

中華民國第 56 屆中小學科學展覽會

作品說明書

國小組 數學科

最佳創意獎

080412

神算

學校名稱：新北市樹林區大同國民小學

作者： 小五 周家萱 小五 詹雅涵 小四 黃子恆	指導老師： 顏榮皇 張若羚
---	-----------------------------

關鍵詞：轉換、影響途徑、正四面體

摘要

在這個研究，我們成功的使用數學方法，解決下列的題目：

紅綠藍三種球各若干個排成第一列，但從第二列起，球的顏色由其左上和右上決定。若左上右上不同色，則此球為第三種顏色；若左上右上同色，則此球同色。問 n 是多少時，可以由第一列直接預測最後一列球的顏色？如何判斷？

我們不只發現一般式，同時透過研究的過程，發現奇偶性、不變量、反運算的數學現象。並設計了2層結構的基本單元，提出討論。

我們的創新之一是推廣原題目—從平面到立體，嘗試著利用六層正四面體的模式，來解釋題目在三維空間的應用。

壹、研究動機

請考慮科學研習月刊2015年4月第48頁第6題。

題目 1.1.1(本研究的主要題目)

如圖 1.1.2，一共 n 個紅綠藍三種顏色的球各若干個排成第一列。在下一列排 $n-1$ 個球（每個球插在兩個球的空隙）成第二列，以此類推排第三列…直到最後一列只有一個球。但從第二列起，球的顏色由其左上和右上決定。若左上和右上不同色，則此球為第三種顏色。若左上和右上同色，則此球同色。問 n 是多少時，可以由第一列直接預測最後一列球的顏色？如何判斷？

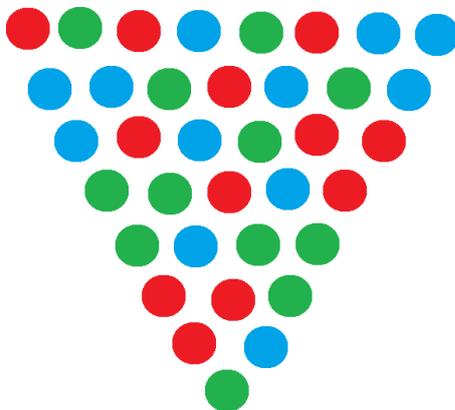


圖 1.1.2

請注意

n 是多少時，可以由第一列直接預測最後一列球的顏色？如何判斷？

依題目的敘述，出題的教授可能認為在某種特定的條件下，才可以直接由第一列直接預測最後一列球的顏色。若使用數學方法可以對任何自然數 n ，猜測最後一顆球的顏色。那麼，我們會得到一個很好的結果。

就常理而言，顏色無法比較大小。因此，本研究必須要很慎重的選擇一個恰當的轉換系統。我們使用國小電腦課教的軟體，很正確且迅速的將我們選定的轉換系統運算。透過窮舉的方式，做分類、一步接一步的計算、分析、統整。使用數學方法簡潔的處理問題。這種的思維，除了幫忙我們的科展研究，認識數學之美，也讓我們學習如何做其他學科的研究。

在題目解完後，我們設計了基本單元，不僅研究 3 層結構的「連接圖」和「有向圖」，還研究 4 層結構，發現「豬羊變色」、「循環變色」、「虛擬同層鍵結」、「虛擬同值鍵結」和「虛擬對稱」的有趣數學現象。

在縣市級比賽後，我們對於正四面體的新課題，感到一些興趣，因此開始深入研究，探討一般式—如圖 1.1.3 的六層三角錐堆疊。我們依照題目 1.1.1 的一般式，研究六層正四面體的顏色變化情形及一般式。此時，正四面體就是所謂的三角錐。

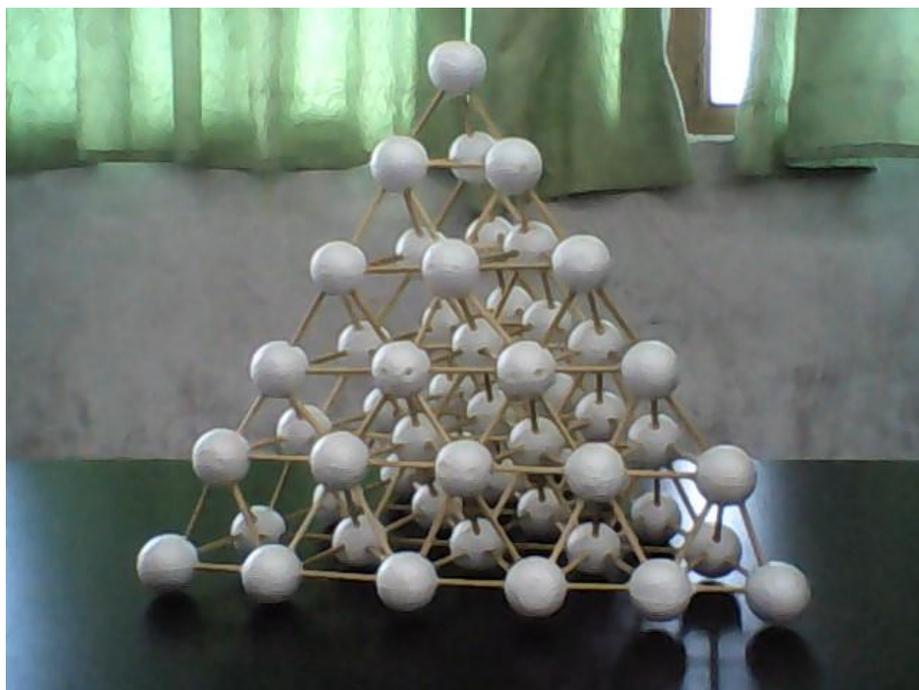


圖 1.1.3

貳、研究目的

一、研究目的

如題目 1.1.1，圖 1.1.2。從第二列起，球的顏色由其左上和右上決定。問 n 是多少時，可以由第一列直接預測最後一列球的顏色？如何判斷？

使用基本單元的設計研究平面的四層結構。同時，將延伸研究三維空間研究正四面體。

二、研究架構

本研究架構如圖 2.2.1。



圖 2.2.1

參、研究設備與器材

紙、筆、電腦及微軟試算表

肆、研究過程或方法

一、轉換

首先，我們必須找到一個轉換方法，符合題目 1.1.1。為方便研究，規定

定義 4.1.1(將顏色轉換成數字)

將圖 1.1.2 的顏色以數字代表。紅色以 0 代表，綠色以 1 代表，藍色以 2 代表。

定義 4.1.2(計算第 i 列第 j 行的表徵)

由上而下，由左而右，規定 n 層第 i 列第 j 行的數值為 $G_{i,j}^n$ 。其中， $1 \leq i \leq n$ ， $1 \leq j \leq n-i+1$ 。

考慮題目 1.1.1 的兩種狀況：

若左上右上不同色，則此球為第三種顏色。 (4.1.3)

若 $G_{i,j}^n=0$ 且 $G_{i,j+1}^n=1$ 則 $G_{i+1,j}^n=2$ ；若 $G_{i,j}^n=1$ 且 $G_{i,j+1}^n=0$ 則 $G_{i+1,j}^n=2$ 。

若 $G_{i,j}^n=0$ 且 $G_{i,j+1}^n=2$ 則 $G_{i+1,j}^n=1$ ；若 $G_{i,j}^n=2$ 且 $G_{i,j+1}^n=0$ 則 $G_{i+1,j}^n=1$ 。

若 $G_{i,j}^n=1$ 且 $G_{i,j+1}^n=2$ 則 $G_{i+1,j}^n=0$ ；若 $G_{i,j}^n=2$ 且 $G_{i,j+1}^n=1$ 則 $G_{i+1,j}^n=0$ 。

若左上右上同色，則此球同色。 (4.1.4)

若 $G_{i,j}^n=G_{i,j+1}^n$ 則 $G_{i+1,j}^n=G_{i,j+1}^n=G_{i,j}^n$ 。

如此，可以將圖 1.1.2 轉換成圖 4.1.5。以數字代表顏色，符合題目 1.1.1 的要求。

此時，依題目 1.1.1，圖 4.1.5，圖 4.1.6，我們規定

定義 4.1.7(運算本研究對象的數值之符號)

給定 n 層結構，將第 $t+1$ 列的 $G_{t+1, s+1}^n, G_{t+1, s+2}^n, G_{t+1, s+3}^n, \dots, G_{t+1, s+m+1}^n$ 的數值推算至 $G_{t+m+1, s+1}^n$

的運算為 $F(G_{t+1, s+1}^n, G_{t+1, s+m+1}^n)$ ，其數值規定為 $|F(G_{t+1, s+1}^n, G_{t+1, s+m+1}^n)|$ 。其中， $0 \leq t \leq n-1$ ，

$0 \leq s \leq n-1, 0 \leq m \leq n-1, 1 \leq t+m \leq n-1$ 且 $1 \leq s+m \leq n-1$ 。如圖 4.1.6。

