

# 中華民國第 56 屆中小學科學展覽會

## 作品說明書

---

國小組 數學科

080411

翻轉乾坤

學校名稱：連江縣立中正國民中小學

作者：  小五 曹 宓 小五 曹家菱 小五 曹紘菖 小五 劉梓先	指導老師：  張秀玲 高芳華
---	-------------------------

關鍵詞：長方體、正方體、展開圖

## 摘要

在找尋正方體和長方體的展開圖過程中，我們就像展開了潘朵拉的盒子一般，瞬間爭議聲四起，大家你一言我一語，爭相說出同學上衛發現的展開圖，在一片混亂中，我們研究發現了尋找正方體展開圖的規律，並利用這個規律進一步找出長方體的所有展開圖。

## 壹、研究動機

在五上的數學單元「元方體、長方體和球」中，老師要我們把正方體上的膠帶剪開，小組競賽，看看一組能找到最多的展開圖。下課鐘響時，全班共找出了 9 種，但大家還是欲罷不能，利用下課時間又多找出了二種。到底正方體的展開圖有幾種呢？我們是不是都找齊了呢？於是，我們開始了這次的研究。

## 貳、研究目的

- 一、探討正方體的展開圖及其規律性。
- 二、探討正方體(有二面正方形、四面長方形)的展開圖及其規律性。
- 三、探討方方體(有三組不同的長方形)的展開圖及其規律性。
- 四、探討正方體和長方體展開圖之間的關係。

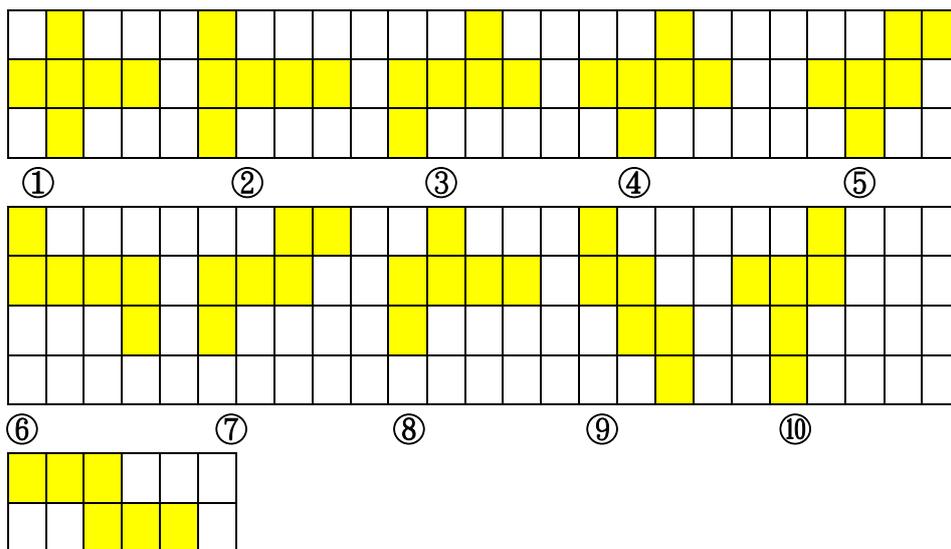
## 參、研究設備及器材

- 一、數學習作附件-正方體、膠帶、剪刀(實際操作正方體的展開圖)
- 二、壁報紙、方格紙、剪刀、膠水(利用方格紙畫出各種展開圖)

## 肆、研究過程或方法

- 一、研究流程：
  - (一)、實際操作找出正方體的展開圖
  - (二)、尋找正方體 11 種展開圖的規律
  - (三)、利用正方體展開圖的規律、找出長方體「二面正方形、四面長方形」的展開圖
  - (四)、利用正方體展開圖的規律、找出長方體「三組不同的長方體」的展開圖
  - (五)、重新歸納整理長方體的展開圖
- 二、探討正方的展開圖及其規律性：

圖 1



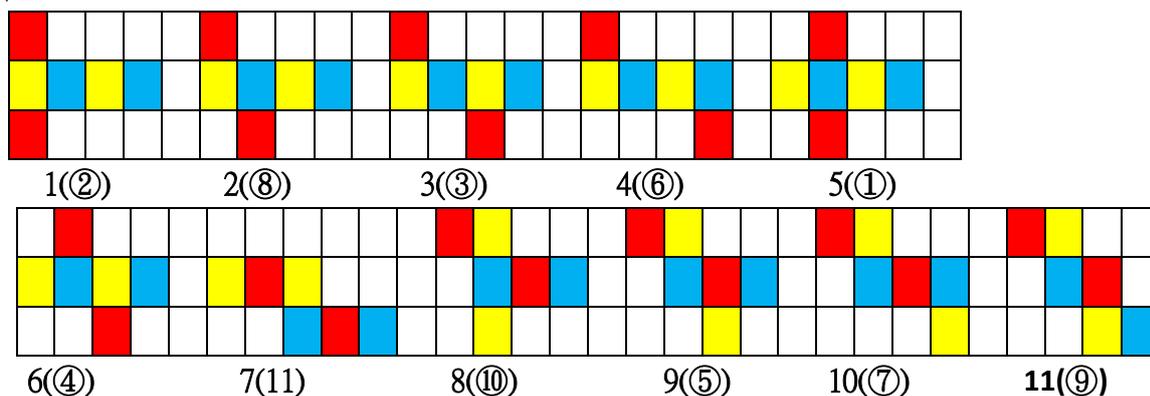
11

附注:旋轉或翻轉後相同者，視為同一種展開圖

類型	模型	剩餘的組合	展開圖
第一種		剩下 2 個正方形在 同一邊(2,0)	無解
		剩下 2 個正方形在 不同邊(1,1)	圖 1: ①②③④⑥⑧
第二種		剩下 3 個正方形在 同一邊(3,0)	圖 1:11
		剩下 3 個正方形在 不同邊(2,1)	圖 1:⑤⑦⑩
第三種		剩下 4 個正方形在 同一邊(4,0)	圖 1:⑨
		剩下 4 個正方形在 不同邊(3,1)(2,2)	圖 1:⑨

