中華民國第56屆中小學科學展覽會
作品說明書

國小組　數學科

佳作

080413

如鑽石般的璀璨世界~探討多面體

學校名稱：屏東縣新埤鄉餉潭國民小學

作者：	指導老師：
小六 周慧君	蔡佳霏
小六 潘怡靜	陳佳玉
小六 潘怡茹	
小六 潘培菁	
小六 潘敏寧	

關鍵詞：正多面體、截角、點線面

摘要

本研究是從正多面體的點線面出發，探尋由二種或兩種以上的多邊形所組的多面立體模型。首先，認識五個正多面體的模型架構，並從正多面體的點線面個數找到了關係式，這就是有名的尤拉公式。

嘗試將正多面體經過重複性截角平切的操作，推演出一個新的多面體，進而演算建立半正多面體的推算模組。在兩次截角的過程中，共產生了 21 個由兩種或兩種以上的多邊形所組的多面體。其中有十一個柏拉圖截角後的新多面體與阿基米德立體很相似。

從操作中觀察討論，歸納出大截角時，因頂點相鄰有三面，故會形成一個三角形，且原來的面的形狀不變；小截角時，其原來的面邊數會增為兩倍。進而推測出簡單且容易了解的多面體模組，從而認識到各種多面體的組成形式。

壹、 研究動機

在五年級時上學期我們學過了多邊形、下學期學過正方體、長方體、角錐與角柱等立體圖形結構。去年的暑假學校辦理夏日樂學魔法數學體驗營，其中有一項活動則讓我們用吸管來黏接出許多不同的立體多邊形，當時老師僅向我們介紹由一種正多邊形組成的立體圖稱作柏拉圖立體，若由兩種或兩種以上的正多邊形組成的立體圖稱作阿基米德立體。當時心中有許多的不解與疑惑，但我們大家忙的操作黏製立體圖，而老師的教學重點放在圖形的點線面計算，因此我們暫時擱下了心中的迷惑。

老師告訴我們柏拉圖正多面體只有 5 種(正四面體、正六面體、正八面體、正十二面體、正二十面體)，但兩種以上的正多邊形所組的多面體的形式到底有多少種呢？又需要那種正多邊形，且需要多少面才可以組成不同的多面體呢？這些疑惑驅使我們想要在這次的科展中探究出多面體的組成形式。

老師告訴我們正十二面體是柏拉圖多面體其中的一個，由於正十二面體每一個面都是正五邊形。因此，在生活中提供了相當多的發展性(葉晉嘉，2008)。將三種以內的正多邊形，透過反射、旋轉的堆疊手法，能建構出阿基米得多面體和許多有趣的立體(廖麗敏，2007)。因此這次的數學探究引起我們充滿了許多的好奇與興趣。

貳、研究目的

一、　認識並探討正多面體的組成結構。

二、　探討透過有規律的切割，所形成的多面體的結構。

三、　將多面體的結構組成驗證尤拉公式與均勻多面體。

四、　從正多面體截角結果歸納並建構出截角多面體的模組。

參、研究架構

探討正多面體
- 由立體角認識五個柏拉圖立體並檢視是否為均勻多面體。
- 分析記錄五拉圖正多面體的點線面結構。
- 由立體圖的點線面結構個數關係認識由拉公式。

第一次截角
- 將五個柏拉圖立體進行1/2的大截角，記錄截角結果，並驗證尤拉公式。
- 將五個柏拉圖立體進行1/3的小截角，記錄截角結果，並驗證尤拉公式。
- 觀察截角後的新多面體的點面結構是否有相同的規律性並，符和均勻多面體。

第二次截角
- 將新截面多面體，進行1/2的大截角，記錄截角結果，並驗證尤拉公式。
- 將新截面多面體，進行1/3的小截角，記錄截角結果，並驗證尤拉公式。
- 觀察第二次截角後的新多面體的點面結構是有相同的規律性，並符和均勻多面體。

建立截角模組
- 歸納兩次大小截角的結果建立出截角模組，並進行第三次的截角推論

肆、名詞釋義

一、　柏拉圖立體:就是正多面體 指各面都是全等的正多邊形且每一個頂點所接的面數都是一樣的凸多面體。

二、　阿基米德立體：是一種對稱的半正多面體，且使用兩種或以上的正多邊形為面的凸多面體，每個相鄰的正多邊形的邊長相等，故阿基米德立體的邊均有相同

長度，故阿基米德立體的每個頂點所接的面形有一定的規律，共有 14 種。

三、 立體角:是一個物體對特定點的三維空間的角度,是角度在三維空間中的類比。

四、 1/2 大截角：從多面體頂點至邊長的 1/2 位置進行截角平切，因每一頂點皆要截下 1/2 的邊長，因此本研究稱作大截角。

五、 1/3 小截角：從多面體頂點至邊長的 1/3 位置進行截角平切，因每一頂點皆要截下 1/3 的邊長，因相對於 1/2 的大截角，所以在本研究中稱作小截角。

六、 尤拉公式:這是一個由數學家尤拉發現的一種多面體的點、線、面的關係(點 － 邊 ＋ 面 =2)。

七、 均勻多面體：是一種具有正多邊形面且與頂點相接的面形具有相同的規律。

伍、 研究設備及器材

正多邊形圖卡、正多面體展開圖、吸管、護貝膠膜，油性筆。

陸、 研究過程或方法

一、正多面體的組成

(一)從立體角認識正多面體

正多邊形有等長的邊與相等的內角，且正多面體的每一面都是相同的正多邊形，頂點也都一樣大。在立體圖中，要構成「立體角」，至少需要三面多邊形，以正三角形為例，可以由三面、四面、或五面的正三角形來包圍一個頂點；若是六個正三角形就會鋪滿整個面，無法成立體角了。