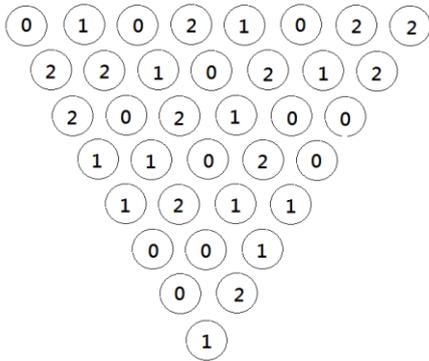


圖 4.1.5 用數字代表顏色

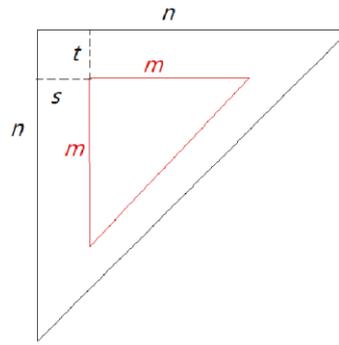


圖 4.1.6

此時，我們有一個想法，若我們使用加、減、乘、除的四則運算，計算一般式，一定和 3 有關。經過窮舉，發現

$$G_{t+1, s+1}^n + G_{t+1, s+2}^n + G_{t+2s+1}^n \equiv 0 \pmod{3}。 \quad (4.1.8)$$

二、分類

考慮 n 層結構，第 1 列放 n 顆球，其放法由左到右的排法會出現 3^n 種。事實上，我們可以由下面的例子得到分類的想法。也就是，將第一列的球由左至右排列，我們將會有下列現象。其中，符號 \cong ，代表分類的同一類。

給定 1 層，只有一類。

給定 2 層，有 2 類：

第 1 類： $(0, 0) \cong (1, 1) \cong (2, 2)$ 。得到答案：若左上右上同色，則此球同色。

第 2 類： $(0, 1) \cong (1, 2) \cong (2, 1)$ 。得到答案：若左上右上不同色，則此球為第三種顏色。

給定 3 層，有 4 類：

第 1 類：三同，得到答案：和第 1 列第 1 顆球同色。

$$(0, 0, 0) \cong (1, 1, 1) \cong (2, 2, 2)。如圖 4.2.1 例子。$$

第 2 類：二同一異，呈對稱，得到答案：和第 1 列的任兩種顏色不同。

$$(0, 1, 0) \cong (0, 2, 0) \cong (1, 0, 1) \cong (1, 2, 1) \cong (2, 0, 2) \cong (2, 1, 2)。$$

得到的答案：和第 1 列的任兩種顏色不同。如圖 4.2.2。

第 3 類：二同一異，不對稱，得到答案有兩種類型。

$$(0, 1, 1) \cong (0, 2, 2) \cong (1, 0, 0) \cong (1, 2, 2) \cong (2, 0, 0) \cong (2, 1, 1)。$$

得到的答案：和第 1 列第 1 顆球同色。

$$(0, 0, 1) \cong (0, 0, 2) \cong (1, 1, 0) \cong (1, 1, 2) \cong (2, 2, 0) \cong (2, 2, 1)。$$

得到的答案：和第 1 列第 3 顆球同色。如圖 4.2.3。

第 4 類： $(0, 1, 2) \cong (0, 2, 1) \cong (1, 0, 2) \cong (1, 2, 0) \cong (2, 0, 1) \cong (2, 1, 0)。$

得到的答案：和第 1 列第 2 顆球同色。如圖 4.2.4。

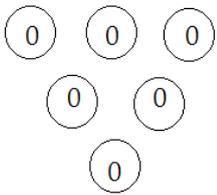


圖 4.2.1.

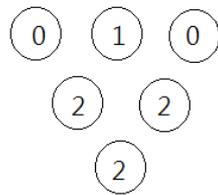


圖 4.2.2

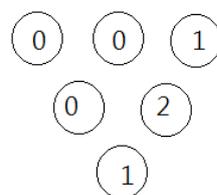


圖 4.2.3

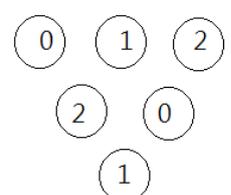


圖 4.2.4

得到分類的方法，可以讓我們可以幫忙我們減少電腦模擬困擾。

三、特殊交換性

已知

數列(1, 1, 0)產生的結果是 0，如圖 4.3.1。

數列(0, 1, 1)產生的結果是 0，如圖 4.3.2。

數列(1, 0, 1)產生的結果是 2，如圖 4.3.3。

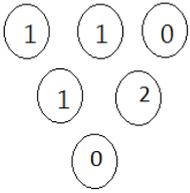


圖 4.3.1

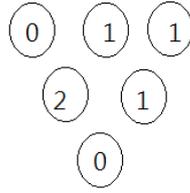


圖 4.3.2

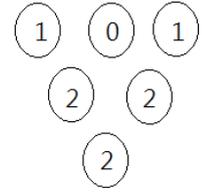


圖 4.3.3

發現，

數列(110)產生的結果是 0，和數列(101)產生的結果是 2，兩者所結果不相同。

數列(011)產生的結果是 0，和數列(101)產生的結果是 2，兩者所結果不相同。

但是，

$$\text{數列}(011)\text{形成數值 } 0，\text{同時，數列}(110)\text{形成數值 } 0。 \quad (4.3.4)$$

此時，稱為特殊交換性。

再考慮，第一列呈現對稱對應情形，如兩數列，

(0, 1, 2, 1, 1)形成結果是 0；及(1, 1, 2, 1, 0)形成結果也是 0。

此時，

$$a_i = b_{6-i}，$$

發現

$$\text{數列} \langle a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \rangle, \langle b_1, b_2, b_3, \dots, b_n \rangle, \text{若 } a_i = b_{n-i+1}, \text{則 } |F(a_1, a_n)| = |F(b_1, b_n)|。 \quad (4.3.5)$$

推理

$$\text{給定 } n \text{ 層結構，若 } G_{1,j}^n = G_{1,n-j+1}^n, \text{則 } G_{i,j}^n = G_{i,n-i-j+1}^n, \text{結構呈線對稱。} \quad (4.3.6)$$

其中，式子 4.3.12, $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq \left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor$ 。

四、4 層結構

當我們使用微軟的試算表計算 4 層結構時，發現

演算方法 4.4.1(4 層演算方法)

$$\left| F(G_{t+1,s+1}^n, G_{t+1,s+4}^n) \right| = (2 \times G_{t+1,s+4}^n - G_{t+1,s+1}^n) \pmod{3}。 \text{其中，} 0 \leq t \leq n-1, 0 \leq s \leq n-1, 4 \leq n。$$

如此，

所有自然數 n ，都可以利用運算方式找到答案。 (4.5.5)

至於，

題目 1.1.1 的要求，由第一列直接預測最後一列球的顏色，將會是我們的努力目標。

六、運算表

為了達到第一列的顏色使用一次預測第 n 列第 1 個的球顏色，我們碰上二個麻煩：

如何知道顏色相碰的運算情形？

如何知道第 1 列由左至右第 i 球對第 n 列第 1 個球的影響途徑？

我們會有

$0+0=0$ ， $2 \times 0=0$ ， $0 \equiv 0(\text{mod } 3)$ ，符合 0 和 0 產生 0 的結果。

$1+1=2$ ， $2 \times 2=4$ ， $4 \equiv 1(\text{mod } 3)$ ，符合 1 和 1 產生 1 的結果。

$2+2=4$ ， $2 \times 4=8$ ， $8 \equiv 2(\text{mod } 3)$ ，符合 2 和 2 產生 2 的結果。

又，基於同類觀念，0 和 1 產生 2，與 1 和 0 產生 2，產生的結果均相同，我們還是會有：

$0+1=1$ ， $2 \times 1=2$ ， $2 \equiv 2(\text{mod } 3)$ ，符合 0 和 1 產生 2 的結果。

$0+2=2$ ， $2 \times 2=4$ ， $4 \equiv 1(\text{mod } 3)$ ，符合 0 和 2 產生 1 的結果。

$1+2=3$ ， $2 \times 3=6$ ， $6 \equiv 0(\text{mod } 3)$ ，符合 1 和 2 產生 0 的結果。

依照定義 4.1.1，我們使用 3 個整數代表 3 種顏色。於是，我們會有表 4.6.1 的表格。

表 4.6.1

$G_{i, j+1}^n$	0	1	2
0	0	2	1
1	2	1	0
2	1	0	2

很顯然，式子 4.1.8

$$G_{t+1, s+1}^n + G_{t+1, s+2}^n + G_{t+2, s+1}^n \equiv 0 \pmod{3}。$$

成立。

本研究巧妙的使用轉換的運算。這和一般科學家一樣，尋找一個數學結構，解決我們的數學問題。如此，我們在這個章節，知道如何知道顏色相碰的運算情形。

七、影響路徑

考慮 1 層結構，如圖 4.7.1， a 到 a 只有 1 種影響路徑。

考慮 2 層結構，如圖 4.7.2， a 到 c 只有 1 種影響路徑。

b 到 c 只有 1 種影響路徑。

考慮 3 層結構，如圖 4.7.3， a 到 d 只有 1 種影響路徑。

b 到 d 共有 2 種影響路徑。

c 到 d 只有 1 種影響路徑。

考慮 4 層結構，如圖 4.7.4， a 到 e 只有 1 種影響路徑。

b 到 e 共有 3 種影響路徑。

c 到 e 只有 3 種影響路徑。

d 到 e 只有 1 種影響路徑。

1
 a

1 1
 a b
 c

1 2 1
 a b c

 d

1 3 3 1
 a b c d

 e

圖 4.7.1

圖 4.7.2

圖 4.7.3

圖 4.7.4

發現

$$\text{給定 } n \text{ 層結構，} G_{1, j}^n \text{ 到 } G_{n, 1}^n \text{ 的影響路徑有 } C_{j-1}^{n-1} \text{ 條，} 1 \leq j \leq n。 \quad (4.7.5)$$

