中華民國第 56 屆中小學科學展覽會
作品說明書

國小組　數學科

第二名

080408

蝸蟻回家—等角環形最短路徑之探討

學校名稱：新北市私立康橋高級中學

作者：	指導老師：
小六　林辰恩 小六　楊孟儒 小六　許睦駿 小六　黃璿哲	楊錦花

關鍵詞：奇、偶數、座標、尤拉環道

摘要

本研究是指限制路徑其轉彎角度、且每次轉彎後步數遞增的條件下，找到回原點的最短路徑。

研究方法是以「奇、偶數」、「座標」與「向量和」的概念，先找出規律、再驗證求解並進一步由平面路徑推廣至三維移動。研究成果整理如下：

在平面上找到 P＝90°、120°、60°回到原點的最短路徑各為 8 階(36 步)、9 階(45 步)、12 階(78 步)。若進一步定義方向數（K＝360÷P），還進一步找到回到原點需要的轉彎次數(N，階數)的通式：

若 K＝4，則回原點的階數 N＝2Km（m 代表任意整數），

若 K＝3，則回原點的階數 N＝Km 或 Km－1。

若 K＝6，則回原點的階數 N＝Km。

至於三維移動路徑，則在 P＝90°與 120°時找到最短路徑，其完成階數各為 11 階與 17 階。

壹、研究動機

有一次我看到螞蟻在吃我的蛋糕，我一面趕螞蟻，一面想螞蟻是走什麼路線回巢穴，它有方向感嗎？它有距離感嗎？老師告訴我們類似的問題，也曾出現在某一次國中的資優班入學考，該題如下：

螞蟻沿著方格棋盤移動，（如圖 1）

第 1 次，走 1 格後，左轉或右轉 90°；

第 2 次，走 2 格後，左轉或右轉 90°；

第 3 次，走 3 格後，左轉或右轉 90°。

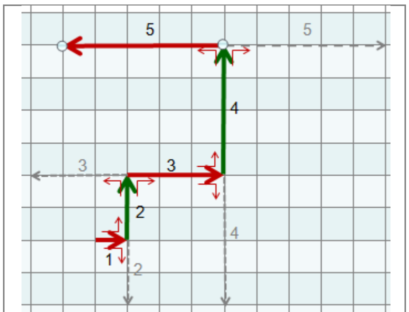


圖 1：遊戲說明

依此規則，每次轉 90°，走的格數每次遞增 1，走到第 n 次後，蟻就可以與第一次方向呈垂直(90°)的方向，回到原點。求 n 的最小值。

後來我們發現「打開魔數箱」這本書中也提到這個題目，雖然書中也畫出了依此規則走出的圖形，卻沒有詳細說出作者如何找出路徑。我們覺得這個問題蠻有趣的，決定深入探討不同的「轉彎角度」和「立體路徑」會產生怎樣不同的結果，於是，螞蟻回家就成了我們今年科展探討的題目。

在研究的過程中，我們利用課堂上學到的座標概念、求和公式(梯形公式)幫助我們研究，並以正多面體幫助我們定義 3 維座標的軸線，與 3D 最短路徑的方向，來找出螞蟻回家的最短路徑。

貳、研究目的

一、找出螞蟻每次轉 90°，回到原點的最短路徑。

二、找出螞蟻每次轉 120°，回到原點的最短路徑。

三、找出螞蟻每次轉 60°，回到原點的最短路徑。

四、找出螞蟻回原點的等角 3D 最短路徑。

參、研究設備及器材

紙、筆、黑板、電腦、角錐模型、頂點珠、造型棒、智慧片、鉛線。

肆、名詞定義

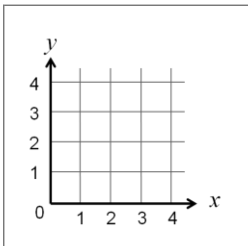


圖 2：直角坐標

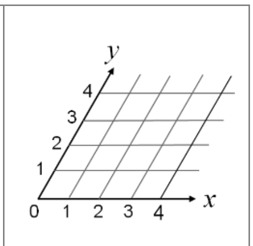


圖 3：斜座標

一、直角座標(如圖 2)：

(一) x 軸為水平方向，y 軸為垂直方向。

(二) 格點適用於標示每次轉 90°的路徑。

二、自創斜座標(如圖 3)

(一) 將方格座標的 y 軸右轉 30°，使 x 軸與 y 軸呈 60°相交；x 軸為水平方向，y 軸為沿軸線右上或左下移動（斜座標為我們自創）。

(二) 每一單位的菱形格由 60°與 120°組成，每單位的邊長與短對角線等長，故格點可標示每

次轉 60°與每次轉 120°的路徑長度。

三、向量：指在座標上移動的方向與格數以(+x ,+y)、(+x ,-y)、(+x ,-y)、(-x,-y)表示移動向量。

四、階：「第 1 階」代表開始的第一次的方向，步數為 1；「第 2 階」代表第一次轉彎後的第二個方向，步數為 2；第 n 階代表第 n-1 次的轉彎後的第 n 個方向，步數為 n。

五、階數：「階數」代表總轉彎的次數，如轉彎次數為「9」，就稱 9 階。

六、項數：等差數數列的項數，在本研究中，等差數列的總項數＝最短路徑的階數。

七、方向數：在遊戲中可能出現的（不同）方向數，相同方向不管出現幾次視為同一方向。

八、等角環狀路徑：本研究指每次以相同角度轉彎，且頭尾也需以相同角度相接的封閉路徑。

伍、研究過程

一、研究 1：螞蟻每次轉 90°，回到原點的最短路徑。

(一) 階數與方向的關係

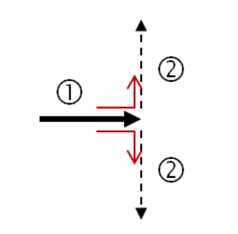
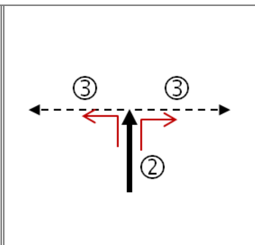
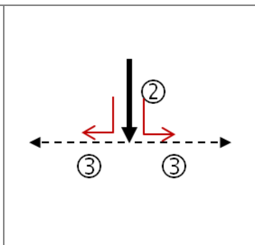
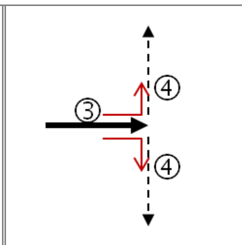
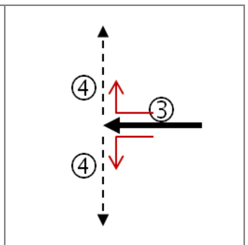
				

圖 4： 第 1 階→第 2 階	圖 5： 第 2 階→第 3 階。	圖 6： 第 2 階→第 3 階。	圖 7： 第 3 階→第 4 階。	圖 8： 第 3 階→第 4 階。

1、若第 1 階的方向為→，第 2 階只有兩個方向↑或↓；(圖 4)

第 2 階的方向無論為↑或↓，第 3 階只有兩個方向→或←；(圖 5、6)

第 3 階的方向無論為→或←，第 4 階只有兩個方向↑或↓；(圖 7、8)……

2、由此可知，奇數階的方向為→或←，偶數階的方向為↑或↓；反之，奇數階的方向為↑或↓，偶數階的方向為→或←。故我們可將螞蟻的「回家路徑」分成奇數階與偶數階思考，為了方便記錄路徑的移動位置，我們決定加入直角座標來幫忙思考。

(二) 以向量和思考 x 軸與 y 軸分量和為 0 的條件

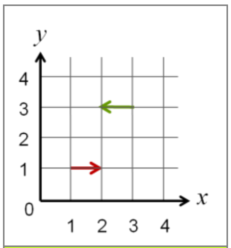


圖 9：水平向量

1、若奇數階走的是水平方向（x 軸的移動），則偶數階需走垂直方向（y 軸的移動），反之亦然（以下討論以奇數階走水平方向討論）。

→方向每走 1 格，我們將它的向量標示為(＋1,0)，如圖 9 紅線。

←方向每走 1 格，我們將它的向量標示為(－1,0)，如圖 9 綠線。

↑方向每走 1 格，我們將它的向量標示為(0, ＋1)，如圖 10 藍線。

↓方向每走 1 格，我們將它的向量標示為(0, －1)，如圖 10 紫線。

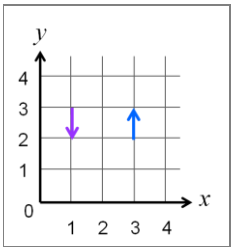


圖 10：垂直向量

2、若 1 從(0,0)出發，要走回原點(0,0)位置，需 x 軸與 y 軸的分量和皆為 0，換句話說， x 軸正的向量(＋x,0)需等於負的向量(－x,0)。

y 軸正的向量（0,＋y）需等於負的向量（0,－y）。

3、故奇、偶數階需分方向相反，和相等的兩組數，才能各自相加為零。

4、起始的方向與結束的方向需垂直，故需互為奇、偶數，換句話說，奇數項數的個數需等於偶數的項數的個數。

(三) 以「奇數和」與「偶數和」思考移動的項數

1、設奇數數列的項數＝n，偶數數列的項數＝n，總項數 N＝2n。

2、奇數項數（ 1,3,5,…,2n－1）需分成兩組各自總和相等的項數，故奇數項數總和必為偶數（奇數＋奇數＝偶數）。進一步利用梯形公式得到其總和：$S_o=\dfrac{(1+2n-1)n}{2}=n^2$ ，

則 n^2 必為偶數，則奇數項 n 需為偶數。

3、偶數項數（ 2,4,6,…,2n）需分成總和相等的兩組數，因此偶數項數的總和 2m＋2m＝4m（m 代表任意正整數）需為 4 的倍數。進一步利用梯形公式得到其總和：

