中華民國第 56 屆中小學科學展覽會

作品說明書

國小組　數學科

080406

探討快樂數的奧秘

學校名稱：高雄市左營區新上國民小學

作者：	指導老師：
小五 郭晉佑	洪吉慶 劉嘉雯

關鍵詞：快樂數、平方和，數列

摘要

快樂數一詞是一個近十幾年來所產生的話題，對於快樂數如何定義，及為什麼數也會有快樂與不快樂之分非常好奇，所以想藉由此次的研究及探討，我想找出有關快樂數的奧秘及特性，希望藉由此次的探討，讓我們對快樂數能夠有更深一層的認識。

壹、研究動機

無意間在網路上看到「快樂數」三個字，馬上就被它特別的名字給吸引了！數字也會快樂？這個有趣的問題，引發數的興趣。正好上學期我們使用的數學課本，南一版五年級上學期，正在教的第一單元乘法與除法；第二單元因數與倍數，剛好可以學以致用；又加上 MathWorld 對快樂數的定義如下：

A number which is not happy is said to be unhappy. 我在想這是真的嗎？在半信半疑之下，於是，我展開了對快樂數奧秘一連串的探討！想知道是不是所有的數，除了快樂的便是不快樂的嗎？

貳、研究目的

一、探討何謂快樂數與不快樂數。

二、探討快樂數的奧秘。

三、探討快樂數的特性。

參、研究設備及器材

紙、筆、電腦、方格紙

肆、研究過程或方法

一、探討活動一：快樂數與不快樂數的定義

（一）探討方法：

上網找有關快樂數的資料，並將其定義理解清楚。

（二）探討結果：

1、快樂數 (Happy Number) 的定義也頗為複雜，首先用 s_1 來代表一正整數 s_0 的所有數位的平方和，再以 s_2 來代表 s_1 的所有數位的平方和，如此下去。如果一數經過多次「轉化」後變成 1 的話，這數便是快樂數了。

舉例一：<u>70</u> →（7^2）+（0^2）＝49→（4^2）+（9^2）＝97→（9^2）+（7^2）＝130→（1^2）+（3^2）+（0^2）＝10→（1^2）+（0^2）＝<u>1</u>

舉例二：<u>379</u>→（3^2）+（7^2）+（9^2）＝139→（1^2）+（3^2）+（9^2）＝91→（9^2）+（1^2）＝82→（8^2）+（2^2）＝68→（6^2）+（8^2）＝100→（1^2）+（0^2）+（0^2）＝<u>1</u>

以上兩例（<u>70</u>、<u>379</u>），在經過數次各位數平方和，也就是所謂的「轉化」後，都會回到 1，所以以上兩例（<u>70</u>、<u>379</u>）都是快樂數！

2、不快樂數 (Unhappy Number) 的定義則簡單得多。MathWorld 的定義如下：A number which is not happy is said to be unhappy. (一數不是快樂的便是不快樂。)不快樂數如 4 →4^2=16 →1^2+6^2=37 →3^2+7^2=58 ，以此類推接下來是 89、145、42、20，最後又回到 4 定義成不快樂數。原來不快樂數的「轉化」是最終週期性，它們被定義為不快樂的原因大概是因為兜圈子吧！

舉例一：<u>34</u>→（3^2）+（4^2）＝25→（2^2）+（5^2）＝29→（2^2）+（9^2）＝85→（8^2）+（5^2）＝89→（8^2）+（9^2）＝145→（1^2）+（4^2）+（5^2）＝42→（4^2）+（2^2）＝20→（2^2）+（0^2）＝<u>4</u>

舉例二：<u>67</u>→（6^2）+（7^2）＝85→（8^2）+（5^2）＝89→（8^2）+（9^2）＝145→（1^2）+（4^2）+（5^2）＝42→（4^2）+（2^2）＝20→（2^2）+（0^2）＝<u>4</u>

以上兩例（34、67），在經過數次各位數平方和，也就是所謂的「轉化」後，都會回到 4，所以以上兩例（34、67）都是不快樂數！

二、探討活動二：探討不快樂數的特色與通則

（一）探討方法：

首先先觀察 10000 以內的數字，我利用 **Excel** 將一萬以內的所有數，做各位數字分開平方和計算，並觀察了快樂數之外其餘的數，找出他們的通性。計算公式為下：

=(INT(A1/1000))^2+(INT((A1-(INT(A1/1000)*1000))/100))^2+(INT((A1-(INT(A1/1000)*1000)-(INT((A1-(INT(A1/1000)*1000))/100)*100))/10))^2+(A1-(INT(A1/1000)*1000)-(INT((A1-(INT(A1/1000)*1000))/100)*100)-(INT((A1-(INT(A1/1000)*1000)-(INT((A1-(INT(A1/1000)*1000))/100)*100))/10))*10)^2；一直做到

=(INT(G1/1000))^2+(INT((G1-(INT(G1/1000)*1000))/100))^2+(INT((G1-(INT(G1/1000)*1000)-(INT((G1-(INT(G1/1000)*1000))/100)*100))/10))^2+(G1-(INT(G1/1000)*1000)-(INT((G1-(INT(G1/1000)*1000))/100)*100)-(INT((G1-(INT(G1/1000)*1000)-(INT((G1-(INT(G1/1000)*1000))/100)*100))/10))*10)^2