附注:同一邊(2.0),表示剩餘的組合在模型的同側；不同邊(2.1)，表示剩餘的組合在模型的一側有 2 個，一側有 1 個。

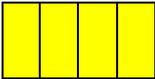
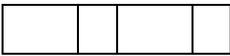
圖 2



附注:1(②)，1 表試圖 2 重新整理後的編號，②表示原來圖 1 的編號；相同顏色是互相平行的面。

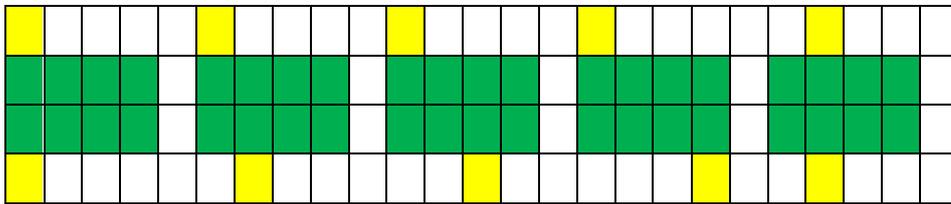
三、探討長方體(有 2 面正方形、4 面長方形)的展開圖及其規律性

利用表 1 的原則，考慮長方體的 6 個面有正方形及長方形(表 2)色用色紙依序找出長方體(有 2 面正方形、4 面長方形)的所有展開圖(圖 3)

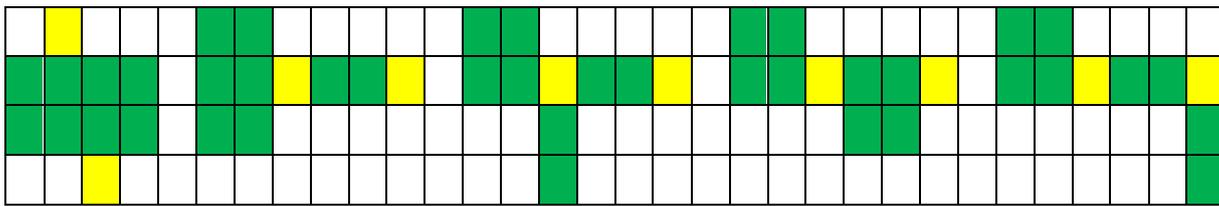
類型	模型	剩餘的組合	展開圖	
第一種		剩下 2 個正方形在同一邊(2,0)	無解	
		剩下 2 個正方形在不同邊(1,1)	6 種 ① ~⑥	
		剩下 2 個長方形在同一邊(2,0)	無解	
		剩下 2 個長方形在不同邊(1,1)	10 種 7~16	
	第二種		剩下 2 個正方形、1 個長方形在同一邊(3,0)	1 種 17
			剩下 2 個正方形、1 個長方形在同一邊(2,1)	4 種 18~21
		剩下 1 個正方形、2 個長方形在同一邊(3,0)	1 種 22	
		剩下 1 個正方形、2 個長方形在同一邊(2,1)	3 種 23~25	
		剩下 3 個長方形在同一邊(3,0)	1 種 26	
		剩下 3 個長方形在不同邊(2,1)	1 種 27	
第三種		剩下 2 個正方形、2 個長方形在同一邊(4,0)	1 種 28	
		剩下 2 個正方形、2 個長方形在不同邊(3,1)	重複 28	
		剩下 2 個正方形、2 個長方形在不同邊(2,2)	29	
		剩下 1 個正方形、3 個長方形在同一邊(4,0)	重複 29	
		剩下 1 個正方形、3 個長方形在不同邊(3,1)	重複 28	

		剩下 1 個正方形、3 個 長方形在不同邊(2,2)	重複 28
--	--	-------------------------------	----------

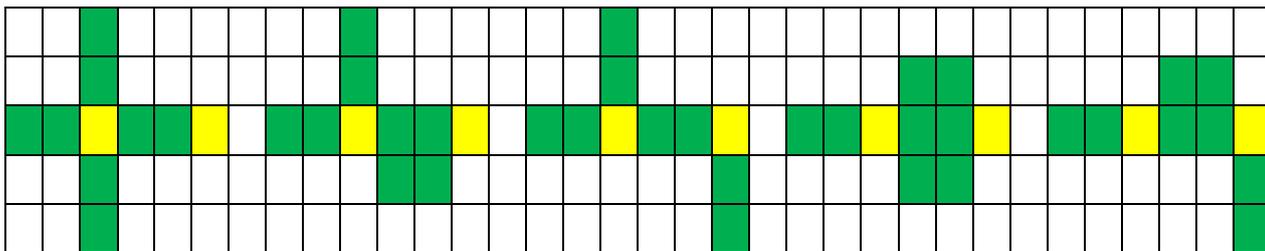
附注:同一邊(2.0),表示剩餘的組合在模型的另一側;不同邊(2.1),表示剩餘的組合在模型的一側有 2 個,一側有 1 個。



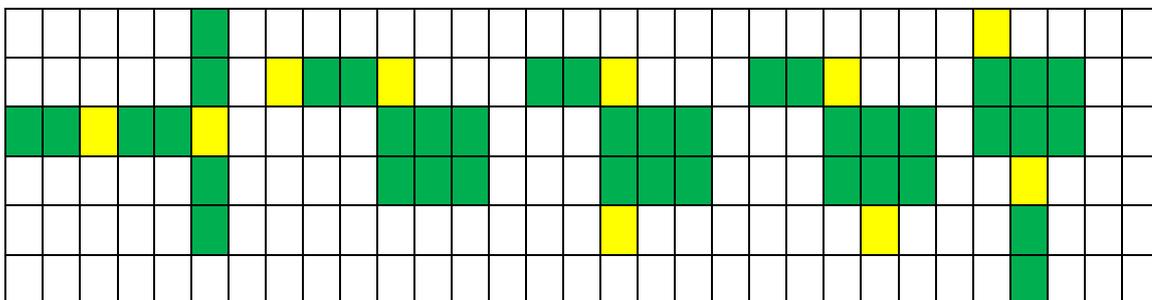
1                      2                      3                      4                      5