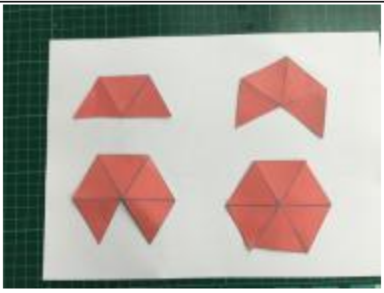
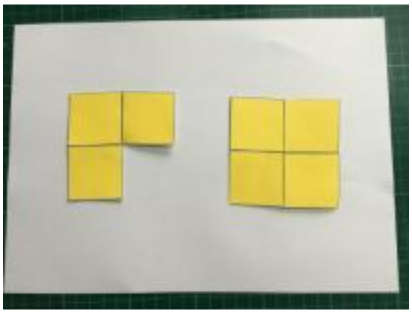
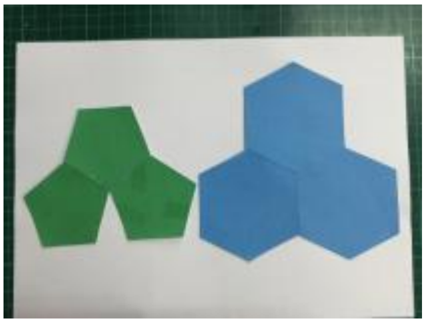
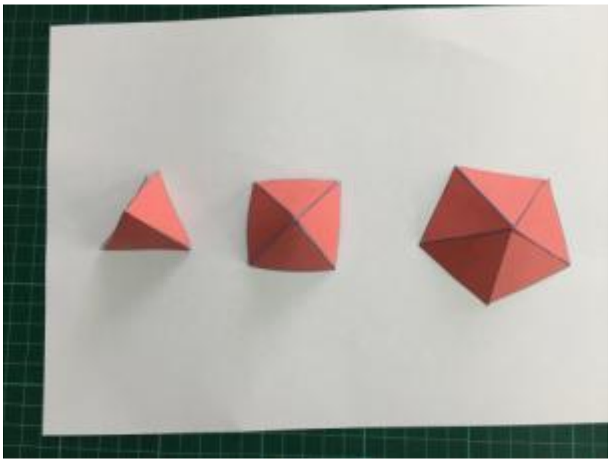
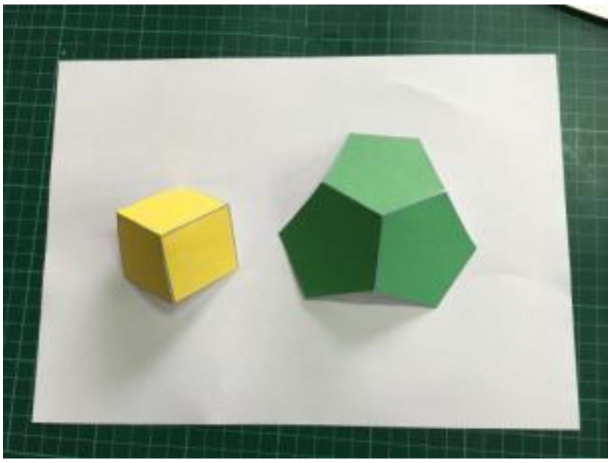
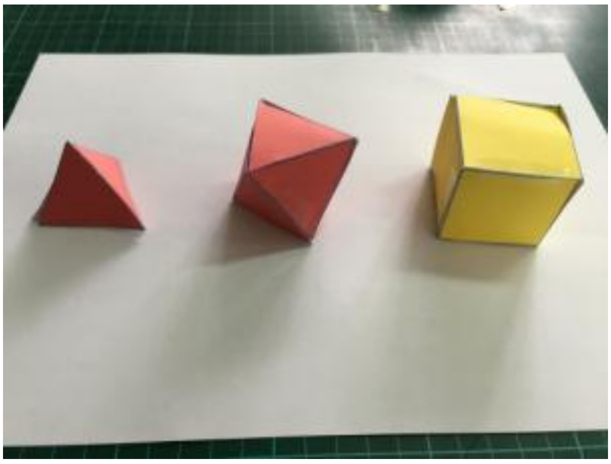
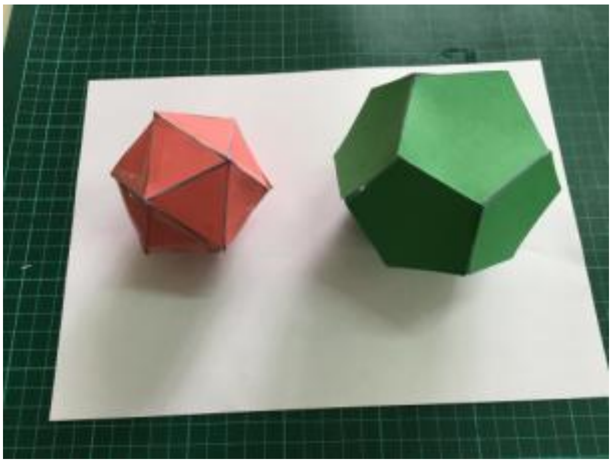
三個正方形有可以成一個「立體角」,但四個正方形的情形就和六個正三角形一樣，會鋪滿整個面，無法成立體角了。

三個正五邊形也可以構成一個「立體角」,但剩下的位置塞不下第四個正五邊形。而三個正六邊形剛剛好撲滿一個面，無法圍成立體角。因此正五邊形以上的多邊形都已經無法構成「立體角」了。

結論是以相同的正多邊形所構成的立體角共有五種，分別是三個正三角形、四個正三角形、五個正三角形、三個正方形與三個正五邊形。

以三個正三角形構成的立體角可以組成正四面體；將四個正三角形構成的立體角接合再一起，可以組成正八面體；五個正三角形構成的立體角接合成一個正二十面體；由正方形所構成的立體角，又可組成正六面體；另外正五邊形組成的立體角可組成正十二面體。此五種正多面體又稱作柏拉圖立體。

