# 中華民國第56屆中小學科學展覽會
# 作品說明書

---

國小組　數學科

## 第三名

080415

## 六〝和〞YES．猴〝骰〞晶

學校名稱：高雄市三民區十全國民小學

| 作者： | 指導老師： |
|---|---|
| 小五 劉方睿 | 宋雅筠 |
| 小五 黃翊祐 | 楊惟婷 |
| 小五 蘇庭萱 | |
| 小五 陳柏澔 | |
| 小六 吳建霆 | |

關鍵詞：面面俱到、幾何形體、完美比例

## 摘要

本研究利用改編傳統骰子數字排列方式(兩對邊總和為 7)等 30 顆骰子，設法排組一個幾何形體使其每一面的總和都相同，此稱「面面俱到」。研究發現幾何形體「面面俱到」成立的條件受限於每面出現的數字數量與隱藏面數字總和，即便是相同顆數的骰子也會因形體組合的方式不同，使每面「面面俱到」總和與成功組數不同。我們提出兩大研究定理【定理一：若干個立方體單位骰子，以內藏總和最大值與最小值估算「面面俱到」總和範圍】、【定理二：若干個立方體單位骰子，以幾何形體的鄰面數可算出內藏總和最大值與最小值的範圍】可完美詮釋各種幾何形體「面面俱到」的總和範圍，並解釋使用最多顆數的骰子能做出幾何形體之極限圖例。

## 壹、 研究動機

《數學魔術與遊戲設計》一書，第二篇第九章「面面俱到」（曾美焉、鮑正芳，2014）描述一種打破傳統骰子對邊總和為 7 的單一排列方式，讓對邊總和不為 7 的的情況下，骰子依舊填入 1~6 的數字於六個面上，可組合出三十顆不同排列方式的骰子，再利用此三十顆骰子組成一個幾何形體，並且使形體六個面點數總和相同，此時成功的幾何形體就稱「面面俱到」（見下圖 1）。

圖 1：「面面俱到」示例圖

<table>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2 顆骰子，每面總和 6</td><td>3 顆骰子，每面總和 8</td><td>4 顆骰子，每面總和 10</td></tr>
<tr><td colspan="3">補充說明：「面面俱到」意即可從六個方向（上、下面；左、右側；前、後方）分別直視幾何形體的六個面，每直視一個面其點數總和都相同。</td></tr>
</table>

這個改變很吸引我們的注意，但是我們發現書中只有提示「面面俱到」遊戲的由來和規則，卻沒有示例說明有哪些幾何形體可成功組出「面面俱到」，也沒有解釋每個幾何形體「面面俱到」可以組合而成的總和，這讓我們有股力量想完整補充書中沒有提及但很重要的部分，所以我們決定以此書給我們的啟發作為今年的研究主題。本學期數學課本第五單元有介紹正方體相鄰邊與對邊的關係，如果能結合此觀念進行「面面俱到」骰子選取和計算骰子總和，或許可以有效解決我們的疑問，於是我們擬由『能成功做出「面面俱到」的幾何形體特徵』和『計算幾何形體「面面俱到」的總和』兩大主軸為研究的方向，希望我們能找出優於書中的創見和大家分享。

## 貳、 研究目的

一、 從前導研究的發現來探討三顆骰子到五顆骰子幾何形體的「面面俱到」和其總和。

二、 再探四顆、五顆骰子立體幾何形體的「面面俱到」和其總和。

三、 分析、推論若干顆骰子可成功「面面俱到」的平面、立體幾何形體與其總和。

## 參、 研究器材與遊戲規則

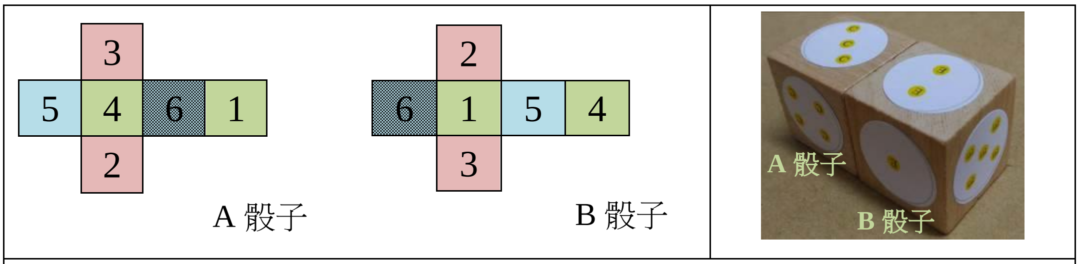
一、 研究器材：

(一) 三十顆 2.5cm×2.5cm×2.5cm 的正立方體原木色木塊。

(二) 2 cm 圓形標籤貼紙數張。

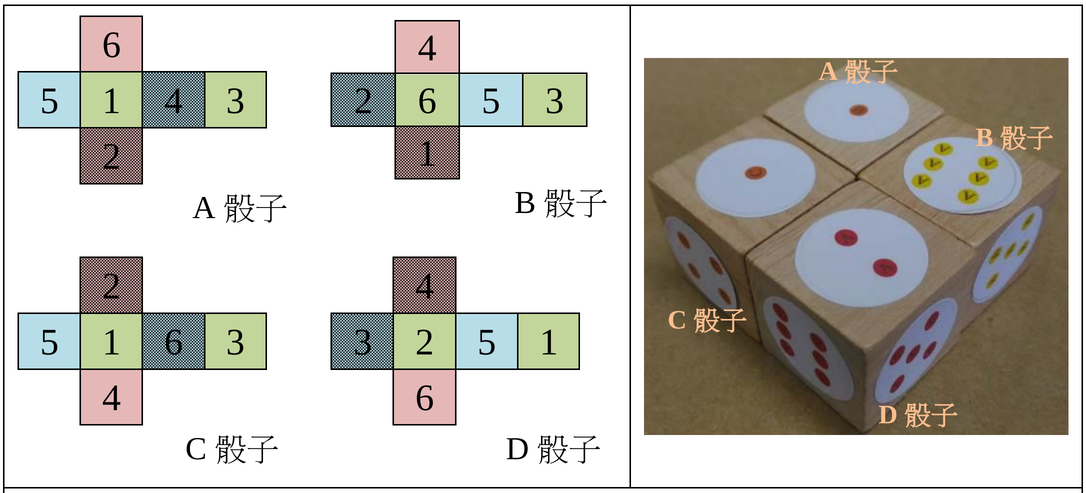
二、 遊戲規則：由骰子組成某個幾何形體，**<u>此六面數字點數總和皆相同</u>**，六個面分別指幾何形體的上下面（以淺紅顏色表示之）、左右側（以淺藍顏色表示之）、前後方（以淺綠色表示之），我們以兩顆骰子、四顆骰子「面面俱到」為例說明：

圖 2：兩顆骰子「面面俱到」示例圖




1. 此兩顆骰子組成長柱形「面面俱到」，每面點數總和皆為 5。例：A 骰子前面數字 4 加 B 骰子前面點數 1 等於總和 5；A 骰子上方數字 3 加 B 骰子上方點數 2 等於總和 5；B 骰子右側單面點數總和 5，以此類推。
2. 因連接而導致看不到的面我們以網狀格線（即為點數 6 的該面）表示之。

圖 3：四顆骰子「面面俱到」示例圖




1. 此四顆骰子組成正方形「面面俱到」，每面點數總和皆為 10。例：A 骰子前面數字 1 加 B 骰子前面點數 6 加 C 骰子前面點數 1 加 D 骰子前面點數 2 等於總和 10；C 骰子下方數字 4 加 D 骰子下方點數 6 等於總和 10；B 骰子右側點數 5 加 D 骰子右側點數 5 等於總和 10，以此類推。
2. 因連接而導致看不到的面我們以網狀格線表示之（即為 A 骰子點數 4 和 2、B 骰子點數 2 和 1、C 骰子點數 6 和 2、D 骰子點數 4 和 3）。

## 肆、 名詞定義

一、 骰子幾何形體的總和數值，以符號S表示，最大總和簡稱Smax、最小值簡稱Smin。

二、 因連接而導致看不到的面稱為內藏面，如下圖4紅色箭頭所示，其內藏面總和以符號S’表示，最大內藏總和簡稱S’max、最小值簡稱S’min。

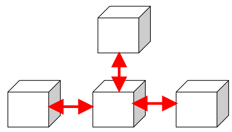


圖 4：內藏面說明

三、 完美比例組數：可做出的「面面俱到」組數，(全部骰子數)÷(一組幾何形體骰子數)。

四、 為方便記錄與說明，我們將三十顆骰子依序編碼。如骰子點數1對面是點數2，剩餘四數的排列方式為3456，我們以1-2A表示；若骰子點數1對面是點數3，剩餘四數的排列方式為2465，我們以1-3B表示，其餘以此類推。

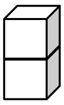
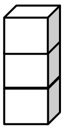
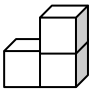
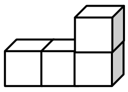
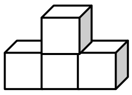
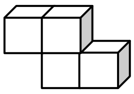
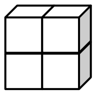
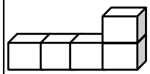
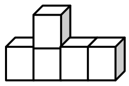
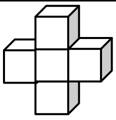
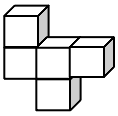
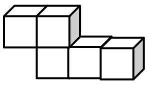
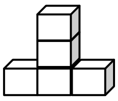
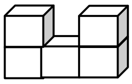
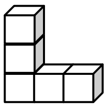
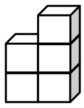
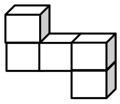
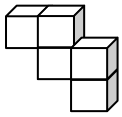
表1：30顆骰子命名示意圖

| | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1-2 | 3456 | 3465 | 3546 | 3564 | 3645 | 3654 |
| 1-3 | 2456 | 2465 | 2546 | 2564 | 2645 | 2654 |
| 1-4 | 2356 | 2365 | 2536 | 2563 | 2635 | 2653 |
| 1-5 | 2346 | 2364 | 2436 | 2463 | 2634 | 2643 |
| 1-6 | 2345 | 2354 | 2435 | 2453 | 2534 | 2543 |

五、 以骰子數命名幾何形體，兩顆骰子稱為二連塊、三顆骰子為三連塊…，以此類推。

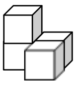
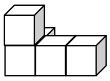
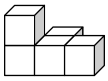
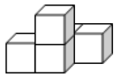
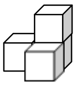
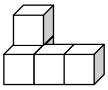
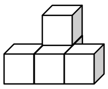
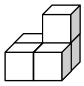
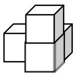
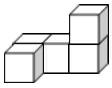
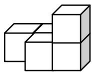
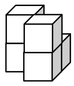
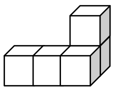
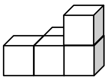
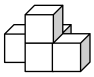
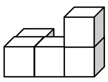
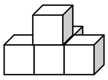
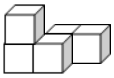
(一) 二維幾何形體的各式連塊，以形似英文字母為命名的方式。