PS：G1 為第七次平方和

（二）探討紀錄如下表：

平方 / 數字	第一次	第二次	第三次	第四次	第五次	第六次	第七次	第八次
0001	0001	0001	0001	0001	0001	0001	0001	0001
0002	0004	0016	0037	0058	0089	0145	0042	0020
0003	0009	0081	0065	0061	0037	0058	0089	0145
0004	0016	0037	0058	0089	0145	0042	0020	0004
0005	0025	0029	0085	0089	0145	0042	0020	0004
0006	0036	0045	0041	0017	0050	0025	0029	0085
0007	0049	0097	0130	0010	0001	0001	0001	0001
0008	0064	0052	0029	0085	0089	0145	0042	0020
0009	0081	0065	0061	0037	0058	0089	0145	0042
0010	0001	0001	0001	0001	0001	0001	0001	0001
0011	0002	0004	0016	0037	0058	0089	0145	0042
0012	0005	0025	0029	0085	0089	0145	0042	0020

0013	0010	0001	0001	0001	0001	0001	0001	0001
0014	0017	0050	0025	0029	0085	0089	0145	0042
0015	0026	0040	0016	0037	0058	0089	0145	0042
0016	0037	0058	0089	0145	0042	0020	0004	0016
0017	0050	0025	0029	0085	0089	0145	0042	0020
0018	0065	0061	0037	0058	0089	0145	0042	0020
0019	0082	0068	0100	0001	0001	0001	0001	0001
0020	0004	0016	0037	0058	0089	0145	0042	0020
0021	0005	0025	0029	0085	0089	0145	0042	0020
0022	0008	0064	0052	0029	0085	0089	0145	0042
0023	0013	0010	0001	0001	0001	0001	0001	0001
0024	0020	0004	0016	0037	0058	0089	0145	0042
0025	0029	0085	0089	0145	0042	0020	0004	0016
0026	0040	0016	0037	0058	0089	0145	0042	0020
0027	0053	0034	0025	0029	0085	0089	0145	0042
0028	0068	0100	0001	0001	0001	0001	0001	0001
0029	0085	0089	0145	0042	0020	0004	0016	0037
0030	0009	0081	0065	0061	0037	0058	0089	0145
0031	0010	0001	0001	0001	0001	0001	0001	0001
0032	0013	0010	0001	0001	0001	0001	0001	0001
0033	0018	0065	0061	0037	0058	0089	0145	0042
0034	0025	0029	0085	0089	0145	0042	0020	0004
0035	0034	0025	0029	0085	0089	0145	0042	0020
0036	0045	0041	0017	0050	0025	0029	0085	0089
0037	0058	0089	0145	0042	0020	0004	0016	0037
0038	0073	0058	0089	0145	0042	0020	0004	0016
0039	0090	0081	0065	0061	0037	0058	0089	0145
0040	0016	0037	0058	0089	0145	0042	0020	0004
0041	0017	0050	0025	0029	0085	0089	0145	0042
0042	0020	0004	0016	0037	0058	0089	0145	0042
0043	0025	0029	0085	0089	0145	0042	0020	0004
0044	0032	0013	0010	0001	0001	0001	0001	0001
0045	0041	0017	0050	0025	0029	0085	0089	0145
0046	0052	0029	0085	0089	0145	0042	0020	0004
0047	0065	0061	0037	0058	0089	0145	0042	0020
0048	0080	0064	0052	0029	0085	0089	0145	0042
0049	0097	0130	0010	0001	0001	0001	0001	0001
0050	0025	0029	0085	0089	0145	0042	0020	0004

因為版面關係只列出前 50 個數字

（三）探討結果：

1、觀察表格發現，只要不是快樂數，也就是在經過多次各位數字分開平方和後不會回到 1 的數，在經過多次各位數字分開平方和後，都會回到以 4 為開始【4→16（4^2）→37（1^2+6^2）→58（3^2+7^2）→89（5^2+8^2）→145（8^2+9^2）→42（$1^2+4^2+5^2$）→20（4^2+2^2）→4】的這組數字中

做循環，映證了探討活動一中的第二點發現「原來不快樂數的『轉化』最終是帶週期性，它們不快樂的原因大概是因為兜圈子吧！」。

2、觀察上述表格發現，一萬以內的數，在經過第六次計算各位數字分開平方和之後，若沒有回到 1，此數便不可能為快樂數。

3、不是快樂數的不快樂數最後都會回到 4，本來想說找不到除了快樂數以及不快樂數以外的數，但忽然發現還有一個數就是 0，0 的平方還是 0，既不是 1 也不是 4，忽然讓我振奮起來，原來 MathWorld 的定義有一點瑕疵，因該加上一句話，In addition to zero(除了 0 之外)，整個定義才能夠成立。

三、探討活動三：有沒有在什麼情況下所有的數，會全都是快樂數？

這是電腦老師丟給我想的題目，我覺得很好玩就做做看。

（一）探討方法：

想到這個問題，因為是電腦老師丟的問題，就讓我想到數字的進位，看是否從改變數字的進位來探討快樂數。因為二進位、三進位、四進位數字都不會進到 4，所以比較有可能，就由這三個來探討，其餘的會有數字 4，就不會產生全都是快樂數的結果。