式子 4.7.5， C_{j-1}^{n-1} 代表 $n-1$ 的相異物取出 $j-1$ 個方法物。

伍、研究結果

請注意，

在國小數學課本第 10 冊第 8 單元提到巴斯卡三角形[2]。

請再觀察

給定 2 層結構： $c \equiv (-1)^1 \times (C_0^1 \times a + C_1^1 \times b) \pmod{3}$ ，如圖 5.1.1。

給定 3 層結構： $g \equiv (-1)^2 \times (C_0^2 \times d + C_1^2 \times e + C_2^2 \times f) \pmod{3}$ ，如圖 5.1.2。

給定 4 層結構： $l \equiv (-1)^3 \times (C_0^3 \times h + C_1^3 \times i + C_2^3 \times j + C_3^3 \times k) \pmod{3}$ ，如圖 5.1.3 及圖 5.1.4。

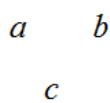


圖 5.1.1



圖 5.1.2

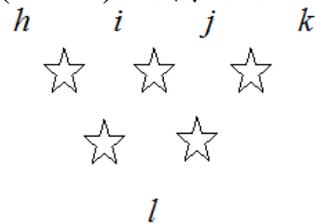


圖 5.1.3

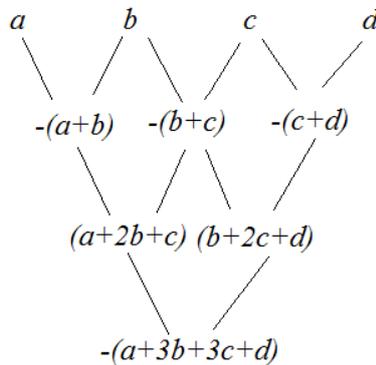


圖 5.1.4 4 層結構的一般式

考慮

$$a + b \equiv a + b \pmod{3}, \forall a, b \in \mathbb{Z}. \quad (5.1.5)$$

式子 4.1.8， $G_{i,j+1}^n \equiv -(G_{i,j}^n + G_{i,j+1}^n) \pmod{3}$ ，和

式子 4.5.5，給定 n 層結構， $G_{1,j}^n$ 到 $G_{n,1}^n$ 的影響路徑有 C_{j-1}^{n-1} 條。

得到

演算方法 5.1.6

$\left| F(G_{t+1, s+1}^n, G_{t+1, s+m+1}^n) \right| \equiv G_{t+m+1, s+1}^n \equiv ((-1)^{m-1} \times (\sum_{j=0}^{m-1} C_j^{m-1} \times G_{t+1, s+j+1}^n)) \pmod{3}$ 。其中， $0 \leq t \leq n-1$ ，

$0 \leq s \leq n-1$ ， $0 \leq m \leq n-1$ ， $1 \leq t+m \leq n-1$ 且 $1 \leq s+m \leq n-1$ 。

[證明]

顏色部分，依式子 4.1.8， $G_{i, j+1}^n = -(G_{i, j}^n + G_{i, j+1}^n) \pmod{3}$ 。

運算部分，每 m 次運算則乘以 $(-1)^{m-1}$ 。

影響路徑，我們以數學歸納法證明。

當 $m=1$ 時，1 層只有 1 個， $C_0^0 = 1$ 。顯然，成立。

當 $m=2$ 時，2 層只有 2 個， $C_0^1 = 1$ ， $C_1^1 = 1$ 。顯然，成立。

設 $m=k$ 時， k 層有 k 個，第 k 層第 $i+1$ 個為 C_i^{k-1} ，第 k 層第 $i+2$ 個為 C_{i+1}^{k-1} 。此時， $0 \leq i \leq k-3$ 。

當 $m=k+1$ 時， $k+1$ 層有 $k+1$ 個，由 C_0^k 、 C_1^k 、 C_2^k 、 C_3^k 、 \dots 、 C_k^k ，計 $k+1$ 個。

$$\begin{aligned} & C_i^{k-1} + C_{i+1}^{k-1} \\ &= \frac{(k-1)!}{i!(k-i-1)!} + \frac{(k-1)!}{(i+1)!(k-i-2)!} \\ &= (k-1) \times \left(\frac{i+1}{(i+1)!(k-i-1)!} + \frac{k-i-1}{(i+1)!(k-i-1)!} \right) \\ &= \frac{k!}{(i+1)!(k-i-1)!} \\ &= C_{i+1}^k \end{aligned}$$

此時，第 $k+1$ 層第 1 個是 $1 = C_0^k$ ，第 k 個是 $k = C_{k-1}^k$ 。

第 $k+1$ 層第 $i+2$ 個為 C_{i+1}^k 。其中， $0 \leq i \leq k-2$ 。

第 $k+1$ 層第 k 個是 $k = C_{k-1}^k$ ，第 $k+1$ 個是 $1 = C_k^k$ 。

數學歸納法成立。得證。

□

因而藉由演算方法 5.1.6 可以由第一列預測第 n 列的到三角形。

陸、討論

在這個研究，我們將討論一般式、基本單元、正四面體。

一般式是針對演算方法 5.1.6 提出討論。我們將在基本單元，討論平面的四層結構。三角錐就是立體的四面體。我們將討論，依照題目 1.1.1 的方式，討論三維的正四面體，如圖 1.1.3。

一、一般式的討論

(一) 奇偶性

考慮奇偶性。依照演算方法 5.1.6，得到

$$\text{奇數 } m, \quad \left| F(G_{t+1, s+1}^n, G_{t+1, s+m+1}^n) \right| \equiv \left(\sum_{j=0}^{m-1} C_j^{m-1} \times G_{t+1, s+j+1}^n \right) \equiv G_{t+m+1, s+1}^n \pmod{3}。 \quad (6.1.1)$$

$$\text{偶數 } m, \quad \left| F(G_{t+1, s+1}^n, G_{t+1, s+m+1}^n) \right| \equiv - \left(\sum_{j=0}^{m-1} C_j^{m-1} \times G_{t+1, s+j+1}^n \right) \equiv G_{t+m+1, s+1}^n \pmod{3}。 \quad (6.1.2)$$

再考慮，

$$2 \times a = (-a) \pmod{3}。$$

$$\text{偶數 } m, \quad \left| F(G_{t+1, s+1}^n, G_{t+1, s+m+1}^n) \right| \equiv 2 \times \left(\sum_{j=0}^{m-1} C_j^{m-1} \times G_{t+1, s+j+1}^n \right) \equiv G_{t+m+1, s+1}^n \pmod{3}。 \quad (6.1.3)$$

(二) 自我相似

請考慮式子 4.5.5 和巴斯卡定理有關。我們做了下列運算：

取 9 層的巴斯卡三角形，如圖 6.1.4；將圖 6.1.4 巴斯卡三角形各數值除以 3，取餘數，如圖 6.1.5。餘數為 0，以黑色三角形圈起來。延伸圖 6.1.5 如圖 6.1.6，翻轉後，如圖 6.1.7。

使用演算方法 5.1.6，

$$\left| F(G_{t+1, s+1}^n, G_{t+1, s+m+1}^n) \right| \equiv (-1)^{m-1} \times \sum_{j=0}^{m-1} (C_j^{m-1} \times G_{t+1, s+j+1}^n) \pmod{3}。$$

