中華民國第 56 屆中小學科學展覽會
作品說明書

國小組　數學科

佳作

080409

因緣際繪

學校名稱：臺中市私立華盛頓國民小學

作者：	指導老師：
小六 林文祺	郭怡蘭
小六 林大博	鄭智先
小五 張詠晴	
小五 郭翊軒	
小五 李兆軒	

關鍵詞：方格圖、點對稱、最大公因數

摘要

這次科展是觀察地板磁磚的拼貼方式而得到的靈感：是否存在一種方法可將磁磚封閉區域內的正方形數量算出？先簡化題目，從最小的封閉區域－對角線算起，發現對角線經過的格子數與長方形的長、寬和長、寬的最大公因數有關。再把封閉區域變大，爲找出規律，將區域內的格子分紅、藍、黃三部份討論，並把這三部份格子數相加所得的算式，整理成簡潔公式。隨著封閉區域變大，我們用同樣方式觀察，推導出許多類似的公式，巧妙的是公式間也有規律，可彙整成一個完整公式。最後運用逆向思考推導出適合任何情況的 T 公式，讓研究結果從特殊化變爲一般化，適用範圍更廣泛。將此公式帶入長方形的長寬以及封閉區域起點終點移動的距離，就能算出封閉區域的格子數。

壹、研究動機：

有次上課時，老師讓我們欣賞許多對稱圖形的圖片，每張圖都讓人有不可思議的勻稱美感，印象最深的圖是：有一個長方形，沿著類似對角線的方向畫出兩條平行線，並在兩條平行線之間的六邊形區域拼貼了許多正方形的彩色馬賽克磁磚，形成一個漂亮的點對稱圖形，我們讚嘆若能在家中長方形的牆壁或地板 DIY 拼貼出這樣美麗的馬賽克磁磚圖案該有多好啊！老師笑說這是很棒的構想，但問我們若想拼貼成這樣的點對稱圖形，此六邊形的區塊需要用幾塊正方形的馬賽克磁磚呢？一開始我們一個個的點數，但是老師問我們有沒有更有效率的方法來計算，爲了解決這個有挑戰性的問題促成我們參加這次科展的動機。

貳、研究目的：

一、探討 m×n 方格圖，對角線 T_0 所經過的方格數，並歸納出計算公式(如圖一)。

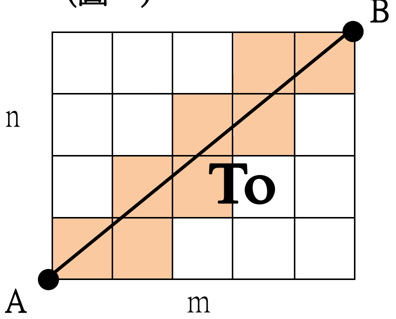
二、探討 m×n 方格圖，起點 A 往上、右各移 1 格，終點 B 往左、下各移 1 格，得四個新點 C1、D1、E1、F1，連接此四點與 A、B，所形成的 T_1 區塊會經過幾個方格數(如圖二)。

三、探討 m×n 方格圖，起點 A 往上、右各移 2 格，終點 B 往左、下各移 2 格，得四個新點 C2、D2、E2、F2，連接此四點與 A、B，所形成的 T_2 區塊會經過幾個方格數(如圖三)。

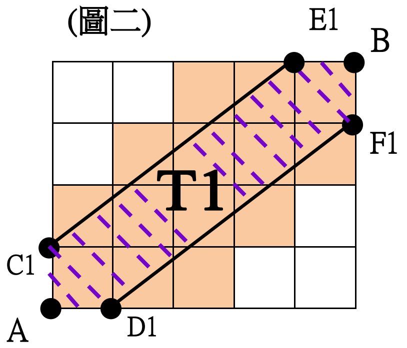
四、探討 m×n 方格圖，起點 A 往上、右各移 r 格，終點 B 往左、下各移 r 格，得四個新點 Cr、Dr、Er、Fr，連接此四點與 A、B，所形成的 T_r 區塊會經過幾個方格數(如圖四)。

五、探討 m×n 方格圖，起點 A 往上移 S1 格、右移 S2 格，終點 B 往左移 E1 格、往下移 E2 格，連接新形成的四點與 A、B，所形成的 T 區塊會經過幾個方格數(如圖五)。

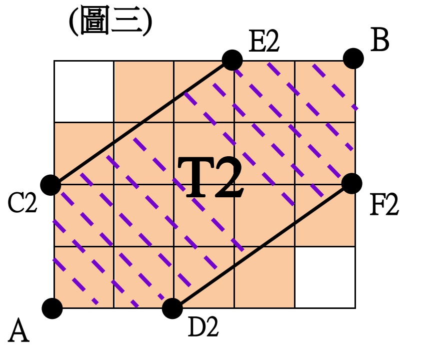
(圖一)



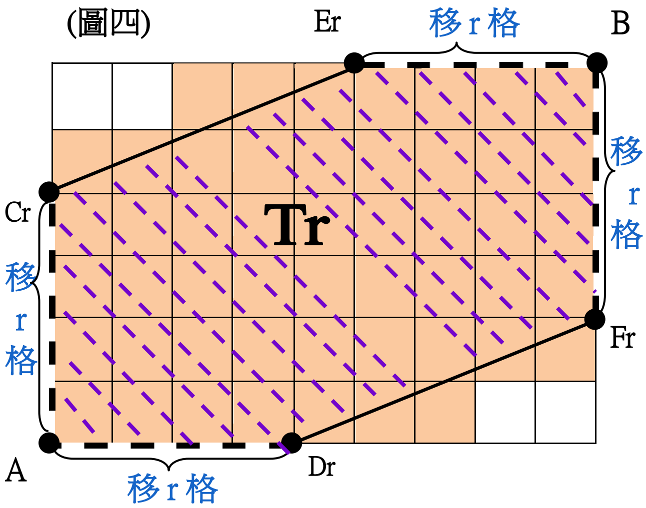
(圖二)



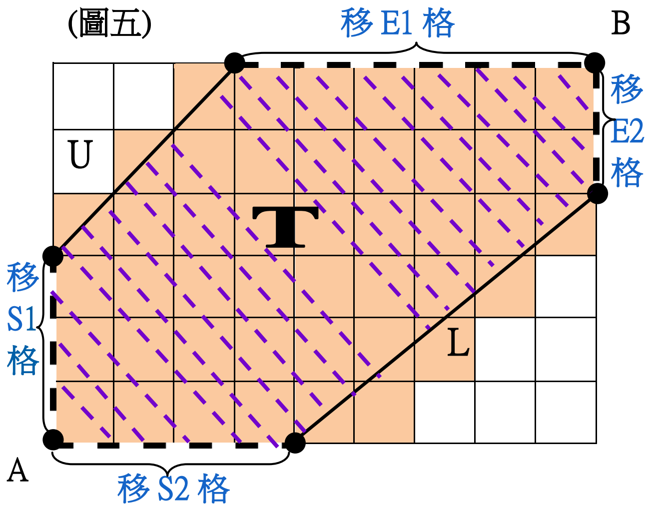
(圖三)



(圖四)



(圖五)



參、研究設備及器材：

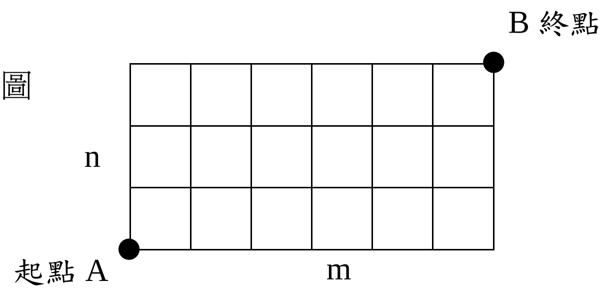
方格紙、直尺、鉛筆、色筆、數位相機、電腦、GSP 繪圖軟體。

肆、研究過程或方法：

在探討問題前我們先定義何謂 m×n 的方格圖 。

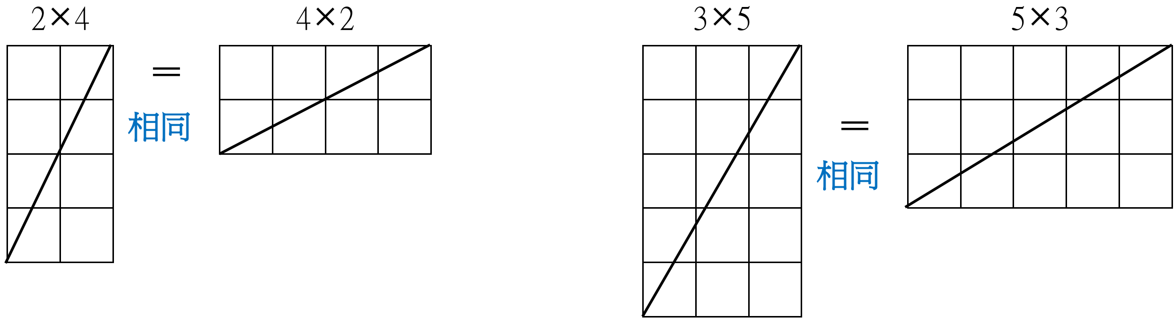
m×n 的方格圖：在邊長 1 公分的方格紙中，以一格子點 A 當起點，往右取 m 格爲長邊，往上取 n 格爲寬邊，所形成的長方形我們稱爲 m×n 的方格圖，此長方形內部恰被分割成 m×n 個 1 平方公分的正方形，且 m 和 n 爲正整數。

例：6 × 3 的方格圖



一、討論一：探討 m×n 方格圖上，對角線 T_0 所經過的方格數。

一開始研究時，為找出規律性，我們先簡化目標，從對角線會經過幾個方格開始探討。我們畫出 1×1、1×2、…10×9 至 20×20 方格圖的對角線，觀察對角線 T_0 經過的方格，發現 2×4 和 4×2 方格圖、3×5 和 5×3 方格圖一樣，為避免重複探討，我們只討論 m≧n 的情形。

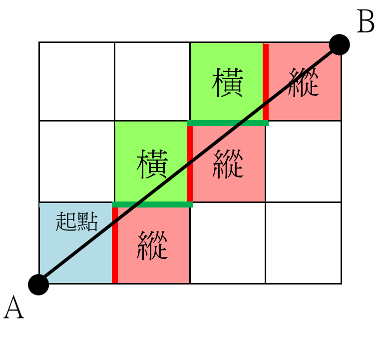


我們發現 m×n 的方格圖，扣除四條邊界，內部會有 m－1 條縱線，n－1 條橫線，若從左下角的格子點 A 當起點，右上角格子點 B 為終點，畫出的對角線必定會經過 m－1 條縱線，n－1 條橫線，而每經過一條線就會進入一個新的方格〈沒通過線時，就不會進入新的方格〉，由此觀點，我們可利用方格圖的長邊 m 和寬邊 n 來推測其對角線會經過幾個方格。另外我們也發現，對角線有時會經過「格子點」〈縱線與橫線的交點〉，但每經過一個格子點，對角線 T_0 經過的方格就會少一個。所以討論時我們分成二種狀況來討論其變化:

(一)對角線 T_0 不經過格子點；　(二)對角線 T_0 經過格子點。

(一)對角線 T_0 不經過格子點

【範例一】先取 4×3 的方格圖，觀察發現如下:



4×3 的方格圖，對角線 T_0 從起點 A 到終點 B，會

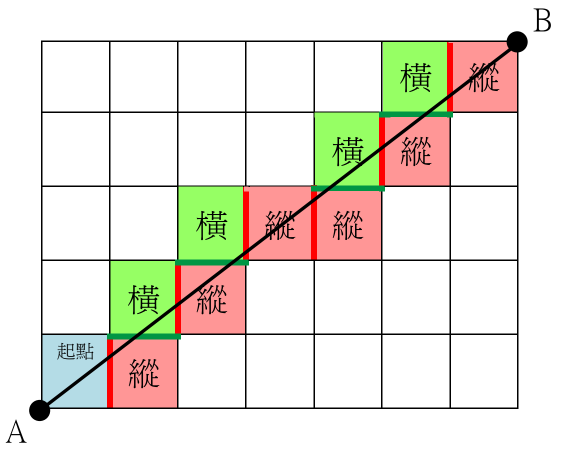
通過 4－1 條縱線 ➜ 所以會經過 4－1 個方格(紅色)

通過 3－1 條橫線 ➜ 所以會經過 3－1 個方格(綠色)

◈對角線 T_0 經過的方格數:

$$\underbrace{(4-1)}_{\text{經過縱線產生的方格}}+\underbrace{(3-1)}_{\text{經過橫線產生的方格}}+\underbrace{1}_{\text{起點方格}}=\text{6 格}$$