（二）探討紀錄

二進位：

例一：$1010_2 \to 1^2+0^2+1^2+0^2=10_2=1^2+0^2=1_2$。

例二：$1111_2=1^2+1^2+1^2+1^2=100_2=1^2+0^2+0^2=1_2$。

三進位：

例一：$12_3=1^2+2^2=12_3$，一直在 12 循環。

例二：$11_3=1^2+1^2=2_3=2^2=11_3$，最後又回到 11。

四進位：

例一：$3123_4 \to 3^2+1^2+2^2+3^2=21+1+10+21=113_4 \to 1^2+1^2+3^2=1+1+21=23_4 \to 2^2+3^2=10+21=31_4 \to 3^2+1^2=21+1=22_4 \to 2^2+2^2=10+10=20_4 \to 2^2+0^2$

$=1_4$

例二：$13_4=1^2+3^2=22_4=2^2+2^2=20_4=2^2+0^2=10_4=1^2+0^2=1_4$

五進位：

例一：$13_5=1^2+3^2=20_5=2^2=4_5$

例二：$23_5=2^2+3^2=23_5$

S $_{e,b}$（$\sum_{i=0}^{n} a_i b^i$）＝$\sum_{i=0}^{n} a_i^e$ 【$e\geq 2, b\geq 2, 0\leq a_i\leq b-1$】如果說 $s_{\leq e,b}^{m}(a)=1[m\geq 0]$，也就是說

n＝$\sum_{i-1}^{n} a_i b^{i-1}$，f（n）＝$\sum_{i=1}^{n} a_i^2$，當 a=2 及 a=4 時，所有的數都是快樂數

（三）探討結果：

二進位：因為二進位所有的數字不是 0 就是 1，所以二進位所有數字必為快樂數。

四進位：因為不快樂數，最後一個數字必回到四，而四進位逢 4 必進位，不會有 4 產生，而最後必進到 1，所以四進位所有的數也必為快樂數；三進位有些數會一直在本身的數循環，所以三進位必不會全都是快樂數，五進位到九進位因為會有數字進到 4 所以就不會全為快樂數，而十一進位以後因為第十一以後數字都用英文字母代表(例如 11 用 A 代表、12 用 B 代表等等)，所以無法探討。

定論：所有二進位及四進位的數都是快樂數。

四、　探討活動四：探討能否找出最大的快樂數

(一) 探討方法：

如果 N 為快樂數，若能證明 10N 必為快樂數，則就找不出最大的快樂數。

(二) 探討紀錄：

N＝$a_1+a_2\times 10+a_3\times 10^2+a_4\times 10^3+\cdots\cdots+a_n\times 10^{n-1}$；其各數字平方和＝$a_1^2+a_2^2+a_3^2+\cdots\cdots+a_n^2$

10N＝$10a_1+100a_2+\cdots\cdots+10^n a_n$；其各數字平方和＝$a_1^2+a_2^2+a_3^2+\cdots\cdots+a_n^2$

(三) 探討結果：

1、因為 N 的各數字平方和會等於 10N 的各數字平方和

所以若 N 為快樂數，則 10N 也必為快樂數，因為在數字 N 的後方或中間加上任意個零，都不影響 N 為快樂數的事實。換句話說，因為不管加上任幾個零都不影響結果，所以可以加上無限個零，故數值可以無限大，也就找不出最大的快樂數！

2、我也曾經用電腦 Excel 樂找出最大的快樂數，但因桌上型或筆記型電腦容量的限制，無法跑出最大的快樂數，或許以後能夠找到研究機構或電腦公司，用超級電腦試試看，或許能夠找到能夠計算的最大的快樂數。

