

中華民國第 56 屆中小學科學展覽會 作品說明書

國小組 數學科

080403

九、十九、廿九

學校名稱：澎湖縣馬公市石泉國民小學

作者： 小五 陳夢月 小五 吳水央 小五 周其樂 小五 辛妍霓 小五 魏詠庭 小五 張紫涵	指導老師： 洪進益 王婉妮
---	-------------------------

關鍵詞：心算遊戲、排列組合、機率計算

摘要

本研究針對「九、十九、廿九」這一個撲克牌心算遊戲，做進一步的深入探討。首先先進行數字組成和花色組成分析，接著利用電腦程式去模擬出不同尾數間的成功牌組和數字組成情況，進而去分析數據之間的關係。研究結果如下：一、3~30 數字組成共 220 種，加入花色考慮，就有 9880 種；二、不同尾數成功牌組的數字組成皆是 1108 組，不同尾數之間的存在對應關係；三、不同尾數數字組成皆 22 種，出現次數和皆為 14404 次；四、將遊戲加入 JQK 後，利用方程式破解會剩下來的牌，且聯立討論出成功牌組；五、透過研究結果，將單人遊戲變化出多人的玩法。

壹、研究動機


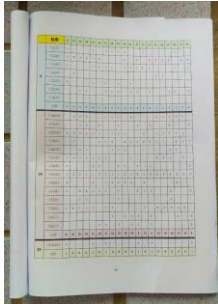
班上數學推理課時，老師教我們玩了一個很有趣的撲克牌心算遊戲「九、十九、廿九」，班上好幾位同學都提到，曾經在家中看到爺爺、奶奶玩過這個遊戲。

遊戲的方式就是三張牌只要湊出「9、19、29」的數字，就可以將牌組收起來，遊戲的最後都會剩下「3」這張撲克牌！多年前，學長姐也曾研究過這個題目，但僅解出不同尾數會剩下的牌及其成功牌組，其實我們發現這裡面還有很多值得探討的地方。所以，今年我們決定以此為題目，再接再厲，更深入的來探究這個專題！

貳、研究目的

- 一、分析不同數字 3~30 的數字組成及花色組成
- 二、破解不同尾數最後會剩下來的牌及其成功牌組出現機率
- 三、研究不同尾數之成功牌組與數字組成的關係
- 四、遊戲加入 JQK 後，去探討其中的變化
- 五、利用研究結果，變化遊戲的玩法