【範例二】再取 7×5 的方格圖，觀察發現如下：



7×5 的方格圖，對角線 T_0 從起點 A 到終點 B，

通過 7－1 條縱線 ➜ 所以會經過 7－1 個方格

通過 5－1 條橫線 ➜ 所以會經過 5－1 個方格

◈對角線 T_0 經過的方格數：

(7－1) ＋ (5－1) ＋ 1 ＝ 11 格

經過縱線產生的方格　經過橫線產生的方格　起點方格

【歸納一】： m×n 方格圖中：

(1) 當對角線 T_0 不經過格子點時，m 和 n 恰為互質。

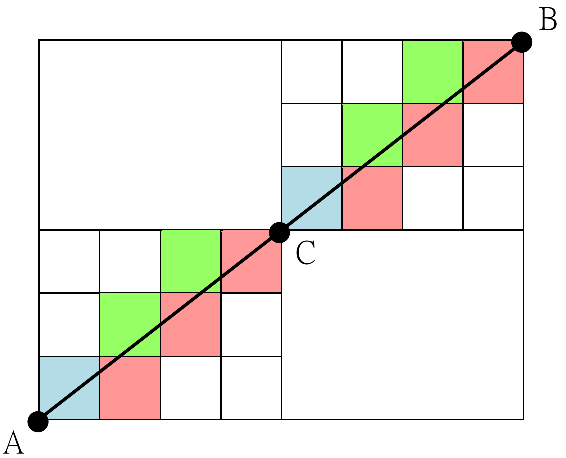
(2) 對角線 T_0 所經過的方格數 ＝ (m－1)＋(n－1)＋起點方格

＝ (m－1)＋(n－1)＋1

＝ $\boxed{\text{m＋n－1}}$ ……………………………〔公式一〕

(二)對角線 T_0 經過格子點

【範例三】先取 8×6 的方格圖，觀察發現如下：



❶8×6 方格圖，對角線 T_0 會經過 1 個格子點 C。

❷格子點 C 恰好將對角線 $\overline{AB}$ 平分成 2 段，

每段都是 $\frac{8}{2}\times\frac{6}{2}$ 方格圖的對角線，$\overline{AC}=\overline{CB}$。

❸運用〔公式一〕$\boxed{\text{m＋n－1}}$ 累積計算：

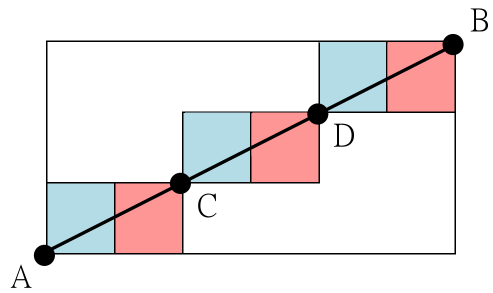
◈對角線 $\overline{AB}$ 經過的方格數

＝ $\overline{AC}$ 經過的方格數×2

＝ $\left(\frac{8}{2}+\frac{6}{2}-1\right)\times 2$

＝ $\underbrace{8}_{m}+\underbrace{6}_{n}-\underbrace{2}_{(m,n)\text{最大公因數}}$ ＝ 12 格

【範例四】再取 6×3 的方格圖，觀察發現如下：



❶6×3 的方格圖，對角線 T_0 會經過 2 個格子點 C、D

❷格子點 C、D 恰好將對角線 $\overline{AB}$ 平分成 3 段，每段都是 $\frac{6}{3}\times\frac{3}{3}$ 方格圖的對角線，$\overline{AC}=\overline{CD}=\overline{DB}$

❸運用〔公式一〕 $\boxed{m+n-1}$ 累積計算：

◈對角線 $\overline{AB}$ 經過的方格數＝ $\overline{AC}$ 經過的方格數×3

$$=\left(\frac{6}{3}+\frac{3}{3}-1\right)\times 3 = 6 + 3 - 3 = \text{6 格}$$

m　n　(m,n)最大公因數

【歸納二】： m×n 方格圖中：

如果 m 和 n 的最大公因數為 g，即 G.C.D(m，n)＝g＞1。

(1) 當對角線經過格子點時，m 和 n 必不互質，且格子點恰好將對角線平分成 g 段。

(2) 格子點會有 g－1 個，所以對角線經過的方格會減少 g－1 個。

(3) 對角線會被分成 g 段，每段都是 $\frac{m}{g}\times\frac{n}{g}$ 方格圖的對角線〈$\frac{m}{g}\times\frac{n}{g}$ 為正整數〉，

每段會經過 $\boxed{(\frac{m}{g}-1)+(\frac{n}{g}-1)+\text{起點方格}}$ 個方格。

(4) **對角線 T_0 所經過的方格數**＝【$(\frac{m}{g}-1)+(\frac{n}{g}-1)+$起點方格】×g

$$=\left[\left(\frac{m}{g}-1\right)+\left(\frac{m}{g}-1\right)+1\right]\times g \quad = \boxed{m+n-g}$$

$$= \boxed{m+n-\gcd(m,n)} \cdots\cdots\cdots\cdots\text{〔公式二〕}$$

彙整〔公式一〕和〔公式二〕，發現〔公式一〕是用在 m 和 n 互質時，即最大公因數＝1，與〔公式二〕的概念相同，所以可以整合成一個公式即可。

〔公式一〕＝m＋n－1　＝m＋n－gcd (m , n)　＝〔公式二〕

【結論一】：

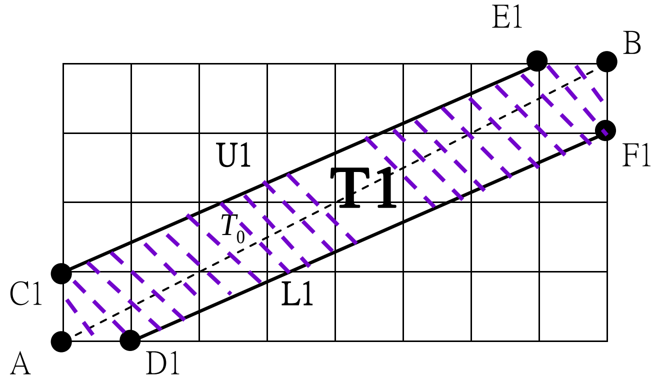
m×n 方格圖，對角線 T_0 經過的方格數＝ $\boxed{m+n-\gcd(m,n)}$

二、討論二：探討 m×n 方格圖，沿對角線方向形成的 T_1 區塊會經過幾個方格。

在探討問題前我們先定義 $\boxed{T_1\text{區塊}}$ 和 $\boxed{\text{直線 U1、L1}}$。

T_1 區塊：在 m×n 方格圖中，起點 A 往上、往右各移 1 格，終點 B 往左、往下各移 1 格，得四個新點 C1、D1、E1、F1，連接此四點與 A、B，所形成的區塊稱為 T_1。

直線 U1、L1：連接 C1、E1 兩點成直線 U1，連接 D1、F1 兩點成直線 L1。



例：8 × 4 的方格圖

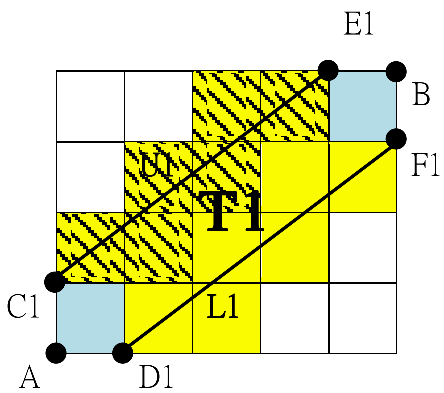
(T_0 為原來對角線)

從【結論一】可知，m×n 方格圖中，對角線所經過的方格數為 $\boxed{m+n-\gcd(m,n)}$。我們覺得 T_1 區塊也可看成對角線 T_0 的一種特殊變寬方式，所以推測 T_1 區塊經過的方格數可能與 T_0 的結論公式有關：$\boxed{m+n-\gcd(m,n)}$。有了初步想法後，我們先在 2×2、3×2、3×3、…20×19 至 20×20 方格圖中畫出 T_1 區塊，發現每個 T_1 區塊均呈現點對稱，且 T_1 區塊經過的方格可分成二類，我們用顏色區分以方便討論：❶**直線 U1、L1 會經過的方格(黃色部分)**；❷**直線 U1、L1 不經過的方格(藍色＋紅色部分)**。為進一步找出規律，我們依據前面討論一的經驗與思考模式，分成四種狀況來探討其變化，為避免重複，只討論 m≧n 情形：

- **(一)對角線 T_0 不經過格子點，U1、L1 不經過格子點。**
- **(二)對角線 T_0 不經過格子點，U1、L1 經過格子點。**
- **(三)對角線 T_0 經過格子點，U1、L1 不經過格子點。**
- **(四)對角線 T_0 經過格子點，U1、L1 經過格子點。**

(一)對角線 T_0 不經過格子點 (m，n 互質)，U1、L1 不經過格子點 (m-1，n-1 互質)

【範例五】先取 5×4 的方格圖，觀察發現如下：



❶U1、L1 為平行線，經過的方格數與圖案相同，且兩線經過的方格不重疊。

❷U1、L1 恰為(5－1)×(4－1)方格圖的對角線。

❸可用【結論一】$\boxed{m+n-\gcd(m,n)}$，算出 U1、L1 經過的方格。

◈ T_1 區塊經過的方格數

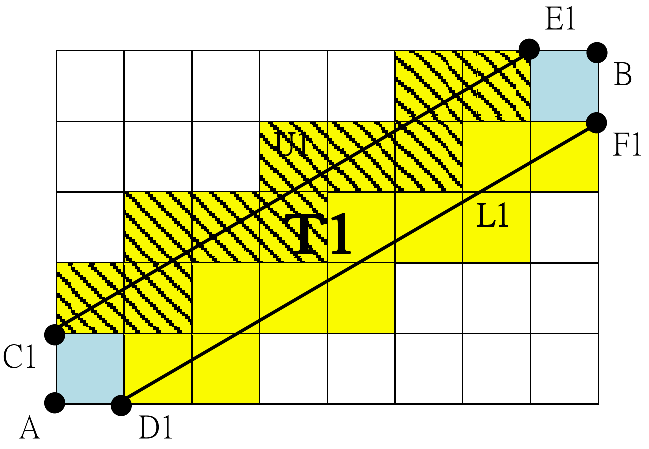
＝**黃色方格**＋藍色方格

＝**直線 U1 經過的方格×2**＋起點方格＋終點方格

＝〔(5－1)+(4－1)－1〕× 2 ＋ 1 ＋1

＝ 6 × 2 ＋ 2 ＝ 14 格

【範例六】再取 8×5 的方格圖，觀察發現如下：



❶U1、L1 爲平行線，經過的方格數與圖案相同，且經過的方格不重疊。

❷U1、L1 爲(8－1)×(5－1)方格圖的對角線，可用【結論一】算出 U1、L1 經過的方格

◈ T_1 區塊經過的方格數

＝黃色方格＋藍色方格

＝直線 U1 經過的方格×2＋起點＋終點

＝〔(8－1)＋(5－1)－1〕× 2＋ 1 ＋1

＝ 10 × 2 ＋ 2 ＝ 22 格

【歸納三】： m×n 方格圖中：

(1)直線 U1、L1 爲平行線，經過的方格數與圖案相同，且經過的方格不重疊。

(2) U1、L1 恰爲(m－1)×(n－1)方格圖的對角線，可用【結論一】算出 U1、L1 經過的方格。

(3) U1、L1 必不經過起點方格和終點方格，固定爲 2 格(藍色方格)。

(4) **T_1 區塊所經過的方格數**

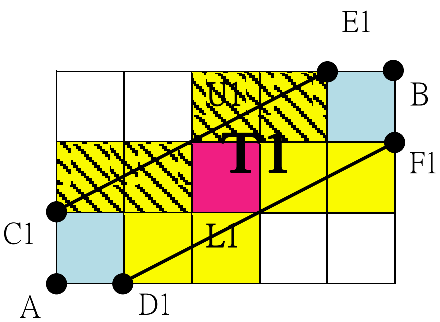
＝ **黃色方格＋藍色方格** ＝**直線 U1 經過的方格×2＋起點方格＋終點方格**

＝〔(m－1)＋(n－1)－gcd (m-1 , n-1)〕×2 ＋ 2

＝ 2m＋2n－2－2× gcd (m-1 , n-1) ＝ $\boxed{2m+2n-4}$ …………〔公式三〕

(二)對角線 T_0 不經過格子點 (m，n 互質)，U1、L1 經過格子點 (m-1，n-1 不互質)