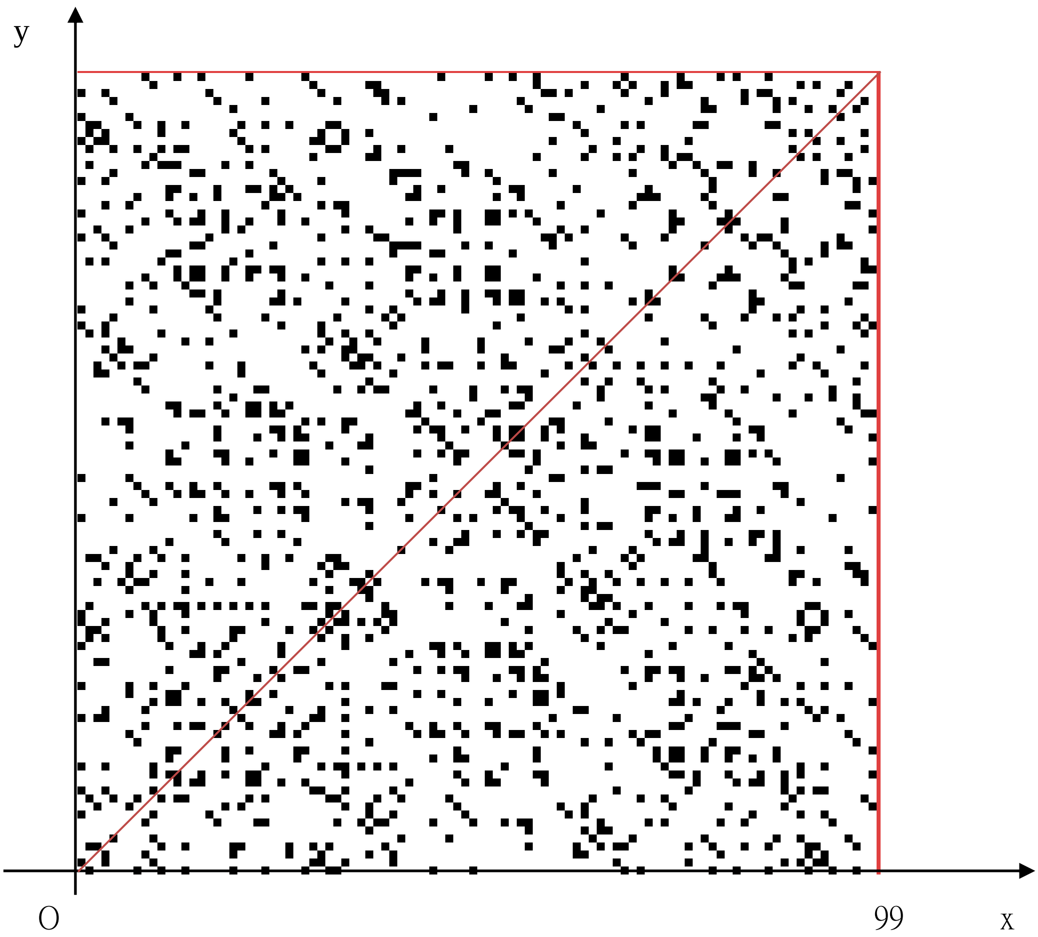
五、探討活動五：探討快樂數的對稱性

（一）探討方法：

將 1~9999 的快樂數畫在方格紙上，並且觀察其規律，看是否能夠找出什麼的特性出來。

（二）探討紀錄：

將 1~9999 的快樂數，畫在 100×100 的方格子中，得到下列結果：



（三）探討結果：

1、如果 219 是快樂數，那麼 291、129、192、921、912，這五個數將也是快樂數，所以在直角坐標平面上就有可能會對稱。

2、若將原點定在縱列第 1 個格子，橫列第 1 個格子，將發現以 $x-y=0$ 為對稱軸，所有快樂數的圖形將對稱於 $x-y=0$ 這條直線上，對稱軸剛好是 $x-y=0$ 的直線。

3、快樂數在方格子當中具有對稱性。

4、把方格紙旋轉 45 度來看，赫然發現有快樂爺爺的臉型在上面，原來快樂數會形成快樂的圖形，這真是奇妙的發現啊！

六、探討活動六：探討快樂數因數的奧秘

因為這學期剛好教到因數與倍數，所以就想把它用在這個探討上。

（一）探討方法：

利用 Excel 將一萬以內的數分別除以 1~25，觀察表格並找出一萬以內快樂數因數的奧秘

（二）探討紀錄：

	/1	/2	/3	/4	/5	/6	/7	/8	/9	/10
1	1	0.5	0.333	0.25	0.2	0.167	0.143	0.125	0.111	0.1
7	7	3.5	2.333	1.75	1.4	1.167	1	0.875	0.778	0.7
10	10	5	3.333	2.5	2	1.667	1.429	1.25	1.111	1
13	13	6.5	4.333	3.25	2.6	2.167	1.857	1.625	1.444	1.3
19	19	9.5	6.333	4.75	3.8	3.167	2.714	2.375	2.111	1.9
23	23	11.5	7.667	5.75	4.6	3.833	3.286	2.875	2.556	2.3
28	28	14	9.333	7	5.6	4.667	4	3.5	3.111	2.8
31	31	15.5	10.33	7.75	6.2	5.167	4.429	3.875	3.444	3.1
32	32	16	10.67	8	6.4	5.333	4.571	4	3.556	3.2
44	44	22	14.67	11	8.8	7.333	6.286	5.5	4.889	4.4
49	49	24.5	16.33	12.25	9.8	8.167	7	6.125	5.444	4.9

68	68	34	22.67	17	13.6	11.33	9.714	8.5	7.556	6.8
70	70	35	23.33	17.5	14	11.67	10	8.75	7.778	7
79	79	39.5	26.33	19.75	15.8	13.17	11.29	9.875	8.778	7.9
82	82	41	27.33	20.5	16.4	13.67	11.71	10.25	9.111	8.2
86	86	43	28.67	21.5	17.2	14.33	12.29	10.75	9.556	8.6
91	91	45.5	30.33	22.75	18.2	15.17	13	11.38	10.11	9.1
94	94	47	31.33	23.5	18.8	15.67	13.43	11.75	10.44	9.4
97	97	48.5	32.33	24.25	19.4	16.17	13.86	12.13	10.78	9.7