此時，數值比較小，比較不容易錯。

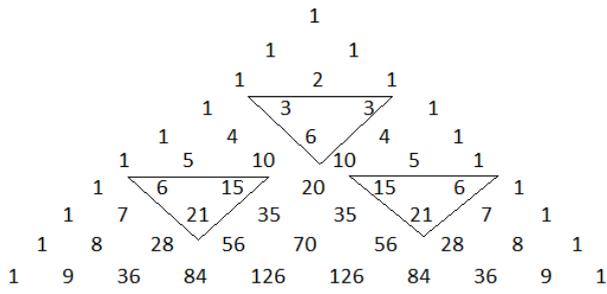


圖 6.1.4

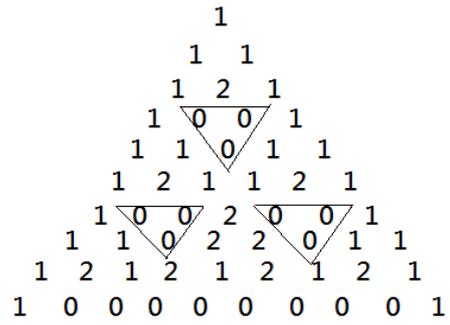


圖 6.1.5

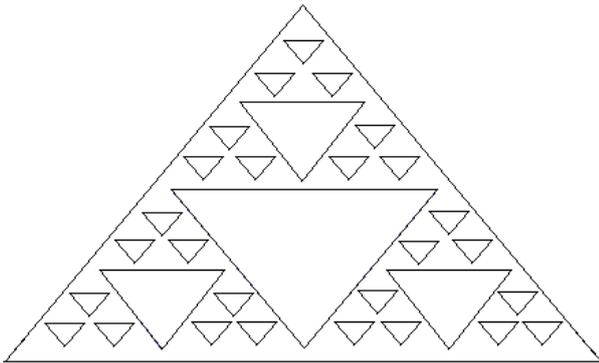


圖 6.1.6

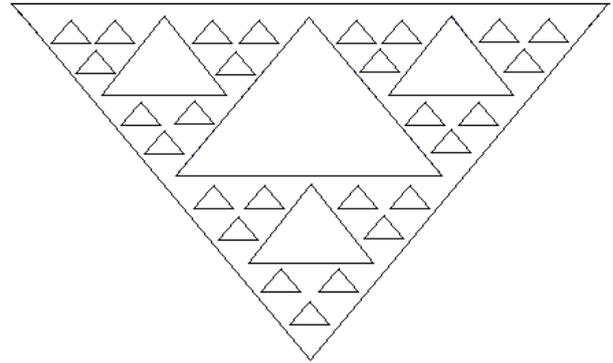


圖 6.1.7

再考慮圖 6.1.4

$$\text{只要是 } C_j^{m-1} \pmod{3} \equiv 0, \text{ 則 } C_j^{m-1} \times G_{t+1, s+j+1}^n \equiv 0 \pmod{3} \quad (6.1.8)$$

如此，

$$\text{當 } C_j^{m-1} = 3k, G_{t+1, s+j+1}^n \text{ 不會影響 } G_{t+m+1, s+1}^n \text{ 的數值。} \quad (6.1.9)$$

$$\text{當 } m = 3^k + 1 \text{ 時, } \left| F(G_{t+1, s+1}^n, G_{t+1, s+m}^n) \right| \equiv -(G_{t+1, s+1}^n + G_{t+1, s+m}^n) \pmod{3}, \forall k \in N. \quad (6.1.10)$$

(三)反運算

讓我們考慮一個數學性質「反運算」，也就是，由已知 $G_{t+m+1, s+1}^n$ ，反推未知的 $G_{t+1, s+j+1}^n$ 。

依題目 1.1.1，探討 $\left| F(G_{t+1, s+1}^n, G_{t+1, s+m+1}^n) \right| = G_{t+m+1, s+1}^n$ 的問題。現在改變題目，如題目 6.1.11

及圖 6.1.12。

題目 6.1.11

一共 n 個紅綠藍三種球各若干個排成第一列。在下一列排 $n-1$ 個球（每個球插空隙）成第二列，以此類推排第三列……直到最後一列只有一個球。從第二列起，球的顏色由其左上和右上決定。若左上右上不同色，則此球為第三種顏色。若左上右上同色，則此球同色。除了， $G_{t+1, s+j+1}^n$ 不知道數值為何，其他 $G_{t+i+1, s+1}^n$ 數值和 $G_{t+1, s+i+1}^n$ 數值都為已知，如圖 6.1.12。請問，是否可以由其他 $G_{t+1, s+i+1}^n$ 數值和 $G_{t+m+1, s+1}^n$ 數值推算 $G_{t+1, s+j+1}^n$ 數值？其中， $0 \leq i, j \leq m-1$ ；且 $i \neq j$ 。

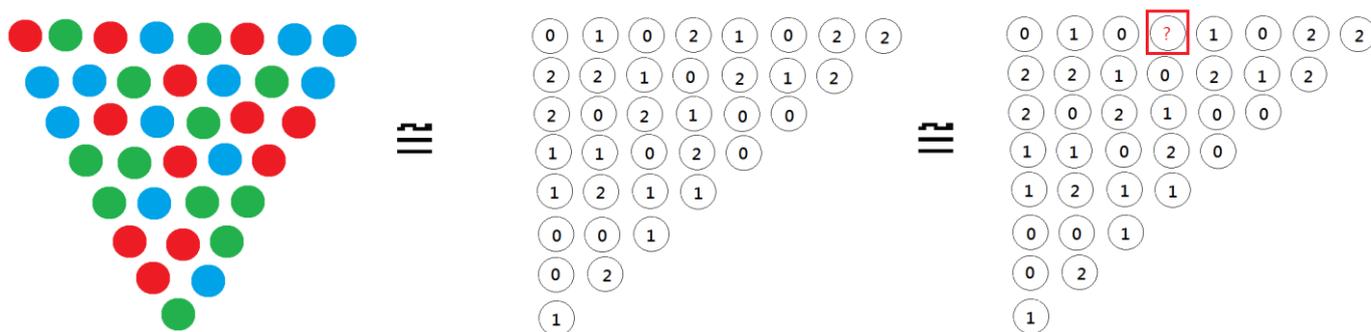


圖 6.1.12

考慮圖 6.1.12，依據算方法 5.1.6，

$$(-1)^7 \times (0 \times 1 + 1 \times 7 + 0 \times 21 + y \times 35 + 1 \times 35 + 0 \times 21 + 2 \times 7 + 2 \times 1) \equiv 1 \pmod{3}。$$

$$(-1)^7 \times (35y + 58) \equiv 1 \pmod{3}$$

$$y + 2 \equiv 1 \pmod{3}。$$

考慮，定義 1.2.1， $0 \leq y \leq 2$ ，得到 $y = 2$ ，

未知的顏色為藍色。

二、基本單元

在這個章節，我們提出另一個研究方向討論平面的 4 層結構。

(一)基本單元

依定義 1.2.1 我們發現，二層結構有 9 種基本單元，如表 6.2.1。

表 6.2.1

基本單元	原始結構	簡化
A	00 0	00
B	12 0	12
C	21 0	21
D	11 1	11
E	02 1	02
F	20 1	20
G	22 2	22
H	01 2	01
I	10 2	10