柏拉圖立體的定義：在三維空間中的正多面體只有五種，每個正多面體的邊長都相等，每一個也都是相同的正多邊形，每個頂點到中心的距離都相等。

(二)均勻多面體

均勻多面體是一種具有正多邊形面且與頂點相接的面形具有相同的規律。由此可見，所有的立體角是全等的，因此該多面體具有具有高度反射和旋轉對稱。

正四面體、正八面體與正二十面體的每一個點所接的面結是正三角形，正六面體結的面都是正方形，而正十二面體所結的面結是正五邊形。柏拉圖立體的每一個立體角所接的面皆是單一正多邊形符合了均勻多面體的定義，因此我們可以確定柏拉圖正多面體就是均勻多面體。

本研究中同時要檢視截角後的新多面體是否為均勻多面體。

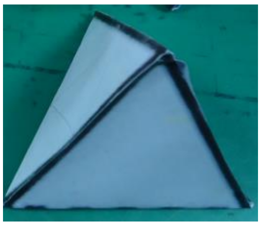
二、正多面體規律截角切割之發現

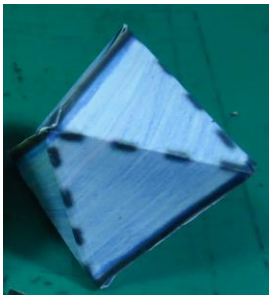
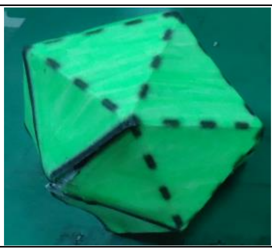
日常生活中最具代表性由兩種以上的正多邊形所構成的多面體，就是大家熟知的由 12 面正五邊形與 20 面正六邊形所構成的足球體了。因此我們想探尋兩種以上的正多邊形為面的多面體組合有哪些？

(一)正多面體的點線面結構

一開始以正三角形、正四邊形、正五邊形、正六邊形、正八邊形等相同邊長的紙卡，進行拚貼。我們僅拚出了底為正四邊形、正五邊形、正六邊形、正八邊形的角錐體；與底為正三角形、正五邊形、正六邊形、正八邊形，側面為正四邊形的角柱體，而這些圖形在五年級下學期我們就有學習過了。因為不知該如何拚出不一樣的立體圖，大家覺得很有挫折。因此老師就先教我們製作柏拉圖五個立體的模型，並了解這五個柏拉圖的點線面結構。

名稱	立體圖	面	線	點
正四面體		正三角形 4 面	3×4＝12 12÷2＝6 條線	12÷3＝4 頂點 (三面共點)

正六面體		正四邊形 6 面	4×6＝24 24÷2＝12 條線	24÷3＝8 頂點 (三面共點)
正八面體		正三角形 8 面	3×8＝24 24÷2＝12 條線	24÷4＝6 頂點 (四面共點)
正十二面體		正五邊形 12 面	5×12＝60 60÷2＝30 條線	60÷3＝20 頂點 (三面共點)
正二十面體		正三邊形 20 面	3×20＝60 60÷2＝30 條線	60÷5＝12 頂點 (五面共點)

老師告訴我們正多面體的點線面有一個很微妙的關係，而這個的關係適用每一個正多面體，要大家試試看能不能找到這個美妙的公式。以下是我們發現的 5 種點線面個數的關係式子：

正多面體 點/線/面個數	S1 面+點=線+2	S2 面+點-2=線	S3 線-面-點+2=0	S4 線-2=面+點-4	S5 面+點-線=2
正四面體 4/6/4	**符合**	**符合**	**符合**	**符合**	**符合**
正六面體 8/12/6	**符合**	**符合**	**符合**	**符合**	**符合**
正八面體 6/12/8	**符合**	**符合**	**符合**	**符合**	**符合**
正十二面體	**符合**	**符合**	**符合**	**符合**	**符合**

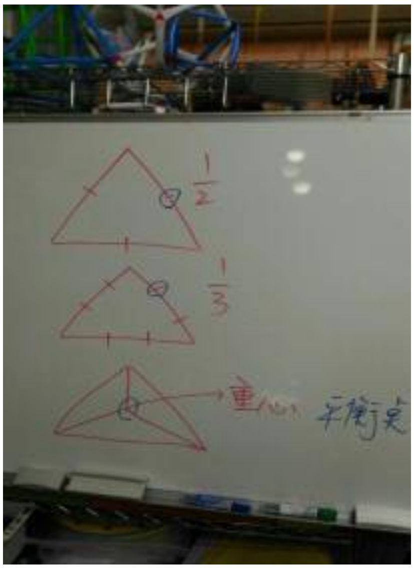
20/30/12					
正二十面體 12/30/20	**符合**	**符合**	**符合**	**符合**	**符合**

這五個公式經過老師說明與解釋後，原來我們找到的公式和有名的數學家尤拉所發現的「尤拉公式：點-線+面=2」是一樣的呢。

我們也會用尤拉公式來驗證截角多面體是否符合尤拉公式。

（二）多面體截角的發現

我們討論由柏拉圖正多面體出發，以截角的方式進行最大截角，與小截角兩種方法，希望能找到一個容易發現多面體結構的方法。為了能容易觀察、容易截角，先以正方體蛋糕進行截角並記錄結果。