$S_e=\dfrac{(2+2n)n}{2}=(n+1)\,n$，則偶數項數 n 或 n+1 需為 4 的倍數。

若 n+1 為 4 的倍數，則 n＝4m－1(奇數)，奇數的項數 n 需為偶數，故不符。

<u>若偶數項 n 為 4 的倍數(4m)，故奇數項 n 也必為 4m（偶數），成立</u>。

4、由此得知**總項數 N 為 8 的倍數。**（N＝4m(奇)＋4m(偶)＝8m）。

(四) 路徑圖規劃

1、每個角度都是直角，故我們以長方形的 4 個邊代表 每次轉 90°的 4 個方向，來幫助我們規畫各階的方向與長度。

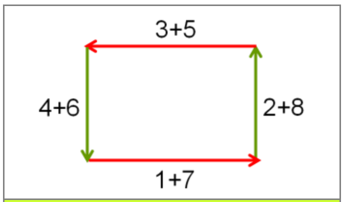


圖 11 各階方向與長度

2、由最小值 m＝1 **開始，N＝8m＝8**

(1) 奇數為{1，3，5，7}；可分成（1＋7）與（3＋5）和相等，方向相反的兩組。

(2) 偶數為{2，4，6，8}；可分成（2＋8）與（4＋6）和相等的兩組。（圖 11）

(3) 結束的 8 與開頭的 1 呈 90°方向 ，共需轉 8 次，我們稱這種回家路徑為「8 階」。

3、路徑圖（圖 12）

> **小結：每次轉 90°回到原點的最短路徑為 8 階，總步數為 36。**

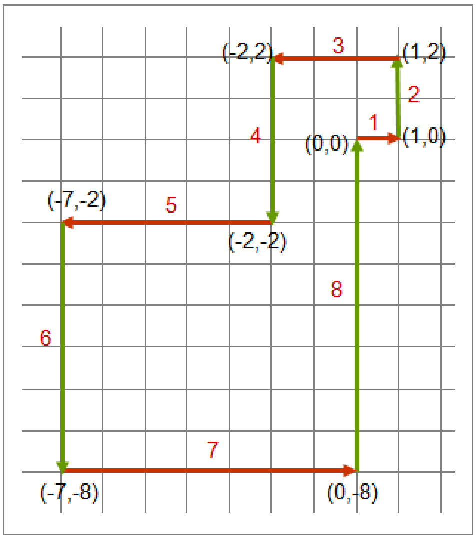


圖 12：轉 90°最短路徑示例

二、研究 2：螞蟻每次轉 120°，回到原點的最短路徑。

(一) 階數與方向的關係

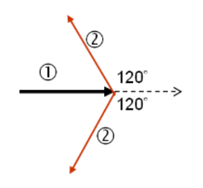
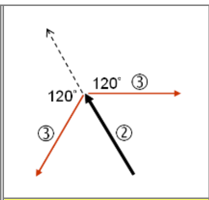
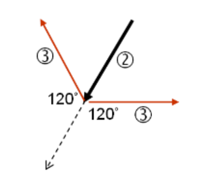
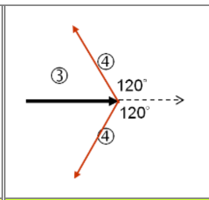
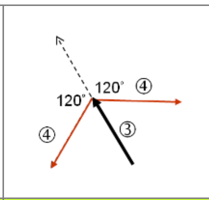
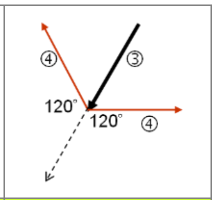
					

圖 13： 第 1 階→第 2 階	圖 14： 第 2 階→第 3 階	圖 15： 第 2 階→第 3 階	圖 16： 第 3 階→第 4 階	圖 17： 第 3 階→第 4 階	圖 18： 第 3 階→第 4 階

1、若第 1 階的方向為→，第 2 階只有兩個方向↖或↙（圖 13）；

第 2 階的方向無論為↖或↙，第 3 階有 3 個方向→、↖或↙（圖 14、15）；

<u>從第 3 階開始都會出現 3 個方向</u>（圖 16~18），也可以說每個方向都可能出現在奇數階或偶數階，無法如轉 90°的路徑，以奇數、偶數分組討論。

2、此時我們加入了一個自創座標－「斜座標」，幫助我們解決每次轉 120°的問題。

(二) 以向量和思考 x 軸與 y 軸分量和為 0 的條件

1、斜座標：斜座標的 x 軸與 y 軸呈 60°相交。

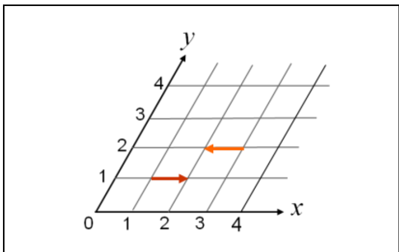
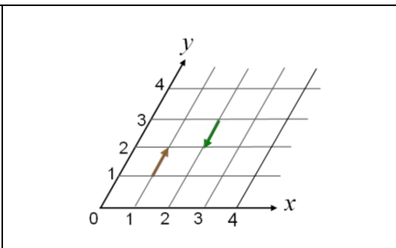
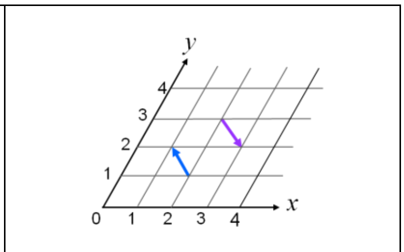
		

圖 19：x 軸移動	圖 20：y 軸移動	圖 21：對角線移動

(1) x 軸移動：紅線右移一格，向量標示為（+1,0）；橘線左移一格，向量標示為(－1,0)。（圖 19）

(2) y 軸移動：棕線沿 y 軸上移一格，向量標示為(0,＋1)；綠線下移一格，向量標示為(0,－1)。（圖 20）

(3) 對角線移動：藍線(2,1)→(1,2)，向左上移一格，向量標示為(－1,＋1)；紫線(2,3)→(3,2)，向右下一格，向量標示為(＋1,－1)。（圖 21）

2、如「階數與方向」分析，第一步走→，整個路徑只會出現→、↖或↙三種方向，故我們僅就這三個方向的向量和加以討論。(圖 22）

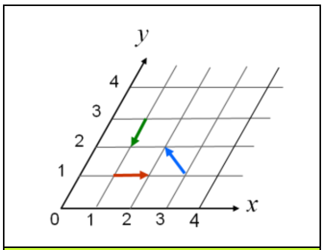


圖 22：轉 120°方向

(1) 每一單位的紅線 $\vec{r}$ 為（+1,0)，藍線 $\vec{b}$ 為(－1,＋1)，綠線 $\vec{g}$ 為(0,－1)。(以下均以 r、b、g 分別代表各方向的向量長度。

(2) 由原點出發回原點，需 x 軸與 y 軸的分量和都為 0。

(3) 若 x 軸分量和為 0，則需 r＝b；若 y 軸分量和為 0，則需 b＝g，故 r＝b＝g。

(4) 我們只需將 1~ n 的總和 S_n 均分為 3 等分，分屬紅、藍、綠 3 種方向的長度即可，在分配項數的時候不能將「相鄰數」分在相同組，否則違反每次轉 120°的規定。

3、和 S_n 均分為 3 等分，則和 $S_n = \frac{(1+n)n}{2}$ 需為 3 的倍數，則（1＋n）或 n 中需有一項為 3 的倍數(以 3m 表示)。若 1＋n 為 3 的倍數，則 n＝3m－1（3 的倍數－1)；若 n 為 3 的倍數，則 n＝3m。

(三) 路徑規劃

1、每次轉 120°會出現 3 種不同方向的向量，所以我們以正三角形來幫助我們規畫各階的方向。

2、由最小值 m＝1 開始

(1) 若 n＝3m－1，則 n＝2 ，N＝ {1，2}，不可能分成 3 組數(向量)

(2) 若 n＝3m，則 n＝3 ，N＝ {1，2，3}，1≠2≠3 不可能分成相等的 3 組數(向量)；

3、m＝2

(1) 若 n＝3m－1，則 n＝5，則 S_n＝15，每組數(向量)的和為 15÷3=5，N＝{1，2，3，4，5}，故可分成 1＋4＝2＋3＝5，2 與 3 為相鄰數，若安排在同組數(向量)，2 與 3 就沒有轉向，故不成立。(圖 23)

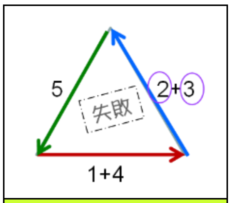


圖 23：2 與 3 鄰數

(2) 若 n＝3m，則 n＝6，則 S_n＝21，每組數的和為 21÷3=7，N＝{1，2，3，4，5，6}，故可分成 1＋6＝2＋5＝3＋4，3 與 4 為相鄰數，不能為同組數，故不成立。(圖 24)

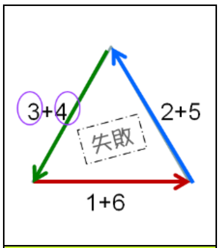


圖 24：3 與 4 鄰數

4、若 m＝3

(1) 若 n＝3m－1，則 n＝8，S_n＝36，每組數的和為 36÷3= 12，

N＝{1，2，3，4，5，6，7，8}，

可分成 1＋3＋8＝5＋7＝2＋4＋6 三組和為 12 的組合，會出現起始方向(1)與結束方向(8)相同，與遊戲規定第 n 次需與第一次成相同角度(120°)回到原點不符合，不成立。(圖 25)