【範例七】先取 5×3 的方格圖，觀察發現如下：



❶U1、L1 爲平行線，經過的方格數相同，且不重疊。

❷U1、L1 恰爲(5－1)×(3－1)方格圖的對角線，

可用【結論一】算出 U1、L1 經過的方格。

❸U1、L1 各經過 1 個格子點，所以 T_1 內部會有 1 個方格(紅色部分)不被 U1、L1 經過。

◈ T_1 區塊經過的方格數

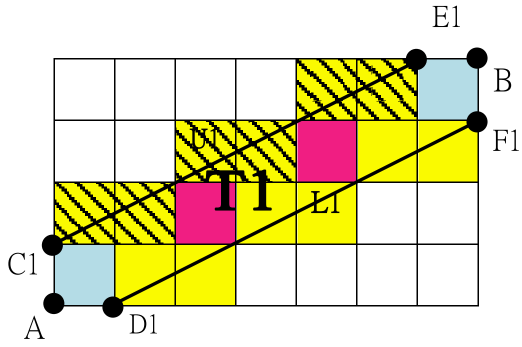
＝黃色方格＋藍色方格＋紅色方格

＝U1 經過的方格×2＋起點＋終點＋U1、L1 未經過方格

＝〔(5－1)＋(3－1)－2〕× 2＋1 ＋1 ＋1

＝ 4 × 2 ＋ 3 ＝ 11 格

【範例八】再取 7×4 的方格圖，觀察發現如下：



❶U1、L1 為平行線，經過的方格數相同，且不重疊。

❷U1、L1 恰為(7－1)×(4－1)方格圖的對角線，可用【結論一】算出 U1、L1 經過的方格。。

❸U1、L1 各經過 2 個格子點，所以 T_1 區塊會有 2 個方格(紅色部分)不被 U1、L1 經過。

◈ T_1 區塊經過的方格數

＝黃色方格＋藍色方格＋紅色方格

＝U1 經過方格×2＋起點＋終點＋U1、L1 未經過方格

＝〔(7－1)＋(4－1)－3〕× 2＋1 ＋1 ＋2

＝ 6× 2 ＋ 4 ＝ 16 格

【歸納四】： m×n 方格圖中：

(1)直線 U1、L1 為平行線，經過的方格數與圖案相同，且經過的方格不重疊。

(2) U1、L1 恰為(m－1)×(n－1)方格圖的對角線，可用【結論一】算出 U1、L1 經過的方格。

(3) U1、L1 必不經過起點方格和終點方格，固定為 2 格(藍色方格)。

(4)若 U1、L1 各經過 x 個格子點，則 T_1 區塊會有 x 個方格(紅色方格)不被 U1、L1 經過，

x＝gcd (m-1 , n-1)－1。

(5) T_1 區塊經過的方格數 ＝黃色方格＋藍色方格＋紅色方格

＝直線 U1 經過的方格×2＋起點方格＋終點方格＋U1、L1 未經過方格(即 x)

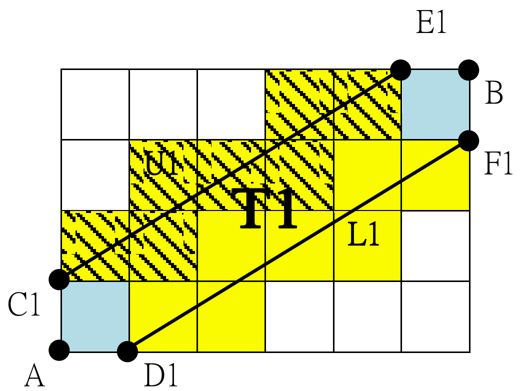
＝〔(m－1)＋(n－1)－gcd (m-1 , n-1)〕×2＋2 ＋ gcd (m-1 , n-1)－1

＝ 2m＋2n－2－2× gcd (m-1 , n-1)＋gcd (m-1 , n-1)－1

＝ $\boxed{\text{2m＋2n－3－gcd (m-1 , n-1)}}$……………〔公式四〕

(三)對角線 T_0 經過格子點 (m，n 不互質)，U1、L1 不經過格子點 (m-1，n-1 互質)

【範例九】先取 6×4 的方格圖，觀察發現如下：



❶U1、L1 為平行線，經過的方格數量與圖案相同，且兩線經過的方格不重疊。

❷U1、L1 恰為(6－1)×(4－1)方格圖的對角線。

◈ T_1 區塊經過的方格數

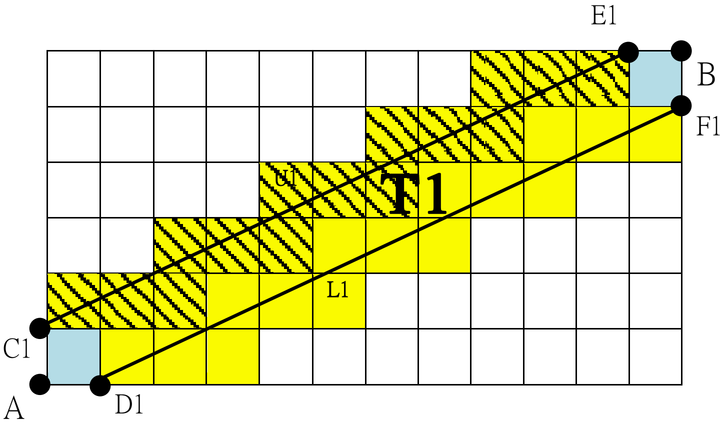
＝黃色方格＋藍色方格

＝直線 U1 經過的方格×2＋起點方格＋終點方格

＝〔(6－1)＋(4－1)－1〕× 2＋ 1 ＋1

＝ 7 × 2 ＋ 2 ＝ 16 格

【範例十】再取 12×6 的方格圖，觀察發現如下：



❶U1、L1 爲平行線，經過的方格數與圖案相同，且經過的方格不重疊。

❷U1、L1 恰爲(12－1)×(6－1)方格圖的對角線。

◈ T_1 區塊經過的方格數

＝黃色方格＋藍色方格

＝U1 經過的方格×2＋起點＋終點

＝〔(12－1)＋(6－1)－1〕× 2＋1＋1

＝ 15 × 2 ＋ 2 ＝ 32 格

【歸納五】： m×n 方格圖中：

(1)直線 U1、L1 爲平行線，經過的方格數與圖案相同，且經過的方格不重疊。

(2) U1、L1 恰爲(m－1)×(n－1)方格圖的對角線，可用【結論一】算出 U1、L1 經過的方格。

(3) U1、L1 必不經過起點方格和終點方格，固定爲 2 格(藍色方格)。

(4) **T_1 區塊經過的方格數**

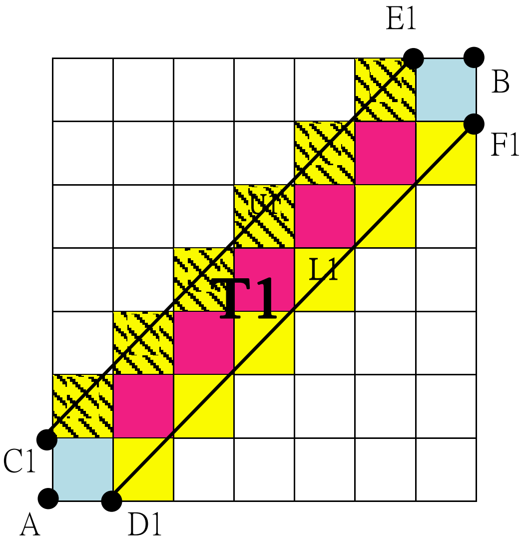
＝ 黃色方格＋藍色方格　　＝直線 U1 經過的方格×2＋起點方格＋終點方格

＝〔(m－1)＋(n－1)－gcd (m-1, n-1)〕×2 ＋2

＝ 2m＋2n－2－2× gcd (m-1, n-1) ＝ $\boxed{2m+2n-4}$ …… 同〔公式三〕

(四) 對角線 T_0 經過格子點 (m，n 不互質)，U1、L1 經過格子點 (m-1，n-1 不互質)

【範例十一】先取 7×7 的方格圖，觀察發現如下：



❶U1、L1 爲平行線，經過的方格數相同，且不重疊。

❷U1、L1 恰爲(7－1)×(7－1)方格圖的對角線，可用【結論一】算出 U1、L1 經過的方格。

❸U1、L1 各經過 5 個格子點，所以 T_1 區塊會有 5 個方格(紅色部分)不被 U1、L1 經過。

◈ T_1 區塊經過的方格數

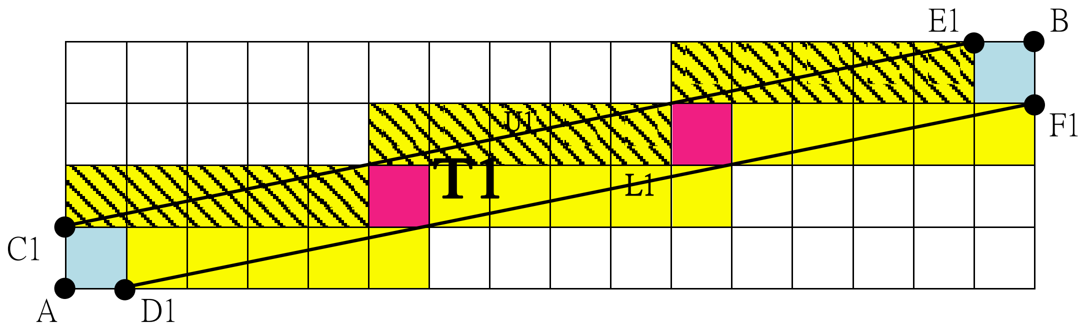
＝黃色方格＋藍色方格＋紅色方格

＝U1 經過的方格×2＋起點＋終點＋U1、L1 未經過方格

＝〔(7－1)＋(7－1)－6〕× 2＋1 ＋1 ＋5

＝ 6 × 2 ＋ 7 ＝ 19 格

【範例十二】再取 16×4 的方格圖，觀察發現如下：



❶U1、L1 為平行線，經過的方格數相同，且不重疊。

❷U1、L1 恰為(16－1)×(4－1)方格圖的對角線，可用【結論一】算出 U1、L1 經過的方格。

❸U1、L1 各經過 2 個格子點，所以 T_1 區塊會有 2 個方格(紅色部分)不被 U1、L1 經過。

◈ T_1 區塊經過的方格數　＝黃色方格＋藍色方格＋紅色方格

　＝U1 經過的方格×2＋起點＋終點＋U1、L1 未經過方格

　＝〔(16－1)＋(4－1)－3〕× 2＋1 ＋1 ＋2 ＝ 15 × 2 ＋ 4 ＝ 34 格

【歸納六】： m×n 方格圖中：

(1)直線 U1、L1 為平行線，經過的方格數與圖案相同，且經過的方格不重疊。

(2) U1、L1 恰為(m－1)×(n－1)方格圖的對角線，可用【結論一】算出 U1、L1 經過的方格。

(3) U1、L1 必不經過起點方格和終點方格，固定為 2 格(藍色方格)。

(4)若 U1、L1 各經過 x 個格子點，則 T_1 區塊會有 x 個方格(紅色方格)不被 U1、L1 經過，

　x＝gcd (m-1 , n-1)－1。

(5) T_1 區塊經過的方格數

＝黃色方格＋藍色方格＋紅色方格

＝直線 U1 經過的方格×2＋起點方格＋終點方格＋U1、L1 未經過方格 (即 x)

＝〔(m－1)＋(n－1)－gcd (m-1, n-1)〕×2＋2 ＋gcd (m-1, n-1)－1

＝ 2m＋2n－2－2× gcd (m-1, n-1)＋gcd (m-1, n-1)－1

＝ $\boxed{\text{2m＋2n－3－gcd (m-1, n-1)}}$…………同〔公式四〕

彙整〔公式三〕和〔公式四〕，發現〔公式三〕是用在 m-1 和 n-1 互質時，即最大公因數＝1，與〔公式四〕的概念相同，所以可以整合成一個公式即可。

〔公式三〕＝2m＋2n－4　＝2m＋2n－3－1

　　　＝2m＋2n－3－gcd (m-1, n-1)　＝〔公式四〕

【結論二】：

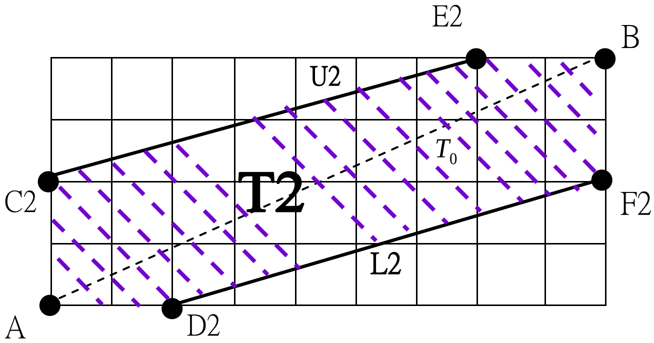
m×n 方格圖，T_1 區塊經過的方格數＝ $\boxed{\text{2m＋2n－3－gcd (m-1,n-1)}}$