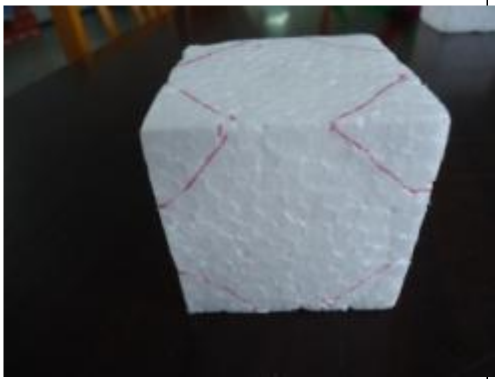


方法：將正多面體的所有角進行截角，分別取邊長的 1/2 做最大截角，與邊長的 1/3 做小截角。
因不容易掌控邊長的長度，所以取 1/2 與 1/3 邊長截角，形成的截面會與正多邊形最相似。

假設：截下的每一個角都一樣大，構成的邊長都一樣長。
因截角後正多邊形的角度與邊長掌控不易，因此在這裡假設截角後的所有面依然維持正多邊形。

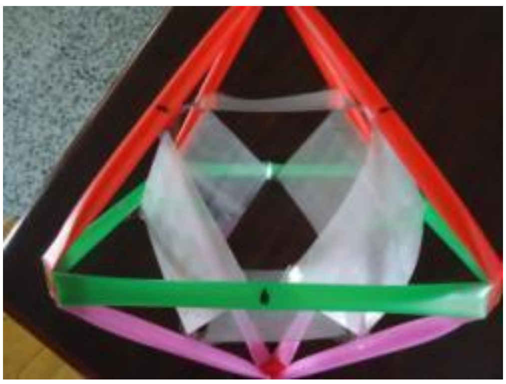
	邊長 1/2 大截角	邊長 1/3 小截角
		
截角後發現	1. 截面都是三角形。 2. 最大截角後，原來的面形狀不變；小截角後，原面邊數增加 2 倍。	

1. 以保麗龍正六面體進行截角發現

	邊長 1/2 截角(大截角)	邊長 1/3 截角(小截角)
截角前		
截角後		
結果發現	1. 截角的截面是三角形，8 個角，所以截出 8 個三角形。 2. 原來的面變成小了 1/2 的正方形，有 6 個小正方形。 3. 截角後變成十四面體(6 個四邊形、8 個三角形)。	1. 截角的截面是三角形，8 個角，所以截出 8 個三角形。 2. 原來的正方形面變成了八邊形有 6 個。 3. 截角後變成十四面體(6 個八邊形、8 個三角形)。

2. 以正八面體進行模擬截角發現

(利用吸管製作八面體的模型，以透明片呈現截面)

	邊長 1/2 截角(大截角)	邊長 1/3 截角(小截角)
截角		
	1. 截角的截面是四邊形形，6 個角，	1. 截角的截面是四邊形，6 個角，

結果發現	所以截出 6 個四邊形。 2. 原來的面變成小了 1/4 的三角形，有 8 個小三角形。 3. 截角後變成十四面體(6 個四邊形、8 個三角形)。	所以截出 6 個四邊形。 2. 原來的三角形面變成了六邊形有 8 個。 3. 截角後變成十四面體(8 個六邊形、6 個四邊形)。

3. 正六面體與正八面體的截角綜合發現

(1)無論是大截角還是小截角後，都變成十四面體。

(2)大截角後，原來的面形狀不變，只是變小；小截角後，原來的面形狀邊數會變兩倍。例如三角形變六邊形、正方形變八邊形。

(3)正六面體的截面是三角形，正八面體的截面是四邊形，發現與共點的面數有關。正六面體的共點面數有三面，所以截面是三角形；正八面體的共點面數有四面，所以截面是四邊形。

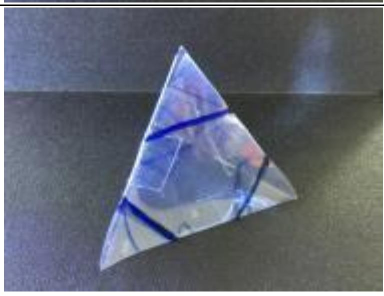
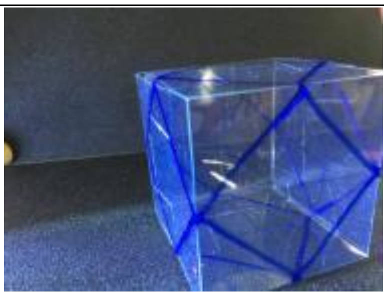
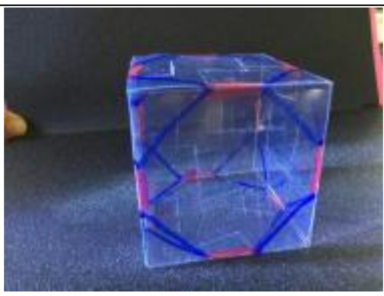
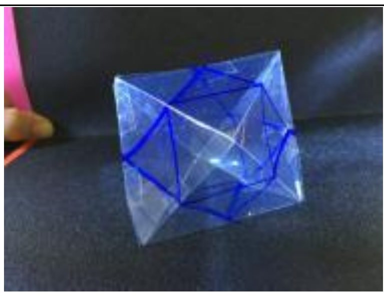
(4)正六面體與正八面體大截角後所形成的多面立體相似，都是由 6 個四邊形與 8 個三角形所組成的十四面體。