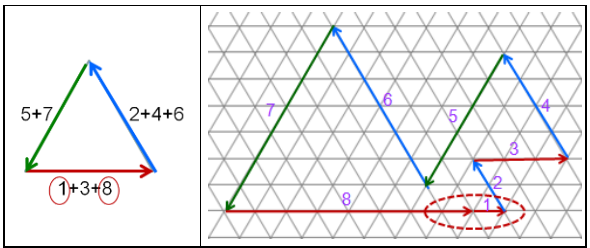


圖 25：起始方向與結束方向相同

(2) 若 n＝3m，則 n＝9， S_n＝45，每組數的和為 45÷3=15，N＝{1，2，3，4，5，6，7，8，9}，可分成 1＋6＋8＝2＋4＋9＝3＋5＋7；三組和為 15 的組合。

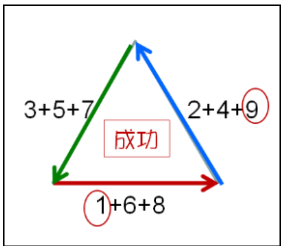


圖 26：最短路徑規劃

且每次都能轉 120°變換方向而回到原點，且起始方向(1)與結束方向(9)不同，成立。共需轉 9 階，

總步數＝$\frac{(1+9)9}{2}=45$。(圖 26)

5、路徑圖之一（圖 27）

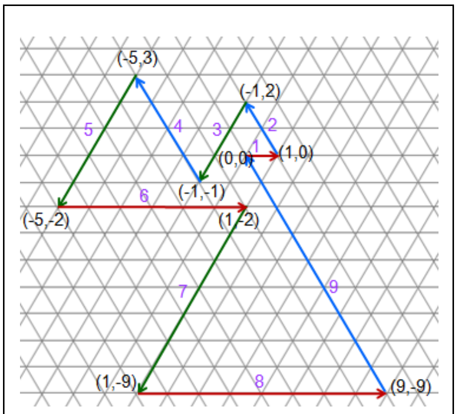


圖 27：轉 120°最短路徑示例

小結：每次轉 120°回到原點的最短路徑為 9 階，總步數為 45。

三、研究 3：螞蟻每次轉 60˚，回到原點的最短路徑。

(一) 階數與方向的關係

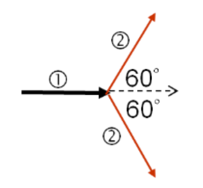
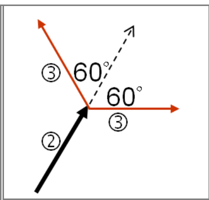
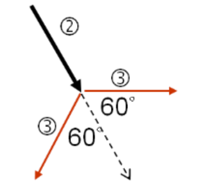
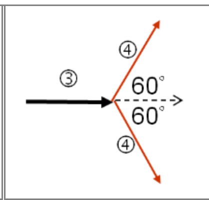
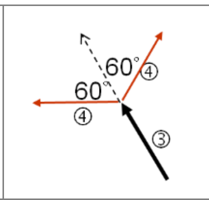
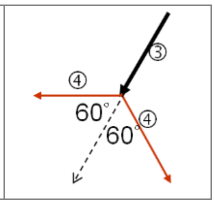
					

圖 28： 第 1 階→第 2 階	圖 29： 第 2 階→第 3 階	圖 30： 第 2 階→第 3 階	圖 31： 第 3 階→第 4 階	圖 32： 第 3 階→第 4 階	圖 33： 第 3 階→第 4 階

1、若第 1 階的方向為→，第 2 階只有兩個方向 ↗ 或 ↘；（圖 28）

第 2 階的方向無論為 ↗或 ↘ ，第 3 階有 3 個方向→、↖或 ↙；（圖 29、30）

第 4 階有 3 個方向←、 ↗ 或 ↘；（圖 31~33）……

2、依序下去，可發現在 3 之後奇數階可出現的 3 個方向都相同，而偶數階可出現的 3 個方向也都相同。

(二)以向量和思考 x 軸與 y 軸分量和為 0 的條件

1、每一單位在斜座標上的向量

(1) 若第 1 階的移動方向為→，奇數階有→、↖ 或 ↙ 3 個方向，即向量$\vec{a}$、$\vec{c}$、$\vec{e}$；

偶數階有↗、← 或 ↘ 3 個方向，即向量 $\vec{b}$、$\vec{d}$、$\vec{f}$。

（圖 34）

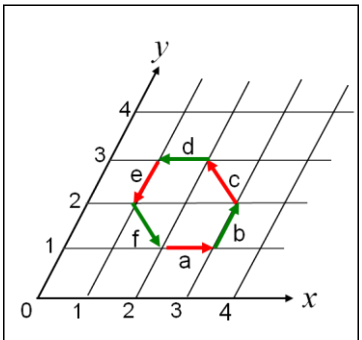


圖 34：轉 60˚的單位向量

(2) 每一單位的移動向量分別為

$\vec{a}$ 代表 (+1,0)；$\vec{c}$ 代表 (-1,+1)；$\vec{e}$ 代表 (0,-1)；

$\vec{b}$ 代表 (0,+1)；$\vec{d}$ 代表 (-1,0)；$\vec{f}$ 代表 (+1,-1)。

以下皆簡單以 a、b、c、d、e、f 分別代表 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 、$\vec{d}$、$\vec{e}$、$\vec{f}$ 的總長度。

(3) 若 x 軸的分量和為 0，則 a＋f＝c＋d；

若 y 軸的分量和為 0，則 b＋c＝e＋f；

(4) 因相鄰的奇、偶數階不可出現在對邊，我們可以把 6 個向量分成 3 群 $(\vec{a}、\vec{d})$、$(\vec{b}、\vec{e})$ 、$(\vec{c}、\vec{f})$，因為彼此相對邊互為相反向量，故同群向量不可出現相鄰數。

(5) 因奇數階方向必需接偶數階方向，故開始 1(奇數)，接尾必為偶數，才可能回到原點，故總項數 N 必為偶數，由奇、偶數對分。

2、若總項數 N＝2n，

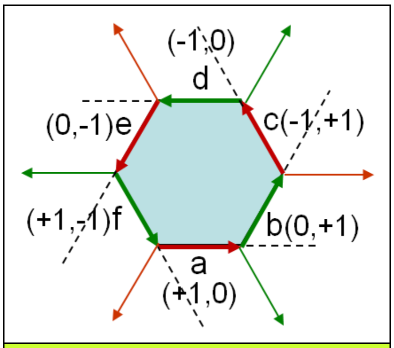


圖 35：轉 60°的單位向量

(1) 奇數項和 $S_o=n^2(a+c+e)$；

偶數項和 $S_e=n^2+n(b+d+f)$。

$S_o=S_e-n$（偶數和、奇數和差為 n）

(2) 若 f＝c，

$\because a+f=c+d$ $\therefore a=d$；$\because b+c=e+f$ $\therefore$ $b=e$，

則 $a+c+e=b+d+f$；奇數的和≠偶數和，故不成立。

(3) 若 c＝f＋m （m 為正整數），

$\because$ $a+f=c+d=(f+m)+d$ $\therefore$ $a=d+m$

$\because$ $e+f=b+c=b+(f+m)$ $\therefore$ $e=b+m$

$a+c+e=b+d+f+3m$；n 項奇數和＜n 項偶數和，故不成立。

(4) 若 c＝f－m，

$\because$ $a+f=c+d=(f-m)+d$ $\therefore$ $a=d-m$，

$\because$ $e+f=b+c=b+(f-m)$ $\therefore$ $e=b-m$

$a+c+e=b+d+f-3m$ $\because$ $S_o=S_e-n$ $\therefore$ $n=3m$

也就是說 n 需為 3 的倍數，總項數 N＝2n 為 6 的倍數(6m)。

(三) 路徑規劃

1、轉 60°的路徑規劃需同時符合三條件：

(1) 總項數 2n 為 6 的倍數（6m）

(2) a＋f＝c＋d；b＋c＝e＋f（x 軸與 y 軸分量和為 0）

(3) 相對方向不可出現鄰數。

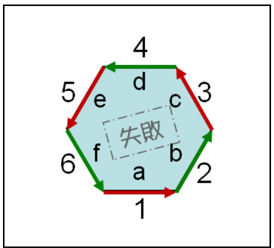


圖 36：y 軸分量和≠0

2、由最小值 m＝1 開始，N＝6。奇數＝{1，3，5}，偶數＝{2，4，6}；只有唯一走法 1、2、3、4、5、6 分屬 6 個方向。

a＋f＝1＋6＝7；c＋d＝3＋4＝7； a＋f＝c＋d（x 軸分量和為 0）

b＋c＝2＋3＝5；e＋f＝5＋6＝11；b＋c≠e＋f（y 軸分量和不為 0）

故總項數為 6，無法回到原點。(圖 36)

3、若 m=2，N＝12。

奇數＝{1，3，5，7，9，11}，偶數＝{2，4，6，8，10，12}；

奇數項和 $S_o＝n^2＝36$，偶數項 $S_e＝n^2＋n＝42$。

(1) 若 a＝c＝e＝36÷3＝12＝1+11＝3+9＝5+7；

則 b＝d＝e＝42÷3＝14＝2+12＝4+10＝6+8。

因鄰數不能擺對邊，故若 a＝1+11，則 d 只有唯一選擇，d＝6+8；

c (3+9)的對邊 f 只有二選一，f＝(4+10)或(2+12)，c 與 f 都會出現鄰數，

故無法走回原點。(圖 37、38)