三、討論三：探討 m×n 方格圖，沿對角線方向形成的T_2區塊會經過幾個方格。

在探討問題前我們先定義 $\boxed{T_2\text{區塊}}$ 和 $\boxed{\text{直線 U2、L2}}$。

T_2區塊：在 m×n 方格圖中，起點 A 往上、往右各移 2 格，終點 B 往左、往下各移 2 格，得四個新點 C2、D2、E2、F2，連接此四點與 A、B，所形成的區塊稱爲T_2。

直線 U2、L2：連接 C2、E2 兩點成直線 U2，連接 D2、F2 兩點成直線 L2。



例：9 × 4 的方格圖

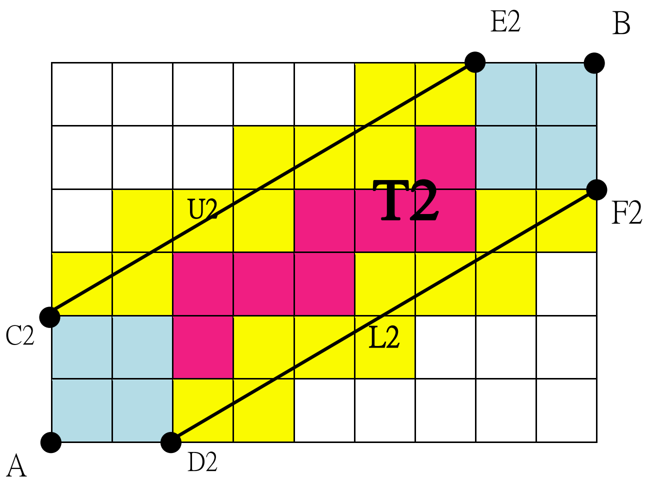
(T_0 爲原來對角線)

在嘗試推導T_2的公式時，我們同前面方法先畫圖取樣 3×3、4×3、…20×19 至 20×20 方格圖中的T_2區塊來觀察，發現每個T_2區塊均呈現點對稱，另外在討論二的過程中我們發現，對角線T_0並不影響T_1區塊經過的方格數量，所以接下來探討T_2區塊經過的方格數時，只探討直線 U2、L2 對T_2的影響，分二種狀況來討論其變化，爲避免重複僅討論 m≧n 的情形：

$\begin{cases} \text{(一)直線 U2、L2 不經過格子點（ 互質 ）。} \\ \text{(二)直線 U2、L2 經過格子點（ 不互質 ）。} \end{cases}$

(一) m×n 方格圖中，直線 U2、L 2 不經過格子點（m-2，n-2 互質 ）。

【範例十三】先取 9×6 的方格圖，觀察發現如下：



❶U2、L2 爲平行線，經過的方格數與圖案相同，且兩線經過的方格不重疊。

❷ U2、L2 恰爲(9－2)×(6－2)方格圖的對角線。可用【結論一】算出 U1、L1 經過的方格。

◈ T_2 區塊經過的方格數

＝黃色方格＋藍色方格＋紅色方格

＝**U2 經過的方格×2**＋**靠近起點和終點的 2×2 方格**＋**U2、L2 未經過方格**

＝〔(9－2)＋(6－2)－1〕× 2＋ 8 ＋8

＝ 10 × 2 ＋ 16 ＝ 36 格

同討論T_1時的情況，觀察取樣的方格圖，將T_2區塊經過的方格分成二類：**❶直線 U1、L1 會經過的方格(黃色部分)；❷直線 U1、L1 不經過的方格(藍色＋紅色部分)**。但第❷類在觀察剩下的圖形時不好看出方格數的規律，為方便觀察，再細分為藍色和紅色二種方格。

黃色方格➜直線 U2、L2 通過的方格數。每個T_2區塊經過的數量雖不同，但可用【結論一】公式：對角線T_0經過的方格數＝$\boxed{m+n-\gcd(m,n)}$來算出方格數。

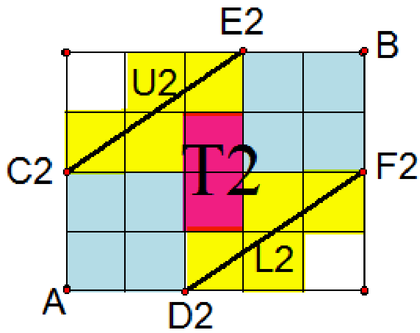
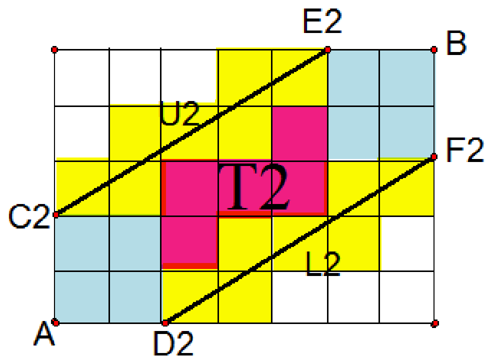
藍色方格➜靠近起點 A、終點 B 的 2×2 方格，每個T_2區塊必經過 8 個，不影響內部規律。

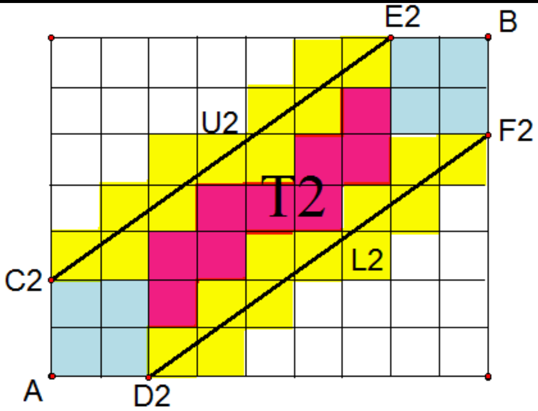
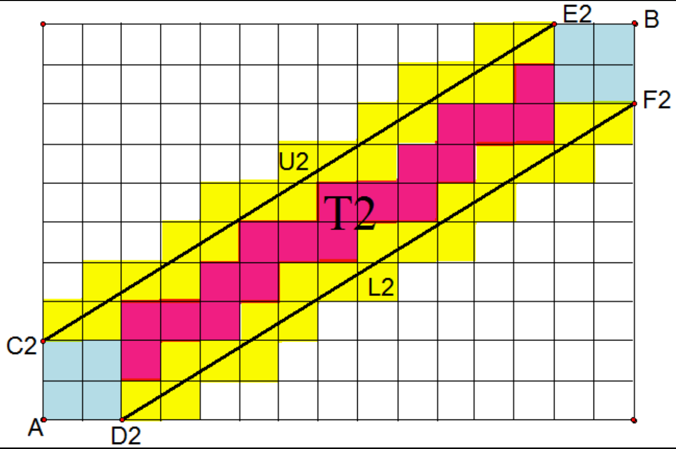
紅色方格➜T_2區塊經過的方格數－藍色和黃色方格後所剩下的格子，此部分每個T_2區塊經過的數量都不同。

我們已知藍色、黃色方格的規律，若能再找出紅色方格的規律，就可推論出T_2區塊經過的方格數之公式，我們從這個想法出發，著手分析紅色方格。從T_0、T_1導出的結論，我們先假設紅色方格的數量會與三個數字有關：❶m－2、❷n－2、❸ gcd (m-2 ,n-2)。

【分析過程】：

我們先假設「(m－2)＋(n－2) 需要再加上或減去多少數才會等於紅色方格數？」再去分析許多 m-2 和 n-2 互質的方格圖。下表列舉幾個圖例來說明我們的分析過程。

m×n 的方格圖	m×n	紅色方格的規律推導		
		(m－2)＋(n－2)	±▲	紅色方格數
	5×4	3＋2	－3	＝2
	7×5	5＋3	－3	＝5

	9×7	7+5	−3	=9
	15×10	13+8	−3	=18

【歸納七】： m×n 方格圖中:

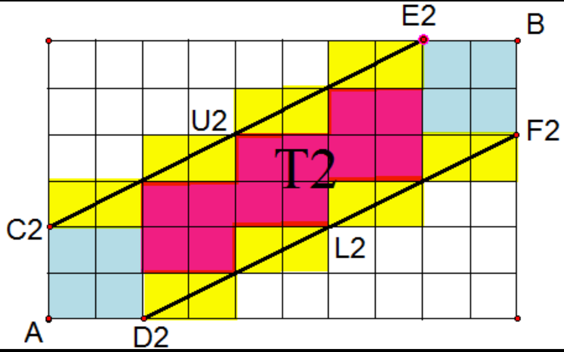
(1) 我們發現當 m-2 和 n-2 互質時，「(m−2)+(n−2)」只要再−3 就會等於紅色方格數。

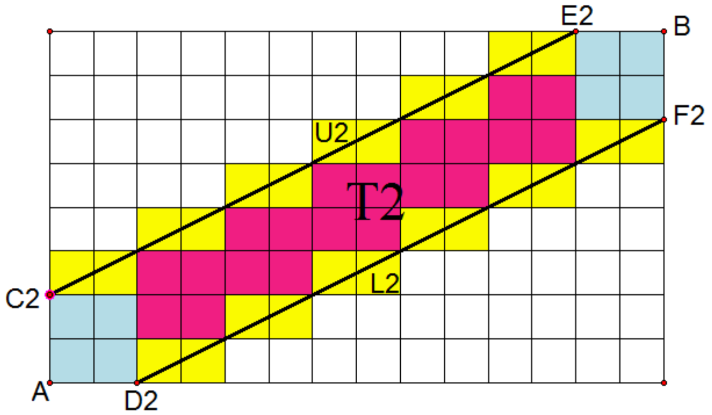
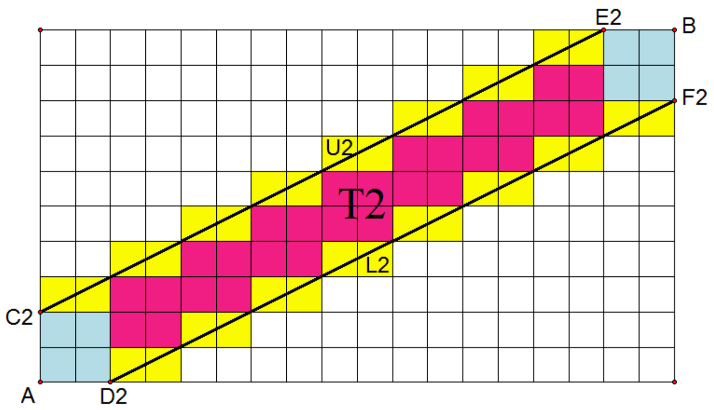
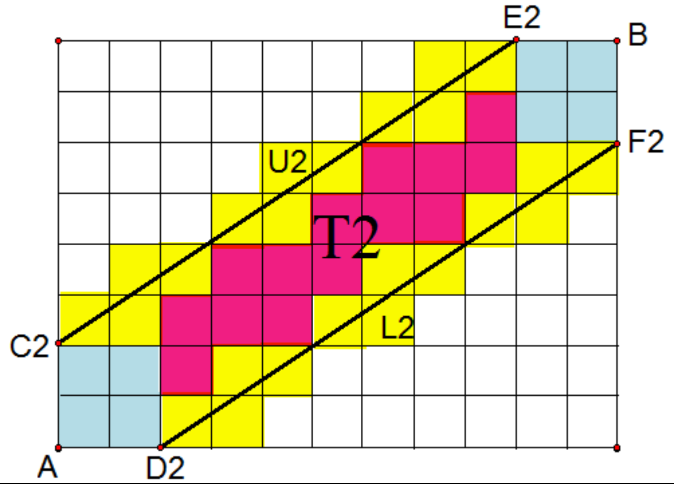
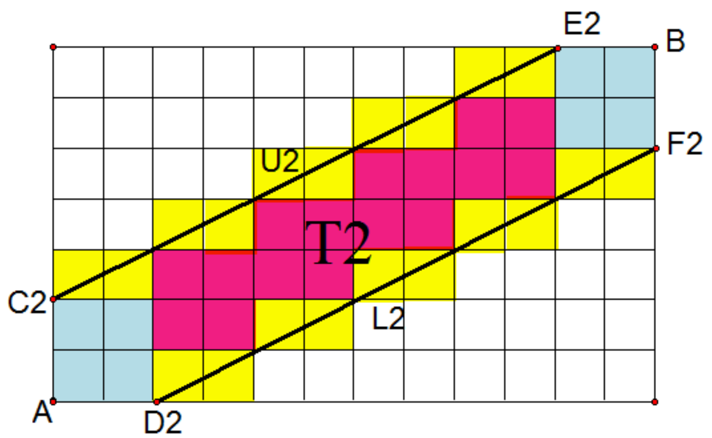
(2) T_2 區塊所經過的紅色方格數 ＝ (m−2)+(n−2) −3……………………〔公式五〕