參、研究設備及器材

	
撲克牌（遊戲操作）	實驗記錄本（數據登記）

	
筆記型電腦（文書處理）	平板電腦（電腦程式）

肆、研究過程或方法

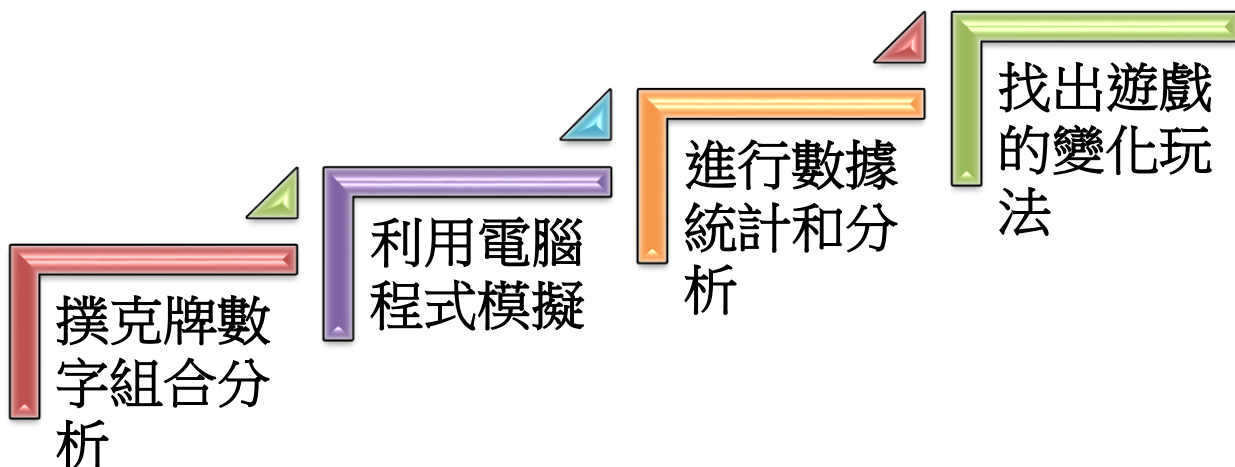
一、認識「九、十九、廿九」撲克牌遊戲

- （一）拿出一副撲克牌，將 J、Q、K 和鬼牌拿出來，只留下一到十的數字，共四十張牌。
- （二）洗牌後，將撲克牌由左至右排列，排成四排。
- （三）依續排到第四排後，又排回第一排，以此類推。
- （四）當同一排出現連續三張牌，加起來是 9、19、29 的時候，為成功牌組，就可以將三張牌收起來，放回原本的牌堆中。
- （五）連續三張牌，除了下面連續三張之外，可以是最上面的一張和下面的二張的組合，也可以是最上面二張和下面一張的組合，都視為連續三張。
- （六）持續這樣的過程循環，當同一排所有的牌都被收起來了，遊戲就剩下三排，一直玩到剩下一排，且所有成功的牌組都被收起。
- （七）最後的結果一定會剩下一張牌，且為數字「三」。
- （八）遊戲的另外一種情況為牌堆的牌都出完了，即遊戲失敗。

二、名詞釋義：

- （一）**數字組合**：三張牌可以湊出來的數字，以小括號表示。例如 19 可以由 1、8、10 三張牌組成，我們則用 (1,8,10) 表示。
- （二）**花色組合**：撲克牌包含四個花色：黑桃、紅心、方塊、梅花。花色組成則是在數字組成中，再加入四個花色進去討論。
- （三）**成功牌組**：一個尾數成功進行遊戲後，其□、1□、2□的組數，以中括號表示。本研究中利用 9、19、29 進行遊戲時，其中有一個成功牌組[5,6,2]，即代表遊戲最後，湊出 9 的組數有五組，湊出 19 的組數有六組，湊出 29 的組數有二組。

三、研究過程：



四、先備知識：以下為學長姐之前所研究出來的結果，這些數據將成為此次研究的先備知識。

表 4-4-1 九、十九、廿九數字組成分析

9	19	29	
(1,1,7)	(1,8,10)	(9,10,10)	
(1,2,6)	(1,9,9)		
(1,3,5)	(2,7,10)		
(1,4,4)	(2,8,9)		
(2,2,5)	(3,6,10)		
(2,3,4)	(3,7,9)		
(3,3,3)	(3,8,8)		
	(4,5,10)		
	(4,6,9)		
	(4,7,8)		
	(5,5,9)		
	(5,6,8)		
	(5,7,7)		
	(6,6,7)		
7 種	14 種	1 種	共 22 種