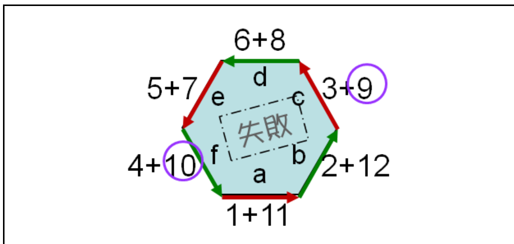


圖 37：對邊出現鄰數

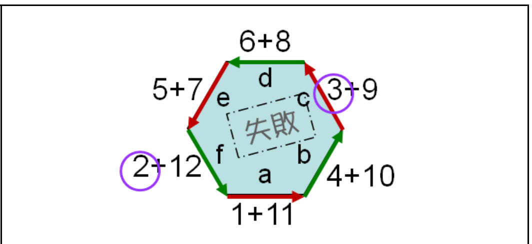


圖 38：對邊出現鄰數

(2) 若 a＝10，c＝12，e＝14；d＝12，f＝14，b＝16

a＝10＝1+9＝3+7， c＝12＝1+11＝3+9＝5+7， e＝14＝3+11＝5+9

d＝12＝2+10＝4+8，f＝14＝2+12＝4+10＝6+8，b＝16＝4+12＝6+10＝2+4+10

a＝1+9 或 3+7，對邊 d 只能選 12，但都會出現鄰數在對邊，故不成立。(圖 39、40)

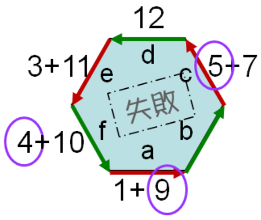


圖 39：對邊出現鄰數，且 b 無可選擇

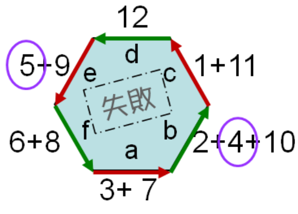


圖 40：對邊出現鄰數

(3) 若 a＝8，c＝12，e＝16；d＝10，f＝14，b＝18

a＝8＝1+7＝3+5， c＝12＝1+11＝3+9＝5+7， e＝16＝5+11＝7+9

d＝10＝2+8＝4+6＝10，f＝14＝2+12＝4+10＝6+8＝2+4+8，

b＝18＝6+12＝8+10＝2+6+10＝2+4+12

a＝1+7 或 3+5，對邊 d 都只能選 10；

a＝1＋7，d＝10 的組合，會出現鄰數在對邊，故不成立。(圖 41)

a＝3+5，d＝10 的組合則會出現（圖 42）

a＋f＝(3+5)＋(6+8)＝22，c＋d＝(1+11)＋10＝22； a＋f＝c＋d（x 軸分量和＝0）

b＋c＝(2+4+12)＋(1+11)＝30；e＋f＝(7+9)＋(6+8)＝30；b＋c＝e＋f（y 軸分量和＝0）

x 軸與 y 軸分量的和都等於 0，而且鄰數不會出現在同組向量，故可順利找到回家路徑。

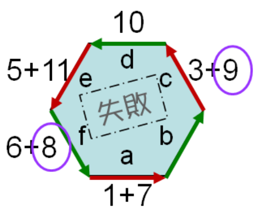


圖 41：對邊出現鄰數

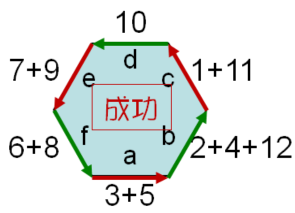


圖 42：符合轉 60° 回原點 3 條件（成立）

4、在 m＝2 的狀況下，我們找到了螞蟻可以順利回家的路徑。

螞蟻每次轉 60˚，回到原點的最短路徑為 12 階，總步數為(1+12)×12÷2＝78。

5、路徑圖之一請見（圖 43）

小結：每次轉 60˚回到原點的最短路徑為 12 階，總步數為 78。

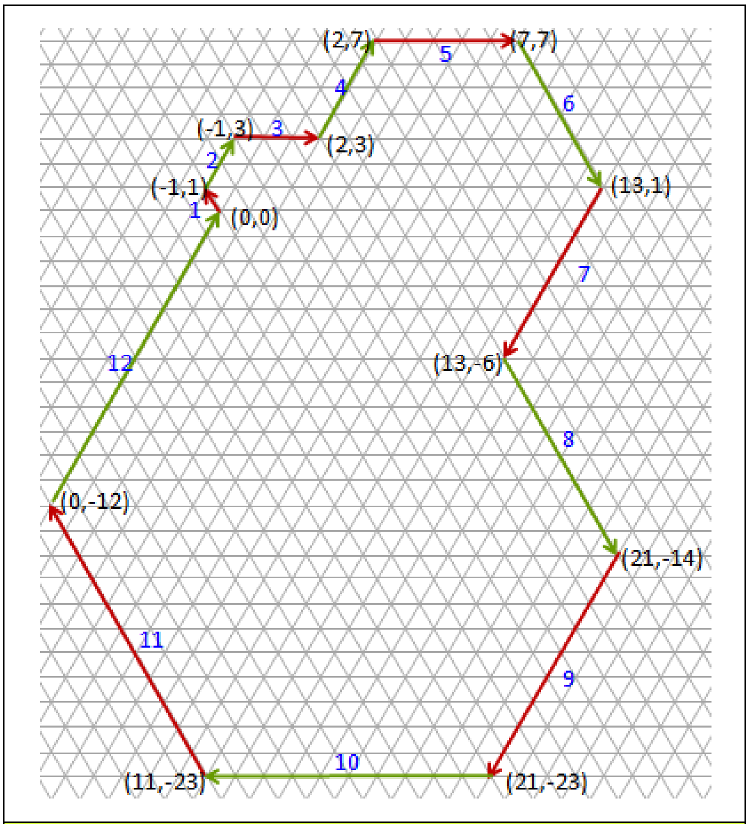


圖 43：轉 60˚最短路徑示例

四、研究 4：如果螞蟻的天敵食蟻獸的嗅覺只能在同一平面進行追蹤，螞蟻為了躲避天敵的追蹤，勢必找出立體的回家路徑，螞蟻是否也能每次轉 90°度，循相同的規則找到回家的 3D 路徑？

(一) 階數與方向的關係

1、因為螞蟻的路徑是立體的，所以原來的二維座標，必須加一個座標軸變成三維座標。所以將原來的二維的直角座標加上一個表示上、下的 z 軸，來標示螞蟻的行走路徑。

2、每次轉 90°都可以選擇與自己不同軸線的 4 個方向，故沒有奇數階、偶數階方向之分。（圖 44~46）

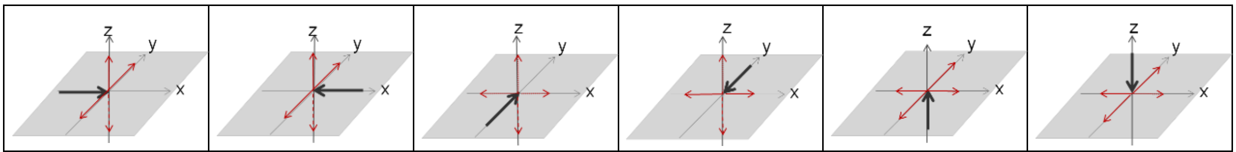


圖 44：x 軸方向轉 90°　圖 45：y 軸方向轉 90°　圖 46：z 軸方向轉 90°

(二)以向量和思考 x 軸與 y 軸分量和為 0 的條件

1、螞蟻行走的路徑包括右圖中的$\vec{a}$(向右)、$\vec{b}$(向後)、$\vec{c}$(向上)、$\vec{d}$(向左)、$\vec{e}$(向前)、$\vec{f}$(向下)，這 6 個方向。(圖 47）

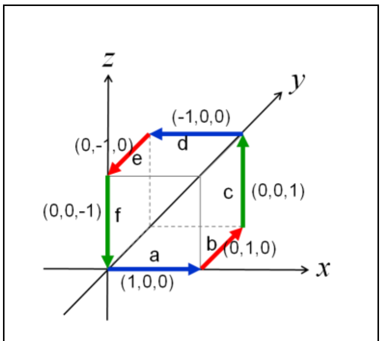


圖 47：轉 90° 3D 方向

2、而螞蟻欲走回原點需 x 軸、y 軸與 z 軸的分量和都為 0，故需 a＝d (x 軸)，b＝e (y 軸)，c＝f (z 軸)；換句話說需有 3 組長度相等，方向相反的向量，故每組向量的數字和必為偶數，亦即螞蟻回家的路徑必為偶數；且項數 n＞6。

3、和 S_n 為偶數，$S_n=\dfrac{n(n+1)}{2}=2m$，$n(n+1)=4m$；

故 n 或(n+1)需為 4 的倍數。故項數 n＝4m 或 4m－1。

(三) 路徑規劃

1、轉 90°的 3D 路徑規劃需同時符合四條件：

(1) 總項數 n 為 4m 或 4m－1

(2) a＝d，b＝e，c＝f（x 軸、y 軸與 z 軸的分量和都為 0）

(3) 相對方向不可出現鄰數。

(4) 起始方向與結束方向需不同。

2、由最小值 m＝1 開始，n＝4，n＜6；不能分成 3 組相同長度的向量，故不合。

3、 m＝2，

(1) 若 n＝4m－1＝7，S＝{1，2，3，4，5，6，7}，只有一個向量包含 2 個數，2+5＝7(一組向量和的值相等)，其餘四個不同的元素(1，3，4，6)無法分成兩組向量長度相等的組合。(故無法成立)

(2) 若 n＝4m＝8，S＝{1，2，3，4，5，6，7，8}，有兩組向量可由兩個元素組成，可找出兩組向量和為 0 的組合，而另兩個元素不同，無法分成向量和為 0 的向量；例：8＝3+5，7＝1+6，剩 2 和 4，2≠4（故無法成立）

4、m＝3，n＝4m－1＝11 或 n＝4m＝12

若 n＝11，S＝{1，2，3，4，5，6，7，8，9，10，11}，

$S_n = \dfrac{(1+11)11}{2} = 66$，可找出 3 組和相等，方向相反的組數；

2+11＝5+8，1+9＝6+4，3+7＝10。(圖 48)