圖5：二維形體命名示意圖

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 2I | 3I | 3L | 4L | 4T | 4N | 4Q | 5L | 5Y |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 5X | 5F | 5N | 5T | 5U | 5V | 5P | 5Z | 5W |

(二) 三維幾何形體的各式連塊，以底座二維幾何的形似再依序命名編號。

圖6：三維形體命名示意圖

| 編號 | 圖例 | 編號 | 圖例 | 編號 | 圖例 | 編號 | 圖例 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4L底ㄅ |  | 5L 底ㄇ |  | 5T 底ㄇ |  | 5N 底ㄈ |  |
| 4L底ㄆ |  | 5L 底ㄈ |  | 5T 底ㄈ |  | 5P 底ㄅ |  |
| 4L底ㄇ |  | 5L 底ㄉ |  | 5N 底ㄅ |  | 5W 底ㄅ |  |
| 5L底ㄅ |  | 5T 底ㄅ |  | 5N 底ㄆ |  | | |
| 5L 底ㄆ |  | 5T 底ㄆ |  | 5N 底ㄇ |  | | |

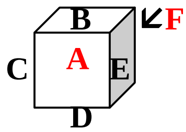
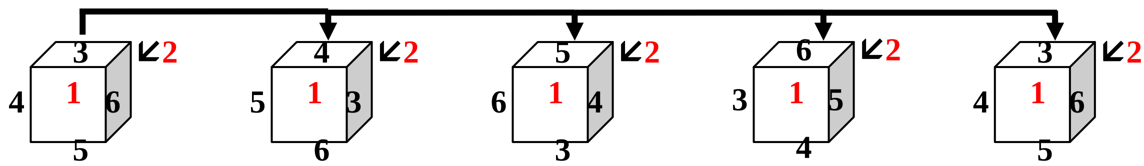
## 伍、 前導研究

一、 文獻探討：

(一) 我們以關鍵字「面面俱到」、「骰子」、書名、作者等，透過網路資訊力量，交叉搜尋與本研究相關的主題內容或研究發現等，我們只找到中華民國第 49 屆中小學科展國中組數學科佳作作品『面面俱到—n 邊形之面積最大、極小值』，但其研究內容以三角形的『邊長關係』、『全等性質』、『面積公式』等方向推測 n 邊形給定邊長之最大面積公式。此件作品與本研究主旨差異甚大，我們並無所獲，這也暗示在無前人研究的貢獻下，我們將邁開艱辛卻又別具意義的一步。

(二) 曾美焉、鮑正芳（2014）在《數學魔術與遊戲設計》一書中談及改變傳統骰子的排列方式，可以形成新的三十顆不同排列方式的骰子，書中並沒有針對此點多做解釋，不由得引發我們思考其中變化的原則是什麼。透過相關文獻的閱讀，我們在中華民國第 53 屆中小學科展國中組數學科《平鋪圖形填數遊戲研究：鏡射交換，「翻」陳出新》作品有看到「小正三角形填數之環狀排列策略」，這協助我們理解與說明為什麼「面面俱到」遊戲只有三十顆骰子的重要依據。

圖 7：三十顆骰子由來說明圖

<table>
<tr>
<td>先填入 A-F 對面位置，分別有 5 種數字選擇 1-2、1-3、1-4、1-5、1-6，剩下 4 個位置 B、C、D、E 有 $4×3×2×1=24$ 種數字填入可能，但將旋轉後仍然相同的圖形視為同一種，所以當 A-F 固定不動，B、C、D、E 經旋轉 4 次的環狀排列都相同（例 A-F 對面位置是 1-2，剩餘四數的排列 3456 和 4563 和 5634 和 6345 都是依序旋轉 $90^0$ 的排列結果），因此四數排列應是 $24÷4=6$ 種，全部共 $5×4×3×2×1÷4=30$ 種。</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">順時針旋轉 $90^0$ 順時針旋轉 $90^0$ 順時針旋轉 $90^0$ 順時針旋轉 $90^0$<br>
</td>
</tr>
</table>

(三) 為了更清楚掌握立體幾何形體的變化以便完整研究、分析二維圖形與三維幾何形體「面面俱到」總和的差異，我們發現中華民國第 55 屆中小學科展國中組數學科最佳（鄉土）教材獎作品《*索瑪*頻道**—**索瑪立方塊的研究與探討》，其中作者繪製五連塊立體索瑪圖形與我們五顆骰子立體幾何形體的拼組有雷同之處。此件作品指出以四 L 連塊為基底往上延伸一塊的立體圖形有 8 種，但經我們組合、分析後發現，**<u>實則只有五種</u>**（即為本研究所提出的 5L 底ㄅ、5L 底ㄆ、5L 底ㄇ、5L 底ㄈ、5L 底ㄉ）；以四 N 連塊為基底往上延伸一塊的立體圖形有 8 種，經我們實際組合、分析後發現**<u>只有四種</u>**（即為本研究所提出的 5N 底ㄅ、5N 底ㄆ、5N 底ㄇ、5N 底ㄈ）；以四田連塊為基底往上延伸一塊的立體圖形有 2 種，**<u>實則只有一種</u>**（即為本研究所提出的 5P 底ㄅ）；由此可知，《*索瑪*頻道**—**索瑪立

方塊的研究與探討》重複計算不同類型旋轉卻相同的圖形，導致圖形分類問題較繁瑣、較難分析使研究結論一般化；我們因考慮圖形會旋轉與翻轉因素，刪除了重複相同的圖形，所以我們的圖形分類也較此件作品完整(如下圖 8 所示)。

圖 8：『*索瑪*頻道─索瑪立方塊的研究與探討』重複計算不同類型旋轉卻相同的圖形示例說明


*＊資料來源：中華民國第 55 屆中小學科展國中組數學科作品《**索瑪**頻道─索瑪立方塊的研究與探討》*

二、 2 顆骰子「面面俱到」試探性研究：

(一) 二顆骰子只有一種組合形體稱 2I。我們猜想 2I「面面俱到」每面總和應該可以做出 2、3、4、5、6，但是當我們實作時發現了一個問題：**<u>總和值越小，面面俱到」成功率越低</u>**，因為如果 2I「面面俱到」每面總和 2，除了內藏面之外，每面數字都必須低於 2，但是兩顆骰子的數字 1、2 加起來只有四個，但扣除內藏面兩個數字，點數 1、2 此 4 個數字無法填滿其餘十個面，因此無法成功做出「面面俱到」。我們得到一個很大的前導研究結論：**<u>總和數值有其範圍性</u>**。

(二) 我們以點數的『數量』來逐一討論總和 3、4、5、6「面面俱到」的可能性：

1. 2I「面面俱到」總和 3 不能成功：除了內藏面之外，每面數字都必須低於 3，但是兩顆骰子的數字 1、2、3 加起來只有六個，但扣除內藏面兩個數字，點數 1、2、3 此 6 個數字無法填滿其餘十個面，因此無法成功做出「面面俱到」。
2. 2I「面面俱到」總和 4 不能成功：點數 5 和 6 都比「面面俱到」總和 4 大，但內藏面只有兩面，不能將兩顆骰子共四個大於 4 的點數 5 和 6 放入內藏面。
3. 2I「面面俱到」總和 5 可以成功：因為點數 6 比「面面俱到」總和 5 大，恰好內藏面只有兩面，可以將兩顆骰子共 2 個大於 5 的點數 6 放入內藏面。
4. 2I「面面俱到」總和 6 可以成功：每個點數都比「面面俱到」總和 6 小，恰好左右兩側面只有一個面，所以必須將兩顆骰子的點數 6 固定於此，其餘五數都可以兩兩配對使其總和為 6。

(三) 本遊戲有三十顆骰子可供選擇，我們猜想以 2I「面面俱到」兩顆骰子而論，應能同時做出 15 組的 2I「面面俱到」。但是實地操作後發現 **<u>2I「面面俱到」總和 5 只有唯一性的 1 組</u>**（下圖 9）、**<u>總和 6 有 13 組</u>**（下圖 10），都無法達到預設的完美比例組數。於是可知：**<u>同一個幾何形體但不同「面面俱到」的總和，並非全都可以做到完美比例的組數</u>**。

圖 9： 2 顆骰子 2I 形體總和 5 之 1 組紀錄

| 2I S=5 | 編碼 | 圖例 |
|---|---|---|
| 第 1 組 | 1-4C \| 1-4E |  |

圖 10： 2 顆骰子 2I 形體總和 6 之 13 組紀錄

| 2I S=6 | 第 1 組 | 第 2 組 | 第 3 組 | 第 4 組 | 第 5 組 |
|---|---|---|---|---|---|
| 骰子圖 |  |  |  |  |  |
| 圖例編碼 | 1-2A 1-3D | 1-2C 1-6C | 1-2E 1-6E | 1-2F 1-3B | 1-3A 1-4D |
| 2I S=6 | 第 6 組 | 第 7 組 | 第 8 組 | 第 9 組 | 第 10 組 |
| 骰子圖 |  |  |  |  |  |
| 圖例編碼 | 1-3C 1-6A | 1-3E 1-6F | 1-3F 1-4B | 1-4C 1-6D | 1-4E 1-6B |
| 2I S=6 | 第 11 組 | 第 12 組 | 第 13 組 | | |
| 骰子圖 |  |  |  | | |
| 圖例編碼 | 1-5A 1-5F | 1-5B 1-5C | 1-5 E 1-5D | | |

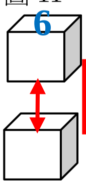
1. 2I「面面俱到」總和 5 唯一性之 1 組，因為總和 5 的內藏面必須放最大點數 6，因此要選擇點數 6 對邊是點數 5 的骰子，經比較後只有 6 顆骰子（1-2C、1-3C、1-4C、1-2E、1-3E、1-4E），仔細配對後只有一組可以成功（見下表 2）。

表 2： 2 顆骰子比對總和 5 之記錄

| | 1-2C | 1-3C | 1-4C | 1-2E | 1-3E | 1-4E |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1-2C | | | | | | |
| 1-3C | × | | | | | |
| 1-4C | × | × | | | | |
| 1-2E | × | × | × | | | |
| 1-3E | × | × | × | × | | |
| 1-4E | × | × | ✓ | × | × | |