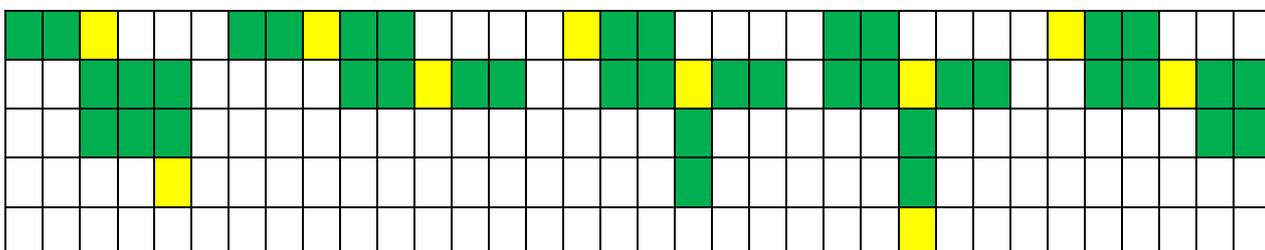
6                      7                      8                      9                      10



11                      12                      13                      14                      15



16                      17                      18                      19                      20



21                      22                      23                      24                      25

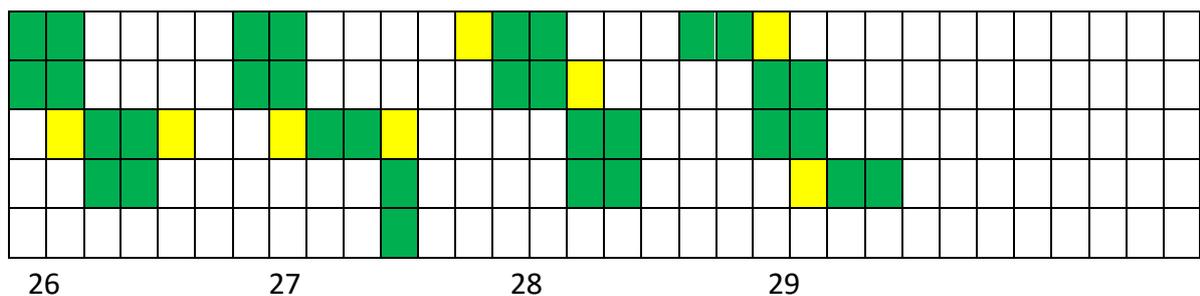
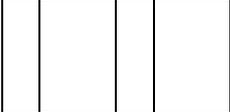
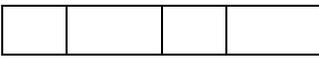
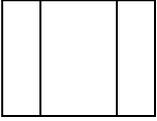
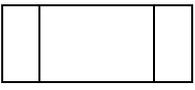
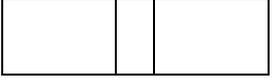
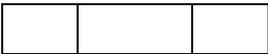
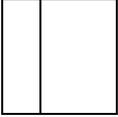
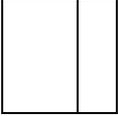


圖 3

四、探討長方體(有三組不同的長方形)的展開圖及其規律性

利用表 1 的原則，考慮長方體有 3 組不同的長方形(表 3)，利用色紙依序找出長方體(有 3 組不同的長方形)的所有展開圖(圖 4)。

類型	模型	剩餘的組合	展開圖
第一種	 剩下 2 個長方形	同一邊(2.0)	無解
		不同邊(1.1)	10 種 1~10
	 剩下 2 個長方形	同一邊(2.0)	無解
		不同邊(1.1)	10 種 11~20
	 剩下 2 個長方形	同一邊(2.0)	無解
		不同邊(1.1)	10 種 21~30
第二種	剩下 3 個長方形 	同一邊(3.0)	1 種 31
		不同邊(2.1)	4 種 32~35
	剩下 3 個長方形 	同一邊(3.0)	1 種 36
		不同邊(2.1)	4 種 37~40
	剩下 3 個長方形 	同一邊(3.0)	重複 31
		不同邊(2.1)	3 種 41~43
	剩下 3 個長方形 	同一邊(3.0)	1 種 44
		不同邊(2.1)	3 種

			45~47	
	剩下 3 個長方形 	同一邊(3.0) 重複 36		
		不同邊(2.1) 2 種 48.49		
	剩下 3 個長方形 	同一邊(3.0) 重複 44		
		不同邊(2.1) 2 種 50.51		
第三種	剩下 4 個長方形 	同一邊(4.0) 1 種 52		
		不同邊(3.1) 重複 37		
		不同邊(2.2) 重複 35		
	剩下 4 個長方形 	同一邊(4.0) 1 種 53 重複 31.32		
		不同邊(3.1) 重複 35.33		
		不同邊(2.2) 重複 34		
	剩下 4 個長方形 	同一邊(4.0) 1 種 54		
		不同邊(3.1) 重複 31		
		不同邊(2.2) 重複 43		

1. 	2. 	3. 	4. 	5. 
6. 	7. 	8. 	9. 	10. 
11. 	12. 	13. 	14. 	15. 
16. 	17. 	18. 	19. 	20. 
21. 	22. 	23. 	24. 	25. 
26. 	27. 	28. 	29. 	30. 
31. 	32. 	33. 	34. 	35. 