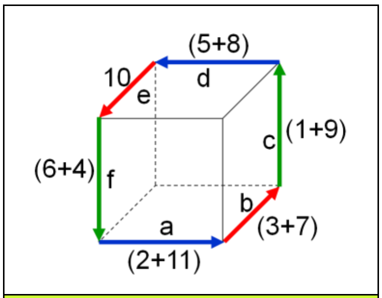


圖 48：轉 90° 最短路徑規劃

5、故螞蟻每次轉 90°，回家的最短 3D 路徑為 11 階，共需走 66 步。

> 小結：每次轉 90°回到原點的最短 3D 路徑為 11 階，總步數為 66。

6、路徑圖（圖 49）

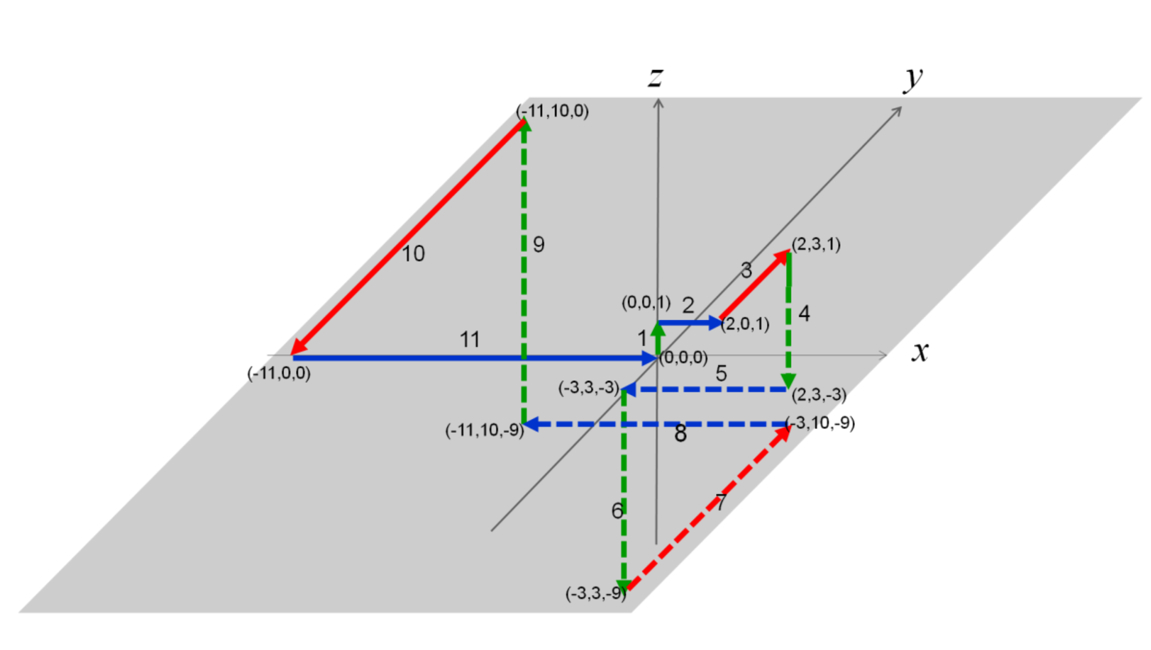


圖 49：轉 90° 3D 最短路徑示例

五、研究 5：如果螞蟻每次轉 120°，是否能循相同的規則找到回家的 3D 路徑？

(一) 用座標來思考轉 120°的 3D 路徑方向

1、螞蟻每次轉 120°的 3D 回家路徑，一開始我們遇到很大的困難，經過了很長的討論，我們找到解決的辦法就是以由正三角形組合的正四面體去思考（如圖 50）：

(1) △ABC 代表正 4 面體的底面，D 代表正 4 面體的頂點。

(2) AB 方向為 x 軸，AC 方向為 y 軸，AD 方向為 z 軸。

(3) 正四面體的每一面的稜線都以轉 120°的角度與另一條稜線相接，而且透過兩面的共線的稜線，可遊走在兩面。

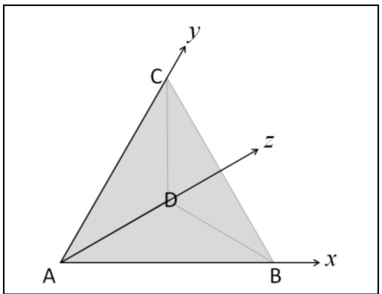


圖 50：3D 斜座標

2、同樣以「斜坐標」標示轉 120°的 3D 路徑，不過需加入 z 軸來標示高度的變化。

(二) 模式 1：只思考正立方體的△ABC 和△ADC 兩個面的方向（圖 51）

1、假設最簡單的三維路徑發生在△ABC 和△ADC 兩個面，這兩個面就包含了 x、y、z 三條軸線，靠著 3 條軸線的變化，就能組合成 3D 路徑。

2、如何使 3D 路徑上的 x 軸、y 軸和 z 軸的分量和變化歸 0？△ABC 和△ADC 的共同邊$\overline{AC}$，扮演著極重要的角色。

3、第一階段，先思考底面△ABC 的路徑，在平面轉 120°討論過，只會走$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{BC}$和$\overrightarrow{CA}$ 3 個方向。

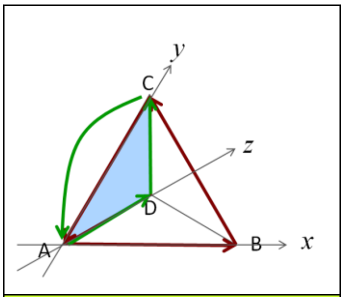


圖 51：模式 1 方向

(1) $\overrightarrow{AB}$為 x 軸的移動，$\overrightarrow{AC}$為 y 軸的移動，故每一單位的向量分別代表：

$\overrightarrow{AB}$＝（+1,0,0），$\overrightarrow{BC}$＝（-1,+1,0），$\overrightarrow{CA}$＝（0,-1,0）

x 軸的分量和＝0，需$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{BC}|$，

y 軸的分量和＝0，需$|\overrightarrow{BC}|=|\overrightarrow{CA}|$

(2) 因為$\overrightarrow{CA}$為△ABC 與△ADC 的共邊，故我們可先考慮$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{BC}|$，讓 x 軸的分量和＝0 即可，在△ADC 時再思考如何讓 y 軸分量和＝0。

(3) 以最少路徑思考，若 S＝{1，2，3，4}，

可分成 1+3＝4 和 2，3 條路徑，2 可留在$\overrightarrow{CA}$。

因$|\overrightarrow{AB}|$＝1+3， $|\overrightarrow{BC}|$＝4，故 x 軸的分量和＝0，

因$|\overrightarrow{BC}|$＝4，$|\overrightarrow{CA}|$＝2，故 y 軸的分量和＝2，

即結束點是以$\overrightarrow{BC}$停在(0,2,0)的位置。（圖 52）

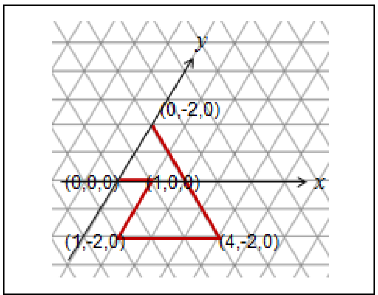


圖 52：△ABC 路徑

4、第二階段：思考△ADC 的三個方向的路徑

(1) 每一單位的向量分別為：

$\overrightarrow{CA}$＝(0,-1,0)，$\overrightarrow{AD}$＝(0,0,+1)，$\overrightarrow{DC}$＝(0,+1,-1)。（圖 53）

(2) y 軸的分量和＝0，則 $|\overrightarrow{DC}|+2=|\overrightarrow{CA}|$；

z 軸的分量和＝0，則 $|\overrightarrow{AD}|=|\overrightarrow{DC}|$。

(3) 設$|\overrightarrow{AD}|=|\overrightarrow{DC}|$＝m；則$|\overrightarrow{CA}|$＝m＋2；路徑和為 3m+2。

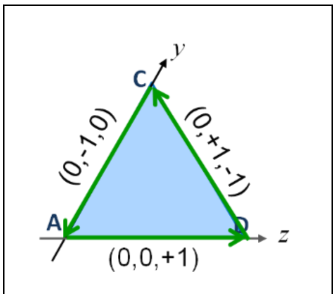


圖 53：△ADC 向量

(4) 由於第一階段△ABC 路徑第 4 階結束於 $\overrightarrow{BC}$，所以第二階段起始的第 5 階需為 $\overrightarrow{CA}$，才能進入△ADC 的 3 個方向，而最後一階也需安排在 $\overrightarrow{CA}$，才能與第一階段的△ABC 形成環狀路徑。（圖 54）

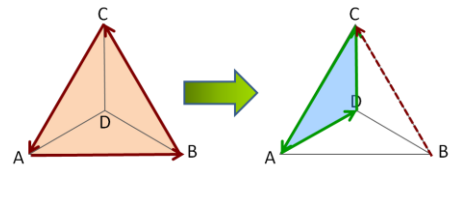


圖 54：兩階段的連接方向為 CA

5、以向量和思考第二階段路徑

元素	5~11	5~12	5~13	5~14	5~15	5~16	5~17	5~18	5~19
和	56(3 m+2)	68(3m+2)	81(3m)	95(3m+2)	110(3m+2)	126(3m)	143(3m+2)	161(3m+2)	180(3m)

(1) 若 S={5,6,7,8,9,10,11}　$S_n=56$；(56-2)÷3＝18；

可分成 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DC}=18$，$\overrightarrow{CA}=20$；

$\overrightarrow{CA}=20=\underline{11+5}+(4)$；(S 不包括 4，不成立)