2. 2I「面面俱到」總和 6 只做出 13 組（見下圖 11）：

圖 11：2I 總和 6 其內藏組合分析圖




2I 總和 6 內藏和為 6，內藏面的點數組合有 1＋5、2＋4、3＋3 等三種。

(1) 骰子選取配對必須**點數 6 對邊點數 1＋點數 5 對邊點數 6**：(1-6A、1-6B、1-6C、1-6D、1-6E、1-6F 等 6 顆骰子) ＋ (1-2C、1-2E、1-3C、1-3E、1-4C、1-4E 等 6 顆骰子) ＝共有 6 組骰子組合。

(2) 骰子選取配對必須**點數 6 對邊點數 2＋點數 4 對邊點數 6**：(1-3B、1-3D、1-4B、1-4D、1-5B、1-5D 等 6 顆骰子) ＋(1-2A、1-2F、1-3A、1-3F、1-5C、1-5E 等 6 顆骰子) ＝共有 6 組骰子組合。

(3) 骰子選取配對必須**點數 6 對邊點數 3＋點數 3 對邊點數 6**：(1-2B、1-2D、1-4A、1-4F、1-5A、1-5F 等 6 顆骰子)，配對後只有 1-5A＋1-5F 可成功。

(4) 由上述可知，**2I「面面俱到」總和 6 只做出 6＋6＋1＝13 組**。

表 3： 2 顆骰子總和範圍與組數統計

| 總和 | 同時做出的組數 |
|---|---|
| 2I「面面俱到」總和 5 | 1 |
| 2I「面面俱到」總和 6 | 13 |

(四) 綜合前導研究所發現**以點數的『數量』討論「面面俱到」總和**，我們提出一個策略：**從內藏總和來分析「面面俱到」總和的範圍**，以下圖 12 說明：

圖 12：「面面俱到」總和規律分析表

設三十顆骰子依序為 $A_1$、$A_2$、$A_3$、$A_4$、$A_5$……$A_{30}$

$A_1$ 六面點數和➪$A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14}+A_{15}+A_{16}=21$

$A_2$ 六面點數和➪$A_{21}+A_{22}+A_{23}+A_{24}+A_{25}+A_{26}=21$

$A_3$ 六面點數和➪ $A_{31}+A_{32}+A_{33}+A_{34}+A_{35}+A_{36}=21$

……

$A_n$ 六面點數和➪$A_{n1}+A_{n2}+A_{n3}+A_{n4}+A_{n5}+A_{n6}=21$

**令 n 顆骰子所組合而成的幾何形體「面面俱到」總和為 S 值**

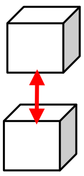
**可得（n 顆骰子六面點數和）－（「面面俱到」總和 × 6 個面）＝內藏面總和**

**$n\times 21-S\times 6=S'$ ➪【主要定理一】**

例：2I「面面俱到」總和 4，n＝2、S＝4 代入本式➪（2×21－4×6）＝18

∴ 2 ≦ 2I「面面俱到」S’ ≦ 12

2I「面面俱到」總和 4 之 S’＝18　　18＞S’max 12　故無法成立



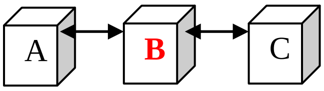
上下兩面可藏最小點數 1 和最大點數 6，內藏總和範圍 2~12。

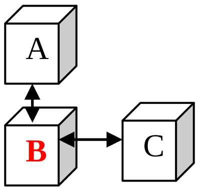
## 陸、 研究過程與方法

### 研究目的一、從前導研究的發現來探討三顆骰子到五顆骰子幾何形體的「面面俱到」和其總和。

一、 三顆骰子組合而成的三連塊有兩種形體的拼組方式：3I 和 3L。從前導研究得知，三顆骰子「面面俱到」總和有其範圍性，我們以【主要定理一】**n × 21－S × 6＝S'**，計算出 3I 和 3L「面面俱到」總和的範圍，請見下圖 13。

圖 13：3 顆骰子內藏點數分析圖




(一) 3 顆骰子內藏總和一共需要藏 4 面，其中 B 骰子會藏兩個數字，因此最小內藏總和 1+(1+2)+1＝5；最大內藏總和 6+(6+5)+6＝23，故可推知 3 連塊內藏總和範圍介於 5~23。

1. 3I「面面俱到」最大總和 6，n＝3、S＝6 代入本式⇨（3×21－6×6）＝27

∴ 5 ≦ 3I「面面俱到」S' ≦ 23

另 3I「面面俱到」總和 6 之 S'＝27　　27＞S'max 23　故無法成立

表 4：3I「面面俱到」總和分析圖

| n＝3 代入本式⇨（3×21－S×6）＝S' | | | |
|---|---|---|---|
| S | 6 | 5 | 4 |
| S' | 27 | 33 | 39 |
| S'＞S'max 23　故無法成立 | | | |

**由此表可知 3I 無法成功做出「面面俱到」**

2. 3L「面面俱到」總和範圍之分析說明（下表 5）：

表 5：3L「面面俱到」總和分析圖

| n＝3 代入本式⇨（3×21－S×6）＝S' | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| S | 11 | 10 | 9 | 8 | 7 | 6 |
| S' | -3 | 3 | 9 | 15 | 21 | 27 |
| S' 3＞S'min 5　故無法成立 | | | 介於 5 ≦ 3L 之 S' ≦ 23<br>故可做出「面面俱到」 | | | S'27＞S' max 23<br>故無法成立 |

**由此表可知 3L「面面俱到」總和可做出 7、8、9，三種類型**

(二) 從內藏總和的關係中，我們意外觀察到內藏數其實有其規律性。如果某一幾何形體的骰子隱藏 2 個數以上，最大隱藏的數為 6+5；最小隱藏的數是 1+2；以此類推，若該骰子隱藏 3 個數以上，最大隱藏的數為 6+5+4；最小隱藏的數是 1+2+3，所以我們歸納整理出本研究第二個主要定理：

**主要定理二:以圖形的鄰面數(又稱內藏面數)可歸納出內藏總和數值大小範圍。**

**若 1 鄰面有 a 個、2 鄰面有 b 個、3 鄰面有 c 個、4 鄰面有 d 個**

$$S'_{min}=1\times a+(1+2)\times b+(1+2+3)\times c+(1+2+3+4)\times d$$

$$S'_{max}=6\times a+(6+5)\times b+(6+5+4)\times c+(6+5+4+3)\times d$$

二、 經過我們實作，3L 總和 8、9 有 10 組，3L 總和 7 做出 8 組，如下表 6、圖 14 所示。

表 6： 3 顆骰子 3L 幾何形體總和範圍與組數統計

| 總和 | 同時做出的組數 |
|---|---|
| 3L「面面俱到」總和 7 | 8 |
| 3L「面面俱到」總和 8 | 10 |
| 3L「面面俱到」總和 9 | 10 |

圖 14：3 顆骰子 3L 幾何形體總和 7、8、9 記錄（詳實記錄請見現場資料展示）

| 3L S＝7 | 第 1 組 | 第 2 組 | 第 3 組 | 第 4 組 | 第 5 組 |
|---|---|---|---|---|---|
| 骰子圖 |  |  |  |  |  |
| 圖例編碼 | 1-3C<br>1-4F 1-6C | 1-3E<br>1-4A 1-6E | 1-2A<br>1-5F 1-5E | 1-2F<br>1-5A 1-5C | 1-3A<br>1-2B 1-6B |
| 3L S＝7 | 第 6 組 | 第 7 組 | 第 8 組 | | |
| 骰子圖 |  |  |  | | |
| 圖例編碼 | 1-3F<br>1-2D 1-6D | 1-3B<br>1-5D 1-2C | 1-3D<br>1-5B 1-2E | | |
| 3L S＝8 | 第 1 組 | 第 2 組 | 第 3 組 | 第 4 組 | 第 5 組 |
| 骰子圖 |  |  |  |  |  |
| 圖例編碼 | 1-5D<br>1-6C 1-2E | 1-5F<br>1-3C 1-5A | 1-4B<br>1-4D 1-2F | 1-2A<br>1-2B 1-5E | 1-5B<br>1-3E 1-6A |

| 3L S＝8 | 第 6 組 | 第 7 組 | 第 8 組 | 第 9 組 | 第 10 組 |
|---|---|---|---|---|---|
| 骰子圖 |  |  |  |  |  |
| 圖例編碼 | 1-4F<br>1-3A 1-6E | 1-3B<br>1-4E 1-6F | 1-2C<br>1-4A 1-3D | 1-2D<br>1-6B 1-5C | 1-4C<br>1-6D 1-3F |
| 3L S＝9 | 第 1 組 | 第 2 組 | 第 3 組 | 第 4 組 | 第 5 組 |
| 骰子圖 |  |  |  |  |  |
| 圖例編碼 | 1-6A<br>1-5D 1-2D | 1-6F<br>1-5B 1-2B | 1-3B<br>1-6E 1-4F | 1-3D<br>1-6C 1-4A | 1-3A<br>1-4C 1-3C |
| 3L S＝9 | 第 6 組 | 第 7 組 | 第 8 組 | 第 9 組 | 第 10 組 |
| 骰子圖 |  |  |  |  |  |
| 圖例編碼 | 1-3F<br>1-4E 1-3E | 1-2C<br>1-5F 1-5E | 1-2E<br>1-5A 1-5C | 1-6D<br>1-4D 1-2A | 1-6B<br>1-4B 1-2F |

(一) 探討 3L「面面俱到」總和 7 只做出 8 組的原因：骰子 1-5B、1-5D 和 1-6B、1-6D 必須搭配 1-2 和 1-3 等十二顆骰子（但 1-5B、1-5D 尚有另一種配對，可選擇 1-2 與 1-4 等十二顆骰子，如紅色區域標示）；骰子 1-4ABCDEF 也需和 1-3ABCDEF 配對方可成功；最後會只剩 1-5 還有兩顆骰子，1-6 有四顆骰子，而 1-5 和 1-6 必須和 1-2 與 1-3 配對才可以順利「面面俱到」，但 1-2 與 1-3 全部骰子已經配對完畢，所以 3L「面面俱到」總和 7 最多只能作出 8 組非 10 組。

表 7：3L 總和 7 組數無法完美比例原因分析

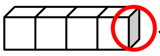
| 前 | 後 | 編碼 |
|---|---|---|
| 3<br>1 3 | 4<br>1 2 | 1-6B(D)<br>1-2 1-3 |
| 前 | 後 | 編碼 |
| 3<br>1 3 | 4<br>1 2 | 1-5B(D)<br>1-2 1-3 |
| **前** | **後** | **編碼** |
| **1**<br>**2 4** | **5**<br>**1 1** | **1-5B(D)**<br>**1-2 1-4** |

| 3L 總和 7 骰子配對情形 | | | 組數 | 備註 |
|---|---|---|---|---|
| 1-5B | 1-2 | 1-4 | 1 組 | 1-2 已用 4 顆<br>1-3 已用 2 顆<br>1-4 已用 2 顆<br>1-5 已用 2 顆<br>1-6 已用 2 顆 |
| 1-5D | 1-2 | 1-4 | 1 組 | |
| 1-6B | 1-2 | 1-3 | 1 組 | |
| 1-6D | 1-2 | 1-3 | 1 組 | |
| 1-5 ACEF | 1-2 | 1-3 | 1 組 | **1-2 已用 6 顆**<br>1-3 已用 4 顆<br>1-5 已用 4 顆 |
| 1-5CEF | 1-2 | 1-3 | 1 組 | |
| 1-4 | 1-4 | 1-3 | 1 組 | **1-3 已用 6 顆** |
| 1-4 | 1-4 | 1-3 | 1 組 | **1-4 已用 6 顆** |