因為版面關係只列出前 100 以內的數字，及除以 1~10 的數字

（三）探討結果：

1、觀察上述表格發現，1~1000 快樂數的因數沒有 9、15、18、21 等數，所以一千以內的數若是 9、15、18、21 的倍數，則必不為快樂數。

2、1000~10000 的數字，就沒有如上述的一點的特性，9、15、18、21 的被數會有快樂數的出現，所以 1000 以上的數第一點就不成立了。

3、我們還可以用倍數判別法，來做這個探討 1~1000 的快樂數的因數有哪些，就可以獲得與上述相同的結果。

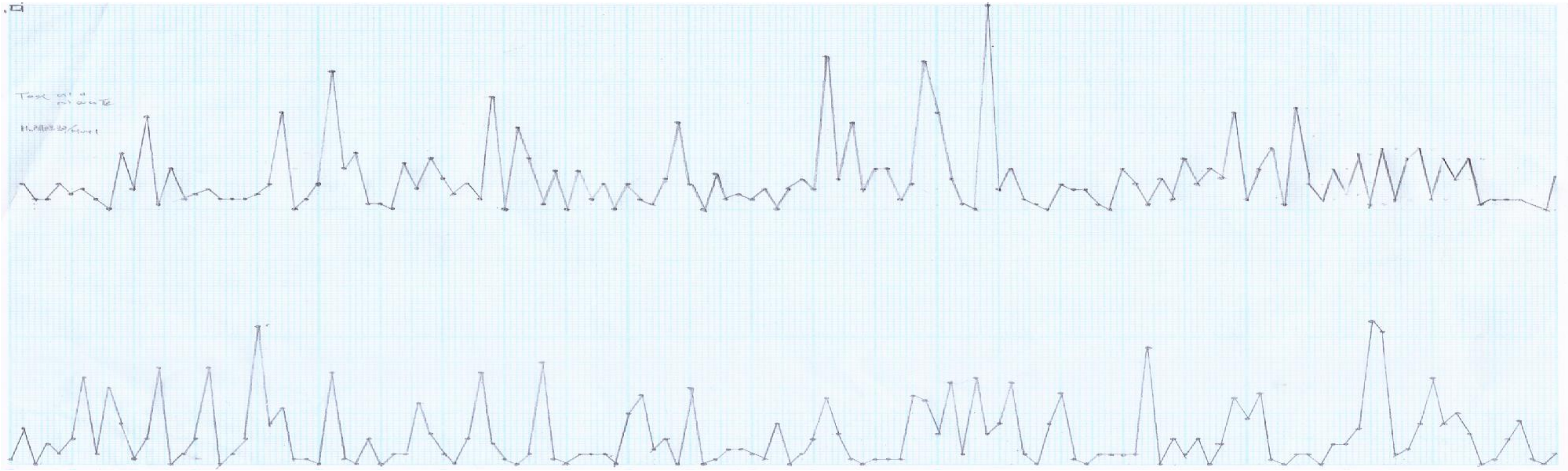
七、探討活動七：探討一萬以內快樂數間間隔及密度問題

（一）探討方法：

將一萬以內快樂數間間隔數畫成折線圖，觀察密度

（二）探討紀錄：

兩快樂數之間數字的間隔數折線圖如下



快樂數的密度探討

n	$1\sim10^n$ 快樂數個數	百分比%	n	$1\sim10^n$ 快樂數個數	百分比%
0	1	100.00%	**8**	14,255,667	14.26%
1	3	30.00%	**9**	145,674,808	14.57%
2	20	20.00%	**10**	1,492,609,148	14.93%
3	143	14.30%	**11**	15,091,199,357	15.09%
4	1,442	14.42%	**12**	149,121,303,586	14.91%
5	14,377	14.38%	**13**	1,443,278,000,870	14.43%
6	143,071	14.31%	**14**	13,770,853,279,685	13.77%
7	1,418,854	14.19%	**15**	130,660,965,862,333	13.07%