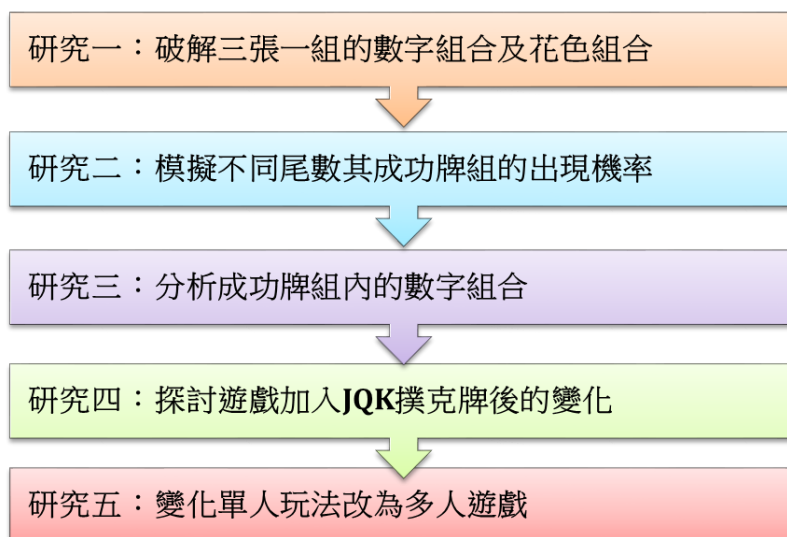
表 4-4-2 利用方程式破解不同尾數剩下的牌

尾數	整理後的方程式	設 $y+2z=n$	使用的組合			剩下的數字
0	$1 \leq 90-10n \leq 10$	$n=8$	10	20	30	10
9	$1 \leq 103-10n \leq 10$	$n=10$	9	19	29	3
8	$1 \leq 116-10n \leq 10$	$n=11$	8	18	28	6
7	$1 \leq 129-10n \leq 10$	$n=12$	7	17	27	9
6	$1 \leq 142-10n \leq 10$	$n=14$	6	16	26	2
5	$1 \leq 155-10n \leq 10$	$n=15$	5	15	25	5
4	$1 \leq 168-10n \leq 10$	$n=16$	4	14	24	8
3	$1 \leq 181-10n \leq 10$	$n=18$	3	13	23	1
2	$1 \leq 194-10n \leq 10$	$n=19$	2	12	22	4
1	$1 \leq 207-10n \leq 10$	$n=20$	1	11	21	7

表 4-4-3 利用方程式分析和討論出成功牌組

尾數	剩下數字	[□、1□、2□]成功牌組組數					
0	10	[5,8,0]	[1,6,6]				
9	3	[3,10,0]	[4,8,1]	[5,6,2]			
8	6	[2,11,0]	[3,9,1]	[4,7,2]	[5,5,3]		
7	9	[1,12,0]	[2,10,1]	[3,8,2]	[4,6,3]		
6	2	[0,12,1]	[1,10,2]	[2,8,3]	[3,6,4]		
5	5	[0,11,2]	[1,9,3]	[2,7,4]	[3,5,5]		
4	8	[0,10,3]	[1,8,4]	[2,6,5]			
3	1	[0,8,5]	[1,6,6]				
2	4	[0,7,6]					
1	7	[0,6,7]					

五、研究方法：



六、電腦程式模擬：

Pick Any Three Cards		Combinations with a Card Left	
Select Combination Type: (9, 19, 29) with a 3 Left			
# (9, 19, 29)	Count	Combinations	
0		9: (1, 1, 7)(1, 1, 7)(2, 2, 5) 19: (2, 7, 10)(2, 7, 10)(3, 6, 10)(3, 8, 8)(3, 8, 8)(4, 5, 10)(4, 6, 9)(4, 6, 9)(4, 6, 9)(5, 5, 9) 29:	
1		9: (1, 1, 7)(1, 1, 7)(2, 2, 5) 19: (2, 7, 10)(2, 8, 9)(3, 6, 10)(3, 6, 10)(3, 8, 8)(4, 5, 10)(4, 6, 9)(4, 6, 9)(4, 7, 8)(5, 5, 9) 29:	
2		9: (1, 1, 7)(1, 1, 7)(2, 2, 5) 19: (2, 7, 10)(2, 8, 9)(3, 6, 10)(3, 7, 9)(3, 8, 8)(4, 5, 10)(4, 5, 10)(4, 6, 9)(4, 6, 9)(5, 6, 8) 29:	
3		9: (1, 1, 7)(1, 1, 7)(2, 2, 5) 19: (2, 8, 9)(2, 8, 9)(3, 6, 10)(3, 6, 10)(3, 6, 10)(4, 5, 10)(4, 6, 9)(4, 7, 8)(4, 7, 8)(5, 5, 9) 29:	
4		9: (1, 1, 7)(1, 1, 7)(2, 2, 5) 19: (2, 8, 9)(2, 8, 9)(3, 6, 10)(3, 7, 9)(4, 5, 10)(4, 5, 10)(4, 6, 9)(4, 7, 8)(5, 6, 8) 29:	
5		9: (1, 1, 7)(1, 1, 7)(2, 2, 5) 19: (2, 8, 9)(2, 8, 9)(3, 6, 10)(3, 6, 10)(3, 8, 8)(4, 5, 10)(4, 5, 10)(4, 6, 9)(4, 6, 9)(5, 7, 7) 29:	