(二) 我們發現當圖形可做出的**「面面俱到」總和越大，其組數也相對越多，如總和 8、9 可做出完美比例的 10 組**。

三、 $\boxed{\text{四顆骰子}}$有五種幾何形體：4I、4L、4T、4N 和 4Q，由 3I 研究結果可得知，3I 圖形無法做出「面面俱到」的總和，同理可證 4I 圖形也無法成功（下圖 15）。

圖 15：4 顆骰子 4I 內藏點數分析圖



每面總和最大值為 6，以主要定理一計算 S’＝ 4×21－6×6＝48。

利用主要定理二計算內藏總和範圍：

S’min＝1 ×2＋(1＋2) ×2＝8　　S’max＝6 ×2＋(6＋5) ×2＝34

∴8≦ S’ ≦34　　另 S’＝48　48> S’max34　故無法成立

結合主要定理一和定理二，分析 4L、4T、4N 和 4Q 的 S 數值，以下表 8 所示（四連塊四種圖形「面面俱到」成功圖例等詳實記錄，請見現場資料展示）。

表 8：四連塊骰子總和關係統整表

| 圖形 | 內藏面關係 | S’min 與 S’max 的範圍計算 | S 範圍計算 | S 範圍 | S 實際範圍 |
|---|---|---|---|---|---|
| 4L | 1 鄰面×2<br>2 鄰面×2 | S’min＝1×2＋(1＋2) ×2＝8<br>S’max＝6×2＋(6＋5) ×2＝34 | 8≦21×4－6×S≦34 | 9≦S≦12 | 9≦S≦**11** |
| 4N | 1 鄰面×2<br>2 鄰面×2 | S’min＝1×2＋(1＋2) ×2＝8<br>S’max＝6×2＋(6＋5) ×2＝34 | 8≦21×4－6×S≦34 | 9≦S≦12 | 9≦S≦12 |
| 4T | 1 鄰面×3<br>3 鄰面×1 | S’min＝1×3＋(1＋2＋3) ×1＝9<br>S’max＝6×3＋(6＋5＋4)×1＝33 | 9≦21×4－6×S≦33 | 9≦S≦12 | 9≦S≦**11** |
| 4Q | 2 鄰面×4 | S’min＝(1＋2) ×4＝12<br>S’max＝(6＋5) ×4＝44 | 12≦21×4－6×S≦44 | 7≦S≦12 | 7≦S≦**11** |

(一) 我們從實作中觀察並分析四連塊「面面俱到」總和範圍與完美比例組數的差異：

表 9：四連塊骰子總和、組數分析一覽表

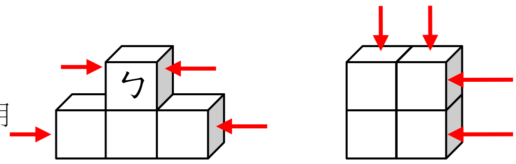
| 類型 | case I | | | case II | | | case III | | | case IV | | | case V | | | case VI | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 圖形 | S | 組數 | S’ | S | 組數 | S’ | S | 組數 | S’ | S | 組數 | S’ | S | 組數 | S’ | S | 組數 | S’ |
| 4L | 12 | | 12 | 11 | 6 | 18 | 10 | 7 | 24 | 9 | 6 | 30 | 8 | | 36 | 7 | | 42 |
| 4N | | **4** | | | 7 | | | 7 | | | 6 | | | | | | | |
| 4T | | | | | 6 | | | 7 | | | 6 | | | | | | | |
| 4Q | | | | | 4 | | | 7 | | | 6 | | | **4** | | | **3** | |

＊斜線表示該圖形「面面俱到」總和無法成立，並非指成功組數 0 組

1. 由算式的估算中，4L、4N、4T、4Q「面面俱到」最大總和是 12，但實際只

有 4N 圖形可成功，原因是 4L、4T 左右兩面各需兩個點數加總為 12，點數配對情形只有 6+6，以 4T 圖形ㄅ骰子為例，需選擇點數 6 對邊是點數 6 的骰子，但一顆骰子只有一個點數 6，所以 4T 總和 12 無法成功，同理可說明 4L 無法成功的原因。

圖 16：4L、4T、4Q 總和 12 無法成功圖示說明




而 4Q 每面皆需兩個點數加總為 12，以點數配對情形只有 6+6，所以每邊兩個數字都要點數 6，意即需要八個點數 6，可是只有四顆骰子四個點數 6，所以 4Q 總和 12 不可能。

2. 四連塊「面面俱到」總和越大，成功組數相對較多，如「面面俱到」總和 10 的組數較總和 9 為多；意即，「面面俱到」總和越小，組數會漸減。

(二) 一組四連塊「面面俱到」只用 4 顆骰子，三十顆骰子可同時做出七組「面面俱到」，此稱為『組數的完美比例』。但從上表可知，有多個「面面俱到」總和無法達到完美比例的 7 組，我們從中找到原因並解釋詳實。

1. 說明：**4L 與 4T「面面俱到」總和 11 只做出 6 組**（上圖 16）。4T 左右兩面各需兩個點數加總為 11，以點數配對情形只有 5+6。以ㄅ骰子為例，只可選擇點數 5 對邊是點數 6 的骰子 1-2C、1-2E、1-3C、1-3C、1-4C、1-4E 此六顆，所以 4T「面面俱到」總和 11 只能做出 6 組，同理說明 4L 也只能做出 6 組。

2. 說明：**4Q「面面俱到」總和 7 只做出 3 組**。

(1) 4 個骰子加總使總和為 7 的算法有 3 種，分別是 4+1+1+1、2+2+2+1、1+1+2+3。若一面採用 4+1+1+1，另一面只能使用 2+2+2+1，因為若採用 1+1+2+3，則需要五個 1，但 4Q 只有四顆骰子，最多只能用四個 1。但 4+1+1+1 配 2+2+2+1，只能做出 2 組，因這樣需要 3 個 1-2 和 1 個 1-4，但 1-2 只有 6 顆，所以 4+1+1+1 配 2+2+2+1 只做出 2 組（見下圖 17）。

圖 17：4+1+1+1 配 2+2+2+1 關係

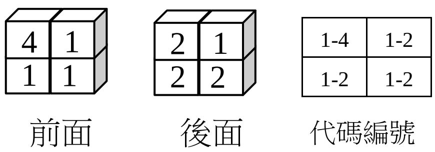



圖 18：2+2+2+配 1+1+2+3 關係

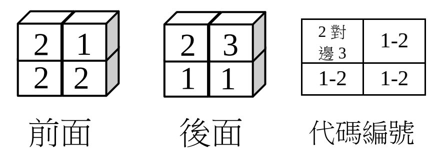
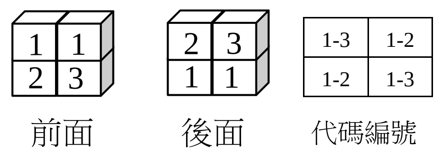



圖 19：1+1+2+3 配 1+1+2+3 關係



(2) 若 2+2+2+1 配 1+1+2+3，則需要 1 顆數字 2 對邊是數字 3 的骰子、3 顆數字 1 對邊是數字 2 的骰子，但 1-2 關係的骰子只有 6 顆，因此 2+2+2+配 1+1+2+3 只做出 2 組（見上圖 18）。

(3) 若 1+1+2+3 配 1+1+2+3 只能做出 3 組，因為每一組都需要 2 顆 1-2 骰子和 2 顆 1-3 骰子（見上圖 19）。

四、 **五顆骰子**二維幾何形體共有 12 種組合方式，去除不可能成功組成「面面俱到」的 5I 圖形，再結合主要定理一和定理二的計算與應用，我們一共討論 11 種圖形。

表 10：五連塊骰子總和關係統整表

| 編號 | 圖形代表 | 鄰邊關係 | 圖形特徵或限制 | S'min 與 S'max | S 推算範圍 | S 實際範圍 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 5L | 1 鄰面×2<br>2 鄰面×3 | 圖形高度兩層<br>兩層骰子數 1+4 | S'min＝1×2＋(1＋2) ×3＝11<br>S'max＝6×2＋(6＋5) ×3＝45<br>11≦21×5－6×S≦45 | 10≦S≦15 | S＝**11** |
| 2 | 5N | 1 鄰面×2<br>2 鄰面×3 | 圖形高度兩層<br>兩層骰子數 2+3 | S'min＝1×2＋(1＋2) ×3＝11<br>S'max＝6×2＋(6＋5) ×3＝45<br>11≦21×5－6×S≦45 | 10≦S≦15 | **11**≦S≦**12** |
| 3 | 5V、5Z | 1 鄰面×2<br>2 鄰面×3 | 圖形高度三層<br>三層骰子數 1+1+3 | S'min＝1×2＋(1＋2) ×3＝11<br>S'max＝6×2＋(6＋5) ×3＝45<br>11≦21×5－6×S≦45 | 10≦S≦15 | 10≦S≦15 |
| 4 | 5W | 1 鄰面×2<br>2 鄰面×3 | 圖形高度三層<br>三層骰子數 1+2+2 | S'min＝1×2＋(1＋2) ×3＝11<br>S'max＝6×2＋(6＋5) ×3＝45<br>11≦21×5－6×S≦45 | 10≦S≦15 | 10≦S≦15 |
| 5 | 5P | 1 鄰面×1<br>2 鄰面×3<br>3 鄰面×1 | 圖形高度兩層<br>兩層骰子數 2+3 | S'min＝1×1＋(1＋2) ×3＋(1＋2＋3) ×1＝16<br>S'max＝6×1＋(6＋5) ×3＋(6＋5＋4) ×1＝54<br>16≦21×5－6×S≦54 | 9≦S≦14 | 9≦S≦**12** |
| 6 | 5Y | 1 鄰面×3<br>2 鄰面×1<br>3 鄰面×1 | 圖形高度兩層<br>兩層骰子數 1+4 | S'min＝1×3＋(1＋2) ×1＋(1＋2＋3) ×1＝12<br>S'max＝6×3＋(6＋5) ×1＋(6＋5＋4) ×1＝44<br>12≦21×5－6×S≦44 | 11≦S≦15 | S＝**11** |
| 7 | 5T、5F | 1 鄰面×3<br>2 鄰面×1<br>3 鄰面×1 | 圖形高度三層<br>三層骰子數 1+1+3 | S'min＝1×3＋(1＋2) ×1＋(1＋2＋3) ×1＝12<br>S'max＝6×3＋(6＋5) ×1＋(6＋5＋4) ×1＝44<br>12≦21×5－6×S≦44 | 11≦S≦15 | 11≦S≦15 |
| 8 | 5X | 1 鄰面×4<br>4 鄰面×1 | 圖形高度三層<br>三層骰子數 1+1+3 | S'min＝1×4＋(1＋2＋3＋4) ×1＝14<br>S'max＝6×4＋(6＋5＋4＋3) ×1＝42<br>14≦21×5－6×S≦42 | 11≦S≦15 | 11≦S≦15 |
| 9 | 5U | 2 鄰面×5 | 圖形高度兩層<br>兩層骰子數 2+3 | S'min＝(1＋2) ×5＝15<br>S'max＝(6＋5) ×5＝55<br>15≦21×5－6×S≦55 | 9≦S≦15 | 9≦S≦**12** |