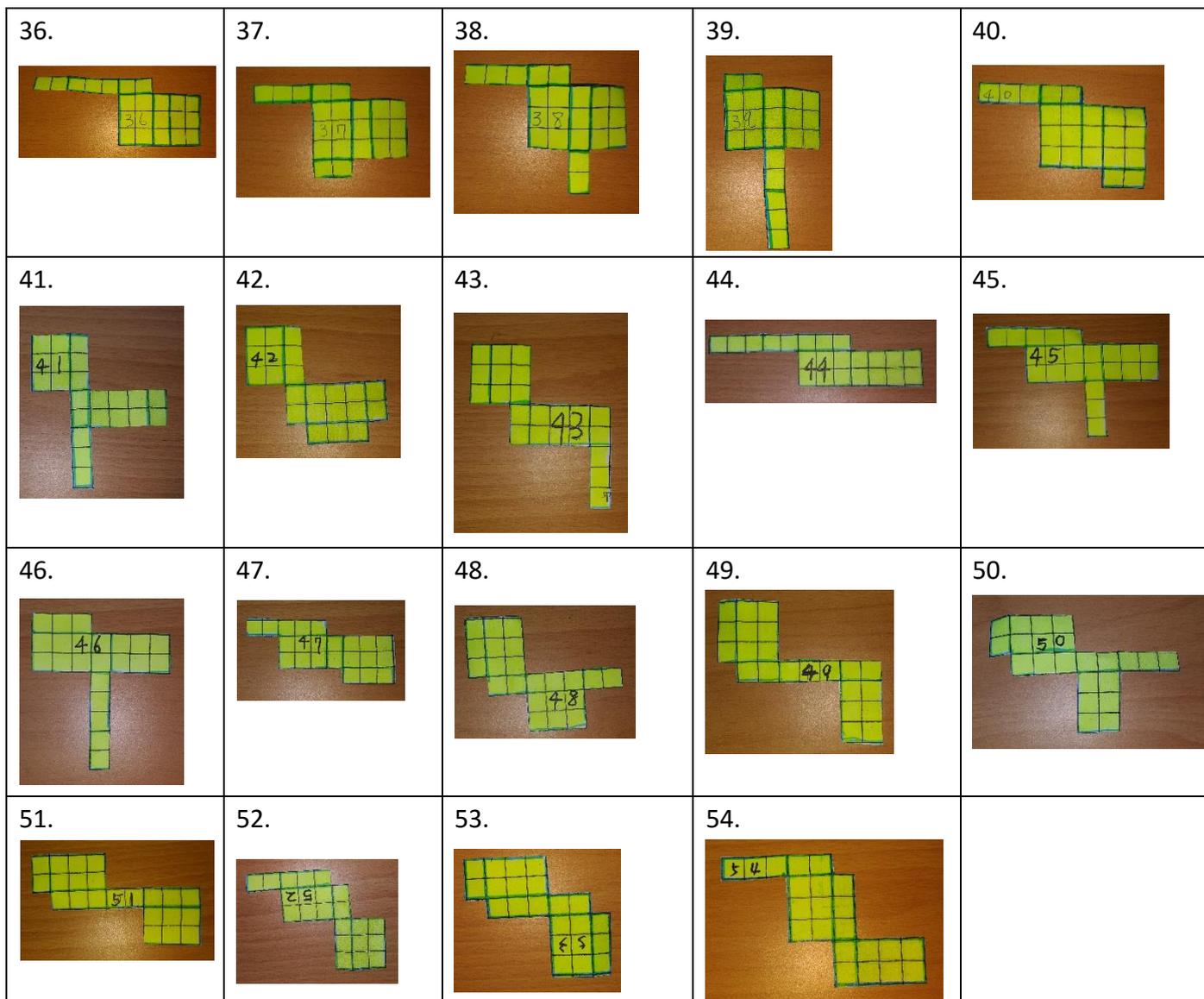


圖 4

### 五、探討正方體和長方體展開圖之間的關係

將長方體的展開圖一圖 3、圖 4 重新歸納排列後，發現了一個有趣的現象：原來長方體的展開圖都是由正方體的 11 種展開圖延伸而來的(圖 5、圖 6)。

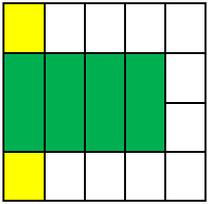
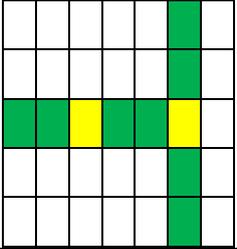
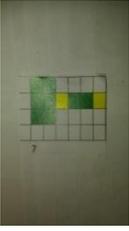
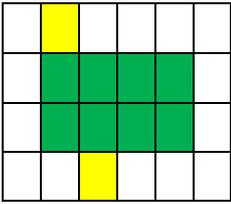
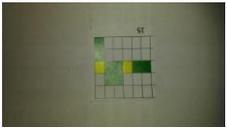
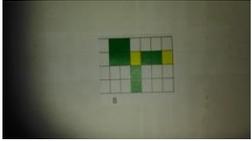
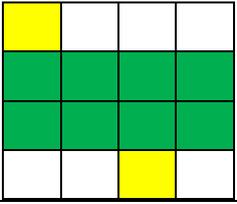
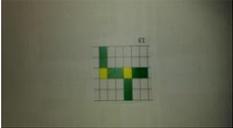
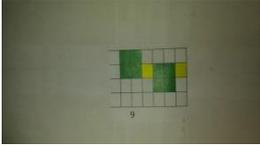
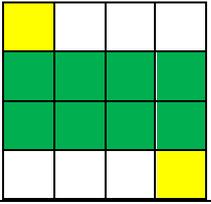
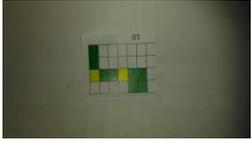
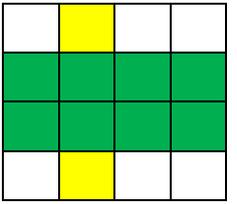
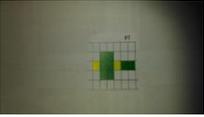
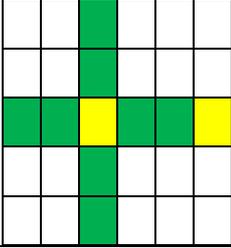
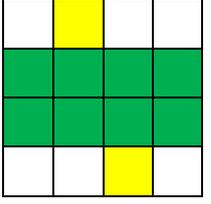
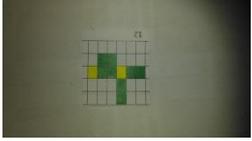
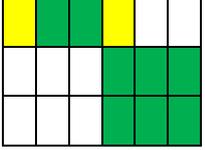
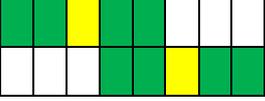
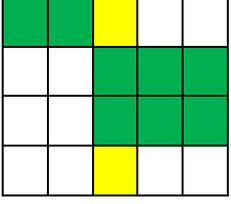
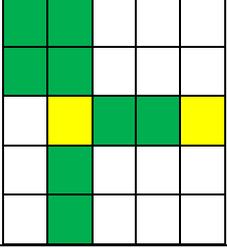
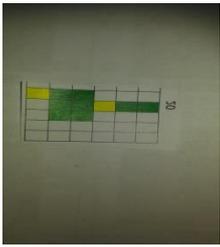
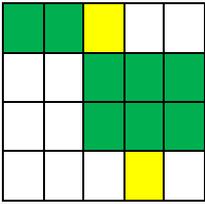
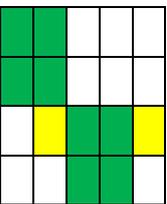
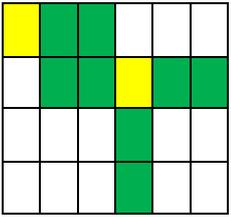
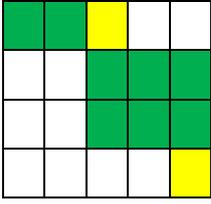
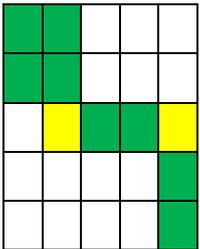
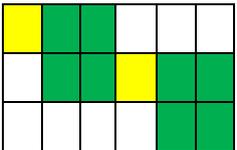
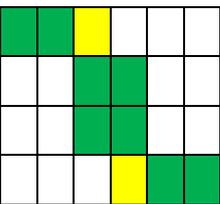
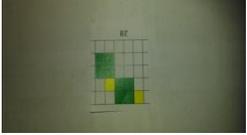