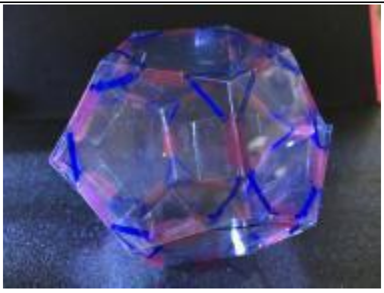
柒、 研究結果

以透明膠片先做出五個正多面體，以畫筆模擬畫出截角切面，並假設每個截角截面都一樣大，結果記錄新立體圖的點線面結構。

（截角後正多邊形的角度與邊長掌控不易，超出學生數學研究能力，因此僅與多邊形進行研究討論。）

一、第一次截角紀錄

正四面體 4 頂點 4 面正三角形	1/2 **大截角**		1. 截面為三角形(4 面),原面維持三角形(4 面) 2. 新立體圖：八面體(8 面正三角形) 3. 新頂點：6 點(3x8÷4＝6)
	1/3 **小截角**		1. 截面為三角形(4 面),原面變六邊形(4 面) 2. 新立體圖：八面體(4 面正三角形、4 面正六邊形) 3. 新頂點：12 點 (3x4＋6x4＝36，36÷3＝12)
正六面體 8 頂點 6 面正方形	1/2 **大截角**		1. 截面為三角形(8 面)，原面維持正方形(6 面) 2. 新立體圖：十四面體(8 面正三角形，6 面正方形) 3. 新頂點：12 點 (3x8＋4x6＝48，48÷4＝12)
	1/3 **小截角**		1. 截面為三角形(8 面)，原面變八邊形(6 面) 2. 新立體圖：十四面體(8 面正三角形、6 面八邊形) 3. 新頂點：24 點 (3x8＋8x6＝72，72÷3＝24)
正八面體 6 頂點 8 面正三角形	1/2 **大截角**		1. 截面為正方形(6 面)，原面維持三角形(8 面) 2. 新立體圖：十四面體(8 面正三角形，6 面正方形) 3. 新頂點：12 點 (3x8＋4x6＝48，48÷4＝12)

	1/3 **小截角**		1. 截面為正方形(6 面)，原面變六邊形(8 面) 2. 新立體圖：十四面體(8 面六邊形、6 面正方形) 3. 新頂點：24 點 (6×8＋4×6＝36，72÷3＝24)
正十二面體 20 頂點 12 面正五邊形	1/2 **大截角**		1. 截面為三角形(20 面)，原面維持五邊形(12 面) 2. 新立體圖：三十二面體(20 面正三角形，12 面正五邊形) 3. 新頂點：30 點 (3×20＋5×12＝48，120÷4＝30)
	1/3 **小截角**		1. 截面為三角形(20 面)，原面變十邊形(12 面) 2. 新立體圖：三十二面體(20 面正三角形、12 面十邊形) 3. 新頂點：60 點 (3×20＋10×12＝180，180÷3＝60)
正二十面體 12 頂點 20 面正三角形	1/2 **大截角**		1. 截面為五邊形(12 面)，原面維持三角形(20 面) 2. 新立體圖：三十二面體(20 面正三角形，12 面正五邊形) 3. 新頂點：30 點 (3×20＋5×12＝48，120÷4＝30)
	1/3 **小截角**		1. 截面為五邊形(12 面)，原面變六邊形(20 面) 2. 新立體圖：三十二面體(12 面正五邊形、20 面六邊形) 3. 新頂點：60 點 (5×12＋6×20＝180，180÷3＝60)

這五種正多面體經過大小截角後共會形成 7 種新型式的截面體，八面體有 1 種、十四面體有 3 種與三十二面體 3 種。因其中正四面體在 1/2 大截角後形成柏拉圖正八面體：正六面體與正八面體的 1/2 大截角所形成的十四面體相似；正十二面體與正二十面體的 1/2 大截角

所形成的三十二面體相似。

其中正二十面體的 1/3 截角後所形成的三十二面體符合了足球巴克球體的形式，有 12 面五邊形與 20 面六邊形。

二、第二次截角

將第一次截角後所形成的 7 個截面體製作透明模型，並進行第二次大小截角。

<table>
<tr><td rowspan="2">八面體
(小截正四面體)</td><td>1/2
大截角</td><td></td><td>1. 截面為三角形(12 面)，原面維持三角形(4 面)、六邊形(4 面)
2. 新立體圖：二十面體
3. 新頂點：18 點
($3\times16+6\times4=72$，$72\div4=18$)</td></tr>
<tr><td>1/3
小截角</td><td></td><td>1. 截面為三角形(12 面)，原面變六邊形(4 面)、十二邊形(4 面)
2. 新立體圖：二十面體
3. 新頂點：36 點
($3\times12+6\times4+12\times4=108$，$108\div3=36$)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">十四面體
(小截正六面體)</td><td>1/2
大截角</td><td></td><td>1. 截面為三角形(24 面)，原面維持三角形(8 面)、八邊形(6 面)
2. 新立體圖：三十八面體
3. 新頂點：36 點
($3\times32+8\times6=144$，$144\div4=36$)</td></tr>
<tr><td>1/3
小截角</td><td></td><td>1. 截面為三角形(24 面)，原面變六邊形(8 面)、十六邊形(6 面)
2. 新立體圖：三十八面體
3. 新頂點：72 點
($3\times24+6\times8+16\times6=216$，$216\div3=72$)</td></tr>
</table>

十四面體 (小截正八面體)	1/2 **大截角**		1. 截面為三角形(24 面)，原面維持正方形(6 面)、六邊形(8 面) 2. 新立體圖：三十八面體 3. 新頂點：36 點 ($3\times24+6\times4+6\times8=144$，$144\div4=36$)
	1/3 **小截角**		1. 截面為三角形(24 面)，原面變八邊形(6 面)、十二邊形(8 面) 2. 新立體圖：三十八面體 3. 新頂點：72 點 ($3\times24+8\times6+8\times12=216$，$216\div3=72$)
三十二面體 (小截十二面體)	1/2 **大截角**		1. 截面為三角形(60 面)，原面維持三角形(20 面)、十邊形(12 面) 2. 新立體圖：九十二面體 3. 新頂點：90 點 ($3\times80+10\times12=360$，$360\div4=90$)
	1/3 **小截角**		1. 截面為三角形(60 面)，原面變六邊形(20 面)、二十邊形(12 面) 2. 新立體圖：九十二面體 3. 新頂點：180 點 ($3\times60+6\times20+20\times12=540$，$540\div3=180$)
三十二面體 (小截二十面體)	1/2 **大截角**		1. 截面為三角形(60 面)，原面維持五邊形(12 面)、六邊形(20 面) 2. 新立體圖：九十二面體 3. 新頂點：90 點 ($3\times60+5\times12+6\times20=360$，$360\div4=90$)
	1/3 **小截角**		1. 截面為三角形(60 面)，原面變十邊形(12 面)、十二邊形(20 面) 2. 新立體圖：九十二面體 3. 新頂點：180 點 ($3\times60+10\times12+12\times20=540$，$540\div3=180$)