如 :A=(00)和 E=(02)只有前面相同，AE 連接一條線；

A=(00)和 H=(01)只有前面相同，AH 連接一條線；

A=(00)和 F=(20)只有後面相同，AF 連接一條線；

A=(00)和 I=(10)只有後面相同，AI 連接一條線；

如此，得到圖 6.2.2，連接圖。

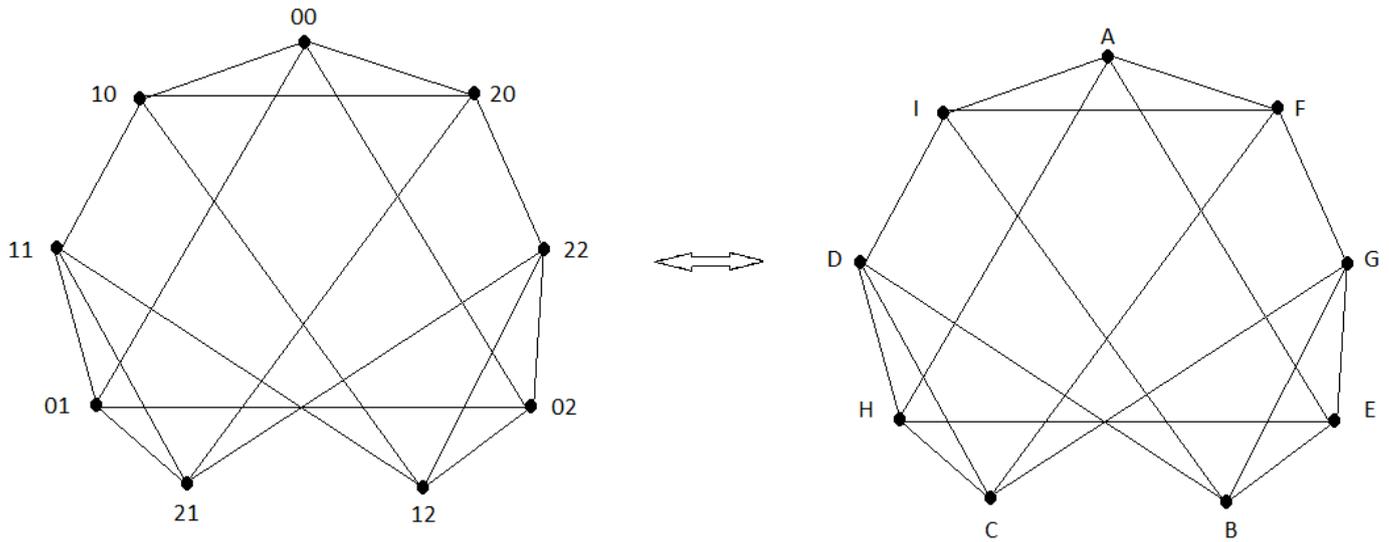


圖 6.2.2、連接圖

讓我們考慮有向線段問題。

再觀察表 6.2.4，發現 $AE=(002)$ ，但， EA 不存在，因此，製作成有向線段如圖 6.2.3。

我們會有圖 6.2.3，有向線圖。

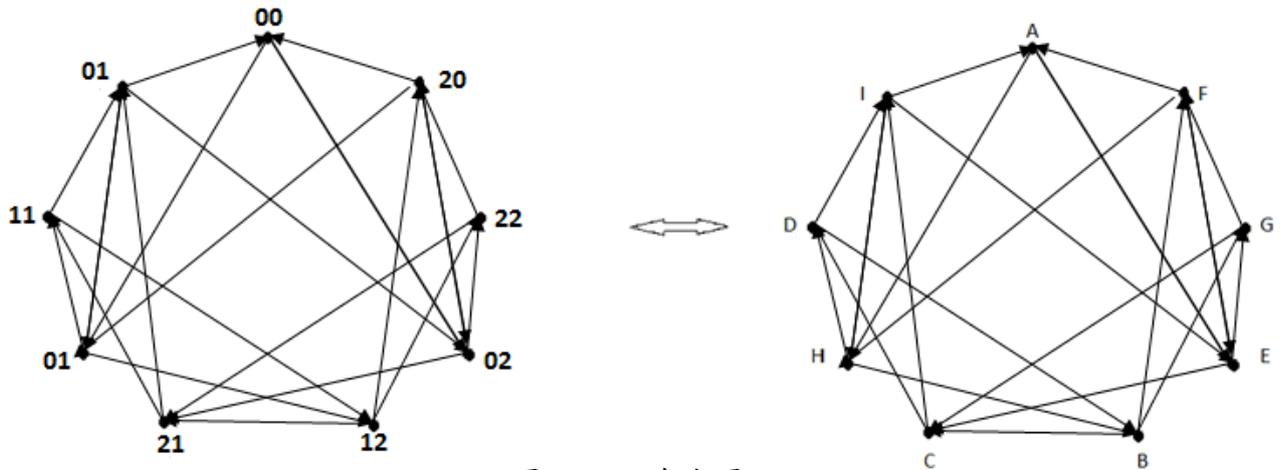


圖 6.2.3，有向圖

讓我們考慮一個問題，哪些基本單元可以由這 9 個基本單元的連續排列，相互作用形成。

整理後，得到 9 個基本單元的連續排列，相互作用形成橫列先，直欄後的結果，如表 6.2.4。

其中，表 6.2.4 是一個 3 層結構， 9×9 的方格，存在答案的有 27 個，不存在答案的有 54 個。

表 6.2.4

	A(00)	B(12)	C(21)	D(11)	E(02)	F(20)	G(22)	H(01)	I(10)
A(00)	A(00)	不存在	不存在	不存在	H(01)	不存在	不存在	E(02)	不存在
B(12)	不存在	不存在	A(00)	不存在	不存在	H(01)	E(02)	不存在	不存在
C(21)	不存在	A(00)	不存在	H(01)	不存在	不存在	不存在	不存在	E(02)
D(11)	不存在	I(10)	不存在	D(11)	不存在	不存在	不存在	不存在	B(12)
E(02)	不存在	不存在	I(10)	不存在	不存在	D(11)	B(12)	不存在	不存在
F(20)	I(10)	不存在	不存在	不存在	D(11)	不存在	不存在	B(12)	不存在
G(22)	不存在	不存在	F(20)	不存在	不存在	C(21)	G(22)	不存在	不存在
H(01)	不存在	F(20)	不存在	C(21)	不存在	不存在	不存在	不存在	G(22)
I(10)	F(20)	不存在	不存在	不存在	C(21)	不存在	不存在	G(22)	不存在

考慮 3 層的結構，A(00)，最後會形成 0，的結構有 3 種：，如圖

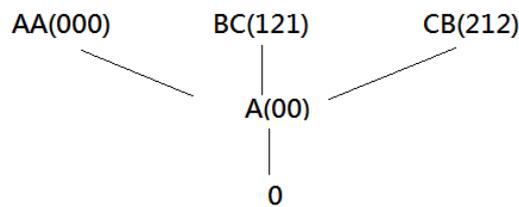


圖 6.2.5

此時，規定

排法通則 6.2.6(排出 k 層三角形的方法)

給定 k 層結構， $1 \leq i, j \leq k$ ，且 $j+1 \leq k$ ， $(G_{i,j}^n, G_{i,j+1}^n)$ 形成 $G_{i+1,j}^n$ 有三種排列情況：

先排 $G_{i,j}^n = G_{i,j+1}^n$ 成為 $G_{i+1,j}^n$ ，再排 $G_{i,j}^n < G_{i,j+1}^n$ 成為 $G_{i+1,j}^n$ ，最後排 $G_{i,j}^n > G_{i,j+1}^n$ 成為 $G_{i+1,j}^n$ 。