(2) 若 S={5,6,7,8,9,10,11,12}　$S_n=68$；(68-2)÷3＝22；

可分成 $|\overrightarrow{AD}|=|\overrightarrow{DC}|=22$，$|\overrightarrow{CA}|=24$；

$|\overrightarrow{CA}|=24=\underline{12+5}+7$；

$|\overrightarrow{AD}|=|\overrightarrow{DC}|=22$（11 無法和其餘任何數合成 22，故不成立。）

(3) 若 S={5,6,7,8,9,10,11,12,13,14}　$S_n=95$；(95-2)÷3＝31；

可分成 $|\overrightarrow{AD}|=|\overrightarrow{DC}|=31$，$|\overrightarrow{CA}|=33$；

$|\overrightarrow{CA}|=33=\underline{14+5}+6+8$；（5 和 6 為鄰數，故不成立。）

(4) 若 S＝{5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15}；$S_n=110$

(110-2)÷3＝36；　可分成 $|\overrightarrow{AD}|=|\overrightarrow{DC}|=36$，$|\overrightarrow{CA}|=38$

$|\overrightarrow{CA}|=\underline{5+15}+7+11=\underline{5+15}+8+10$；

$|\overrightarrow{AD}|=|\overrightarrow{DC}|=14+10+12=6+8+9+13$；（8 與 9 為鄰數，故不成立。）

(5) S＝{5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17}；$S_n=143$

(143-2)÷3＝47；　可分成 $|\overrightarrow{AD}|=|\overrightarrow{DC}|=47$，$|\overrightarrow{CA}|=49$

$|\overrightarrow{CA}|=\underline{5+17}+15+12=\underline{5+17}+7+9+11$；　$|\overrightarrow{AD}|=|\overrightarrow{DC}|=16+14+10+7=16+14+11+6=$

16+13+11+7＝15+13+11+8（無法湊成不重複的 3 組數，不成立。）

(6) S＝{5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18}；S_n＝161

(161-2)÷3＝53；可分成$|\overrightarrow{AD}|=|\overrightarrow{DC}|$＝53，$|\overrightarrow{CA}|$＝55

$|\overrightarrow{CA}|$＝$\underline{5+18}$+16+9+7＝$\underline{5+18}$+15+10+7＝$\underline{5+18}$+14+11+7

＝$\underline{5+18}$+14+10+8；

$|\overrightarrow{AD}|=|\overrightarrow{DC}|$＝17+15+13+8＝17+15+12+9＝17+14+12+10

＝17+12+10+8+6＝16+13+10+8+6＝15+13+11+8+6；

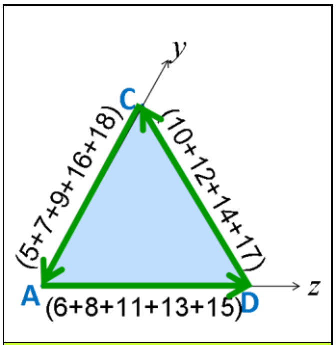


圖 55：△ADC 路徑規畫

可湊成$|\overrightarrow{CA}|$＝$\underline{5+18}$+16+9+7（55）$|\overrightarrow{AD}|$＝15+13+11+8+6（53）；$|\overrightarrow{DC}|$＝17+14+12+10（53）三組合於條件的向量。（圖 55）

6、所以轉 120°的 3D 回家路徑只思考正立方體的△ABC 和△ADC 兩個面的稜線方式的 3D 最短路徑為 18 階，總步數＝$\frac{(1+18)\times 18}{2}$＝171 步。

(三) 模式 2：先思考 4 條稜線的模式($\overrightarrow{AD}$、$\overrightarrow{DB}$、$\overrightarrow{BC}$、$\overrightarrow{CA}$)

1、每一單位的 $\overrightarrow{AD}$＝(0,0,+1)、$\overrightarrow{DB}$＝(+1,0,-1)、$\overrightarrow{BC}$＝(-1,+1,0)、$\overrightarrow{CA}$＝(0,-1,0)。（圖 56）

2、若 x 軸的分量和為 0 需$|\overrightarrow{DB}|=|\overrightarrow{BC}|$；

y 軸的分量和為 0，需$|\overrightarrow{BC}|=|\overrightarrow{CA}|$；

z 軸的分量和為 0，需$|\overrightarrow{AD}|=|\overrightarrow{DB}|$。

故回到原點的路徑需 4 條向量長度等長。

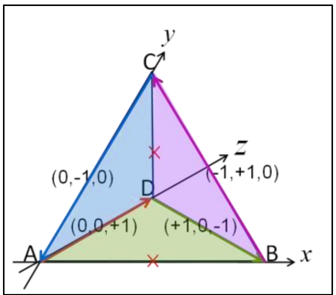


圖 56：四條稜線單位向量

3、若「第 1 階」走$\overrightarrow{AD}$，「第 2 階」一定走$\overrightarrow{DB}$或$\overrightarrow{CA}$，

「第 3 階」一定走$\overrightarrow{BC}$或$\overrightarrow{AD}$，「第 4 階」一定走$\overrightarrow{CA}$或$\overrightarrow{DB}$；

換句話說$\overrightarrow{AD}$和$\overrightarrow{BC}$只能走奇數階， $\overrightarrow{DB}$和$\overrightarrow{CA}$一定走偶數階。

因為奇數的和＜偶數的和，故不可能安排出等長的 4 條向量。故無法以 4 條稜線走出立體的回家路徑。

4、但若這四條稜線我們先解決其中 2 條軸線，使其分量和＝0，另一條軸線再用一個三角形的平面的路徑去解決是否可行？

5、第一階段：以最短路徑規劃，若 S={1,2,3,4,5,6}；

可分成 <u>1+5＝2+4＝6 和 3</u>，3 組長度等長的路徑。

$|\overrightarrow{AD}|=2+4$，$|\overrightarrow{DB}|=1+5$，$|\overrightarrow{BC}|=6$，$|\overrightarrow{CA}|=3$，

x 軸分量和＝$|\overrightarrow{DB}|-|\overrightarrow{BC}|=6-6=0$，

y 軸分量和＝$|\overrightarrow{BC}|-|\overrightarrow{CA}|=6-3=3$。

z 軸分量和＝$|\overrightarrow{AD}|-|\overrightarrow{DB}|=6-6=0$，

第 6 階以$\overrightarrow{BC}$結束於(0,3,0)的位置。（圖 57）

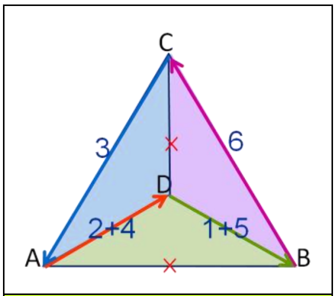


圖 57：四條稜線路徑規畫

6、第二階段：以 x 軸與 y 軸的共面為△ABC，解決 y 軸的分量和＝0 的問題

(1) 第二階段起始點為(0,+3,0)的位置，若 x 軸的分量和為 0，則$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{BC}|$；

若 y 軸的分量和為 0，則$|\overrightarrow{BC}|+3=|\overrightarrow{CA}|$；故若$|\overrightarrow{AB}|=m$，$|\overrightarrow{BC}|=m$，$|\overrightarrow{CA}|=m+3$；

$S_n=3m+3$； $|\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{CA}|+|\overrightarrow{BC}|$的和為 3 的倍數(3m+3)。

(2) 由於第一階段路徑結束於第 6 階的$\overrightarrow{BC}$，所以第二階段<u>起始的第 7 階需為$\overrightarrow{AB}$或$\overrightarrow{CA}$</u>，<u>而結束的向量需為$\overrightarrow{BC}$</u>，<u>才能與第一階段的第 1 階$\overrightarrow{DB}$銜接，使兩階段路徑形成等角環形路徑</u>。

7、以向量和思考第二階段路徑

元素	7~11	7~12	7~13	7~14	7~15	7~16	7~17	5~18
和	45(3 m)	57(3m)	70(3m+1)	84(3m)	99(3m)	115(3m+1)	132(3m)	150(3m)

(1) 當 S＝{7,8,9,10,11}時，$S_n=45$；$m=(45-3)\div3=14$

先考慮$|\overrightarrow{BC}|=14=\underline{11}+3$，沒有 3，故不可行。

(2) 當 S＝{7,8,9,10,11,12}時，$S_n=57$；$m=(57-3)\div3=18$

先考慮$|\overrightarrow{BC}|=18=\underline{12}+6$，沒有 6，故不可行。

(3) 當 S＝{7,8,9,10,11,12,13,14}時，$S_n=84$；$m=(84-3)\div3=27$

先考慮$|\overrightarrow{BC}|=27$，需包括 14，$|\overrightarrow{BC}|=\underline{14}+13$，13 與 14 為鄰數，故不可行。

(4) 當 S＝{7,8,9,10,11,12,13,14,15}時，$S_n=99$；$m=(99-3)\div3=32$

先考慮$|\overrightarrow{BC}|=32$，需包括 15，$|\overrightarrow{BC}|=\underline{15}+17$，17＝7＋10（第 7 階需為$\overrightarrow{AB}$或$\overrightarrow{CA}$，故

不符)；17＝8＋9，(8 與 9 互為鄰數，故不符)。

(5) 當 S＝{7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17}時，S_n＝132；m＝(132－3)÷3＝43

先考慮$|\overrightarrow{BC}|$＝43，需包括 17，$|\overrightarrow{BC}|=\underline{17}+15+11=\underline{17}+14+12$（兩種狀況）；

若設開始的 7 為$\overrightarrow{AB}$方向，則$|\overrightarrow{AB}|=43=\underline{7}+9+11+16$；

則$|\overrightarrow{CA}|=46=8+10+13+15$；故$|\overrightarrow{BC}|=43=12+14+\underline{17}$