（三）探討結果：

1、從圖中，我發現快樂數與快樂數之間隔，只有少數幾個數特別高(間隔數較多)，而所有的間隔會趨近於某數（平均值）。Ps：平均值大約為 7

2、從快樂數的密度探討，我們發現其百分比趨近於 14%，所以密度大約在$\frac{1}{7}$。

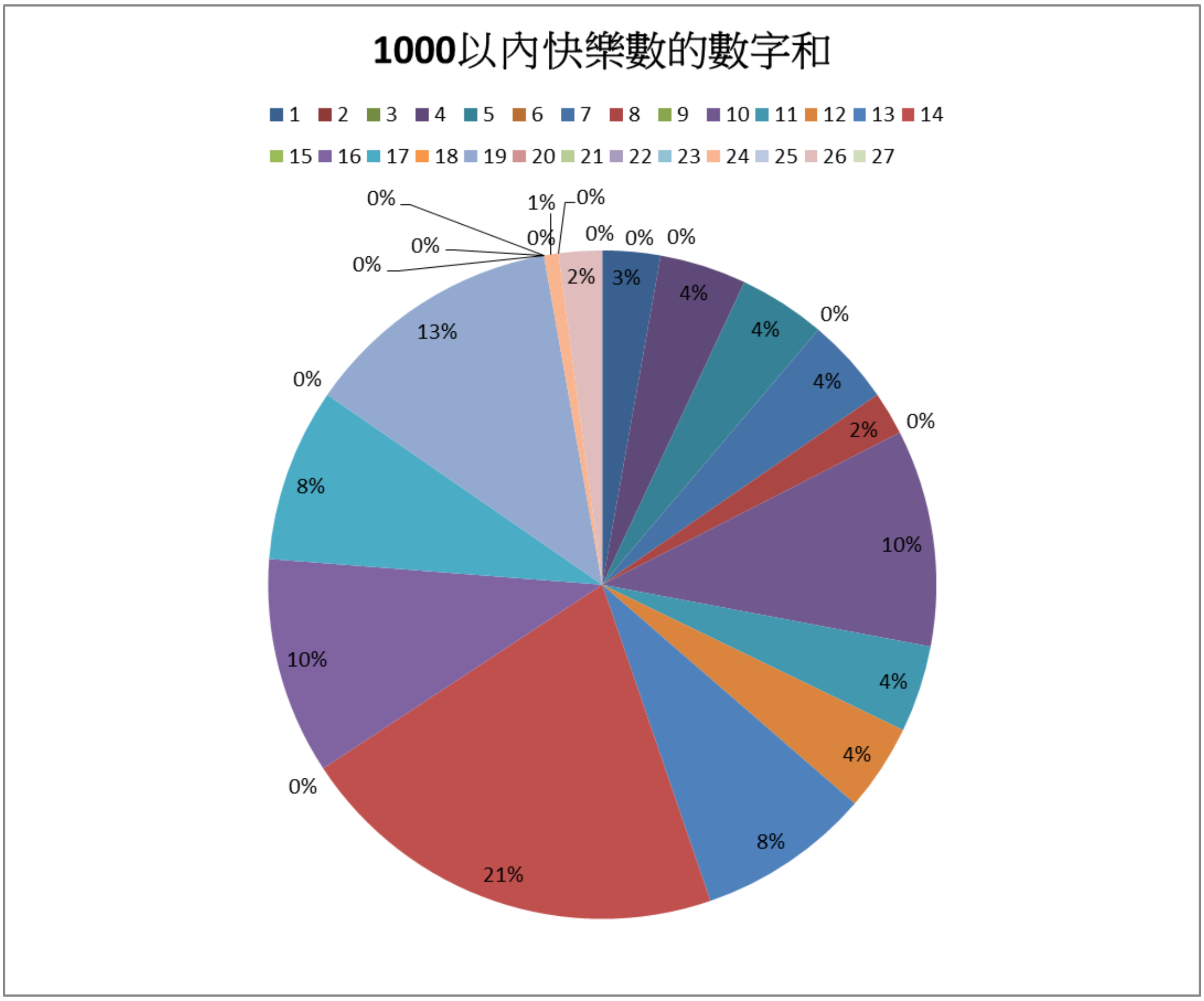
3、所以我們只能說明，大約每 7 個數就會產生一個快樂數，但是他並不是必然。

八、探討活動八：探討將快樂數的數字做相加運算後的結果

（一）探討方法：

將一千以內快樂數的各位數拆開後相加（例：129→1+2+9=12），探討其結果有無可可用的資料產生。

（二）探討紀錄：



(1000 以內快樂數數字單獨分開相加後和之種類及比例的圓餅圖)

（三）探討結果：

1、發現將一千以內的快樂數（共 143 個）的各位數字拆開相加後發現：等於 14 的比例最高，有 30 個；再來，等於 19 的有 18 個，為居第二；等於 10 和 16 的分別有 15 個；等於 13、17 的有 12 個；等於 4、5、7、11、12 的分別有六個；等於 1 的有 4 個，等於 8、26 的分別有 3 個；等於 24 的則有 1 個。

2、一千以內的數，各位數字拆開相加後的結果沒有出現 2、3、6、9、15、18、20、21、22、23、25、27。也就是說，一千以內的數，如果各位數字單獨分開相加後(例:123→1+2+3=6)等於 2、3、6、9、15、18、20、21、22、23、25、27(最大:999→9+9+9=27)，則此數必不為快樂數。

九、探討活動九：探討快樂數各位數字做相乘運算後的結果

（一）探討方法：

將一千以內快樂數各位數字拆開相乘（例：464→4×6×4），並探討其結果。

（二）探討紀錄：

快樂數	相乘結果	快樂數	相乘結果	快樂數	相乘結果	快樂數	相乘結果	快樂數	相乘結果	快樂數	相乘結果	快樂數	相乘結果
1	1	109	0	291	18	391	27	623	36	748	224	907	0
7	7	129	18	293	54	392	54	632	36	761	42	910	0
10	0	130	0	301	0	397	189	635	90	763	126	912	18
13	3	133	9	302	0	404	0	637	126	784	224	913	27
19	9	139	27	310	0	409	0	638	144	790	0	921	18
23	6	167	42	313	9	440	0	644	96	793	189	923	54
28	16	176	42	319	27	446	96	649	216	802	0	931	27
31	3	188	64	320	0	464	96	653	90	806	0	932	54
32	6	190	0	326	36	469	216	655	150	818	64	937	189
44	16	192	18	329	54	478	224	656	180	820	0	940	0

49	36	193	27	331	9	487	224	665	180	833	72	946	216
68	48	203	0	338	72	490	0	671	42	836	144	964	216
70	0	208	0	356	90	496	216	673	126	847	224	970	0
79	63	219	18	362	36	536	90	680	0	860	0	973	189
82	16	226	24	365	90	556	150	683	144	863	144	989	648
86	48	230	0	367	126	563	90	694	216	874	224	998	648
91	9	236	36	368	144	565	150	700	0	881	64	1000	0
94	36	239	54	376	126	566	180	709	0	888	512		
97	63	262	24	379	189	608	0	716	42	899	648		
100	0	263	36	383	72	617	42	736	126	901	0		
103	0	280	0	386	144	622	24	739	189	904	0		