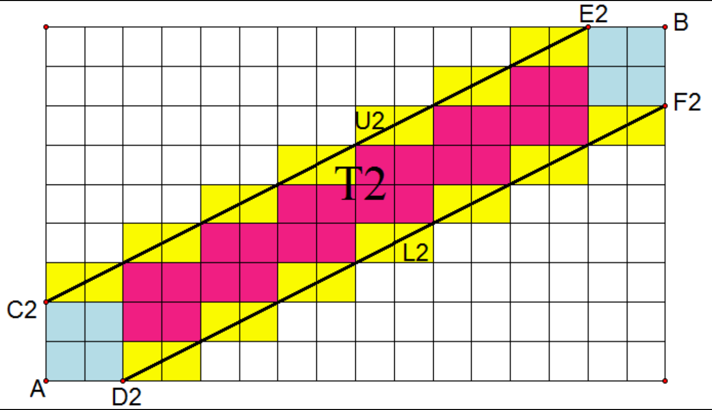
(二) m×n 方格圖中，直線 U2、L 2 經過格子點（m-2，n-2 不互質 ）。

有了前面的發現，我們推想：當 直線 U2、L 2 經過格子點（m-2，n-2 不互質) 時，紅色方格數是不是也會符合〔公式五〕？於是我們分析更多 m-2 和 n-2 不互質的方格圖，希望證實我們的推論。下表列舉幾個圖例來說明我們的分析過程。

【分析過程】：

m×n 的方格圖	m×n	紅色方格的規律推導		
		(m−2)+(n−2)	±▲	紅色方格數
	10×6	8+4	+0	=12

	14×8	12＋6	＋2	＝20
	18×10	16＋8	＋4	＝28
	11×8	9＋6	－1	＝14
	12×7	10＋5	＋1	＝16

	16×9	14＋7	＋3	＝24

我們失望的發現，當 **直線 U2、L 2 經過格子點（m-2 ,n-2 不互質)** 時，

➜ ▲≠－3

➜ 紅色方格數≠ (m－2)＋(n－2) －3

我們突然靈機一動，想到 gcd (m-2 ,n-2)的對紅色方格數的影響尚未討論到，▲會不會跟 gcd (m-2 ,n-2)有關係呢？於是我們朝此方向去研究，驚喜的發現：▲的數字與 gcd (m-2 ,n-2)之間竟存在另一種巧妙的規律。

【分析過程】：

m×n	(m-2 ,n-2) 的最大公因數	紅色方格的規律推導		
		(m－2)＋(n－2)	±▲	紅色方格數
10×6	(8 , 4)=4	8＋4	＋0 【＝gcd(8 , 4) －4】	＝12
14×8	(12 , 6)=6	12＋6	＋2 【＝gcd(12 , 6) －4】	＝20
18×10	(16 , 8)=8	16＋8	＋4 【＝gcd(16 , 8) －4】	＝28
11×8	(9 , 6)=3	9＋6	－1 【＝gcd(9 , 6) －4】	＝14
12×7	(10 , 5)=5	10＋5	＋1 【＝gcd(10 , 5) －4】	＝16
16×9	(14 , 7)=7	14＋7	＋3 【＝gcd(14 , 7) －4】	＝24

【歸納八】： m×n 方格圖中:

(1) 當 m-2 和 n-2 不互質時我們發現二種情況：

❶ gcd (m-2 ,n-2)等量遞增，差距量▲也會等量遞增，兩者$\boxed{\text{相差 4}}$。

❷ 差距量▲ =gcd (m-2 ,n-2)－4

(2) T_2 區塊所經過的紅色方格數

=(m－2)+(n－2) ± 差距量▲

=(m－2)+(n－2)+ gcd (m-2 , n-2)－4 ……〔公式六〕

整理〔公式五〕和〔公式六〕，發現〔公式五〕是用在 m-2 和 n-2 互質時，即最大公因數=1，與〔公式五〕的概念相同，所以可以整合成一個公式即可。

〔公式五〕=(m－2)+(n－2) －3 =(m－2)+(n－2) +1－4

=(m－2)+(n－2)+gcd (m-2 ,n-2)－4 =〔公式六〕

每個 T_2 區塊所經過的紅色方格數 =(m－2)+(n－2)+ gcd (m-2 ,n-2)－4

(3) T_2 區塊經過的方格數

=黃色方格+藍色方格+紅色方格

=直線 U2 經過的方格×2+起點方格+終點方格+U2、L2 未經過方格

=〔(m－2)+(n－2)－gcd (m-2 , n-2)〕×2+ 4×2

+(m－2)+(n－2)+gcd (m-2 , n-2)－4

= $\boxed{\text{3m+3n－8－gcd (m-2 , n-2)}}$

【結論三】：

m×n 方格圖，T_2 區塊經過的方格數= $\boxed{\text{3m+3n－8－gcd (m-2 ,n-2)}}$

四、討論四：探討 m×n 方格圖，沿對角線方向形成的 T_3、T_4、T_5、……到 T_r 區塊會經過幾個方格。

得到【結論一】、【結論二】、【結論三】的公式後，我們感覺公式之間似乎存在著關係，若能找出公式之間的規律，或許我們就能更快推導出 T_3、T_4、T_5、……到 T_r 經過的方格數公式。於是我們開始深入觀察、分析，並將發現記錄如下。

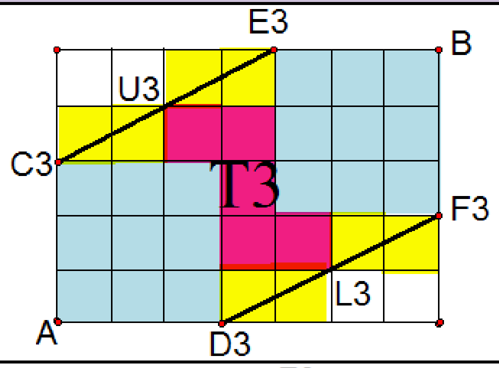
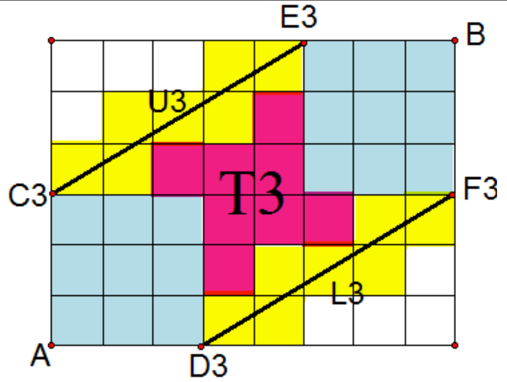
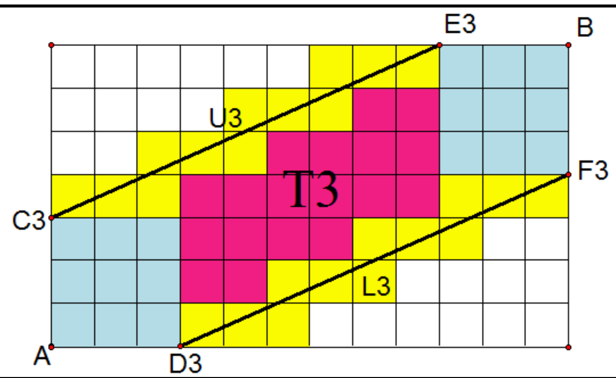
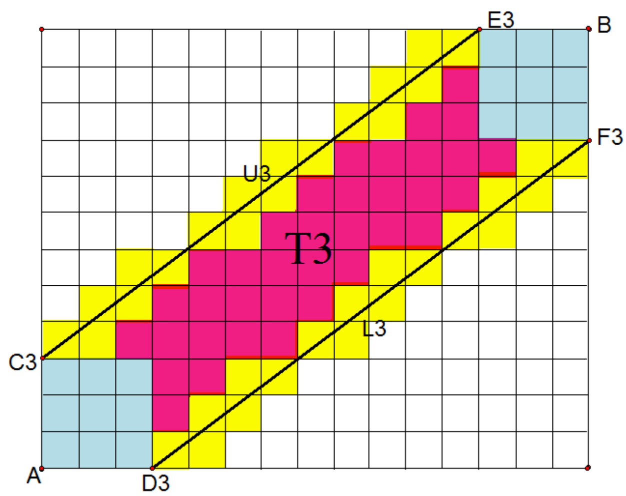
【分析過程】：

推論 T_r 公式（ T_r 經過的方格數 ）			
原公式			整理後公式
【結論一】 $T_0=m+n-\gcd(m,n)$	-0	$=$	$m+n-1-\gcd(m,n)+1$
	-3		
【結論二】 $T_1=2m+2n-\gcd(m-1,n-1)$	-3	$=$	$2(m+n-2)-\gcd(m-1,n-1)+1$
	-5		
【結論三】 $T_2=3m+3n-\gcd(m-2,n-2)$	-8	$=$	$3(m+n-3)-\gcd(m-2,n-2)+1$
	推測 -7		
【推論一】 $T_3=4m+4n-\gcd(m-3,n-3)$	推測 -15	$=$	$4(m+n-4)-\gcd(m-3,n-3)+1$
	推測 -9		
【推論二】 $T_4=5m+5n-\gcd(m-4,n-4)$	推測 -24	$=$	$5(m+n-5)-\gcd(m-4,n-4)+1$
	推測 -11		
【推論三】 $T_5=6m+6n-\gcd(m-5,n-5)$	推測 -35	$=$	$6(m+n-6)-\gcd(m-5,n-5)+1$
	推測 -13		
【推論四】 $T_6=7m+7n-\gcd(m-6,n-6)$	推測 -48	$=$	$7(m+n-7)-\gcd(m-6,n-6)+1$
【推論五】 $r\geq 0$ 且爲整數，$m\geq 0$，$n\geq 0$ 時，$T_r=(r+1)[m+n-(r+1)]-\gcd(m-r,n-r)+1$			

爲驗證推論是否正確，我們畫了許多 T_3 、 T_4 、 T_5 、 T_6 ……方格圖，利用點數與代入公式二種方法來算經過的方格數，再交互觀察答案是否一致。驗證圖例甚多，下面表格僅各列舉幾個圖例來分析說明。

(一)驗證【推論一】T_3 公式是否正確

【T_3 分析過程】：

類型	m×n 的方格圖	m×n	T_3 區塊經過的方格數	
T_3		7×5	點數	藍＋黃＋紅 ＝18＋8＋5 ＝31 格
			代入公式	T_3 ＝4(m＋n－4)－gcd (m-3 , n-3)＋1 ＝4×(7＋5－4)－2＋1 ＝31 格
T_3		8×6	點數	藍＋黃＋紅 ＝18＋14＋8 ＝40 格
			代入公式	T_3 ＝4(m＋n－4)－gcd (m-3 , n-3)＋1 ＝4×(8＋6－4)－1＋1 ＝40 格
T_3		12×7	點數	藍＋黃＋紅 ＝18＋24＋18 ＝60 格
			代入公式	T_3 ＝4(m＋n－4)－gcd (m-3 , n-3)＋1 ＝4×(12＋7－4)－1＋1 ＝60 格
T_3		15×12	點數	藍＋黃＋紅 ＝18＋36＋36 ＝90 格
			代入公式	T_3 ＝4(m＋n－4)－gcd (m-3 , n-3)＋1 ＝4×(15＋12－4)－3＋1 ＝90 格

