位置以及太陽的方位角、仰角，就能快速且自動描繪建出築物影子遮蔽情況。不只如此，也能夠在地球上不同經緯度的地區直接進行使用，打破了地域的限制。

未來的研究目標，希望在兼顧建物設計者、建造者、使用者需求下，解決日照不均造成居家安全疑慮及能源使用的浪費的困境，並且達成智慧建築「節能永續」及「便利舒適」的目標。實務面上希望能夠推廣至建築工事的計算規劃、社區採光格局的營造規劃、協助購屋採光的選擇、智能建築的溫控、亮度控制預測等，並且以這份程式為基礎，進一步改良優化操作方式，進而更便利的提供給民眾使用。

拾壹、參考資料及其他

- 一、陶政慷(2005) (Cheng-keng Tao, 2005) • 三維地理資訊系統在都市建築日照之應用-以陰影遮蔽及太陽輻射效能分析為例 *Study of building solar insolation with 3D GIS-Analysis of shadow shading and solar radiation*
- 二、自然教科書 五年級上學期 • 南一版
- 三、Microsoft office excel 函數教學說明 • 取自 <https://support.office.com/zh-tw/excel>
- 四、中央氣象局 • 臺灣四季太陽仰角與方位角 • 取自 <http://www.cwb.gov.tw/V7/astronomy/cdata/season.htm>
- 五、(一)維基百科 • 三角函數 • 取自 <https://zh.wikipedia.org/wiki/%E4%B8%89%E8%A7%92%E5%87%BD%E6%95%B0>
(二)維基百科 • 曲率半徑 • 取自 <https://zh.wikipedia.org/wiki/%E6%9B%B2%E7%8E%87>

【評語】 080831

1. 利用日照與建物陰影的數學關係，建立程式模擬計算，以作為選擇房屋或節能永續的參考，值得鼓勵。
2. 目前程式與模型是以建物在東西／南北向為限，若要擴展成任意方向，宜思考數學與程式如何擴展。
3. 目前建築物為正方形，宜思考如何擴展成非正方形。
4. 宜思考陰影與溫度增減如何定量。