十四面體 (截半六面體或截半的八面體)	1/2 **大截角**		1. 截面為四邊形(12 面)，原面維持四邊形(6 面)、三角形(8 面) 2. 新立體圖：二十六面體 3. 新頂點：24 點 (4×18＋3×8＝96，96÷4＝24)
	1/3 **小截角**		1. 截面為四邊形(12 面)，原面變六邊形(8 面)、八邊形(6 面) 2. 新立體圖：二十六面體 3. 新頂點：48 點 (4×12＋6×8＋8×6＝144，144÷3＝48)
三十二面體 (截半的十二面體或截半的二十面體)	1/2 **大截角**		1. 截面為四邊形(30 面)，原面維持五邊形(12 面)、三角形(20 面) 2. 新立體圖：六十二面體 3. 新頂點：60 點 (4×30＋5×12＋3×20＝240，240÷4＝60)
	1/3 小 **截角**		1. 截面為四邊形(30 面)，原面變六邊形(20 面)、十邊形(12 面) 2. 新立體圖：六十二面體 3. 新頂點：120 點 (4×30＋6×20＋10×12＝360，360÷3＝120)

7 個截面體經大小截角後，共形成 14 個新截面體，分別為 2 個二十面體、4 個三十八面體、4 個九十二面體、2 個二十六面體、2 個六十二面體。

因此將 5 個柏拉圖立體經兩次的大小截角後，產生的新截面體共有 21 個。

三、尤拉公式驗證

<table>
<tr><th>第一次截角
多面體</th><th>點/線/面
個數</th><th>(點-線+面=2)</th><th>第二次截角
多面體</th><th>點/線/面
個數</th><th>(點-線+面=2)</th></tr>
<tr><td rowspan="2">八面體</td><td rowspan="2">12/18/8</td><td rowspan="2">符合</td><td>二十面體</td><td>18/36/20</td><td>符合</td></tr>
<tr><td>二十面體</td><td>36/54/20</td><td>符合</td></tr>
<tr><td rowspan="2">十四面體</td><td rowspan="2">12/24/14</td><td rowspan="2">符合</td><td>二十六面體</td><td>24/48/26</td><td>符合</td></tr>
<tr><td>二十六面體</td><td>48/72/26</td><td>符合</td></tr>
<tr><td rowspan="2">十四面體</td><td rowspan="2">24/36/14</td><td rowspan="2">符合</td><td>三十八面體</td><td>36/72/38</td><td>符合</td></tr>
<tr><td>三十八面體</td><td>72/108/38</td><td>符合</td></tr>
<tr><td rowspan="2">十四面體</td><td rowspan="2">24/36/14</td><td rowspan="2">符合</td><td>三十八面體</td><td>36/72/38</td><td>符合</td></tr>
<tr><td>三十八面體</td><td>72/108/38</td><td>符合</td></tr>
<tr><td rowspan="2">三十二面體</td><td rowspan="2">30/60/32</td><td rowspan="2">符合</td><td>六十二面體</td><td>60/120/62</td><td>符合</td></tr>
<tr><td>六十二面體</td><td>120/180/62</td><td>符合</td></tr>
<tr><td rowspan="2">三十二面體</td><td rowspan="2">60/90/32</td><td rowspan="2">符合</td><td>九十二面體</td><td>90/180/92</td><td>符合</td></tr>
<tr><td>九十二面體</td><td>180/270/92</td><td>符合</td></tr>
<tr><td rowspan="2">三十二面體</td><td rowspan="2">60/90/32</td><td rowspan="2">符合</td><td>九十二面體</td><td>90/180/92</td><td>符合</td></tr>
<tr><td>九十二面體</td><td>180/270/92</td><td>符合</td></tr>
</table>

我們將 21 個截角後的新多面體進行尤拉公式的驗證，發現這 21 個新多面體的點線面個數在尤拉公式中皆成立。

五、 均勻多面體驗證

我們觀察截角多面體的頂點相鄰面形並紀錄，發現 21 個截角多面體的面形結構，皆具有一個或二個的排列規律。而其中有三個符合了均勻多面體的條件，皆為正多邊形且僅有單一規律。