再依排法通則 6.2.6，考慮 3 層結構，先 D(11)最後成為 1 的結構，有 3 種情況如圖 6.2.7。

再依排法通則 6.2.6，考慮 3 層結構，先 G(22)最後成為 2 的結構，有 3 種情況如圖 6.2.8。

此時，

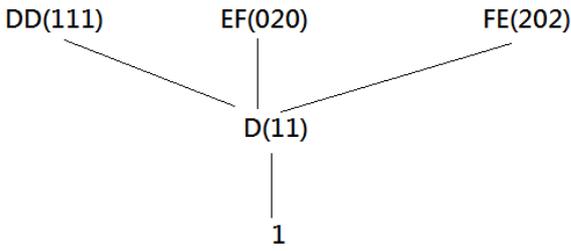


圖 6.2.7

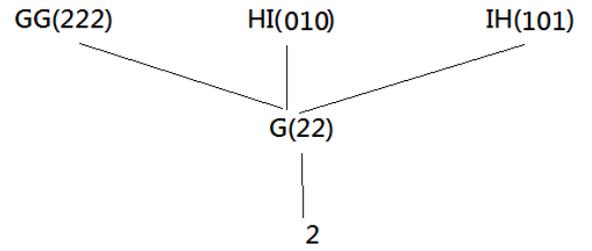


圖 6.2.8

(二)平面四層結構

依排法通則 6.2.6，考慮形成 A 最後形成 0 的 4 層結構，如圖 6.2.9，有 9 種。

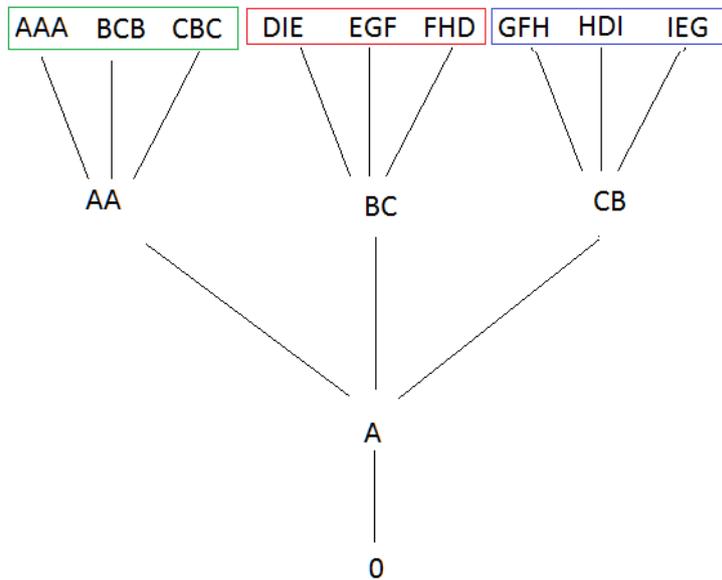


圖 6.2.9

此時，圖 6.2.9，

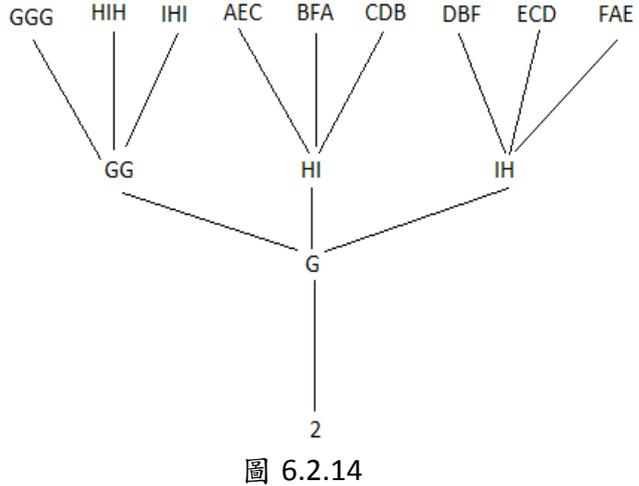
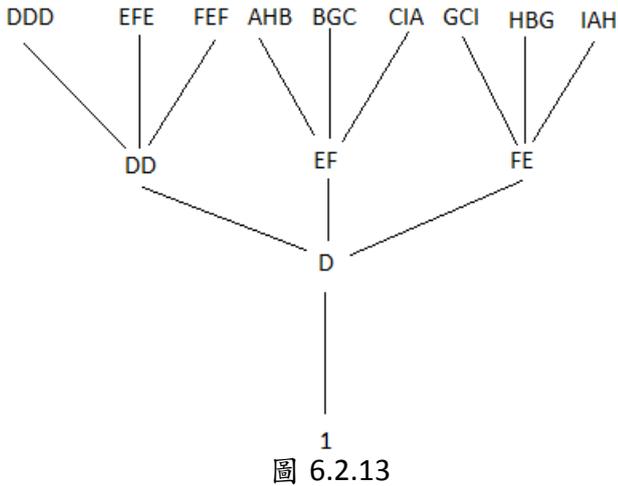
$$AAA(0000)、BCB(1212)、CBC(2121)均會形成 AA(000)，形成 A(00)最後形成 0。 \quad (6.2.10)$$

$$DIE(1102)、EGF(0220)、FHD(2011)均會形成 BC(121)，形成 A(00)最後形成 0。 \quad (6.2.11)$$

$$GFH(2201)、HDI(0110)、IEG(1022)均會形成 CB(212)，形成 A(00)最後形成 0。 \quad (6.2.12)$$

依排法通則 6.2.6，考慮形成 D 最後形成 1 的 4 層結構，如圖 6.2.13，有 9 種。

依排法通則 6.2.6，考慮形成 G 最後形成 2 的 4 層結構，如圖 6.2.14，有 9 種。



(三)平面 4 層結構的虛擬對稱

依排法通則 6.2.6，會有：

AAA(0000)形成 AA(000)，EGF(0220)形成 BC(121)，HDI(0110)形成 CB(212)出現虛擬對稱翻轉。
 DDD(1111)形成 DD(111)，BGC(1221)形成 EF(020)，IAH(1001)形成 FE(202)出現虛擬對稱翻轉。
 GGG(2222)形成 GG(222)，CDB(2112)形成 HI(010)，FAE(2002)形成 IH(101)出現虛擬對稱翻轉。
 也就是，虛擬對稱翻轉如表 6.2.15。

表 6.2.15

類型	形成 A(00)再形成 0	形成 D(11)再形成 1	形成 G(22)再形成 2
例子	AAA(0000)形成 AA(000)	DDD(1111)形成 DD(111)	GGG(2222)形成 GG(222)
	EGF(0220)形成 BC(121)	BGC(1221)形成 EF(020)	CDB(2112)形成 HI(010)
	HDI(0110)形成 CB(212)	IAH(1001)形成 FE(202)	FAE(2002)形成 IH(101)

此時，

表 6.2.15 有兩個原因

分類關係，因顏色定義問題，可以將形成 A(00)再形成 0，改成形成 G(22)再形成 2。

排序關係，依排法通則 6.2.6，形成 A(00)，先排等於，在排小於，最後是排大於。

(四)平面 4 層虛擬同層鏈結

我們發現

A(00)和 B(12)，B(12)和 C(21)，C(21)和 A(00)，均會形成 0 的數列會相互對應。

D(11)和 E(02)，E(02)和 F(20)，F(20)和 D(11)，均會形成 1 的數列會相互對應。

G(22)和 H(01)，H(01)和 I(10)，I(10)和 G(22)，均會形成 2 的數列會相互對應。

均是頭尾虛擬同層鏈結。

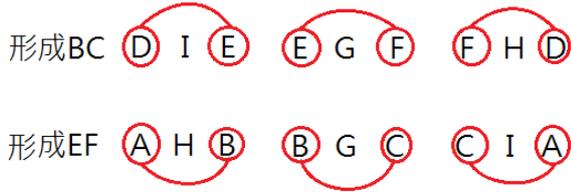


圖 6.2.16

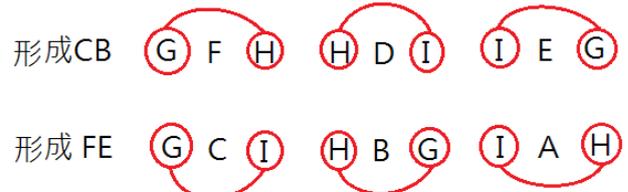


圖 6.2.17

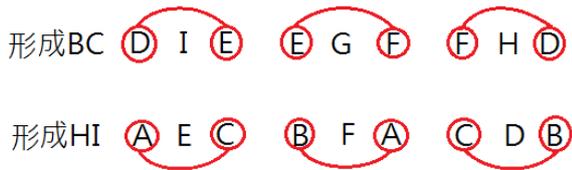


圖 6.2.18

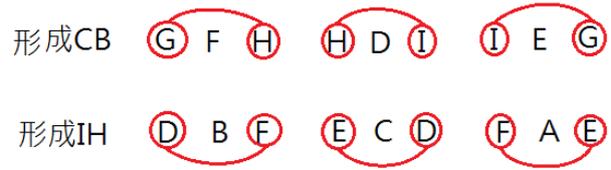


圖 6.2.19

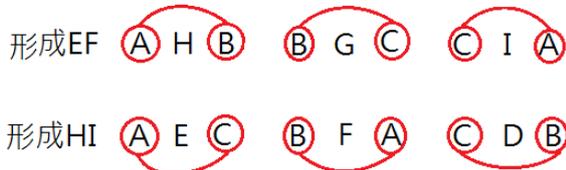


圖 6.2.20

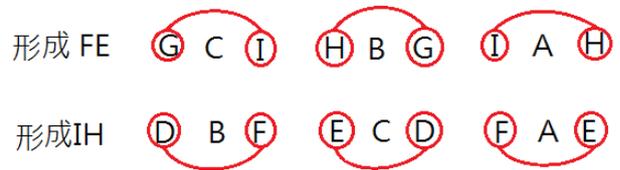


圖 6.2.21

此時，

4 層結構，設第一列為 $(a、b、c、d)$ ，其中，只有 $a、d$ 會影響第 4 列第 1 個數字。同時，

依排法通則 6.2.6，形成 A(00)，先排等於，在排小於，最後是排大於。

基於上述兩個理由，我們會有 4 層結構的同層鏈結。

(五) 平面 4 層結構的豬羊變色與循環變色

讓我們考慮 4 層結構，第一列填入(0120)。若我們做列下的運算，則發生下列的情形
將原來數列(0120)變成第一列(0120)，則 0 變成 0，1 變成 1，2 變 2 虛擬順時針循環變色，如
圖 6.6.1。此時，(0120)→(0120)，只要 1 次運算，就可以回到(0120)，週期為 1。

此時，我們會有

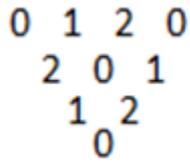


圖 6.2.22

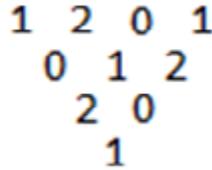


圖 6.2.23

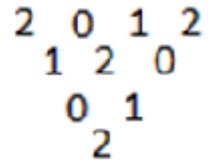


圖 6.2.24

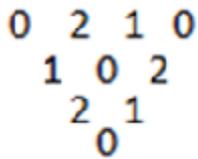


圖 6.2.25

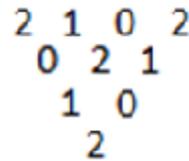


圖 6.2.26

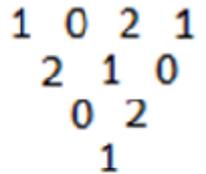


圖 6.2.27

整理，如表 6.2.28。

表 6.2.28

運算方式	特色	圖例	週期
		圖 6.2.22 變成	
(0120)→(0120)	自己變成自己	變成圖 6.2.22	1
(0120)→(1201)	虛擬順時針循環變色	變成圖 6.2.23	3
(0120)→(2012)	虛擬逆時針循環變色	變成圖 6.2.24	3
(0120)→(0210)	維持 0 不變，則 1 變成 2，2 變成 1 的豬羊變色	變成圖 6.2.25	2
(0120)→(2102)	維持 1 不變，則 0 變成 2，2 變成 0 的豬羊變色	變成圖 6.2.26	2
(0120)→(1021)	維持 2 不變，則 1 變成 0，0 變成 1 的豬羊變色	變成圖 6.2.27	2