(一) 我們從實作中觀察並分析五連塊「面面俱到」總和範圍與完美比例組數的差異：

表 11：五連塊骰子總和、組數分析一覽表

| 類型 | case Ⅰ | | | case Ⅱ | | | case Ⅲ | | | case Ⅳ | | | case Ⅴ | | | case Ⅵ | | | case Ⅶ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 圖形 | S | 組數 | S’ | S | 組數 | S’ | S | 組數 | S’ | S | 組數 | S’ | S | 組數 | S’ | S | 組數 | S’ | S | 組數 | S’ |
| 5L | | \ | | | \ | | | \ | | | \ | | | 3 | | | \ | | | \ | |
| 5N | | \ | | | \ | | | \ | | | 4 | | | 3 | | | \ | | | \ | |
| 5V | | 6 | | | 6 | | | 6 | | | 6 | | | 5 | | | 2 | | | \ | |
| 5Z | | 4 | | | 6 | | | 6 | | | 6 | | | 5 | | | 3 | | | \ | |
| 5W | | 6 | | | 6 | | | 6 | | | 6 | | | 5 | | | 3 | | | \ | |
| 5P | 15 | \ | 15 | 14 | \ | 21 | 13 | \ | 27 | 12 | 6 | 33 | 11 | 4 | 39 | 10 | 3 | 45 | 9 | 2 | 51 |
| 5Y | | \ | | | \ | | | \ | | | \ | | | 3 | | | \ | | | \ | |
| 5T | | 4 | | | 6 | | | 6 | | | 6 | | | 5 | | | \ | | | \ | |
| 5F | | 6 | | | 6 | | | 6 | | | 6 | | | 4 | | | \ | | | \ | |
| 5X | | 2 | | | 6 | | | 6 | | | 5 | | | 5 | | | \ | | | \ | |
| 5U | | \ | | | \ | | | \ | | | 6 | | | 4 | | | 3 | | | 2 | |

＊斜線表示該圖形「面面俱到」總和無法成立，並非指成功組數 0 組

1. 由算式估算的 5L、5N、5Y、5P、5U「面面俱到」最大總和與實作有差異，其中 5L 和 5Y 更是只有唯一性的一組，原因是 5-6 對邊關係骰子只有六顆，如果 5L、5Y 組數必須完美比例，每一組只能使用一顆 5-6(放置於 4+1 的 1)，但此時內藏總和最大值是 6×2+5×2+4×4=38，低於總和 11 的內藏總和 39，因此一定要放兩顆以上 5-6 對邊關係骰子，所以 5L、5Y 總和 11 只做出 3 組。
2. 5N、5P、5U「面面俱到」最大總和 12，因 5N、5P、5U 都是兩層 2+3，左右兩側只有兩面點數加總，因此「面面俱到」最大總和必須用點數 6+點數 6。

(二) 從上表我們可知五顆骰子「面面俱到」的原理原則：

1. 圖形高度只有一層(如 5I)，無法成功做出「面面俱到」。
2. 圖形高度兩層的組合類型，上層骰子若只有一顆(如 3L、4L、4T、5L、5Y 等)，每面最大總和一定是 11；上層骰子若有兩顆(如 4N、5N、5U、5P 等)，每面最大總和一定是 12。**雖然可從主要定理一和主要定理二推算幾何形體每面總和範圍，但因為圖形條件的限制，其總和範圍也會隨之調整與改變**。
3. 圖形高度三層的組合類型，其每面總和範圍皆相同，但實作後有差異。

4. 五顆骰子「面面俱到」總和範圍可分五大類：5L、5Y(S＝11)；5U、5P(9≦S≦12)；5N(11≦S≦12)；5V、5Z、5W(10≦S≦15)；5T、5F、5X(11≦S≦15)。

(三)五顆骰子「面面俱到」與四顆骰子「面面俱到」的研究發現都可得知，幾何形體「面面俱到」總和越大，其組數相對比較多，總和越趨近於最小值，其成功組數相對較少。例如五顆骰子「面面俱到」總和 14、13、12，幾乎都可達到完美比例的組數；五顆骰子「面面俱到」總和 11、10、9，組數相對遞減。

五、 我們針對三顆骰子、四顆骰子和五顆骰子的「面面俱到」，做一統整性的研究摘要。

(一)除了 2I 能做出「面面俱到」，3I、4I、5I 等幾何形體「面面俱到」皆無法成立。

(二)幾何圖形每面出現的面數會影響「面面俱到」總和的完美比例，六面數的比例越懸殊，「面面俱到」總和越不易成立。例如 4L 幾何形體，前後面四個數、上下方三個數、左右側二個數，「面面俱到」總和會侷限左右側二個數的點數加總。

(三)「面面俱到」總和數值越小，成功組數也較少；層數越高，總和數值越大越多。

(四)「面面俱到」總和數值遞增 1，內藏總和遞減 6；反之，「面面俱到」總和數值遞減 1，內藏總和遞增 6。

## 研究目的二：再探四顆、五顆骰子立體幾何形體的「面面俱到」和其總和。

六、**四顆骰子形成三維形體**必須第一層以 3L 當底，第二層增加一顆骰子才有符合條件的立體幾何形體。以內藏面數來分析，雖然 4L 底ㄅ、4L 底ㄆ和 4L 底ㄇ的內藏面數都是 6 面，但 4L 底ㄆ其中有一藏面是 3 鄰面，所以內藏總和分成兩種變化。以主要定理一和定理二【S’min≦n × 21－S × 6≦S’max】計算四顆立體骰子的總和範圍。

表 12：四顆骰子立體圖形內藏總和計算說明

| | |
|---|---|
| S’max＝6×2＋(6＋5) ×2＝34<br>S’min＝1×2＋(1＋2) ×2＝8<br>8≦21×4－6×S≦34<br>∵ $S \in Z^+$<br>-76≦-6S≦-50<br>76≧6S≧50<br>∴ 12≧S≧9 | S’max＝6×3＋(6＋5＋4) ×1＝33<br>S’min＝1×3＋(1＋2＋3) ×1＝9<br>9≦21×4－6×S≦33<br>∵ $S \in Z^+$<br>-75≦-6S≦-51<br>75≧6S≧51<br>∴ 12≧S≧9 |
| 4L 底ㄅ和 4 底 L ㄇ的骰子總和範圍 | 4L 底ㄆ的骰子總和範圍 |

(一) 經過實作，研究結果如下表 13（詳實記錄請見現場資料展示）：

表 13：四連塊骰子立體圖形總和範圍與組數統整表

| | S＝9 | S＝10 | S＝11 | S＝12 |
|---|---|---|---|---|
| 4L 底ㄅ | 7 | 7 | 7 | 7 |
| 4L 底ㄆ | 7 | 7 | 7 | 7 |
| 4L 底ㄇ | 7 | 7 | 7 | 7 |

(二) 由上述可知，雖然四連塊立體形體有三種不同的組合，但是「面面俱到」總和範圍與成功組數皆相同，我們推知：**若干個同顆數、同基底但不同組合形式的立體形體，只要經由主要定理一和定理二估算出相同的「面面俱到」總和，其「面面俱到」成功組數皆相同，我們可視「若干個同顆數、同基底但不同組合形式的立體形體」為同一組類型**。例如雖然以 L 為基底的四顆骰子有三種不同組合形式，但其「面面俱到」總和範圍與成功組數皆相同，所以四顆骰子「面面俱到」的立體形體實際上只有一種類型。

七、**五連塊三維幾何形體**共有 15 種組合方式，依循四顆骰子「面面俱到」立體形體的發現，將**相同基底、相同「面面俱到」估算結果**歸納一類，共分 7 大類分別討論。

表 14: 五連塊骰子立體圖形總和關係統整表

| 基底 | 種類 | 圖形代表 | 鄰邊關係 | S'min 與 S'max | S 推算範圍 |
|---|---|---|---|---|---|
| 5L 底 | 1 | 5L 底ㄅ<br>5L 底ㄆ<br>5L 底ㄈ<br>5L 底ㄉ | 1 鄰面×2<br>2 鄰面×3 | S'min＝1×2＋(1＋2) ×3＝11<br>S'max＝6×2＋(6＋5) ×3＝45<br>11≦21×5－6×S≦45 | 10≦S≦15 |
| 5L 底 | 2 | 5L 底ㄇ | 1 鄰面×3<br>2 鄰面×1<br>3 鄰面×1 | S'min＝1×3＋(1＋2) ×1＋(1＋2＋3) ×1＝12<br>S'max＝6×3＋(6＋5) ×1＋(6＋5＋4) ×1＝44<br>12≦21×5－6×S≦44 | 11≦S≦15 |
| 5T 底 | 3 | 5T 底ㄅ<br>5T 底ㄇ<br>5T 底ㄈ | 1 鄰面×3<br>2 鄰面×1<br>3 鄰面×1 | S'min＝1×3＋(1＋2) ×1＋(1＋2＋3) ×1＝12<br>S'max＝6×3＋(6＋5) ×1＋(6＋5＋4) ×1＝44<br>12≦21×5－6×S≦44 | 11≦S≦15 |
| 5T 底 | 3 | 5T 底ㄆ | 1 鄰面×4<br>4 鄰面×1 | S'min＝1×4＋(1＋2＋3＋4) ×1＝14<br>S'max＝6×4＋(6＋5＋4＋3) ×1＝42<br>14≦21×5－6×S≦42 | 11≦S≦15 |
| 5N 底 | 4 | 5N 底ㄅ<br>5N 底ㄈ | 1 鄰面×2<br>2 鄰面×3 | S'min＝1×2＋(1＋2) ×3＝11<br>S'max＝6×2＋(6＋5) ×3＝45<br>11≦21×5－6×S≦45 | 10≦S≦15 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 5N 底 | 5 | 5N 底ㄆ<br>5N 底ㄇ | 1 鄰面×3<br>2 鄰面×1<br>3 鄰面×1 | S’min＝1×3＋(1＋2) ×1＋(1＋2＋3) ×1＝12<br>S’max＝6×3＋(6＋5) ×1＋(6＋5＋4) ×1＝44<br>12≦21×5－6×S≦44 | 11≦S≦15 |
| 5P 底 | 6 | 5P 底ㄅ | 1 鄰面×1<br>2 鄰面×3<br>3 鄰面×1 | S’min＝1×1＋(1＋2) ×3＋(1＋2＋3) ×1＝16<br>S’max＝6×1＋(6＋5) ×3＋(6＋5＋4) ×1＝54<br>16≦21×5－6×S≦54 | 9≦S≦14 |
| 5W 底 | 7 | 5W 底ㄅ | 1 鄰面×2<br>2 鄰面×3 | S’min＝1×2＋(1＋2) ×3＝11<br>S’max＝6×2＋(6＋5) ×3＝45<br>11≦21×5－6×S≦45 | 10≦S≦15 |