編號	截角後多面體	立體角面形排列	均勻多面體∨
1	八面體(正三角形x4、正六邊形x4)	6-3-6	∨
2	十四面體(正三角形x8、正方形x6)	4-3-4-3	∨
3	十四面體(正三角形x8、八邊形x6)	8-3-8	(須為正多邊形)
4	十四面體(正方形x6、六邊形x8)	6-4-6	(須為正多邊形)
5	三十二面體(正三角形x20、正五邊形x12)	5-3-5-3	∨
6	三十二面體(正三角形x20、十邊形x12)	10-3-10	(須為正多邊形)
7	三十二面體(正五邊形x12、六邊形x20)	6-5-6	(須為正多邊形)
8	二十面體 (正三角形x4、正六邊形x4、三角形x12)	6-3-3-6 3-3-3-6	1. 須為正多邊形 2. 非單一規律
9	二十面體 (三角形x12、正六邊形x4、十二邊形x4)	3-6-12 3-12-12	1. 須為正多邊形 2. 非單一規律
10	二十六面體 (正三角形x8、正方形x6、四邊形x12)	3-4-4-4	須為正多邊形
11	二十六面體 (正六邊形x8、八邊形x6、四邊形x12)	4-6-8	須為正多邊形
12	三十八面體 (正三角形x8、三角形x24、正八邊形x6)	3-3-3-8 3-8-3-8	1.須為正多邊形 2.非單一規律
13	三十八面體 (三角形x24、六邊形x8、十六邊形x6)	3-6-16 3-16-16	1.須為正多邊形 2.非單一規律
14	三十八面體 (三角形x24、正方形x6、正六邊形x8)	4-3-6-3 6-3-6-3	1.須為正多邊形 2.非單一規律
15	三十八面體 (三角形x24、八邊形x6、十二邊形x8)	3-8-12 12-3-12	1.須為正多邊形 2.非單一規律
16	六十二面體 (四邊形x30、正五邊形x12、正三角形x20)	3-4-5-4	須為正多邊形

17	六十二面體 （四邊形×30、正六邊形×20、十邊形×12）	4-6-10	須為正多邊形
18	九十二面體 （三角形×60、正三角形×20、正十邊形×12）	10-3-10-3 3-3-3-10	1. 須為正多邊形 2. 非單一規律
19	九十二面體 （三角形×60、正六邊形×20、二十邊形×12）	3-20-6 3-20-20	1. 須為正多邊形 2. 非單一規律
20	九十二面體 （三角形×60、正五邊形×12、正六邊形×20）	5-3-6-3 6-3-6-3	1. 須為正多邊形 2. 非單一規律
21	九十二面體 （三角形×60、十邊形×12、十二邊形×20）	3-10-12 3-12-12	1. 須為正多邊形 2. 非單一規律

捌、討論

從模型截角研究觀察紀錄發現以下幾點

一、多面體有幾個頂點，就會截出幾個截面。因此新截面體的面數是原面數加上原頂點數。

二、最大截角後，會有共同的截點，因此原來面的邊數不變。

三、小截角後，每個截面處會增加截點，因此新截面會是原來面邊數的 2 倍。

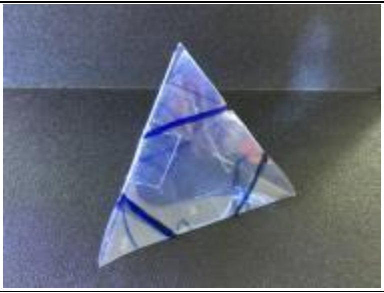
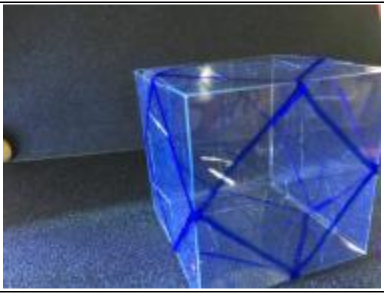
四、最大截角後，因新截面有共同的截點，所以新頂點數是原點數×截面邊數÷2。（例如正六面體的新頂點數是 8×3÷2＝12；正八面體的新頂點數是 6×4÷2＝12；正二十面體的新頂點數是 12×5÷2＝30。）

五、每個小截角後，都會產生新的截點，且新頂點數是原點數×截面邊數。（例如正四面體的截面是三角形，新截點數共有 4×3＝12；正八面體的截面是正方形，新截點數共有 6×4＝24；正二十面體的截面是五邊形，新截點數共有 12×5＝60。）

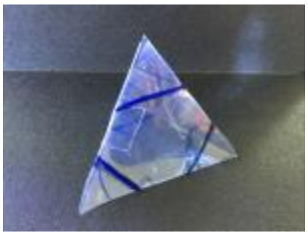
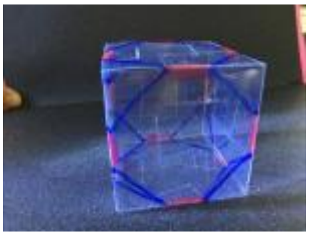
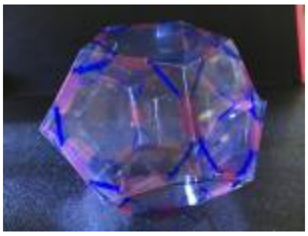
六、大截角後會有 4 個面共點，小截角後會有 3 個面共點。

七、所有的截角多面體皆符合尤拉的點線面公式。

八、除了柏拉圖立體符合均勻多面體外，在截角多面體的八面體（正四面體的小截角)、十四面體（正六面體和正八面體的大截角)與三十二面體(正十二面體和正二十面體的大截角）也符合了多面體。

九、發現柏拉圖立體透過兩次截角後的 21 個新多面體中有 11 個與阿基米德立體相似。

 八面體	 十四面體	 十四面體	 十四面體
 三十二面體	 三十二面體	 三十二面體	 二十六面體
 二十六面體	 六十二面體	 六十二面體	

表：截角後產生的新截面體之點面對照表

柏拉圖立體	第一次截角		第二次截角	
正四面體 正三角 4 點 4	大截角	八面體 三邊 8、點 6 ＊與柏拉圖正八面體相似，不計。	大截角	
			小截角	
	小截角	八面體 三邊 4、六邊 4 點 6 ◎阿基米德 ---八面體	大截角	二十面體 三邊 16、六邊 4 點 18
			小截角	二十面體 三邊 12、六邊角 4、十二邊 4 點 36
正六面體 正方形 6 點 8	大截角	十四面體 三邊 8、四邊 6 點 12 ◎阿基米德 ---十四面體之 1	大截角	二十六面體 四邊 18、三邊 8 點 24 ◎阿基米德 ---二十六面體之 2
			小截角	二十六面體 四邊 12、六邊 8、八邊 6 點 48 ◎阿基米德 ---二十六面體之 1
	小截角	十四面體 三邊 8、八邊 6 點 24 ◎阿基米德 ---十四面體之３	大截角	三十八面體 三邊 32、八邊 6 點 36
			小截角	三十八面體 三邊 24、六邊 8、十六邊 6 點 72
正八面體 正三角 8 點 6	大截角	十四面體 三邊 8、四邊 6 點 12 ＊與大截正六面體的截面體相似，不另行探討	大截角	
			小截角	