【歸納九】

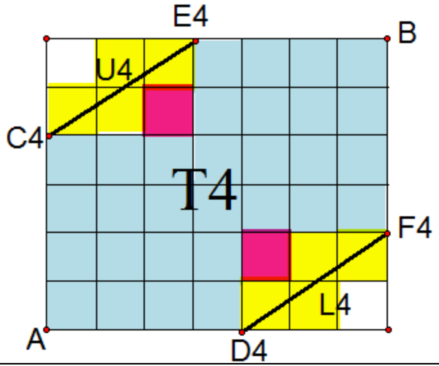
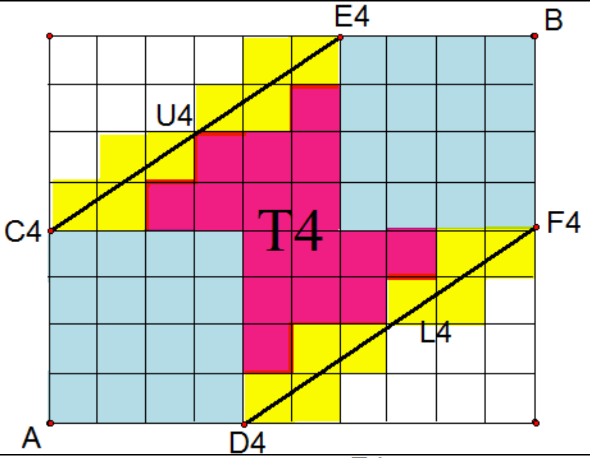
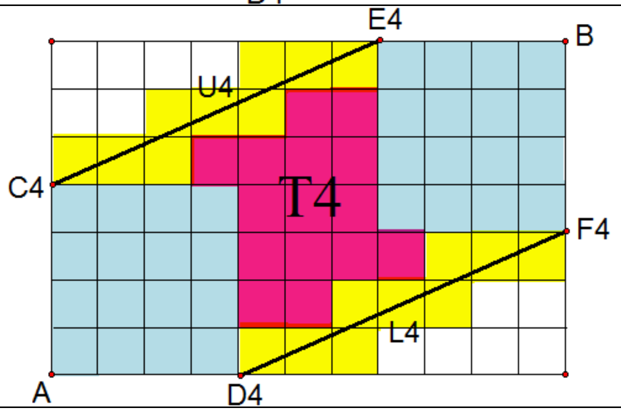
從驗證的過程中發現，同一個 T_3 區塊經過的方格數，利用點數和代入公式二種不同方法算出的答案都會相同，這個結果可以證明我們【推論一】的 T_3 公式成立。

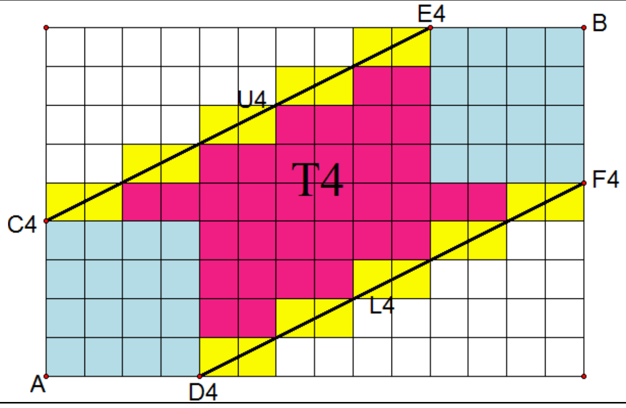
【結論四】：

m×n 方格圖，T_3 區塊經過的方格數＝ 4(m＋n－4)－gcd (m-3 , n-3)＋1

(二)驗證【推論二】T_4 公式是否正確

【T_4 分析過程】：

類型	m×n 的方格圖	m×n	T_4 區塊經過的方格數	
T_4		7×6	點數	藍＋黃＋紅 ＝30＋8＋2 ＝40 格
			代入公式	T_4 ＝5(m＋n－5)－gcd (m-4 , n-4)＋1 ＝5×(7＋6－5)－1＋1 ＝40 格
T_4		10×8	點數	藍＋黃＋紅 ＝32＋16＋16 ＝64 格
			代入公式	T_4 ＝5(m＋n－5)－gcd (m-4 , n-4)＋1 ＝5×(10＋8－5)－2＋1 ＝64 格
T_4		11×7	點數	藍＋黃＋紅 ＝32＋18＋15 ＝65 格
			代入公式	T_4 ＝5(m＋n－5)－gcd (m-4 , n-4)＋1 ＝5×(11＋7－5)－1＋1 ＝65 格

<table>
<tr><td rowspan="2">T_4</td><td rowspan="2">
</td><td rowspan="2">14×9</td><td>點數</td><td>藍＋黃＋紅
＝32＋20＋34
＝86 格</td></tr>
<tr><td>代入公式</td><td>T_4 ＝5(m＋n－5)－gcd (m-4 , n-4)＋1
＝5×(14＋9－5)－5＋1
＝86 格</td></tr>
</table>

【歸納十】

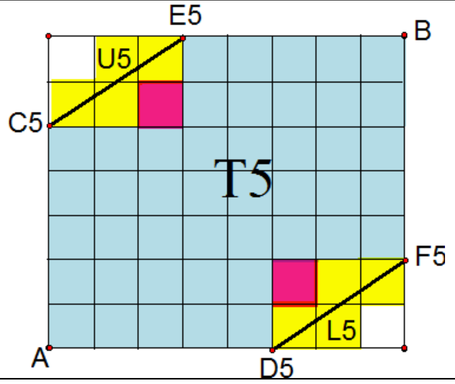
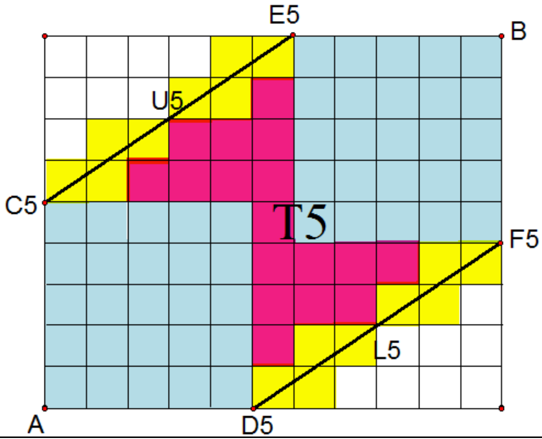
從驗證的過程中發現，同一個 T_4 區塊經過的方格數，利用$\boxed{\text{點數}}$和$\boxed{\text{代入公式}}$二種不同方法算出的答案都會相同，這個結果可以證明我們【推論二】的 T_4 公式成立。

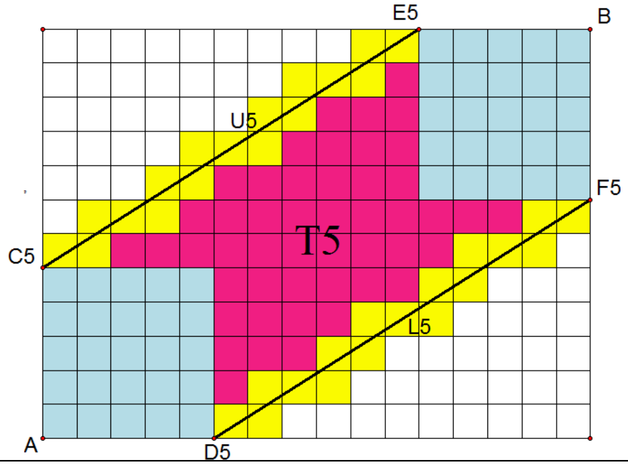
【結論五】：

m×n 方格圖，T_4 區塊經過的方格數＝$\boxed{5(m+n-5)-\gcd(m-4, n-4)+1}$

(三)驗證【推論三】T_5 公式是否正確

【T_5 分析過程】：

<table>
<tr><th>類型</th><th>m×n 的方格圖</th><th>m×n</th><th colspan="2">T_5 區塊經過的方格數</th></tr>
<tr><td rowspan="2">T_5</td><td rowspan="2">
</td><td rowspan="2">8×7</td><td>點數</td><td>藍＋黃＋紅
＝44＋8＋2
＝54 格</td></tr>
<tr><td>代入公式</td><td>T_5 ＝6(m＋n－6)－gcd (m-5 , n-5)＋1
＝6×(8＋7－6)－1＋1
＝54 格</td></tr>
<tr><td rowspan="2">T_5</td><td rowspan="2">
</td><td rowspan="2">11×9</td><td>點數</td><td>藍＋黃＋紅
＝50＋16＋17
＝83 格</td></tr>
<tr><td>代入公式</td><td>T_5 ＝6(m＋n－6)－gcd (m-5 , n-5)＋1
＝6×(11＋9－6)－2＋1
＝83 格</td></tr>
</table>

T_5		16×12	點數	藍＋黃＋紅 ＝50＋34＋48 ＝132 格
			代入公式	T_5 ＝6(m＋n－6)－gcd (m-5 , n-5)＋1 ＝6×(16＋12－6)－1＋1 ＝132 格

【歸納十一】

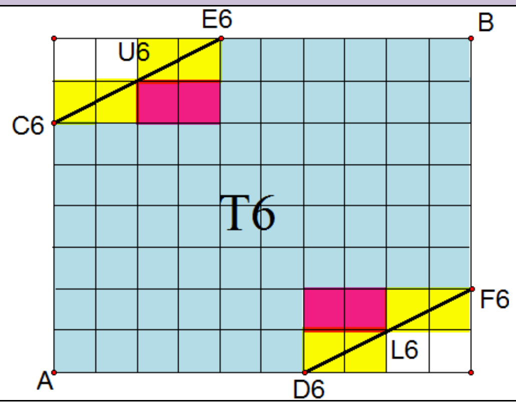
從驗證的過程中發現，同一個T_5區塊經過的方格數，利用點數和代入公式二種不同方法算出的答案都會相同，這個結果可以證明我們【推論三】的T_5公式成立。

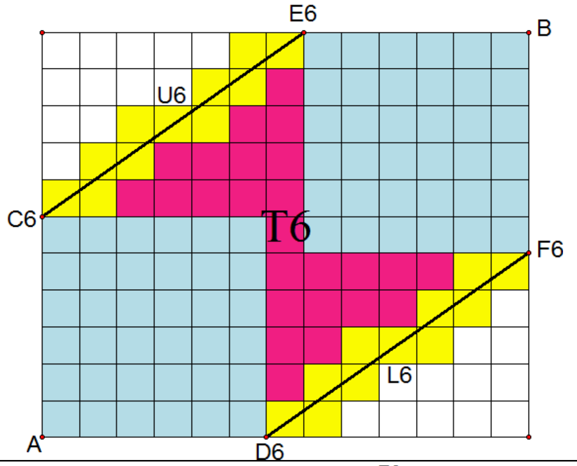
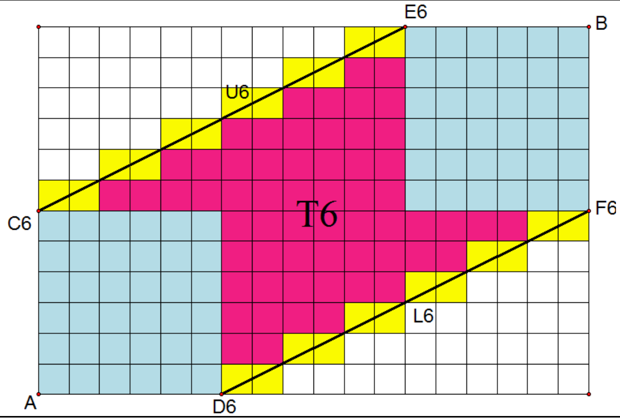
【結論六】：

m×n 方格圖，T_5區塊經過的方格數＝ 6(m＋n－6)－gcd (m-5 , n-5)＋1

(四)驗證【推論四】T_6公式是否正確

【T_6分析過程】：

類型	m×n 的方格圖	m×n	T_6 區塊經過的方格數	
T_6		10×8	點數	藍＋黃＋紅 ＝64＋8＋4 ＝76 格
			代入公式	T_6 ＝7(m＋n－7)－gcd (m-6 , n-6)＋1 ＝7×(10＋8－7)－2＋1 ＝76 格

<table>
<tr><td rowspan="2">T_6</td><td rowspan="2">
</td><td rowspan="2">13×11</td><td>點數</td><td>藍＋黃＋紅
＝72＋22＋25
＝119 格</td></tr>
<tr><td>代入公式</td><td>T_6 ＝7(m＋n－7)－gcd (m-6 , n-6)＋1
＝7×(13＋11－7)－1＋1
＝119 格</td></tr>
<tr><td rowspan="2">T_6</td><td rowspan="2">
</td><td rowspan="2">18×12</td><td>點數</td><td>藍＋黃＋紅
＝72＋24＋60
＝156 格</td></tr>
<tr><td>代入公式</td><td>T_6 ＝7(m＋n－7)－gcd (m-6 , n-6)＋1
＝7×(18＋12－7)－6＋1
＝156 格</td></tr>
</table>