（三）探討結果：

1、觀察表格後發現，將一千以內快樂數各位數字拆開相乘後，其結果必不為快樂數。

例一：367→3×6×7＝126，126 不為快樂數。

例二：49→4×9＝36，36 不為快樂數。

換句話說，相反之，若將一千以內的數各位數字拆開相乘後等於快樂數，則此數必不為快樂數。

例一：5 和 2 相乘等於 10，10 為快樂數，由此可知 52 不為快樂數。

例二：4 和 8 相乘等於 32，32 為快樂數，由此可知 48 不為快樂數。

這倒是有趣的發現，快樂數經過數字相乘運算之後變為不快樂數；而有些不快樂數卻經由數字相乘轉化之後變為快樂數，這倒是好玩的發現，代表數字好玩的地方。

十、探討活動十：利用費氏數列前後項的比值算法，探討快樂數：

（一）探討方法：

1、將快樂數之中的後一項除以前一項

2、將前兩個快樂數相加，除以後面一個快樂數。

(二) 探討紀錄：

1、將快樂數之中的後一項除以前一項，我得到一個數值

h_{n+1}/h_n	結果	h_{n+1}/h_n	結果	h_{n+1}/h_n	結果	h_{n+1}/h_n	結果
7/1	7	94/91	1.05814	203/193	1.005208	313/310	1.02649
10/7	1.428571	97/94	1.032967	208/203	1.051813	319/313	1.009677
13/10	1.3	100/97	1.031915	219/203	1.024631	320/319	1.019169
19/13	1.461538	103/100	1.030928	226/219	1.052885	326/320	1.003135
23/19	1.210526	109/103	1.03	230/226	1.031963	329/326	1.01875
28/23	1.217391	129/109	1.058252	236/230	1.017699	331/329	1.009202
31/28	1.07143	130/129	1.183486	239/236	1.026087	338/331	1.006079
32/31	1.032258	133/130	1.007752	262/239	1.012712	356/338	1.021148
44/32	1.375	139/133	1.023077	263/262	1.096234	362/356	1.053254
49/44	1.113636	167/139	1.045113	280/263	1.003817	365/362	1.016854
68/49	1.387755	176/188	1.201439	291/280	1.064639	367/365	1.008287
70/68	1.029412	188/176	1.053892	293/291	1.039286	368/367	1.005479
79/70	1.128571	190/188	1.068182	301/293	1.006873	376/367	1.002725
82/79	1.037975	192/190	1.010638	302/301	1.027304	379/376	1.007979
91/82	1.04878	193/192	1.010526	310/302	1.003322	383/379	1.010554

前 60 個數值

$\frac{h_{n+1}}{h_n}$ 經過運算後，看起來好像會趨於某個定值，這個定值大約趨近 1，所以還是非常快樂。

2、將後兩個快樂數相加，除以前面一個快樂數($\frac{h_{n+1}+h_{n+2}}{h_n}$)。

17	2.151163	2.0625	2.062914
3.285714	2.098901	2.129534	2.03871

3.2	2.095745	2.103448	2.041534
3.230769	2.092784	2.139423	2.025078
2.684211	2.12	2.082192	2.046875
2.565217	2.31068	2.061947	2.02454
2.25	2.376147	2.065217	2.033435
2.451613	2.03876	2.122881	2.096677
2.90625	2.092308	2.196653	2.12426
2.659091	2.300752	2.072519	2.042135
2.816327	2.467626	2.171103	2.022099
2.191176	2.179641	2.085714	2.013699
2.3	2.147727	2.041237	2.027248
2.126582	2.031915	2.05802	2.05163
2.158537	2.026316	2.033223	2.026596

前 60 個數值

$\frac{h_{n+1}+h_{n+2}}{h_n}$ 經過運算後，看起來好像會趨於某個定值，這個定值大約趨近 2

3、將前兩個快樂數相加，除以後面一個快樂數($\frac{h_n+h_{n+1}}{h_{n+2}}$)。

0.8	1.882979	1.896552	1.955272
1.307692	1.907216	1.903846	1.952978
1.210526	1.91	1.876712	1.975
1.391304	1.912621	1.889381	1.960123
1.5	1.862385	1.934783	1.963526
1.645161	1.643411	1.932203	1.978852
1.84375	1.830769	1.949791	1.952663
1.431818	1.947368	1.812977	1.879213

1.55102	1.892086	1.904943	1.917127
1.367647	1.628743	1.875	1.967123
1.671429	1.738636	1.865979	1.980926
1.746835	1.824468	1.948805	1.98913
1.817073	1.915789	1.940199	1.954787
1.872093	1.96875	1.966887	1.963061
1.846154	1.979275	1.945161	1.971279

前 60 個數值

$\frac{h_n+h_{n+1}}{h_{n+2}}$ 經過運算後，看起來好像會趨於某個定值，這個定值大約趨近 2

(三)、探討結果：

1、根據上述，$\frac{h_{n+1}}{h_n}$ 其結果會趨近於 1；而 $\frac{h_{n+1}+h_{n+2}}{h_n}$ 和 $\frac{h_n+h_{n+1}}{h_{n+2}}$ 其結果會趨近於 2。

2、$\frac{h_{n+1}}{h_n}$ 經過運算後，看起來好像會趨於某個定值，這個定值大約趨近 1，所以還是非常快樂。

2、表 3 有幾個數會接近 1.618，例如 23、28、31 這組組合的數據為 1.645161 我們就稱這組數字為黃金快樂數。其他的組合還有 49、68、70；103、109、129…等。

伍、研究結果

一、因為快樂數為個數字的平方和，且經過多次「轉化」後變成 1，所以發現 1~9 所有數的平方就會形成階差，如：

$1^2=1$；$2^2=4$；$3^2=9$；$4^2=16$；$5^2=25$；$6^2=36$；$7^2=49$；$8^2=64$；$9^2=81$。

所以得到 $a_n=a_{n-1}+(2n-1)$；其中 $a_0=0; a_1=1 \rightarrow a_n=\sum_{n=1}^{n}(2n-1)$。因為所有數字都是圍繞在 0~9 數字的平方和，就會得到一些有趣的現象，其結果也就會圍繞在抹些數字上循環，於是就會產生所謂的快樂數愈不快樂數之分。