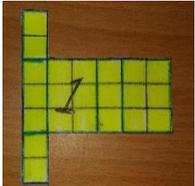
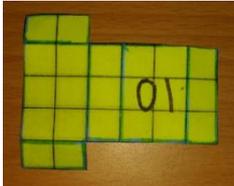
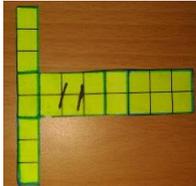
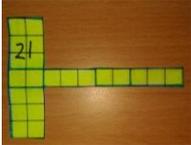
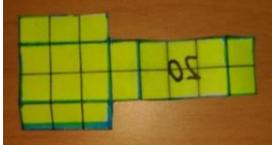
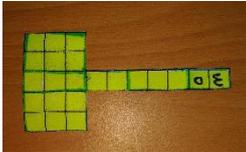
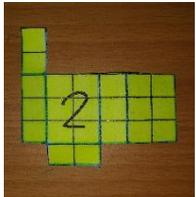
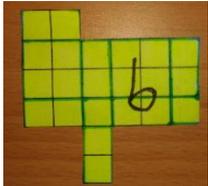
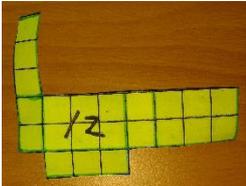
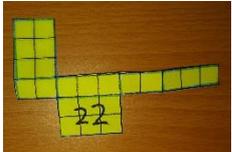
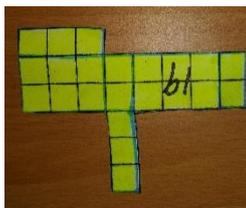
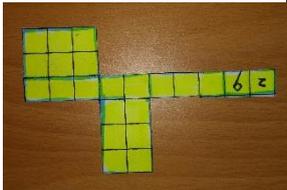
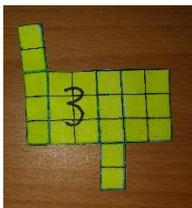
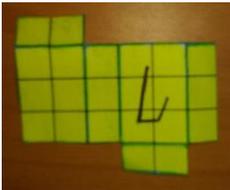
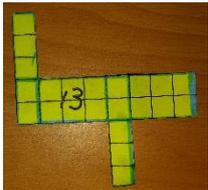
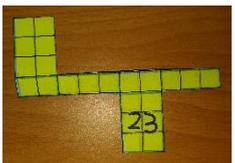
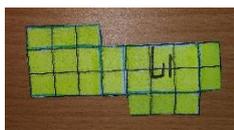
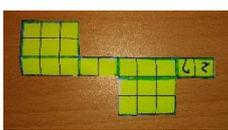
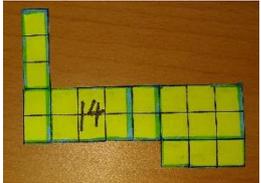
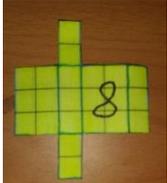
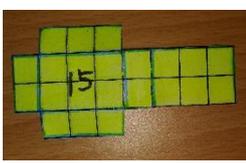
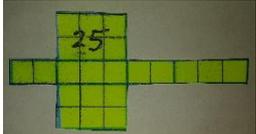
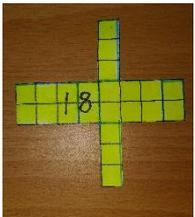
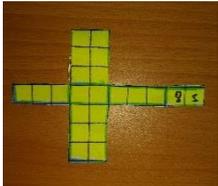
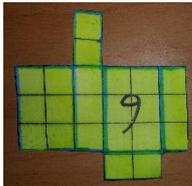
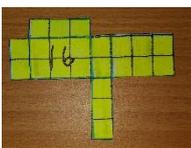
1-1(1) 	1-2(16) 	1-3(7) 	2-1(2) 	2-2(15) 
2-3(8) 	3-1(3) 	3-2(13) 	3-3(9) 	4-1(4) 
4-2(10) 	5-1(5) 	5-2(14) 	5-3(11) 	6-1(6) 
6-2(12) 	7-1(17) 	7-2(22) 	8-1(18) 	8-2(24) 
8-3(20) 	9-1(19) 	9-2(26) 	9-3(23) 	10-1(21) 
10-2(27) 	10-3(25) 	11-1(29) 	11-2(28) 	