【歸納十一】

從驗證的過程中發現，同一個 T_4 區塊經過的方格數，利用點數和代入公式二種不同方法算出的答案都會相同，這個結果可以證明我們【推論四】的 T_6 公式成立。

【結論七】：

m×n 方格圖， T_6 區塊經過的方格數＝ 7(m＋n－7)－gcd (m-6 , n-6)＋1

(五)驗證【推論五】T_r 公式是否正確

從【推論一】～【推論四】被驗證成功，所得到的【結論一】～【結論七】公式中，我們可以推廣並歸納出 T_r 的公式。

【結論八】：

m×n 方格圖，r≧0 且爲整數，m≧0，n≧0 時，

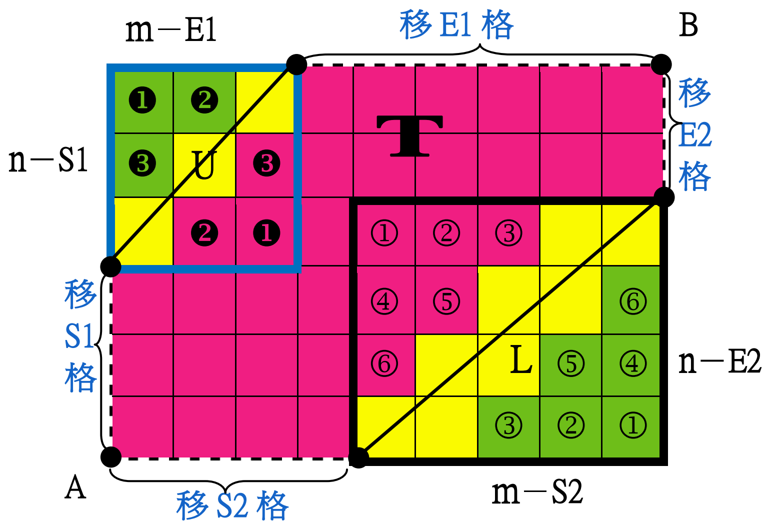
T_r 區塊經過的方格數＝ (r＋1)〔m＋n－(r＋1)〕－gcd (m－r , n－r)＋1

五、討論五：探討 m×n 方格圖，起點 A 往上移 S1 格、右移 S2 格，終點 B 往左移 E1 格、往下移 E2 格，連接新形成的四點與 A、B，所形成的 T 區塊會經過幾個方格。

從前面探討可知，在 m×n 方格圖中，當起點 A 往上、往右，終點 B 往左、往下移動**相同**格數時，會形成**對稱**的 T_r **區塊**，且可找到公式迅速算出 T_r 經過的方格數。但若起點 A 往上、往右，終點 B 往左、往下移動**不同**格數時，則會形成**不對稱**的 T **區塊**，T 區塊是否也能找到公式算出其經過的方格數呢？若能找到便可將此研究推廣至一般化的探討。

一開始我們延續前面找 T_r 區塊公式的方法，來嘗試推導 T 區塊經過的方格數公式，經過許多嘗試，發現不易觀察出規則性，只好先做罷。後來我們和老師討論後又有了新想法：若改由逆向思考來推論似乎會比較容易探討，於是我們朝此方向去研究。

逆向推論：先求 T 區塊未經過的方格數，再用 m×n 矩形的完整方格數－T 區塊未經過的方格數，即可得 T 區塊經過的方格數。



【推導 T 公式過程】：m×n 方格圖中

(1)因直線 U 和 L 不平行，所以 T 區塊未經過的方格數 (綠色方格)需分兩部分來探討。

(2)直線 U 可視爲(m－E1)×(n－S1)方格圖的對角線，直線 L 可視爲(m－S2)×(n－E2)方格圖的對角線，可用對角線 T_0 公式算出直線 U 和 L 經過的方格數(黃色方格)。

(3)任一 m×n 方格圖中，對角線 T_0 兩側未經過的格子成對稱(格子數相同)。

(4) **T 區塊未經過的方格數** (綠色方格)

＝左上角三角形格子數＋右下角三角形格子數

＝｛(m－E1)(n－S1)－〔(m－E1)＋(n－S1)－gcd(m－E1 , n－S1)〕｝÷2

＋｛(m－S2)(n－E2)－〔(m－S2)＋(n－E2)－gcd(m－S2 , n－E2)〕｝÷2

$$=mn-m-n-\frac{1}{2}〔E1(n-S1-1)+E2(m-S2-1)+S1(m-1)+S2(n-1)-\gcd(m-E1,n-S1)-\gcd(m-S2,n-E2)〕$$

(5) T 區塊經過的方格數（紅色方格＋黃色方格）

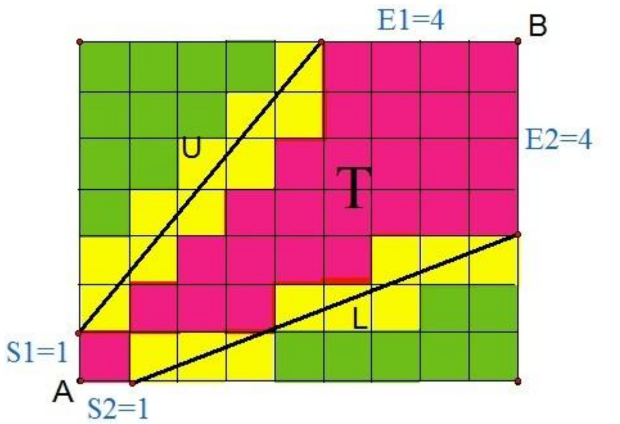
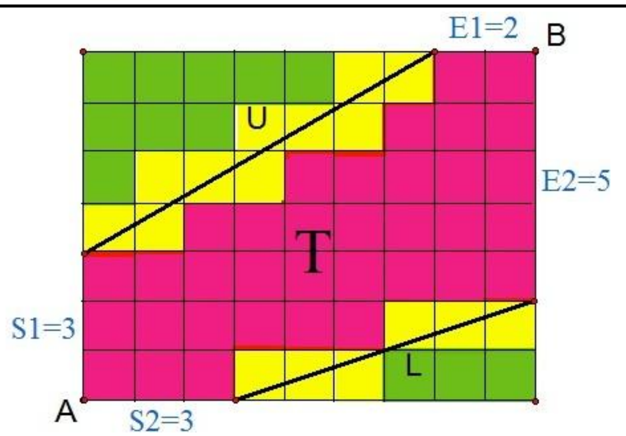
＝m×n 矩形的完整格子數－T 區塊未經過的方格數（綠色方格）

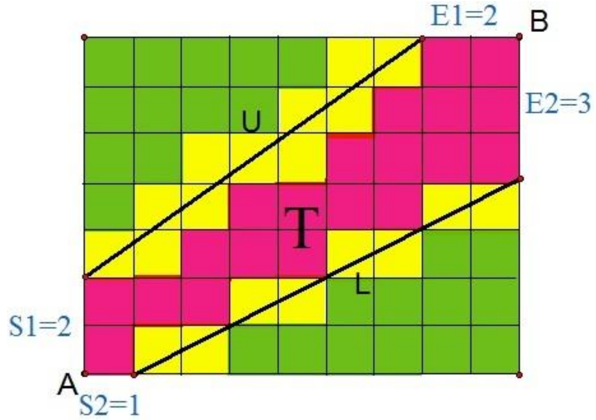
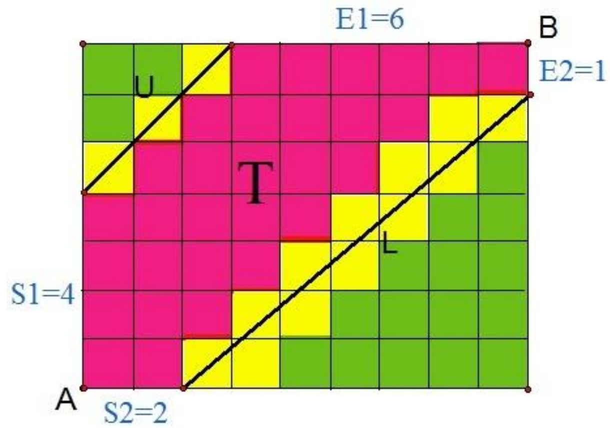
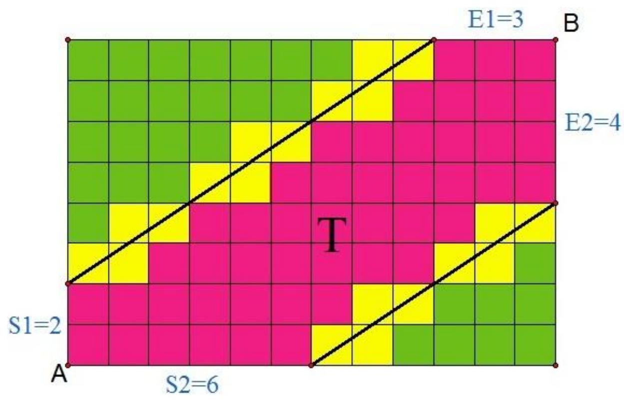
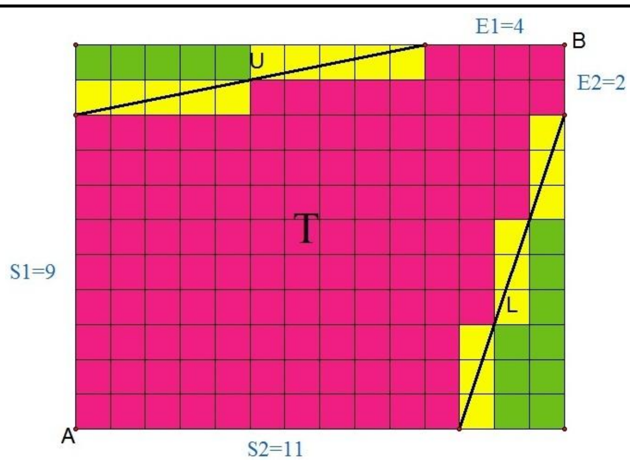
$$=mn-\{mn-m-n-\frac{1}{2}〔E1(n-S1-1)+E2(m-S2-1)+S1(m-1)+S2(n-1)-\gcd(m-E1,n-S1)-\gcd(m-S2,n-E2)〕\}$$

$$=\boxed{m+n+\frac{1}{2}〔E1(n-S1-1)+E2(m-S2-1)+S1(m-1)+S2(n-1)-\gcd(m-E1,n-S1)}\ \boxed{-\gcd(m-S2,n-E2)〕}$$

為驗證 T 公式是否正確，我們畫了許多 T 的方格圖，利用點數與代入公式二種方法來算經過的方格數，再交互觀察答案是否一致。驗證圖例甚多，下表僅列舉幾個圖例來分析說明。

【驗證 T 公式是否正確】：

m×n	移動格數	m×n 的方格圖		T 區塊經過的方格數
9×7	S1＝1 S2＝1 E1＝4 E2＝4		點數	黃＋紅＝19＋27 ＝46 格
			代入公式	$T=9+7+\frac{1}{2}〔4(7-1-1)+4(9-1-1)+1(9-1)+1(7-1)-1-1〕$ $=16+\frac{1}{2}\times 60$ ＝46 格
9×7	S1＝3 S2＝3 E1＝2 E2＝5		點數	黃＋紅＝16＋35 ＝51 格
			代入公式	$T=9+7+\frac{1}{2}〔2(7-3-1)+5(9-3-1)+3(9-1)+3(7-1)-1-2〕$ $=16+\frac{1}{2}\times 70$ ＝51 格

<table>
<tr><td rowspan="2">9×7</td><td rowspan="2">S1＝2
S2＝1
E1＝2
E2＝3</td><td rowspan="2">
</td><td>點數</td><td>黃＋紅＝19＋20
＝39 格</td></tr>
<tr><td>代入公式</td><td>$T=9+7+\frac{1}{2}〔2(7-2-1)+3(9-1-1)+2(9-1)+1(7-1)-1-4〕$
$=16+\frac{1}{2}\times 46$
＝39 格</td></tr>
<tr><td rowspan="2">9×7</td><td rowspan="2">S1＝4
S2＝2
E1＝6
E2＝1</td><td rowspan="2">
</td><td>點數</td><td>黃＋紅＝15＋30
＝45 格</td></tr>
<tr><td>代入公式</td><td>$T=9+7+\frac{1}{2}〔6(7-4-1)+1(9-2-1)+4(9-1)+2(7-1)-3-1〕$
$=16+\frac{1}{2}\times 58$
＝45 格</td></tr>
<tr><td rowspan="2">12×8</td><td rowspan="2">S1＝2
S2＝6
E1＝3
E2＝4</td><td rowspan="2">
</td><td>點數</td><td>黃＋紅＝20＋47
＝67 格</td></tr>
<tr><td>代入公式</td><td>$T=12+8+\frac{1}{2}〔3(8-2-1)+4(12-6-1)+2(12-1)+6(8-1)-3-2〕$
$=20+\frac{1}{2}\times 94$
＝67 格</td></tr>
<tr><td rowspan="2">14×11</td><td rowspan="2">S1＝9
S2＝11
E1＝4
E2＝2</td><td rowspan="2">
</td><td>點數</td><td>黃＋紅＝19＋121
＝140 格</td></tr>
<tr><td>代入公式</td><td>$T=14+11+\frac{1}{2}〔4(11-9-1)+2(14-11-1)+9(14-1)+11(11-1)-2-3〕$
$=25+\frac{1}{2}\times 230$
＝140 格</td></tr>
</table>