(6) x 軸分量和＝$|\overrightarrow{AB}|-|\overrightarrow{BC}|=43-43=0$；

y 軸分量和＝$(|\overrightarrow{BC}|+3)-|\overrightarrow{CA}|=(43+3)-46=0$；

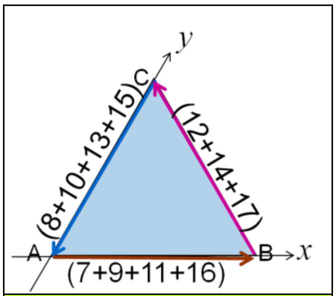


圖 58：△ABC 路徑規畫

8、模式 2，以 4 條稜線搭配△ABC 方向的模式，回到原點的最短 3D 路徑為 17 階，總步數為$\frac{(1+17)\times 17}{2}$＝153，較模式 1 的最短 3D 路徑(18 階)短。

(四)路徑圖（座標位置變化）

$(0,0,0)\xrightarrow{1}(1,0,-1)\xrightarrow{2}(1,0,1)\xrightarrow{3}(1,-3,1)\xrightarrow{4}(1,-3,5)\xrightarrow{5}(6,-3,0)\xrightarrow{6}(0,3,0)$

$\xrightarrow{7}(7,3,0)\xrightarrow{8}(7,-5,0)\xrightarrow{9}(16,-5,0)\xrightarrow{10}(16,-15,0)\xrightarrow{11}(27,-15,0)\xrightarrow{12}(15,-3,0)$

$\xrightarrow{13}(15,-16,0)\xrightarrow{14}(1,-2,0)\xrightarrow{15}(1,-17,0)\xrightarrow{16}(17,-17,0)\xrightarrow{17}(0,0,0)$

小結：每次轉 120°回到原點的最短 3D 路徑為 17 階，總步數為 153。

陸、研究結果

一、螞蟻回家的平面最短路徑

每次轉 90°，回到原點的最短路徑為 8 階(共需轉 8 次)，總步數為 36 步。

每次轉 120°，回到原點的最短路徑為 9 階(共需轉 9 次)，總步數為 45 步。

每次轉 60°，回到原點的最短路徑為 12 階(共需轉 12 次)，總步數為 78 步。

二、螞蟻回家的 3D 最短路徑

每次轉 90°，回到原點的最短路徑為 11 階(共需轉 11 次)，總步數為 66 步。

每次轉 120°，回到原點的最短路徑為 17 階(共需轉 17 次)，總步數 153 步。

柒、討論

一、角度與方向數

走平面路徑時我們發現方向數都等於 360 ÷ 轉彎角度，是巧合還是必然，我們決定以「樹狀圖」檢核我們的結果。

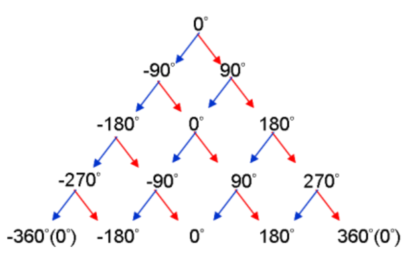
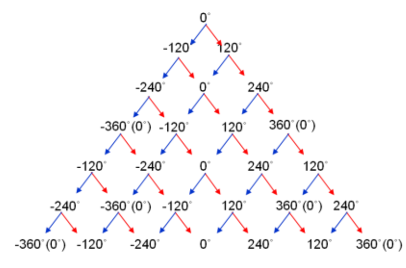
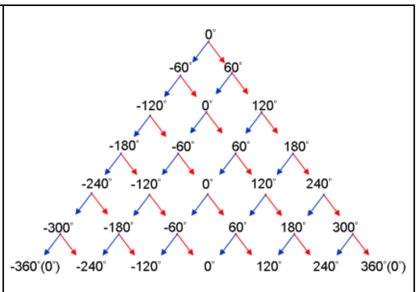
		

圖 59：轉 90˚有 4 種方向	圖 60：轉 120˚有 3 種方向	圖 61：轉 60˚有 6 種方向

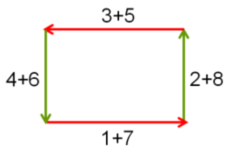
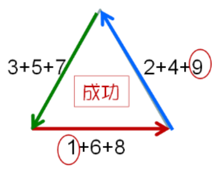
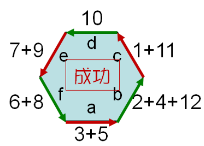
(一) 轉 90˚的方向，只出現與起始方向呈 90˚(-270˚)、180˚(-180˚)、270˚(-90˚)與 360˚(0˚)，這四種方向與推測相符。(圖 59)

(二) 轉 120˚的方向，只出現與起始方向呈 120˚(-240˚)、240˚(-120˚)與 360˚(0˚)，這三種方向與推測相符。(圖 60)

(三) 轉 60˚的方向，會出現與起始方向呈 60˚(-300˚)、120˚(-240˚)、180˚(-180˚)、240˚(-120˚)、300˚(-60˚)與 360˚(0˚)，這六種方向與推測相符。(圖 61)

(四) 故我們可以確定「方向數＝360÷轉彎角度」。依此推論，任何可以整除 360˚的轉彎角度都能以「等角、步數遞增」的遊戲規則，找出等角環形路徑。

二、回原點的階數 N 與方向數 K 的關係

轉動角度（P）	90˚	120˚	60˚
轉動方向數（K）	4	3	6
最短路徑規劃			
回原點的階數(N)	N＝8m	N＝3m or 3m-1	N＝6m
N 與 K 的關係	N＝2Km	N＝Km or Km－1	N＝Km

(一)N 與 K 值存在著固定的關係式嗎？

(1) 在我們研究的 3 個角度中，N 與 K 的關係有 3 個模式：① K＝4，N＝2Km、② K＝3，N＝Km 或 Km－1、③ K＝6，N＝Km。

(2) 而從他們路徑的相反方向，我們也看到了 3 個模式：①K＝4，奇數⇔奇數、偶數⇔偶數②K＝3，不存在相反方向③K＝6，奇數⇔偶數。(見上表)

(3) 我們能依他們路徑的方向模式找到 N 與 K 的關係嗎？

(二)路徑的相反方向為奇數⇔奇數、偶數⇔偶數（K＝4），思考 N 與 K 的關係

1、 由 K＝4 的情形思考 N 與 K 的關係

(1) 由「研究一」得知，要讓 x 軸與 y 軸的和為 0 需讓相對方向的偶數階(b 與 d)長度相等，故偶數項需為 4 的倍數(4m)，因此總項數 N＝8m，故 N＝2Km。(圖 62)

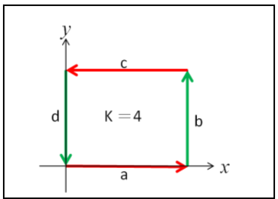


圖 62：K＝4

(2) 以此推論當 K＝4 時，所有 N＝8m 的情形，都能<u>固定以轉 90°，步數遞增的規則</u>回到原點。除了最短路徑 N＝8 階外，我們在 16 階、24 階找到回到原點的路徑。(圖 63、圖 64)

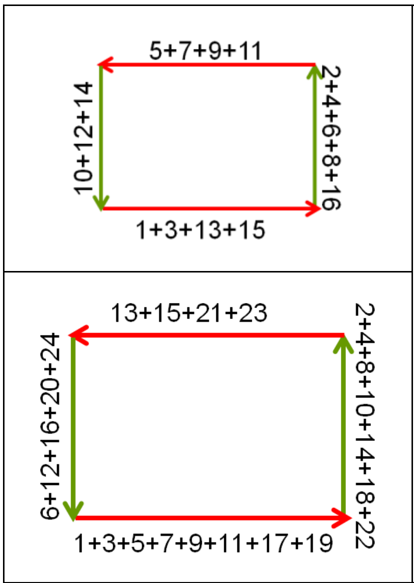


圖 63：N 為 16 階與 24 階路徑規劃。

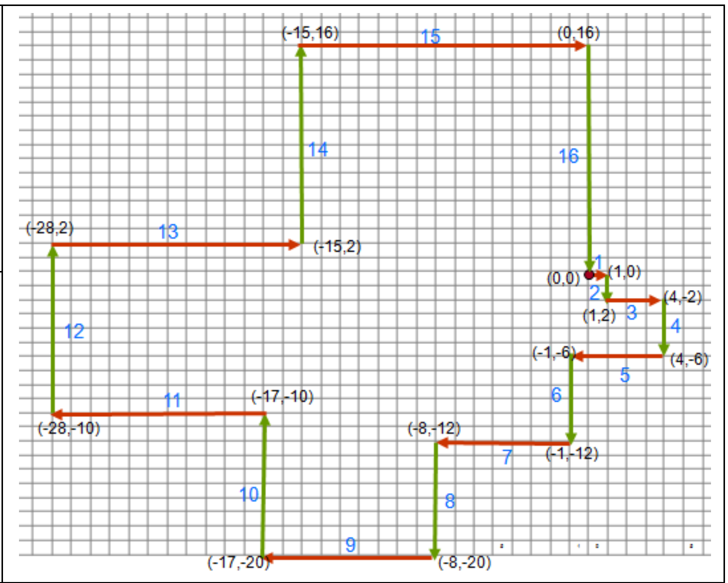


圖 64：N 為 16 階，路徑示例。

2、當 K＝4m，例 K＝8、12、……，都可發現相對方向都是奇數階恆為奇數階，偶數階恆為偶數階，且都有$\frac{k}{4}$組需相等的偶數邊，是否總階數 N＝2Km 能成立？（圖 65、66）