(一) 利用五顆骰子做出立體「面面俱到」，可由「面面俱到」總和範圍分成三大類：5L 底(ㄅ、ㄆ、ㄈ、ㄉ)、5N 底(ㄅ、ㄈ)、5W 底ㄅ：總和範圍 10≦S≦15；5P 底ㄅ：總和範圍 9≦S≦14；5L 底ㄇ、5T 底(ㄅ、ㄆ、ㄇ、ㄈ)、5N 底(ㄆ、ㄇ)：總和範圍 11≦S≦15。

(二) 五顆骰子立體形體「面面俱到」研究結果如下表（詳實記錄請見<u>現場資料展示</u>）：

表 15：五連塊骰子立體圖形總和範圍與組數統整表

| 總和類型 | 名稱 | S＝9 | S＝10 | S＝11 | S＝12 | S＝13 | S＝14 | S＝15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 5L 底ㄅ | | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 |
| | 5L 底ㄆ | | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 |
| | 5L 底ㄈ | | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 |
| | 5L 底ㄉ | | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 |
| | 5N 底ㄅ | | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 |
| | 5N 底ㄈ | | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 |
| | 5W 底ㄅ | | 5 | 5 | 6 | 6 | 6 | 5 |
| B | 5L 底ㄇ | | | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 |
| | 5T 底ㄅ | | | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 |
| | 5T 底ㄇ | | | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 |
| | 5T 底ㄈ | | | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 |
| | 5T 底ㄆ | | | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 |
| | 5N 底ㄆ | | | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 |
| | 5N 底ㄇ | | | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 |
| C | 5P 底ㄅ | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | |

＊斜線表示該圖形「面面俱到」總和無法成立，並非指成功組數 0 組

(三) 從研究目的二可得知，雖然五連塊立體形體各有三種不同的類型，但是每一種類型其總和範圍與成功組數皆會相同，我們預測若立體形體的內藏總和範圍一樣，組數與骰子每面總和皆相同。

(四) 5W 底ㄅ幾何形體因第二層有兩顆骰子，與其他 6 類第二層唯有一顆骰子的形體差異較大，所以導致並非每項「面面俱到」的總和之組數都有達完美比例。

八、我們針對四顆骰子和五顆骰子立體幾何形體的「面面俱到」，做一統整性的研究摘要。

(一) 三維幾何形體較二維幾何形體「面面俱到」的組數，易達到完美比例。

(二) 三維幾何形體相對二維幾何形體「面面俱到」的總和範圍較廣，變化也較多。

(三) 有效分類同基底不同組合方式的立體幾何形體，能更快速類推「面面俱到」的總和範圍和組數。

## 研究目的三：分析、推論若干顆骰子可成功「面面俱到」的平面、立體幾何形體與其總和。

九、 從三顆骰子「面面俱到」到五顆骰子「面面俱到」的研究過程中，我們發現圖形有其無限延伸的變化性與規律，結合【主要定理二】：鄰面數的歸納式，我們從小顆數圖形為基底作延伸討論，解釋各式平面和立體幾何形體「面面俱到」的成立與否，也計算各式成立幾何形體「面面俱到」的總和範圍。

以 2I 幾何形體延伸討論為例示範我們解釋的策略：

2I 幾何形體鄰面數：1 鄰×2

3I 幾何形體鄰面數：1 鄰×2＋2 鄰×1

4I 幾何形體鄰面數：1 鄰×2＋2 鄰×2

5I 幾何形體鄰面數：1 鄰×2＋2 鄰×3

……

若 N 個骰子(N≦30)組成 I 型幾何形體，

其鄰面數關係：**1 鄰×2＋2 鄰×(N-2)**

將關係代入主要定理二列出 S’數值範圍：

**S’min＝1×2＋(1＋2) ×(N-2)**

**S’max＝6×2＋(6＋5) ×(N-2)**

再利用主要定理一**【n × 21－S × 6＝S’】**，解釋幾何形體「面面俱到」可否成立

1. 當 1×2＋(1＋2) ×(N-2)≦ n×21－S× 6≦6×2＋(6＋5) ×(N-2) ⇨故此 N-I 幾何形體「面面俱到」可成立。
2. 當 n×21－S× 6≧6×2＋(6＋5) ×(N-2) ⇨此 N-I 幾何形體「面面俱到」不可成立。

例：3I 幾何形體

$S'min = 1\times2+(1+2)\times1=5$

$S'max = 6\times2+(6+5)\times1=23$

$\therefore 5\leqq 3\times21-S\times6\leqq23$

令 3I 每面最大總和是 S＝6 代入⇨$3\times21-6\times6=27$

$27\geqq23$ 故 3I 幾何形體「面面俱到」不可成立

**由此可知，由 N 個骰子(N≦30)組成 I 型幾何形體，唯一只有 2I 幾何形體可成立，並可利用主要定理一的輔助算出 2I「面面俱到」總和是 5 和 6。**

**令 n＝2 代入⇨$1\times2+(1+2)\times(N-2)\leqq n\times21-S\times6\leqq6\times2+(6+5)\times(N-2)$**

**⇨$1\times2\leqq2\times21-S\times6\leqq6\times2$**

**⇨$40\geqq6S\geqq30$**

**⇨$6\geqq S\geqq5$**

(一) 3L 幾何形體為基底的延伸討論：

3L 幾何形體鄰面數：1 鄰×2＋2 鄰×1

4L 幾何形體鄰面數：1 鄰×2＋2 鄰×2

5L 幾何形體鄰面數：1 鄰×2＋2 鄰×3

……

若 N 個骰子(N≦30)組成 L 型幾何形體，

其鄰面數關係：**1 鄰×2＋2 鄰×(N-2)**

將關係代入主要定理二列出 S’數值範圍：

**$S'min=1\times2+(1+2)\times(N-2)$**

**$S'max=6\times2+(6+5)\times(N-2)$**

1. 3L「面面俱到」總和：**$9\geqq S\geqq7$**

   令 n＝3 代入⇨$1\times2+(1+2)\times(3-2)\leqq3\times21-S\times6\leqq6\times2+(6+5)\times(3-2)$

   ⇨$1\times2+(1+2)\times1\leqq3\times21-S\times6\leqq6\times2+(6+5)\times1$⇨$58\geqq6S\geqq40$⇨$9\geqq S\geqq7$

2. 4L「面面俱到」總和：**$12\geqq S\geqq9$**【實際結果 **$11\geqq S\geqq9$**】

   令 n＝4 代入⇨$1\times2+(1+2)\times(4-2)\leqq4\times21-S\times6\leqq6\times2+(6+5)\times(4-2)$

   ⇨$1\times2+(1+2)\times2\leqq4\times21-S\times6\leqq6\times2+(6+5)\times2$⇨$78\geqq6S\geqq50$⇨$12\geqq S\geqq9$

3. 5L「面面俱到」總和：**$15\geqq S\geqq10$**【實際結果 **S＝11**】

   令 n＝5 代入⇨$1\times2+(1+2)\times(5-2)\leqq5\times21-S\times6\leqq6\times2+(6+5)\times(5-2)$

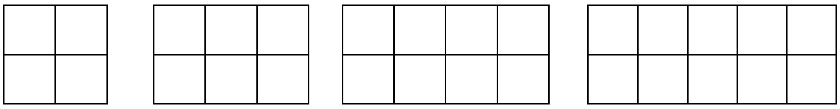
   ⇨$1\times2+(1+2)\times3\leqq5\times21-S\times6\leqq6\times2+(6+5)\times3$⇨$94\geqq6S\geqq60$⇨$15\geqq S\geqq10$

**由此可知，由 N 個骰子(N≦30)組成 L 型幾何形體，只有 3L~5L 此三個圖形成立。**

(二) 以 4Q 幾何形體為基底的延伸討論：

1. 從 4Q 擴展為 6Q、8Q、10Q… （見下圖 20），橫向延伸為例：

圖 20：4Q 橫向延伸圖例說明



4Q　　6Q　　8Q　　10Q

4Q 幾何形體鄰面數：2 鄰×4

6Q 幾何形體鄰面數：2 鄰×4＋3 鄰×2

8Q 幾何形體鄰面數：2 鄰×4＋3 鄰×4

10Q 幾何形體鄰面數：2 鄰×4＋3 鄰×6

……

若 N 個骰子(N≦30)組成 Q 型(橫向)幾何形體，其鄰面數：2 鄰×4＋3 鄰×(N-4)將此關係代入主要定理二以列出 N-Q 型幾何形體 S'數值範圍

**$S'_{min}=(1+2)\times4+(1+2+3)\times(N-4)$**

**$S'_{max}=(6+5)\times4+(6+5+4)\times(N-4)$**

當 $(1+2)\times4+(1+2+3)\times(N-4)\leqq n\times21-S\times6\leqq(6+5)\times4+(6+5+4)\times(N-4)$

故此幾何形體「面面俱到」可成立

當 $n\times21-S\times6\geqq(6+5)\times4+(6+5+4)\times(N-4)$

故此幾何形體「面面俱到」不可成立

例 10Q 幾何形體

$S'_{min}=(1+2)\times4+(1+2+3)\times6=48$

$S'_{max}=(6+5)\times4+(6+5+4)\times6=134$

$\therefore 48\leqq 10\times21-S\times6\leqq134$

令 10Q 「面面俱到」最大總和 S＝12 代入⇨$21\times10-12\times6=138$

$138\geqq134$　　故 10Q 幾何形體「面面俱到」不可成立

**由此可知，由 N 個骰子(N≦30)組成 Q 型幾何形體，只有 4Q、6Q、8Q 此三個幾何形體可成立。**

(1) 4Q「面面俱到」總和：**$12\geqq S\geqq7$**【實際結果 **$11\geqq S\geqq7$**】

令 n＝4 代入⇨$(1+2)\times4+(1+2+3)\times(4-4)\leqq4\times21-S\times6\leqq(6+5)\times4+(6+5+4)\times(4-4)$ ⇨$(1+2)\times4\leqq4\times21-S\times6\leqq(6+5)\times4$⇨$72\geqq6S\geqq40$⇨$12\geqq S\geqq7$