(六) 平面 4 層虛擬同值鍵結

考慮 4 層結構的豬羊變色，0 變成 0，1 變成 2，2 變成 1，如圖 6.2.29。

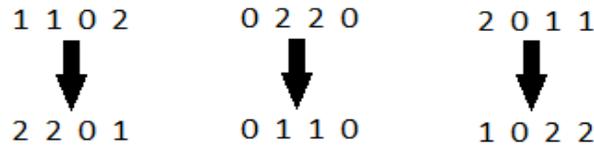


圖 6.2.29

我們將有下列現象。

形成 BC(121)數列，依排法通則 6.2.6 會有 3 種情形，分別如圖 6.2.30、圖 6.2.31 及圖 6.2.32。

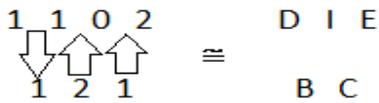


圖 6.2.30

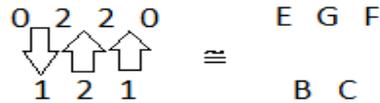


圖 6.2.31

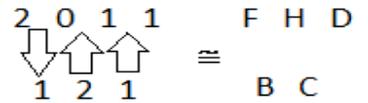


圖 6.2.32

形成 CB(212)數列，依排法通則 6.2.6 會有 3 種情形，分別如圖 6.2.33、圖 6.2.34 及圖 6.2.35。

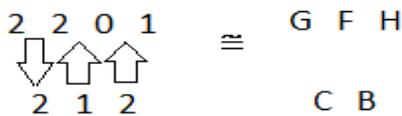


圖 6.2.33

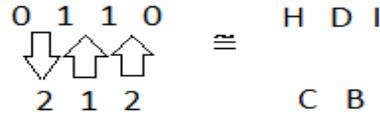


圖 6.2.34

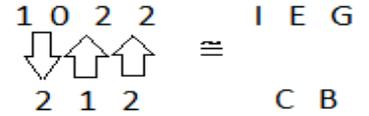


圖 6.2.35

此時，

形成 BC 數列的 DIE、EGF、FHD；形成 CB 數列的 GFH、HDI、IEG，排列如圖 6.2.36 及圖 6.2.37。

BC (121)，CB(212)，因此會有虛擬同值鍵結。

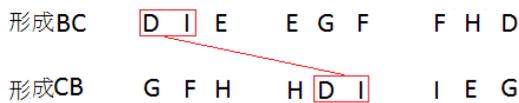


圖 6.2.36



圖 6.2.37

再考慮全部形成 BC 數列的 DIE、EGF、FHD，虛擬鍵結如圖 6.2.38。

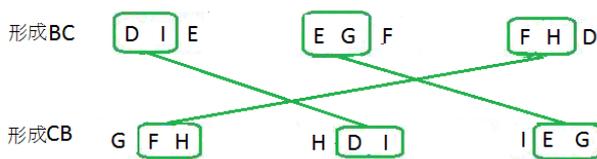


圖 6.2.38

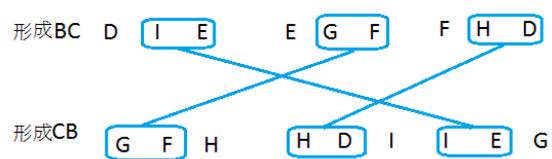


圖 6.2.39

讓我們以同樣方法討論形成 EF 數列，FE 數列如圖 6.2.40；

形成 HI 數列，IH 數列如圖 6.2.41。

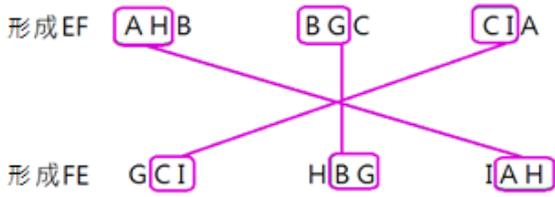


圖 6.2.40

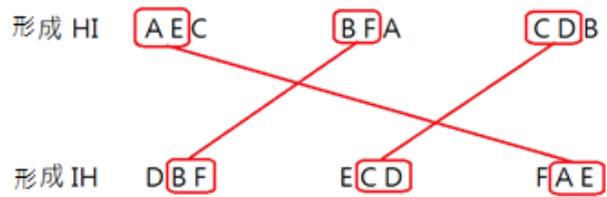


圖 6.2.41

簡化後，將代號拿掉，呈現一個對稱圖案，如圖 6.2.42。

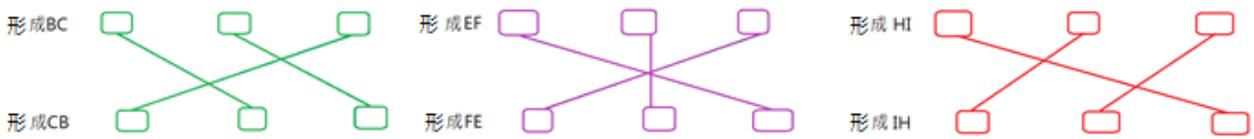


圖 6.2.42

對於 4 層平面的結構，有以上發現。至於，更高層的平面結構，更複雜，有待將來再討論。

三、正四面體

在這個單元，我們嘗試從二為平面變成三維空間，有不一樣的面貌。

定義 6.3.1(正四面體中的顏色)

$T_{i,j,k}^n$ 的數值代表立體結構的第 k 層第 i 列第 j 行的顏色。其中， $1 \leq i, j, k \leq n$ ， $1 \leq i+j \leq k$ 。

此時

定義 6.3.2(用數值表示顏色)

$T_{i,j,k}^n = 0$ 呈紅色； $T_{i,j,k}^n = 1$ 呈綠色； $T_{i,j,k}^n = 2$ 呈藍色； $T_{i,j,k}^n = 3$ 呈黃色。

圖 6.3.3 是 $k=6$ 的正四面體堆朵。第 k 層是一邊 k 個球所構成的正三角形。已經知道最下層(第 n 層)中所有球的顏色。而上一層($k-1$ 層)球的顏色是由下層(第 k 層)依照定義(6.3.1)所決定。

是否可以從最下層(第 n 層)來求得第 1 層中唯一一顆球的顏色？

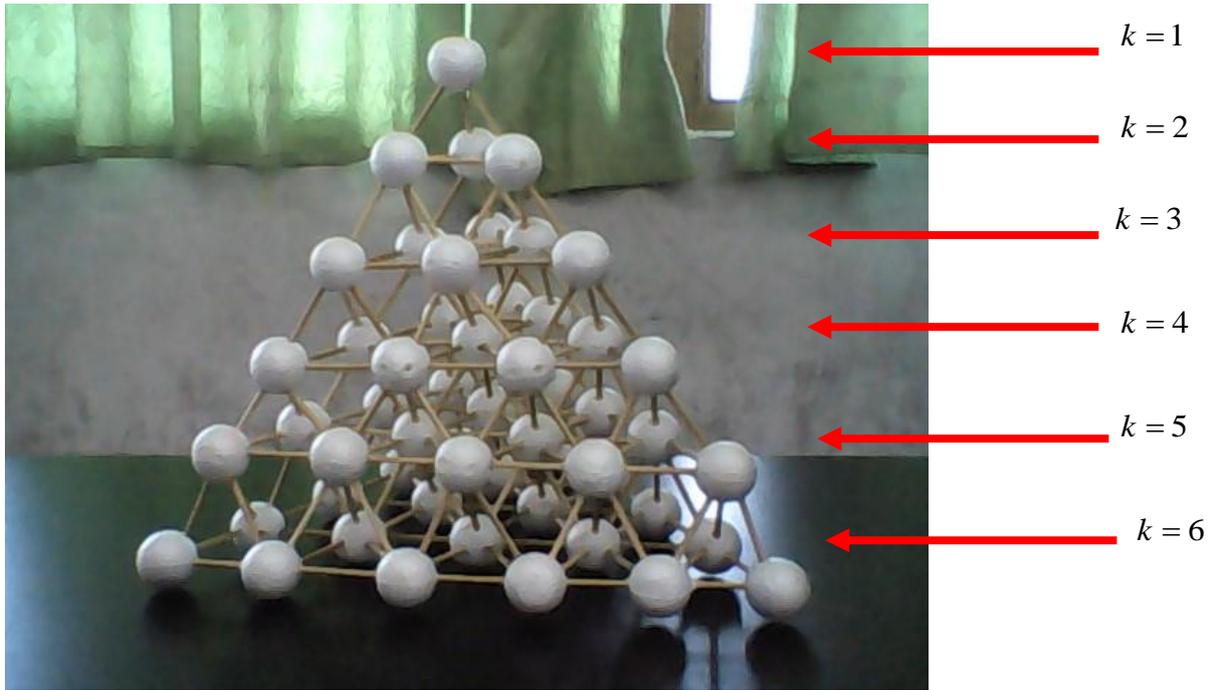


圖 6.3.3

此時，我們會有

$$T_{i,j,k}^n + T_{i+1,j,k}^n + T_{i,j+1,k}^n + T_{i,j,k-1}^n \equiv 0 \pmod{4} \quad (6.3.4)$$