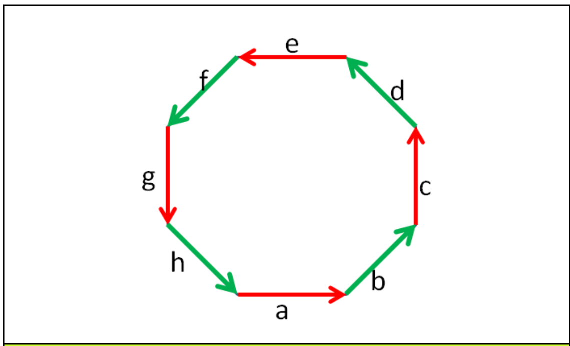


圖 65：K＝8(轉 45°)。有 2 組相反方向的偶數階。

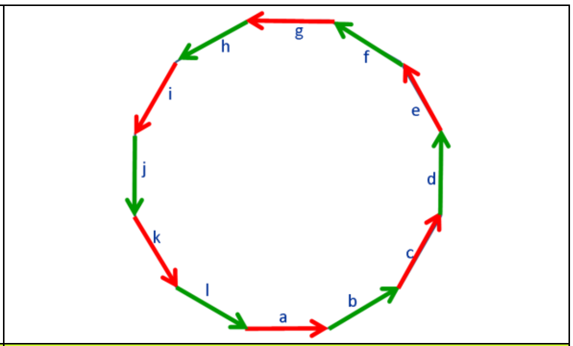


圖 66：K＝12(轉 30°)。有 3 組相反方向的偶數階。

(1) 以 $\vec{a}$ 為起始方向，K＝8 相反方向的偶數階分別為($\vec{b}$ 與 $\vec{f}$)、($\vec{d}$ 與 $\vec{h}$)兩組；K＝16 則有($\vec{b}$ 與 $\vec{h}$)、($\vec{d}$ 與 $\vec{j}$)和($\vec{f}$ 與 $\vec{l}$)三組，以每組相對的偶數邊必為 4m，依此推論，K＝8，總階數 N＝4m×2＝8m，K＝16，總階數 N＝4m×3＝24m。

(2) 因為我們無法以「直角坐標」或「斜坐標」來求出每個向量 x 軸與 y 軸的分量，無法證實 K＝8 與 K＝12 的總階數是否分別等於 16m 或 32m，故<u>**若 K 為 4 的倍數，總階數 N＝2Km。**只能當一個「猜想」留待以後證明。</u>

(三) 路徑不存在相反方向，如 K＝3、5、7、…思考 N 與 K 的關係

1、K＝3 的情形思考 N 與 K 的關係

(1) 由「研究二」得知，當 K＝3 時，奇數階與偶數階都可能出現在任何方向，要讓 x 軸與 y 軸的和為 0 需 a、b、c，3 個方向的長度相等，故只需考慮總步數是 3 的倍數即可（圖 67）。

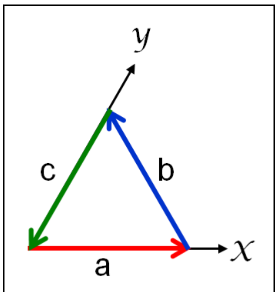


圖 67：K＝3

(2) 總步數 $S_n = \frac{(1+n)\times n}{2}$， n 或 n+1 需為 3 的倍數(3m)，故總項數 N＝「3m」或「3m－1」。

(3) 故 N＝3 時，總項數 N＝Km 或 Km－1；除了最短路徑 9 階外，我們分別在 11 階、12 階、14 階、15 階也都找到每次轉 120°回原點的路徑。(圖 68~71)

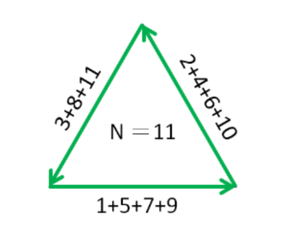


圖 68：11 階

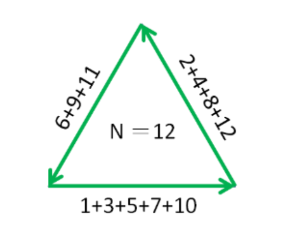


圖 69：12 階

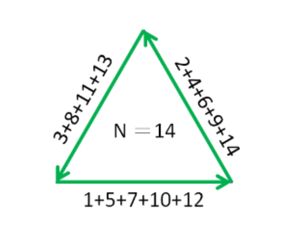


圖 70：14 階

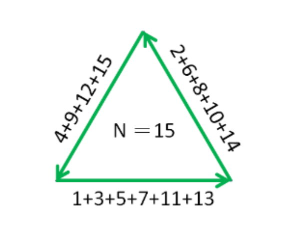


圖 71：15 階

2、但與 K＝3 相同，路徑不存在相對方向，且奇、偶數都可能出現在任何方向的 K＝5（轉動方向 P＝72°）是否存在總項數 N＝Km 或 Km－1 的關係？

(1) 由正多邊形的性質思考，除了正三角形外，等角並不一定得等邊，故每次轉 72°，K＝5 無法套用 K＝3 總階數 N＝Km 的關係式。(圖 72)

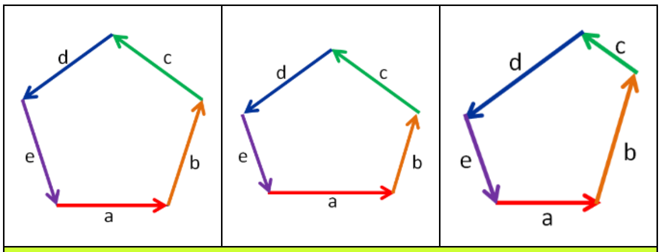


圖 72：五邊形等角不一定等邊

(2) 每次轉 72°，K＝5 各向量的分量求法，已超出我們的學習，故我們也無法以 x 軸或 y 軸的分量和歸 0 的條件，去找出總階數 N 與 K 的關係。

(四)路徑的相反方向為奇數⇔偶數，如 K＝6 思考 N 與 K 的關係

1、由「研究三」得知，要讓 x 軸與 y 軸的和為 0 需讓相對方向的奇數階與偶數階(a 與 d、c 與 f、b 與 e)的差為定值(m)，K＝6 有 3 組方向相反的奇、偶數階，故奇偶數和的差＝3m；n 項奇數和與偶數和的差＝n，故 n＝3m，總階數 N＝6m，故 N＝Km。(圖 73)

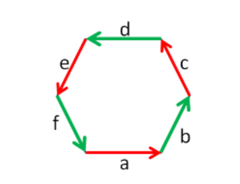


圖 73：K=6

2、但與 K＝6 相同，路徑的相反為奇數⇔偶數的 K＝10（轉動方向 P＝36°）是否存在總項數 N＝Km 的關係？

K＝10，有 5 組相對邊（圖 74），依照 K＝6 的推論，每組相對邊的差為一定值(m)，故總項數 N＝10m；似乎有點道理，但與 K＝5 的狀況相同，我們無法得知各向量的分量，所以也無法證實我們的推論是否正確，只能留待以後學了較高深的數學去證實。

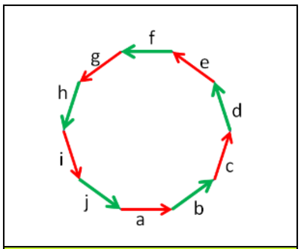


圖 74：K＝10

捌、結論

一、固定轉彎角度(P)，且每次轉彎後的步數遞增的條件，回原點的階數 N(轉彎次數)與轉彎的方向數(K)存在一定的關係：

方向數（K）＝360÷P（轉彎角度）

若 K＝4，則回原點的階數 N＝2Km（ m 代表任意整數）；

若 K＝3，則回原點的階數 N＝Km 或 Km－1。

若 K＝6，則回原點的階數 N＝Km。

二、每次轉 90˚的規定，無論平面路徑或 3D 路徑，都可借用「直角坐標」正確的找出螞蟻回家路徑的最短路徑。

三、每次轉 120˚與每次轉 60˚的規定，無論平面或 3D 路徑，都可借用我們自創的「斜坐標」正確且輕鬆的找到螞蟻回家的最短路徑。

四、任何可以整除 360˚的轉彎角度都能以「等角、步數遞增」的遊戲規則，找出等角環形路徑。

五、等角環形路徑回到原點的階數與「轉彎的角度」和「方向數的奇、偶」有密切的關係。

玖、未來研究建議

一、每次轉 60°是否能以相同遊戲規則找到回到原點的 3D 最短路徑？

(一)在平面圖形中，我們已發現每次轉 60°所形成的圖形內角為 120°，我們最先的想法是正多面體裡沒有以內角為 120°的正六邊形所組成的正多面體，所以覺得不可行，但是解決了轉 120°的 3D 回家路徑後我們有了不同的想法。

(二)也許我們也可以用 32 面體中的其中兩個連接的正六邊形或截角四面體的正六邊形稜邊去思考，也許能以轉 60°的模式找出 3D 的回家模式，這點或許也可留待以後解決。

二、方向數 K 為奇數（如 5、9、15、…），偶數(4 的倍數與非 4 的倍數)，總階數 N 和 K 的關係是否與 K＝3、4、6 一樣，存在一定的關係式，有待更高深的數學去研究證實。

拾、參考資料

一、葛登能（2004）‧打開魔數箱‧第 30 章 90 度序列等角多邊形（217-220 頁）‧遠流。

二、康軒文教事業（2014）。國小數學課本第 11 冊第 3 單元柱體與椎體。新北市：康軒。

三、康軒文教事業（2014）。國小數學課本第 11 冊第 5 單元數量關係。新北市：康軒。

四、康軒文教事業（2014）。國小數學課本第 11 冊第 9 單元列式與等量公理。新北市：康軒。

五、康軒文教事業（2015）。國小數學課本第 12 冊第 1 單元分數與小數的四則計算。新北市：康軒。

六、康軒文教事業（2015）。國民小學數學學習領域第 12 冊第 6 單元怎樣解題。新北市：康軒。

【評語】080408

從棋盤上的某一點出發，在限制轉彎角度，且每次轉彎後步數必須遞增的條件下，找到回原點的最短路徑，題材新穎有趣，且以「向量」佐證，並從2維探討至3維，內容豐富完整。