二、10000 以內的數，在經過第六次數字平方和轉換後，如果未回到 1，則此數便不可能為

快樂數。

三、除了 0 這個數之外，所有的數不是快了數不然就是不快樂數。

四、所有的二進位及四進位來運算的數都是快樂數。

五、快樂數在直角座標上具有對稱姓，對稱軸為 $x-y=0$。

六、平均 14%會產生一個數，也就是大約每七個就會產生一個，所以其密度大約在 $\frac{1}{7}$。

七、將快樂數個位數字拆開之後相加，必不為快樂數。

八、將快樂數各位數字叉開之後相乘，變成不快樂數，但不快樂數各位數字拆開之後相乘，有些數會變成快樂數，這是一個好巧妙的變化，也覺得滿有趣的。

九、將快樂數之中用後項除以前項，數值會趨近於 1，與快樂數經轉化之後會變成 1，有巧妙的巧合，所以快樂數經變化之後還是快樂數。

十、將後兩個快樂數相加，除以前面一個快樂數；將前兩個快樂數相加，除以後面一個快樂數，數值會趨近於 2。並且可以找出黃金快樂數，倒是讓我滿驚奇的。

十一、1~1000 快樂數的因數沒有 9、15、18、21 等數，所以一千以內的數若是 9、15、18、21 的倍數，則必不為快樂數。

陸、討論

一、目前所探討的快樂數只有 1~10000，若是把數字加大到 100000，甚至更大，其結果會不會變的不一樣，這是我需要在進一步討論的。

二、關於不快樂數，最後都會回到 4，而且一直循環，讓我想到中國老祖宗的智慧，所謂大周天、小周天，循環的理論。我們的祖先都喜歡周而不始的循環，而且很多古老的事物都跟 4 有所關聯。例如：易經的卦辭(兩儀四象、八卦、由八卦衍生的 8×8＝64 掛、24 節氣、四季、時間 24hr 等，都是四的倍數，都跟 4 有關，或許外國所定義的不快樂數，在中國正是快樂之數。

三、以後還可以探討快樂多次方，例如：立方和、四次方和、五次方和…等，會是怎樣的結果，原快樂數還會是快樂數嗎？會不會有所變化？

四、有一些數在經過一某次方的轉化後依然故我，麥達奇稱這些數為完全數字不變數 (Perfect

Digital Invariant 或 PDI)。而若次方數與數位剛好相同的話，我們便稱之為超完全數字不變數 (Pluperfect Digital Invariant 或 PPDI) 或簡單稱為自戀數或水仙花數 (Narcissistic Number) 或岩士唐數 (Armstrong Number) 。(例： $371 \to 3^3+7^3+1^3=371$)。這種數到底有幾個？都是以後讓我可以繼續去研究及探討的方向。

五、如果把快樂數用於生活，從后豐斷橋(640 公尺，不快樂數)、甲仙斷橋(317 公尺，不快樂數)、墾丁斷橋(460 公尺，不快樂數)、雙園大橋斷橋(500 公尺，不快樂數)…等斷橋，是否這些斷橋的長度、橋墩…等的數字，都不符合快樂數才會導致斷橋？如果長度能夠符合快樂數，就不至於斷橋，這些事情都令我很好奇，有待我們去研究及探討。

六、或許無法找出最大的快樂數，但可嘗試找出最大的快樂質數(Happy Prime)，這也是我以後想研究探討的方向。

柒、結論

一、如果一個正整數 n 的數字平方和 m 為 1，則停止；如不是，就重複前面的算法，直到 1 出現為止，這樣的 n 數稱為快樂數 (Happy Number)。

二、MathWorld 對快樂數的定義：A number which is not happy is said to be unhappy.要把它改一下，就是要加上除了 0 之外(In addition to zero)這句話，定義才能成立。

三、快樂數之中不乏質數，這些數便是快樂質數(Happy Prime)，例如：7、13、19、23、31、79、97 等。

四、不快樂數會出現循環現象。

五、不同的進位運算，快樂數的性質依然存在。如二進位及四進位所有數都為快樂數。

六、經由此次研究探討後，除了原本的快樂數判別法之外，我還發現可以用

(一)因數判別法

(二)數字相乘判別法

(三)數字相加判別法

(四)查表法

來判斷。

七、可以找出黃金快樂數組合。

八、除了零之外的數，經過多次「轉化」後將所有的數區分為兩大區塊，不是收斂在 1，就是在 4 循環，與我們磁性分正負兩極、天地之間有陰陽之分(白天與黑夜)，有異曲同工之妙，這正是快樂數奧妙的地方，也是好數字及數學好玩的地方。

捌、參考資料及其他

一、https://www.geocities.ws/goodprimes/OHappy.html

二、https://zh.wikipedia.org/wiki/1

三、https://zh.wikipedia.org/ zh-tw/快樂數

四、https://www.shaunspiller.com/happynumbers

五、https://en.wikipedia.org/wiki/Happy_number

六、李源順(2015)。**國民小學數學(5 上)**。台南：南一書局。

七、http://www41.homepage.villanova.edu/robert.styer/HappyNumbers/

HappyNumbersShort3May2010.pdf

【評語】080406

從了解快樂數與不快樂數的意涵出發，進而探討快樂數的奧秘特性，是一個有趣的研究主題，部分研究結果的呈現可再精練，研究範圍亦可再擴大，將可使本研究更具深度與廣度。