圖 5

附註：1-1(1)，1 表示圖 5 重新整理後的編號，(1)表示原來圖 3 中的編號；相同顏色是互相平行的面。

1-1(1) 	1-2(10) 	1-3(11) 	1-4(21) 	1-5(20) 
1-6(30) 	2-1(2) 	2-2(9) 	2-3(12) 	2-4(22) 
2-5(19) 	2-6(29) 	3-1(3) 	3-2(7) 	3-3(13) 
3-4(23) 	3-5(17) 	3-6(27) 	4-1(4) 	4-2(14) 
4-3(24) 	5-1(8) 	5-2(5) 	5-3(15) 	5-4(25) 
5-5(18) 	5-6(28) 	6-1(6) 	6-2(16) 	6-3(26) 

7-1(31) 	7-2(36) 	7-3(44) 	8-1(32) 	8-2(37) 
8-3(41) 	8-4(46) 	8-5(34) 	8-6(39) 	9-1(33) 
9-2(38) 	9-3(42) 	9-4(48) 	9-5(45) 	9-6(50) 
10-1(35) 	10-2(40) 	10-3(43) 	10-4(49) 	10-5(47) 
10-6(51) 	11-1(54) 	11-2(52) 	11-3(53) 	

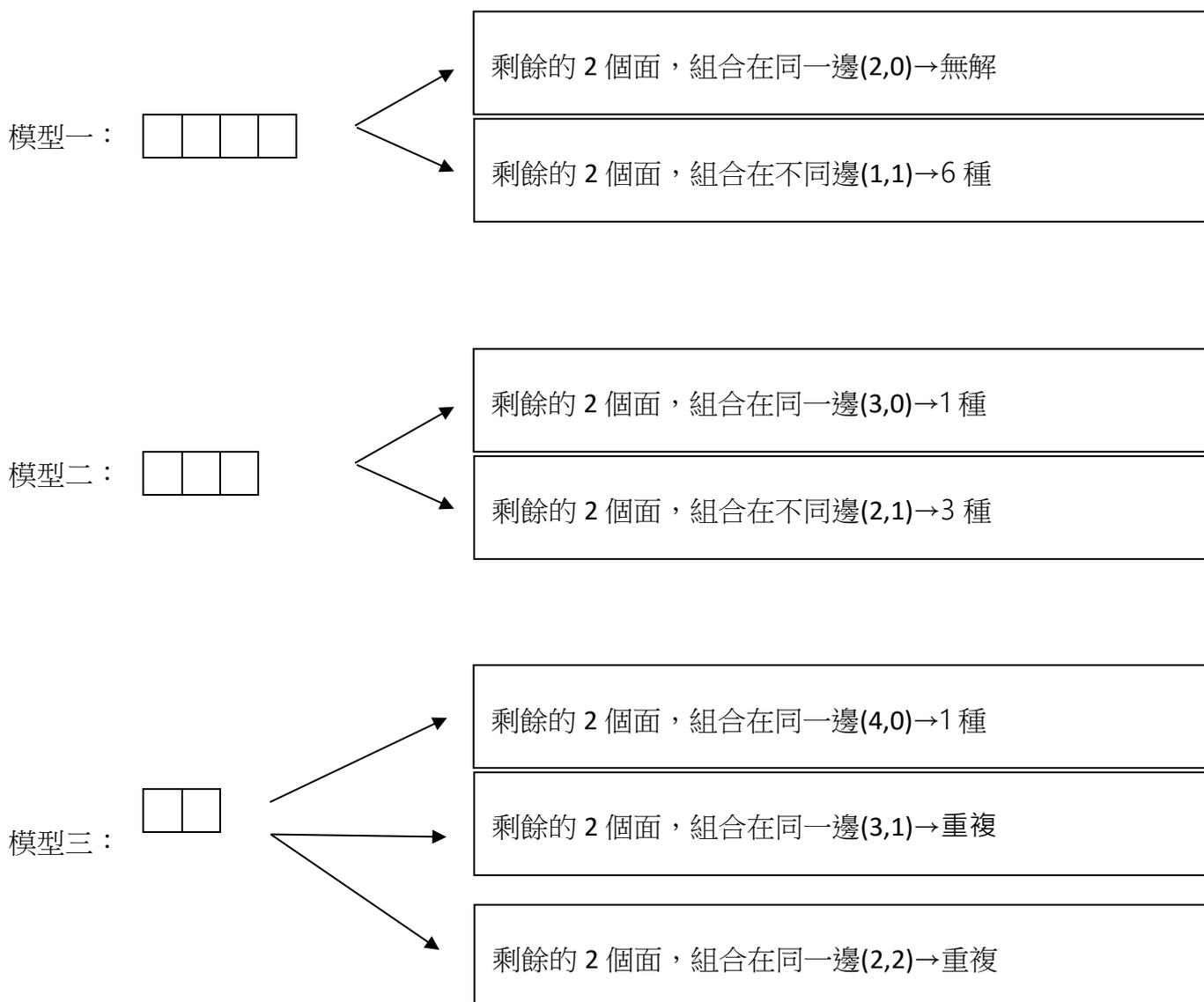
圖 6

附註：1-1(1)，1 表示圖 6 重新整理後的編號，(1)表示原來圖 4 中的編號；相同顏色是互相平行的面。

## 伍、研究結果

一、探討正方體的展開圖及其規律性。

(一)歸納分析實際操作所找出來的 11 種正方體展開圖，發展出三種模型及剩餘個數的組合可能。



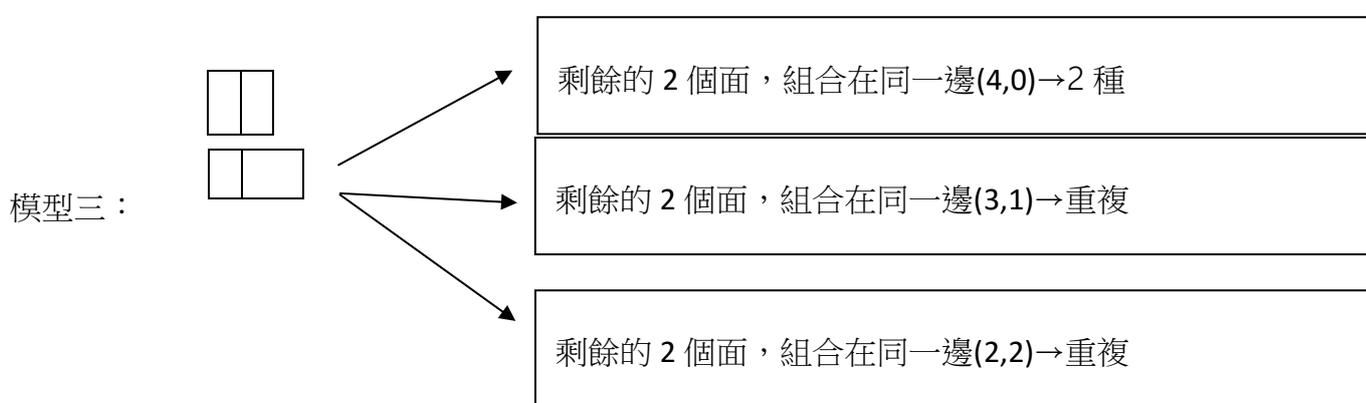
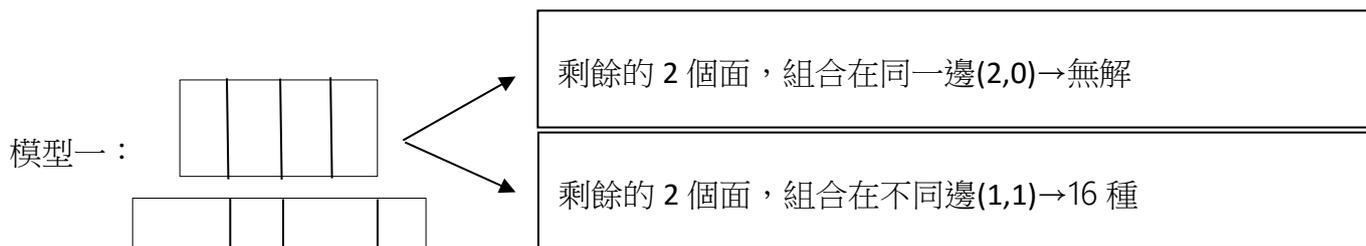
(二)將正方體相對(互相平行)的二個面塗上相同的顏色，可以協助辨別圖形是否為正方體的展開圖，以及檢覆展開圖有無重複。