【歸納十二】

從驗證的過程中發現，同一個T 區塊經過的方格數，利用$\boxed{\text{點數}}$和$\boxed{\text{代入公式}}$二種不同方法算出的答案都會相同，這個結果可以證明我們推導的T 公式成立。

【結論九】：

m×n 方格圖，S1、S2、E1、E2≧0，m≧S2、E1，n≧S1、E2，

且 m、n、S1、S2、E1、E2 皆為整數時，

$$T\text{ 區塊經過的方格數}=m+n+\frac{1}{2}\left[E1(n-S1-1)+E2(m-S2-1)+S1(m-1)+S2(n-1)-\gcd(m-E1,n-S1)-\gcd(m-S2,n-E2)\right]$$

伍、研究結果：

一、統整一：

m、n 為整數，m×n 方格圖中，

對角線T_0經過的方格數＝ m＋n－1－G.C.D (m , n)＋1

二、統整二：

m、n 為整數，m×n 方格圖中，

T_1區塊經過的方格數＝ 2(m＋n－2)－G.C.D (m-1 , n-1)＋1

三、統整三：

m、n 為整數，m×n 方格圖中，

T_2區塊經過的方格數＝ 3(m＋n－3)－G.C.D (m-2 , n-2)＋1

四、統整四：

m×n 方格圖中，m、n 為整數，

(一)T_3區塊經過的方格數＝ 4(m＋n－4)－G.C.D (m-3 , n-3)＋1

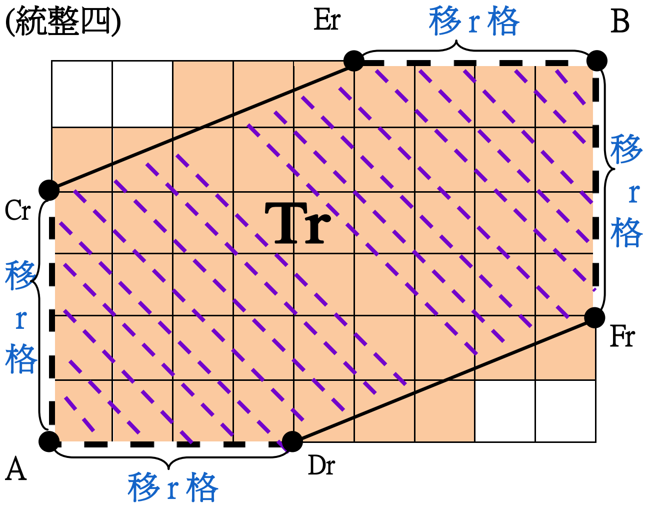
(二)T_4區塊經過的方格數＝ 5(m＋n－5)－G.C.D (m-4 , n-4)＋1

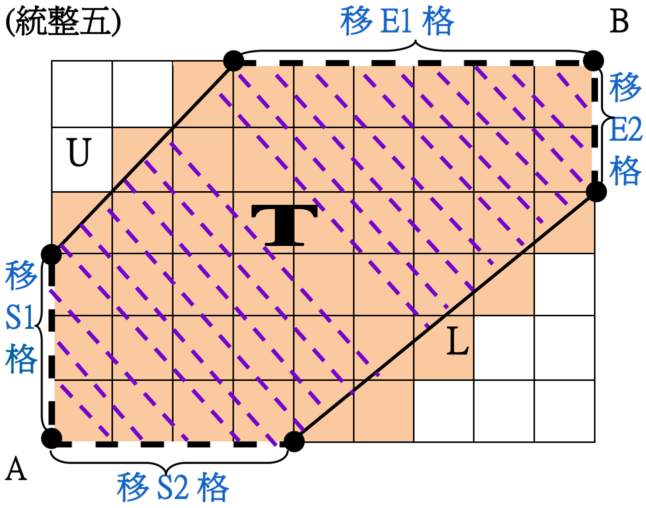
(三)T_5區塊經過的方格數＝ 6(m＋n－6)－G.C.D (m-5 , n-5)＋1

(四)T_6區塊經過的方格數＝ 7(m＋n－7)－G.C.D (m-6 , n-6)＋1

(五) m×n 方格圖中，當 r≧0， m、n≧r，且 m、n、r 皆為整數時

T_r 區塊經過的方格數＝ (r＋1)〔m＋n－(r＋1)〕－G.C.D (m-r , n-r)＋1





五、統整五：

m×n 方格圖中，S1、S2、E1、E2≧0，m≧S2、E1，n≧S1、E2，

且 m、n、S1、S2、E1、E2 皆為整數時，

T 區塊經過的方格數＝m＋n＋$\frac{1}{2}$〔E1(n－S1－1)＋E2(m－S2－1)＋S1(m－1)

＋S2(n－1)－gcd(m－E1 , n－S1)－gcd(m－S2 , n－E2)〕

陸、討論：

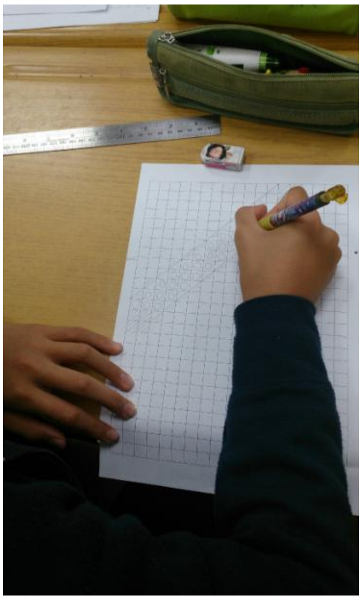
一、我們這次主題研究的方向是探討「m×n 矩形內無障礙物時，T_r 區塊經過的方格數是多少？」但若矩形內有障礙物時，情況又是如何呢？T_r 區塊經過的方格數會如何改變？就像生活中我們拼貼磁磚時，總會遇到柱子等障礙物而無法拼貼磁磚，若能找出規律，將會是很實用的方法。

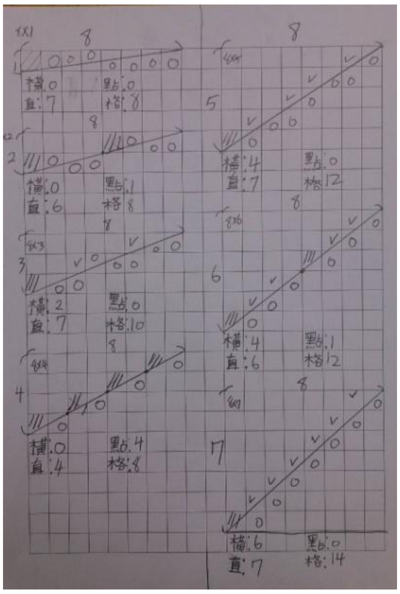
二、另外，這次研究主要是探討「以正方形為基本單位所組成的長方形中，求 T_r 區塊會經過的方格數」，未來也可改成以其它形狀為基本單位來探討，例如「以正三角形為基本單位所組成的平行四邊形或正六邊形中，T_r 區塊會經過的正三角形數」，這樣我們拼貼的磁磚就可以有更多的形狀，變化更多元！

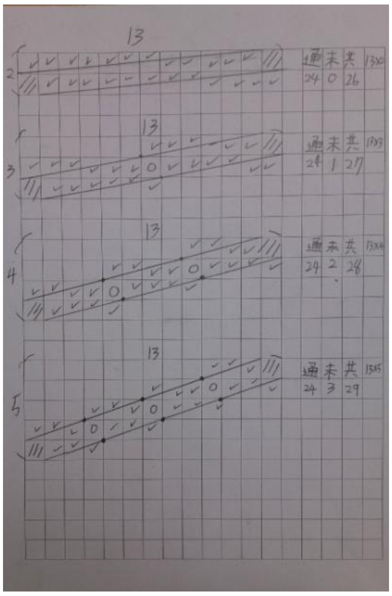
三、因目前我們所學的數學知識有限，待將來數學能力提升後，我們主題的研究方向也可從平面轉為立體，探討T_r區塊立體化後，經過的方塊數會有幾個？

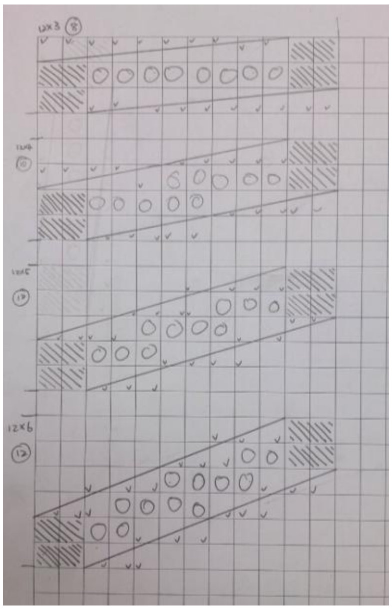
柒、結論：

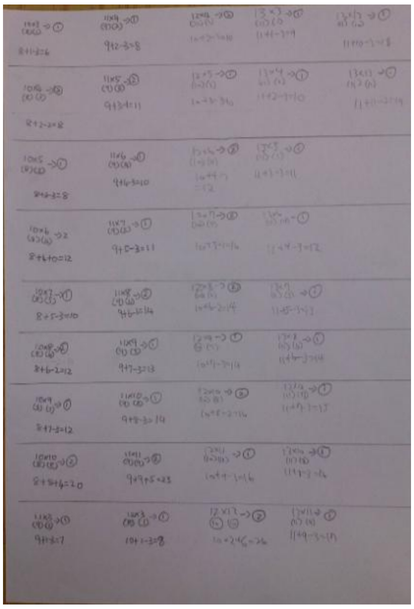
經過這次科展的研究讓我們深深體驗到：生活處處是數學，數學是為解決生活中問題而存在。為了收集科展的研究資料，我們用窮舉法在方格紙上畫了很多圖形來觀察格子數是否有規則？研究T_0、T_1時很順利，很快就觀察出格子數與長方形長(m)、寬(n)之間的關係，進而整理出簡潔的公式。但研究T_2時，從畫出的圖形中較難看出規則，為方便觀察規律我們做了一些假設，使研究過程有所突破，再將得到的數據表格化，讓T_2複雜的數據變得有規則起來，也順利整理出一條公式。我們比較T_0、T_1、T_2的公式，發現這些公式本一家，可以整合為T_r的公式，而利用T_r公式就能迅速算出我們想要找的磁磚數目。最後我們利用逆向思考的方式推導出適合任何情況的T 公式，讓我們的研究結果從特殊化轉為一般化，適用範圍更廣泛。這次的科展讓我們對數學研究認識更多，老師不僅教我們研究的方法：窮舉法、表格分析、數據歸納，也教我們GSP繪圖軟體的基本使用，第一次接觸感覺很新鮮，而科展的訓練也為我們往後的學習打下更好的基礎。

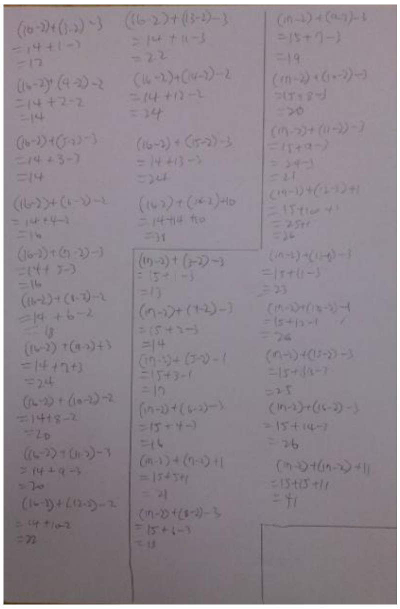












捌、參考資料及其他：

一、國小數學(康軒版)第十一冊第一單元：最大公因數與最小公倍數。

二、國中基本學力測驗 95 年第一次試題。

三、颶風來嚕-對角線與方格圖枝關係探討與推廣-第四十六屆中小學科學展覽會高中組

四、線條穿越方格之謎-第四十九屆中小學科學展覽會國中組

五、點線格格一對角線及長方形的關係-彰化女中科展題目

【評語】080409

1. 從一條對角線經過的方格，推廣到一個區域的方格數，頗具創意。

2. 討論過程思慮周詳，具邏輯性，作品說明流暢，是件優秀的作品。