(2) 6Q「面面俱到」總和：**17≧S≧8**【實際結果 **12≧S≧9**】

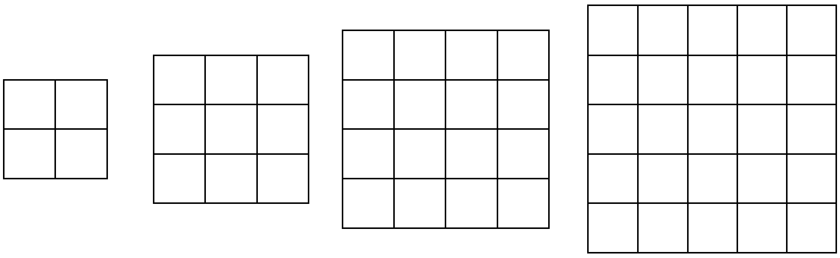
令 n＝6 代入⇨(1＋2)×4＋(1＋2＋3) ×(6-4)≦6×21－S×6≦(6＋5)×4＋(6＋5＋4) ×(6-4) ⇨(1＋2)×4＋(1＋2＋3) ×2≦6×21－S × 6≦(6＋5)×4＋(6＋5＋4) ×2⇨102≧6S≧52⇨17≧S≧8

(3) 8Q「面面俱到」總和：**22≧S≧10**【實際結果 **S＝12**】

令 n＝8 代入⇨(1＋2)×4＋(1＋2＋3) ×(8-4)≦8×21－S × 6≦(6＋5)×4＋(6＋5＋4) ×(8-4) ⇨(1＋2)×4＋(1＋2＋3) ×4≦8×21－S × 6≦(6＋5)×4＋(6＋5＋4) ×4⇨132≧6S≧64⇨22≧S≧10

2. 從(2×2)Q 擴展為(3×3)Q、(4×4)Q、(5×5)Q…（見下圖 21），正方形延伸為例：

圖 21：(2×2)Q 擴展圖例說明



(2×2)Q (3×3)Q (4×4)Q (5×5)Q

(2×2)Q 幾何形體鄰面數：2 鄰×4

(3×3)Q 幾何形體鄰面數：2 鄰×4＋3 鄰×4＋4 鄰×1

(4×4)Q 幾何形體鄰面數：2 鄰×4＋3 鄰×8＋4 鄰×4

(5×5)Q 幾何形體鄰面數：2 鄰×4＋3 鄰×12＋4 鄰×9

……

若有骰子(N×N≦30)組成(N×N)-Q 型(正方形)幾何形體，

其鄰面數：2 鄰×4＋3 鄰×(N-2) ×4＋4 鄰×$(N-2)^2$

將此關係代入主要定理二以列出(N×N)-Q 型幾何形體 S’數值範圍

$S'min＝(1＋2)×4＋(1＋2＋3) ×(N-2) ×2＋(1＋2＋3＋4) ×(N-2)^2$

$S'max＝(6＋5)×4＋(6＋5＋4) ×(N-2) ×2＋(6＋5＋4＋3) ×(N-2)^2$

當$(1＋2)×4＋(1＋2＋3) ×(N-2) ×2＋(1＋2＋3＋4) ×(N-2)^2≦n×n×21－S × 6≦(6＋5)×4＋(6＋5＋4) ×(N-2) ×2＋(6＋5＋4＋3) ×(N-2)^2$

故此幾何形體「面面俱到」可成立

當 $n\times n\times 21-S\times 6 \geqq (6+5)\times 4+(6+5+4)\times(N-2)\times 2+(6+5+4+3)\times(N-2)^2$

故此幾何形體「面面俱到」不可成立

例：(3×3)Q 幾何形體

$S'min=(1+2)\times 4+(1+2+3)\times 1\times 2+(1+2+3+4)\times 1^2=34$

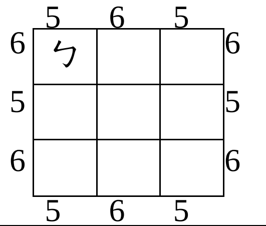
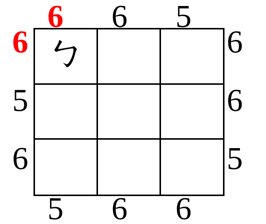
$S'max=(6+5)\times 4+(6+5+4)\times 1\times 2+(6+5+4+3)\times 1^2=92$

$\therefore 34\leqq 9\times 21-S\times 6\leqq 92 \;\Rightarrow\; 155\geqq 6S\geqq 97 \;\Rightarrow\; 24\geqq S\geqq 17$

但(3×3)Q 每面最大總和只有可能是 16(不介於 24≧S≧17 範圍之間)，故

(3×3)Q 幾何形體「面面俱到」不可成立

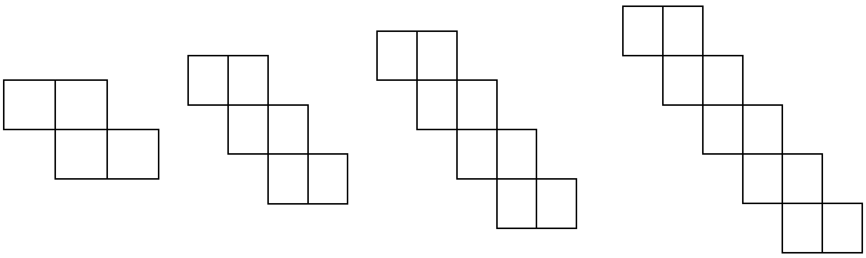
圖 22：(3×3)Q「面面俱到」總和最大值圖例說明

<table>
<tr><td>
</td><td>
</td><td rowspan="2">(3×3)Q「面面俱到」總和 16 已是最大值(如 A 圖所示)，若(3×3)Q「面面俱到」總和 17，必有一顆骰子重複兩個 6，其無法成立「面面俱到」(如 B 圖ㄅ骰子)。</td></tr>
<tr><td>A 圖</td><td>B 圖</td></tr>
</table>

**由此可知，由 N 個骰子(N≦30)組成(N×N)Q 型幾何形體，只有(2×2)Q 型幾何形體可成立。**

(三) 以 4N 幾何形體為基底的延伸，從 4N 擴展為 6N、8N、10N… （見下圖 23）：

圖 23：4N 擴展圖例說明



4N　6N　8N　10N

4N 幾何形體鄰面數：1 鄰×2＋2 鄰×2

6N 幾何形體鄰面數：1 鄰×2＋2 鄰×4

8N 幾何形體鄰面數：1 鄰×2＋2 鄰×6

10N 幾何形體鄰面數：1 鄰×2＋2 鄰×8

……

若 N 個骰子($N\leqq30$)組成 N 型幾何形體，其鄰面數：1 鄰×2＋2 鄰×(N-2)

將此關係代入主要定理二以列出 N-N 型幾何形體 S'數值範圍

$S'min=1\times2+(1+2)\times(N-2)$

$S'max=6\times2+(6+5)\times(N-2)$

當 $1\times2+(1+2)\times(N-2)\leqq n\times21-S\times6\leqq6\times2+(6+5)\times(N-2)$

故此幾何形體「面面俱到」可成立

當 $n\times21-S\times6\geqq6\times2+(6+5)\times(N-2)$

故此幾何形體「面面俱到」不可成立

例：30N 幾何形體

$S'min=1\times2+(1+2)\times28=86$

$S'max=6\times2+(6+5)\times28=320$

$\therefore 86\leqq30\times21-S\times6\leqq320$

令 30N「面面俱到」最大總和 S＝90 代入⇨ $30\times21-90\times6=90$⇨$86\leqq90\leqq320$

雖然 30N 幾何形體「面面俱到」符合內藏面總和範圍，但是考慮 30N 幾何形體上下兩方都必須使用小點數 4、3、1 等 1-3、1-4、3-4 共 18 顆骰子，無法拼組 30N 幾何形體。**由此可知，由 N 個骰子(N≦30)組成 N 型幾何形體，4N~18N 才是可成功圖例，18N「面面俱到」總和最大值為 54。**

(四) 以 4L 底幾何形體(立體)為基底的延伸討論（見下圖 24）：

圖 24：3L 底圖形延伸圖例說明

兩層 (4 顆)　　三層 (10 顆)　　四層 (20 顆)

兩層立體(4 顆) 幾何形體鄰面數：1 鄰×3＋3 鄰×1

將此關係代入主要定理二以列出兩層立體(4 顆)幾何形體 S'數值範圍

$S'min=1\times3+(1+2)\times1$

$S'max=6\times3+(6+5)\times1$

∵兩層立體(4 顆)，$n=4$

∴ $1\times3+(1+2)\times1\leqq4\times21-S\times6\leqq6\times3+(6+5)\times1$

$9\leqq S\leqq12$　　**故兩層立體(4 顆) 幾何形體「面面俱到」可成立**

三層立體(10 顆) 幾何形體鄰面數：1 鄰×3＋2 鄰×3＋3 鄰×1＋4 鄰×3

將此關係代入主要定理二以列出三層立體(10 顆)幾何形體 S'數值範圍

$S'min=1\times3+(1+2)\times3+(1+2+3)\times1+(1+2+3+4)\times3=48$

$S'max=6\times3+(6+5)\times3+(6+5+4)\times1+(6+5+4+3)\times3=120$

∵三層立體(10 顆)，$n=10$

∴ $48\leqq10\times21-S\times6\leqq120$

$15\leqq S\leqq27$　　**故三層立體(10 顆) 幾何形體「面面俱到」可成立**

四層立體(20 顆) 幾何形體鄰面數：1 鄰×3＋2 鄰×6＋3 鄰×2＋4 鄰×6＋5 鄰×3

將此關係代入主要定理二以列出四層立體(20 顆)幾何形體 S'數值範圍

$S'min=1\times3+(1+2)\times6+(1+2+3)\times2+(1+2+3+4)\times6+(1+2+3+4+5)\times3=138$

$S'max=6\times3+(6+5)\times6+(6+5+4)\times2+(6+5+4+3)\times6+(6+5+4+3+2)\times3=282$