舉一實例，如圖 6.3.5。

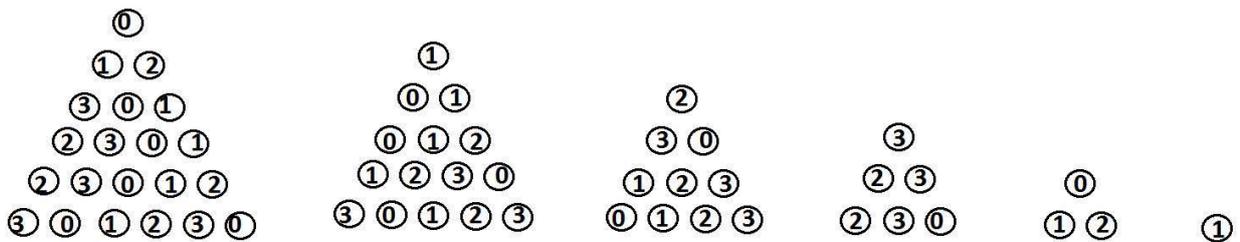


圖 6.3.5

式子 6.3.4 有運算表，如表 6.3.6，發現

1. 4 乘 4 的方格內，如同數獨似的，每一橫排和每一直排都沒有重複。
2. 上層三顆球相同顏色，下層第四顆球一定相同顏色。
3. 上層三顆球顏色是二同一異，或都是不同顏色，將是一個有趣課題，值得研究。

表 6.3.6, $T_{i,j,k-1}^n$

$T_{i,j,k-1}^n$	$T_{i+1,j,k}^n = 0$				$T_{i+1,j,k}^n = 1$				$T_{i+1,j,k}^n = 2$				$T_{i+1,j,k}^n = 3$			
	$T_{i,j+1,k}^n = 0$	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3
$T_{i,j,k}^n = 0$	0	3	2	1	3	2	1	0	2	1	0	3	1	0	3	2
$T_{i,j,k}^n = 1$	3	2	1	0	2	1	0	3	1	0	3	2	0	3	2	1
$T_{i,j,k}^n = 2$	2	1	0	3	1	0	3	2	0	3	2	1	3	2	1	0
$T_{i,j,k}^n = 3$	1	0	3	2	0	3	2	1	3	2	1	0	2	1	0	3

再仔細觀察式子 6.3.3，得到

$$-(T_{i,j,k}^n + T_{i+1,j,k}^n + T_{i,j+1,k}^n) \equiv T_{i,j,k-1}^n \pmod{4} \quad (6.3.7)$$

不考慮正負號問題，此時，我們會有

立體的 1 層，只有 1 點；

立體的 2 層，有 3 點，其影響途徑如圖 6.3.8 的 2 層；

立體的 3 層，有 6 點，其影響途徑如圖 6.3.8 的 3 層；

立體的 4 層，有 10 點，其影響途徑如圖 6.3.8 的 4 層；

立體的 5 層，有 15 點，其影響途徑如圖 6.3.8 的 5 層；

立體的 6 層，有 21 點，其影響途徑如圖 6.3.8 的 6 層。

接著延伸到第 k 層，我們會有

第 k 層，第 1 列的影響途徑： $C_0^{k-1} \times (C_0^{k-1} + C_1^{k-1} + C_2^{k-1} + \dots + C_{k-1}^{k-1})$ 。

第 k 層，第 2 列的影響途徑： $C_1^{k-1} \times (C_0^{k-2} + C_1^{k-2} + C_2^{k-2} + \dots + C_{k-2}^{k-2})$ 。

第 k 層，第 3 列的影響途徑： $C_2^{k-1} \times (C_0^{k-3} + C_1^{k-3} + C_2^{k-3} + \dots + C_{k-3}^{k-3})$ 。

...

第 k 層，第 i 列的影響途徑： $C_{i-1}^{k-i} \times (C_0^{k-i} + C_1^{k-i} + C_2^{k-i} + \dots + C_{k-i}^{k-i})$ 。

...

第 k 層，第 k 列的影響途徑： $C_{k-1}^{k-1} \times C_0^0$ 。

此時，對於第 k 層，全部 $T_{i,j,k}^n$ 對於 $T_{1,1,1}^n$ 的影響途徑數考慮使用 4 種顏色，又是第 k 層。

第 k 層，全部 $T_{i,j,k}^n$ 對於 $T_{1,1,1}^n$ ，

第 1 列： $C_0^{k-1} \times (C_0^{k-1} \times T_{1,1,k}^n + C_1^{k-1} \times T_{1,2,k}^n + \dots + C_{k-1}^{k-1} \times T_{1,k,k}^n) \pmod{4}$ ；

第 2 列： $C_1^{k-1} \times (C_0^{k-2} \times T_{2,1,k}^n + C_1^{k-2} \times T_{2,2,k}^n + \dots + C_{k-2}^{k-2} \times T_{2,k-1,k}^n) \pmod{4}$ ；

第 3 列： $C_2^{k-1} \times (C_0^{k-3} \times T_{3,1,k}^n + C_1^{k-3} \times T_{3,2,k}^n + \dots + C_{k-3}^{k-3} \times T_{3,k-2,k}^n) \pmod{4}$ ；

...

第 i 列： $C_{i-1}^{k-i} \times (C_0^{k-i} \times T_{i,1,k}^n + C_1^{k-i} \times T_{i,2,k}^n + \dots + C_{k-i}^{k-i} \times T_{i,k-i+1,k}^n) \pmod{4}$ ；

...

第 k 列： $(C_{k-1}^{k-1} \times C_0^0 \times T_{k,1,k}^n) \pmod{4}$ 。

如此，對於正四面體第 k 層對於 $T_{1,1,1}^n$ 的影響為

$$T_{1,1,1}^n = (-1)^{k-1} \times \sum_{i=1}^k (C_{i-1}^{k-1} \times (\sum_{j=1}^k C_{j-1}^{k-1} \times T_{i,j,k}^n)) \pmod{4}, \text{ 其中, } i+j \leq k. \quad (6.3.9)$$

柒、結論

在解題過程中，我們先將顏色轉換成數字，然後利用分類減少運算次數，我們也試著使用一步接一步的計算方式，找出答案。在計算的時候，我們發現影響路徑是解題的關鍵，而那個影響路徑就是巴斯卡三角形。之後我們發現 n 不管等於多少都可以求出最後的答案。所以，平面一般式

$$\left| F(G_{t+1, s+1}^n, G_{t+1, s+m+1}^n) \right| \equiv G_{t+m+1, s+1}^n \equiv ((-1)^{m-1} \times (\sum_{j=0}^{m-1} C_j^{m-1} \times G_{t+1, s+j+1}^n)) \pmod{3}。$$

其中， $0 \leq t \leq n-1$ ， $0 \leq s \leq n-1$ ， $0 \leq m \leq n-1$ ， $1 \leq t+m \leq n-1$ 且 $1 \leq s+m \leq n-1$

之後，我們開始討論一般式，發現它有奇偶性的差別，而巴斯卡三角形則有自我相似的情形，我們也試著反推題目。我們也使用基本單元來討論三層結構的連接圖和有向圖以及四層結構的「虛擬對稱」、「虛擬同層鏈結」、「豬羊變色」與「循環變色」、「虛擬同值鏈結」，這些發現讓我們觀察到之前沒發現到的東西。

最後我們在研究正四面體，怎麼用一個算式，推到最上面的頂點的答案。發現

立體三角錐對於第 k 層對於 $T_{1,1,1}^n$ 的影響為

$$T_{1,1,1}^n = (-1)^{k-1} \times \sum_{i=1}^k (C_{i-1}^{k-1} \times (\sum_{j=1}^k C_{j-1}^{k-1} \times T_{i,j,k}^n)) \pmod{4}。$$

其中， $1 \leq i, j, k \leq n$ ， $1 \leq i, j \leq k$ ， $1 \leq i+j \leq k$ 。

捌、參考資料

[1]游森棚。十二個課堂遊戲探索問題。科學研習月刊。國立台灣科學教育館。2015年4月，p48。

[2]張淑聲。怎樣解題。南一版數學五年級第10冊。20160302。

www.jtps.tyc.edu.tw/97iwb/iwb01/p01.html。

【評語】 080412

此件作品主要在探討如何利用平面上的第一列球的三種顏色來預測最後一列球的顏色，問題有趣。作者能將球的三種顏色巧妙的轉化成數字以進行探討，頗具創意，值得鼓勵。