	小截角	**十四面體** 四邊 6、六邊 8 點 12 **◎阿基米德** **---十四面體之２**	大截角	**三十八面體** 三邊 24、四邊 6、六邊 8 點 36
			小截角	**三十八面體** 三邊 24、八邊 6、十二邊 8 點 72
正十二面體 正五角 12 點 20	大截角	**三十二面體** 三邊 20、五邊 12 點 30 **◎阿基米德** **---三十二面體之２**	大截角	**六十二面體** 四邊 30、五邊 12、三邊 20 點 60 **◎阿基米德** **---六十二面體之２**
			小截角	**六十二面體** 四邊 30、六邊 20、十邊 12 點 120 **◎阿基米德** **---六十二面體之１**
	小截角	**三十二面體** 三邊 20、十邊 12 點 60 **◎阿基米德** **---三十二面體之３**	大截角	**九十二面體** 三邊 80、十邊 12 點 90
			小截角	**九十二面體** 三邊 60、六角 20、二十邊 12 點 180
正二十面體 正三角 20 點 12	大截角	**三十二面體** 五邊 12、三邊 20 點 30 ＊與大截正十二面體的截面體相似，不另行探討	大截角	
			小截角	
	小截角	**三十二面體** 五邊 12、六邊 20 點 60 **◎阿基米德** **---三十二面體之１**	大截角	**九十二面體** 三邊 60、五邊 12、六邊 60 點 90
			小截角	**九十二面體** 三邊 60、十邊 12、十二邊 20 點 180

玖、 結論

將柏拉圖的五個正多面體透過截角，可以形成兩種以上多邊形所構成的多面體，我們以邊長的 1/2 截角與邊長的 1/3 截角兩種方式，共找到了 21 種的多面體，並在過程中討論歸納出了通用的截角多面體模組，可以推測到其他多面體的截面體模型。

本次研究多面體截角之截面體的模組形式如下：

多面體	原面形/面數(A)	原頂點數(B)	頂點相鄰面數(C)	頂點數=截面數(B)	截面體面數=截面數+原面數(B+A)	頂點相鄰面數(C)=截面形	大截角		小截角	
							原面形/面數不變	新截體點數=原點數×截面邊數÷2 (B×C÷2)	原面邊數增加2倍	新截體點數=原點數×截面邊數(B×C)
正四面體	三邊/4	4	3	4	8 面體	三邊/4	三邊/4	6	六邊/4	12
正六面體	四邊/6	8	3	8	14 面體	三邊/8	四邊/6	12	八邊/6	24
正八面體	三邊/8	6	4	6	14 面體	四邊/6	三邊/8	12	六邊/8	24
正十二面體	五邊/12	20	3	20	32 面體	三邊/20	五邊/12	30	十邊/12	60
正二十面體	三邊/20	12	5	12	32 面體	五邊/12	三邊/20	30	六邊/20	60
小截正四面體(八面體)	三邊/4 六邊/4	12	3	12	20 面體	三邊/12	三邊/4 六邊/4	18	六邊/4 十二邊/4	36
小截正六面體(十四面體)	三邊/8 八邊/6	24	3	24	38 面體	三邊/24	三邊/8 八邊/6	36	六邊/8 十六邊/6	72
小截正八面體(十四面體)	四邊/6 六邊	24	3	24	38 面體	三邊/24	四邊/6 六邊	36	八邊/6 十二	72

	/8						/8		邊/8	
小截正十二面體（三十二面體）	三邊/20 十邊/12	60	3	60	92 面體	三邊/60	三邊/20 十邊/12	90	六邊/20 二十邊/12	180
小截正二十面體（三十二面體）	五邊/12 六邊/20	60	3	60	92 面體	三邊/60	五邊/12 六邊/20	90	十邊/12 十二邊/20	180
截半正六面體(十四面體)	三邊/8 四邊/6	12	4	12	26 面體	四邊/12	三邊/8 四邊/6	24	六邊/8 八邊/6	48
截半正十二面體（三十二面體）	三邊/20 五邊/12	30	4	30	62 面體	四邊/30	三邊/20 五邊/12	60	六邊/20 十邊/12	120

本模組驗證了柏拉圖立體的兩次大小截角的多面體，並可以以此模組嘗試進行第三次、第四次…的截角推論，但截角後的結論仍有待驗證。

拾、參考資料及其他

葉偉文（譯)。*雅典的幾何*。臺北市：天下文化出版。

何永安(2008)。*阿基米德多面體的視覺化(未出版之碩士論文)*。中華大學應用數學系，新竹市。

邱柏榮(2010)。*以正多面體焦急所表示的多面體(未出版之碩士論文)*。清華大學數學系，新竹市。

葉晉嘉(2008)。*與正十二面體相關的幾何構造(未出版之碩士論文)*。清華大學數學系，新竹市。

廖麗敏(2007)。*多面體的積木作圖(未出版之碩士論文)*。清華大學數學系，新竹市。

【評語】080413

本參展作品討論空間之中之多面體在截角之後其點、線、面之個數的差異，並藉此計算由尤拉公式中“V-E+F=2”的不變量，參展學生對於模型的製作非常用心，並完整討論了 21 種不同的截角組合是一件相當不錯的作品。