∵四層立體(20 顆)，$n=20$

∴ $138\leqq20\times21-S\times6\leqq282$

$23\leqq S\leqq47$　　**故四層立體(20 顆) 幾何形體「面面俱到」可成立**

十、 雖然主要定理一和定理二可以幫助我們初步了解某一幾何形體可否「面面俱到」，並進一步估算「面面俱到」總和範圍，唯仍考量該幾何形體的組合特徵，因為「面面俱到」總和會因幾何形體的組成條件而有所受限，有時利用兩項主要定理估算的結果會比實際能做出「面面俱到」總和還要高。我們以 **6L「面面俱到」**為例說明：

令 $n=6$ 代入⇨$1\times2+(1+2)\times(6-2)\leqq6\times21-S\times6\leqq6\times2+(6+5)\times(6-2)$

⇨$1\times2+(1+2)\times4\leqq6\times21-S\times6\leqq6\times2+(6+5)\times4$⇨$112\geqq6S\geqq80$⇨$18\geqq S\geqq14$

**經過估算得知 6L「面面俱到」總和介於 14~18 之間，但二層 L 型幾何形體最大「面面俱到」總和為 11，所以 6L 幾何形體之「面面俱到」無法成立。**

## 柒、 問題討論

一、 如何從幾何形體「面面俱到」的總和關係中，推知某一幾何形體「面面俱到」總和的同時成功組數？

從研究中我們歸納兩項可推知「面面俱到」總和是否可達完美比例組數的方法：

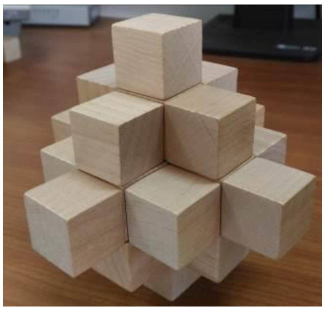
(一)六面中每面的面數都相同，此幾何圖形的「面面俱到」總和皆達完美比例。如四連塊立體幾何形體，六面中每面的面數都是四面，其總和皆可完美比例。

(二)觀察幾何形體中骰子組合位置，再搭配選取的骰子顆數，就可推算出該幾何形體「面面俱到」的總和組數。如 2I 幾何形體總和 5，因考慮內藏面要藏點數 6，所以只能用 5 對面 6 的骰子，逐步刪除後只有可能一組「面面俱到」總和 5。

二、 幾何形體有極限嗎？最多可使用幾顆骰子使成立「面面俱到」？能窮盡形體總和嗎？

從研究過程中可知，四顆骰子三維立體形體因六面都有相同個面數，使得「面面俱到」的組數與總和都可透過【主要定理一】和【主要定理二】來完美詮釋與窮盡。因此，我們設法開發<u>六面都有相同個面數</u>幾何形體的極限，探討一組成功的「面面俱到」最多可使用多少顆骰子和窮盡其總和範圍。

圖 25：30 顆骰子的幾何形體極限分析圖例

| 圖例 |  |  |  |  |
|---|---|---|---|---|
| 名稱 | 一條龍立體形體 | 3×3×3 立體形體 | 十字架球體形體 | 金字塔立體形體 |
| 每面數 | 每面有 16 個數字 | 每面有 9 個數字 | 每面有 13 個數字 | 每面有 10 個數字 |
| 骰子數 | 一組有 30 顆骰子 | 一組有 27 顆骰子 | 一組有 25 顆骰子 | 一組有 20 顆骰子 |
| 鄰面數 | 1 鄰面×2、2 鄰面×2<br>3 鄰面×26 | 3 鄰面×8、4 鄰面×12<br>5 鄰面×6、6 鄰面×1 | 1 鄰面×6、2 鄰面×12<br>6 鄰面×7 | 1 鄰面×3、2 鄰面×6<br>3 鄰面×2、4 鄰面×6<br>5 鄰面×3 |

(一)一條龍立體形體總和範圍：

$$S'min = 1\times2 + (1+2)\times2 + (1+2+3)\times26 = 164$$

$S'max = 6\times2 + (6+5)\times2 + (6+5+4)\times26 = 424$

$164 \leqq 21\times30 - 6\times S \leqq 424$

$\because\ S \in Z^+$

$-466 \leqq -6S \leqq -206$

$466 \geqq 6S \geqq 206$

$\therefore\ 77 \geqq S \geqq 35$

(二)3×3×3 立體形體總和範圍：

$S'min = (1+2+3)\times8 + (1+2+3+4)\times12 + (1+2+3+4+5)\times6 + (1+2+3+4+5+6)\times1 = 279$

$S'max = (6+5+4)\times8 + (6+5+4+3)\times12 + (6+5+4+3+2)\times6 + (6+5+4+3+2+1)\times1 = 477$

$279 \leqq 21\times27 - 6\times S \leqq 477$

$\because\ S \in Z^+$

$-288 \leqq -6S \leqq -90$

$288 \geqq 6S \geqq 90$

$\therefore\ 48 \geqq S \geqq 15$

(三)十字架球體形體總和範圍：

$S'min = 1\times6 + (1+2)\times12 + (1+2+3+4+5+6)\times7 = 189$

$S'max = 6\times6 + (6+5)\times12 + (6+5+4+3+2+1)\times7 = 315$

$189 \leqq 21\times25 - 6\times S \leqq 315$

$\because\ S \in Z^+$

$-336 \leqq -6S \leqq -210$

$336 \geqq 6S \geqq 21$

$\therefore\ 56 \geqq S \geqq 35$

(四)金字塔立體形體總和範圍：

$S'min = 1\times3 + (1+2)\times6 + (1+2+3)\times2 + (1+2+3+4)\times6 + (1+2+3+4+5)\times3 = 138$

$S'max = 6\times3 + (6+5)\times6 + (6+5+4)\times2 + (6+5+4+3)\times6 + (6+5+4+3+2)\times3 = 282$

$138 \leqq 21\times20 - 6\times S \leqq 282$

$\because$ $S \in Z^{+}$

$-282 \leqq -6S \leqq -138$

$282 \geqq 6S \geqq 138$

$\therefore$ $47 \geqq S \geqq 23$

## 捌、 研究結論

一、可利用【研究定理一：令 n 顆骰子所組合而成的幾何形體「面面俱到」總和為 S 值，可得 **$n \times 21 - S \times 6 = S'$**(內藏面總和)】找出幾何形體「面面俱到」總和的最大值與最小值範圍，並可推估此幾何形體是否可以順利做出「面面俱到」。

二、探討未知幾何形體「面面俱到」可能性，可結合研究定理一和【研究定理二：以鄰面數歸納某一幾何形體內藏總和數值大小範圍】進行有效解析。研究定理二的數學歸納式如下：*若 1 鄰面有 a 個、2 鄰面有 b 個、3 鄰面有 c 個、4 鄰面有 d 個*

$S'min = 1 \times a + (1+2) \times b + (1+2+3) \times c + (1+2+3+4) \times d$

$S'max = 6 \times a + (6+5) \times b + (6+5+4) \times c + (6+5+4+3) \times d$

$S'min \leqq n \times 21 - S \times 6 \leqq S'max$

$1 \times a + (1+2) \times b + (1+2+3) \times c + (1+2+3+4) \times d \leqq n \times 21 - S \times 6 \leqq 6 \times a + (6+5) \times b + (6+5+4) \times c + (6+5+4+3) \times d$

三、幾何形體的類型會影響「面面俱到」的總和與組數。

(一)以研究目的三的結果可統整發現：

1. 二維兩層的 L 型幾何形體「面面俱到」至多只可做到 5 顆骰子，6 顆骰子以上無法成功做出 L 型「面面俱到」。
2. 4Q 幾何形體為基底延伸，可做出「面面俱到」只有 4Q、6Q、8Q 三種幾何形體。
3. 無法以(2×2)Q 幾何形體為基底擴展，做出可成功的「面面俱到」幾何形體。
4. 以 4L 底 (立體) 幾何形體為基底的延伸，可討論出四層立體(20 顆)幾何形體「面面俱到」的成立，也是目前發現最多骰子顆數延伸的極限。

(二)可成功的二維兩層幾何形體「面面俱到」每面總和最大值為 11~12；可成功做出「面面俱到」總和 11 的五連塊三維幾何形體都只能同時做出 5 組，不能完美比例 6 組。

(三)幾何形體每面出現的面數越平均，圖形極限延伸的變化性也就越能做出「面面俱到」。例：以四連塊為基底做圖形展開，4N 圖形延伸至 18N，「面面俱到」成功率比 4I、4L 和 4Q 為佳；二維圖形「面面俱到」比三維立體圖形的「面面俱到」，面數條件受限越多，導致總和與組數的討論也較複雜。

(四)雖然幾何形體的變化種類多，但可依據研究定理二：鄰面數的歸納與整理將其分類，研究發現同一類幾何形體其「面面俱到」的成功組數也相同(唯有二維兩層圖形，其中一層只有一顆骰子時，如 4L、4T、5L、5Y 等，則需分開討論)。

(五)幾何形體「面面俱到」的組數會因每顆骰子數字對邊、鄰邊關係的不同，使得部份總和的成功組數無法達到完美比例。研究中也觀察到幾何形體「面面俱到」的總和數值越大，其組數也相對較多。

四、若同時使用 30 顆骰子欲做出「面面俱到」，理想圖形是一條龍立體形體；最少骰子顆數的幾何圖形是 2I，其也能成功做出「面面俱到」。

## 玖、 展望

目前，我們已經克服了《數學魔術與遊戲設計》一書作者所提出的兩大問題：窮盡任一幾何形體「面面俱到」總和、開發多種不同幾何形體並找出每面可能的「面面俱到」。但精益求精，我們也思考另一個可能性，如果能**有效計算**不同幾何形體「面面俱到」的**最佳組數**，是否更可完整解釋本遊戲原理？因此，這是我們接下來努力的目標，敬請期待！

## 壹拾、 參考資料

一、石峻維、陳盈安、吳孟芳（2015）：「索瑪」頻道─索瑪立方塊的研究與探討。中華民國第 55 屆中小學科學展覽會作品說明書。

二、徐捷、黃胤維、林奕均、黃昱軒（2009）：面面俱到—n 邊形之面積最大、極小值。中華民國第 49 屆中小學科學展覽會作品說明書。

三、曾美焉、鮑正芳（2014）：面面俱到。載於林碧珍、蔡寶桂（主編），數學魔術與遊戲設計（253~266 頁）。臺北市：書泉。

四、黃毅、黃振宇、馬譽騰（2013）：平鋪圖形填數遊戲研究：鏡射交換，「翻」陳出新。中華民國第 53 屆中小學科學展覽會作品說明書。

## 【評語】080415

本參展作品探討複合骰子其六個面向各別點數合的問題，參展作者藉由分析"內藏面"的點數找出滿足"面面俱到"點數之上下界並依此條件探討立體五連塊骰子面面俱到的各種可能性。是少見討論完整的作品。