(三)利用此三種模型及剩餘個數的組合可能，可以有規律、快速的找到正方體的 11 種展開圖。

二、探討長方體(有二面正方形、四面長方形)的展開圖及其規律性。

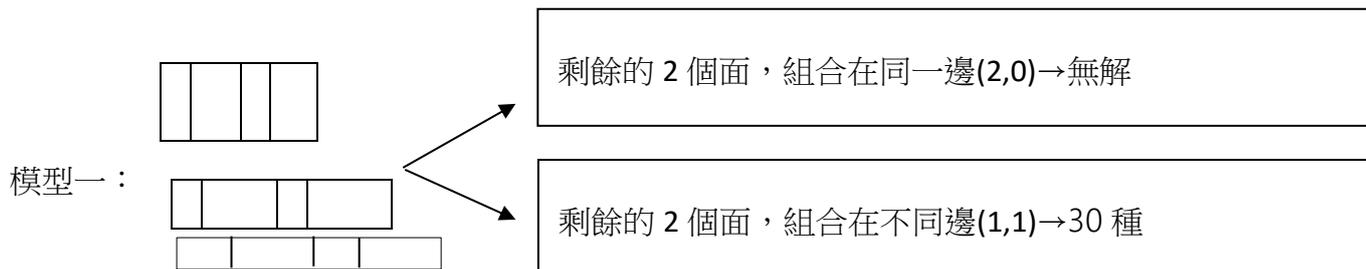
利用正方體展開圖的三種模型，並考慮六個面中有正方形、長方形，不須實際操作，即可

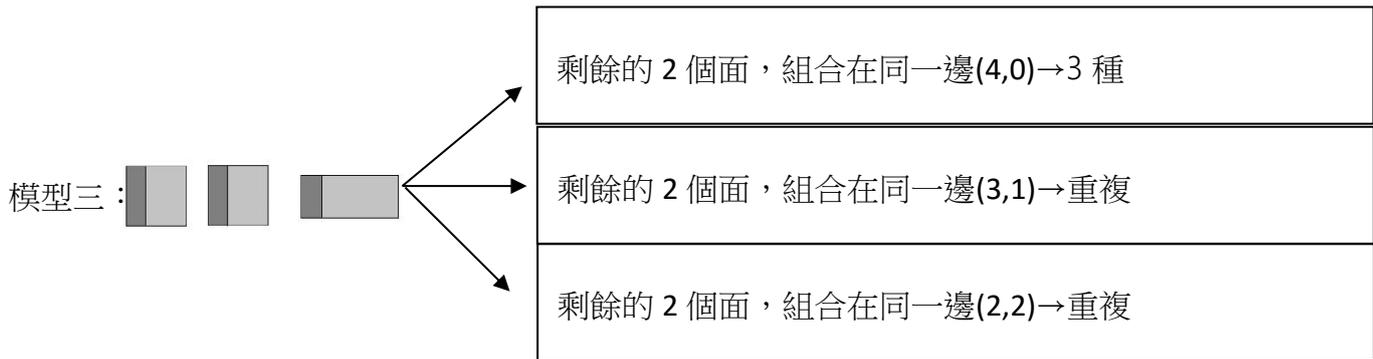
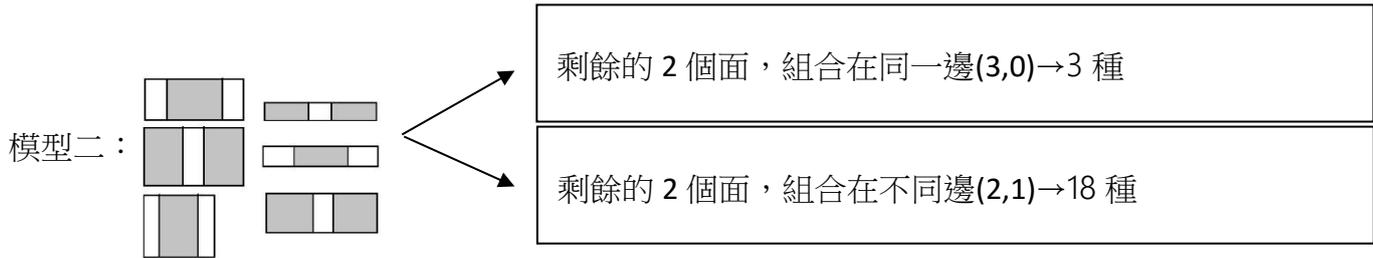
以有規律、快速的找到 29 種長方體(有二面正方形、四面長方形)的展開圖(圖 3)。



### 三、探討長方體(有三組不同的長方形)的展開圖及其規律性

利用正方體展開圖的三種模型，並考慮六個面中有三組不同的長方形，不須實際操作，即可以有規律、快速的找到 54 種長方體(有三組不同的長方形)的展開圖(圖 4)。





#### 四、探討正方體和長方體展開圖之間的關係。

將 29 種長方體(有二面正方形、四面長方形)的展開圖及 54 種長方體(有三組不同的長方形)的展開圖重新歸納排列後發現：長方體的所有展開圖和正方體的展開圖息息相關，全部是由 11 種正方體展開圖發展延伸而來的(圖 5、圖 6)。

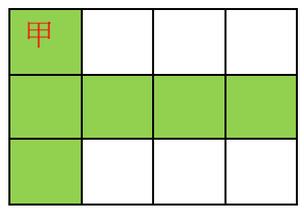
### 陸、討論

當我們發現長方體的展開圖是由 11 種正方體的展開圖發展而來時，進一步探究：理論上，長方體（有兩面正方形、四面長方形）的展開圖應該有 33 種（ $3 \times 11 = 33$ ），長方體（有三組不同的長方形）的展開圖應該有 66 種（ $6 \times 11 = 66$ ）理由推論如下，但實際個數為什麼少於推論個數呢？

33 種展開圖的理由：

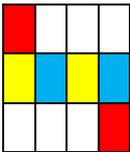
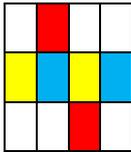
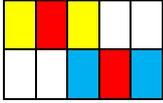
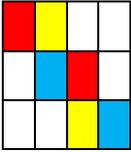
長方體（有兩面正方形、四面長方形）的展開圖，延伸自正方體的第一種展開圖中，甲的位置可以有三種選擇（），一旦決定某一個後，剩下的位置就只有一種排法。另外延伸自其他

10 種正方體展開圖的情形也一樣所以有  $3 \times 11 = 33$  種。



66 種展開圖的理由：

長方體（有三處不同的長方形）的展開圖，延伸自正方體的第 1 種展開圖中，甲的位置可以有六種選擇（），一旦決定某一個後，剩下的位置就只有一種排法。另外延伸自其他 10 種正方體展開圖的情形也一樣，所以有  $6 \times 11 = 66$  種。

討論後發現：  
 原來正方體展開圖的第 4  第 6  第 7  第 11 個 ，經過 180 度旋轉後是相同的圖形，所以會有重複，因此，長方體（有兩面正方形、四面長方形）的展開圖應該有  $3 \times 7 + 2 \times 4 = 29$  種；長方體（有三組不同的長方形）的展開圖應該有  $6 \times 7 + 3 \times 4 = 54$  種。

## 柒、結論

我們找到了一種規律去尋找 11 種正方體展開圖；關於長方體的展開圖甚少有人研究，我們亦利用正方體展開圖的規律找到長方體的所有展開圖，並嘗試尋找正方體與長方體展開圖之間的關係，也欣喜獲得結論：長方體的所有展開圖全部是由 11 種正方體展開圖發展延伸而來的。

有這次的研究經驗，我們發現數學中存在著許多的規律，尋求規律是一件有趣的事，這次的發現令我們朝下一次的探究邁進－正多角柱的展開圖是否也存在著未知的規律？

## 捌、參考資料及其他

- 一、國立台灣科學教育館歷屆優勝作品：<http://ntsec.gov.tw/User/Artical.aspx?a=119>
- 二、康軒文教事業（2012）。國民小學數學學習領域第 9 冊第 8 單元正方體、長方體和球。新北市：康軒。

## 【評語】 080411

利用正方體的展開圖規律以及所歸納出的三種模型繼而探討長方體的展開圖，想法不錯。探討的內容可再加強廣度與深度以豐富研究成果。