伍、研究結果

一、研究一：進行三張一組所形成的數字分析

說明：遊戲的方式是三張為一組，在我們探討不同尾數的情況後，我們決定先進行三張一組會形成的數字的分析，並加入花色做為討論，如表 5-1-1 所示。

表 5-1-1 數字的數字組合分析 (3~30)

目標值 target value	#	(i, j, k)	組合計算	總計 count	數字組合	花色組合
3	1	(1,1,1)	C_3^4	4	1	4
4	1	(1,1,2)	$C_2^4 - C_1^4$	24	1	24
5	1	(1,1,3)	$C_2^4 - C_1^4$	24	2	48
	2	(1,2,2)	$C_1^4 - C_2^4$	24		
6	1	(1,1,4)	$C_2^4 - C_1^4$	24	3	92
	2	(1,2,3)	$C_1^4 - C_1^4 - C_1^4$	64		
	3	(2,2,2)	C_3^4	4		
7	1	(1,1,5)	$C_1^4 - C_2^4$	24	4	136
	2	(1,2,4)	$C_1^4 - C_1^4 - C_1^4$	64		
	3	(1,3,3)	$C_1^4 - C_2^4$	24		
	4	(2,2,3)	$C_2^4 - C_1^4$	24		
8	1	(1,1,6)	$C_2^4 - C_1^4$	24	5	200
	2	(1,2,5)	$C_1^4 - C_1^4 - C_1^4$	64		
	3	(1,3,4)	$C_1^4 - C_1^4 - C_1^4$	64		
	4	(2,2,4)	$C_2^4 - C_1^4$	24		
	5	(2,3,3)	$C_1^4 - C_2^4$	24		
9	1	(1,1,7)	$C_2^4 - C_1^4$	24	7	268
	2	(1,2,6)	$C_1^4 - C_1^4 - C_1^4$	64		
	3	(1,3,5)	$C_1^4 - C_1^4 - C_1^4$	64		
	4	(1,4,4)	$C_1^4 - C_2^4$	24		
	5	(2,2,5)	$C_2^4 - C_1^4$	24		
	6	(2,3,4)	$C_1^4 - C_1^4 - C_1^4$	64		
	7	(3,3,3)	C_3^4	4		
10	1	(1,1,8)	$C_2^4 - C_1^4$	24	8	352
	2	(1,2,7)	$C_1^4 - C_1^4 - C_1^4$	64		
	3	(1,3,6)	$C_1^4 - C_1^4 - C_1^4$	64		
	4	(1,4,5)	$C_1^4 - C_1^4 - C_1^4$	64		
	5	(2,2,6)	$C_2^4 - C_1^4$	24		
	6	(2,3,5)	$C_1^4 - C_1^4 - C_1^4$	64		
	7	(2,4,4)	$C_1^4 - C_2^4$	24		
	8	(3,3,4)	$C_2^4 - C_1^4$	24		

11	1	(1,1,9)	$C_2^4 - C_1^4$	24	10	440
	2	(1,2,8)	$C_1^4 - C_1^4 - C_1^4$	64		
	3	(1,3,7)	$C_1^4 - C_1^4 - C_1^4$	64		
	4	(1,4,6)	$C_1^4 - C_1^4 - C_1^4$	64		
	5	(1,5,5)	$C_1^4 - C_2^4$	24		
	6	(2,2,7)	$C_2^4 - C_1^4$	24		
	7	(2,3,6)	$C_1^4 - C_1^4 - C_1^4$	64		
	8	(2,4,5)	$C_1^4 - C_1^4 - C_1^4$	64		
	9	(3,3,5)	$C_2^4 - C_1^4$	24		
	10	(3,4,4)	$C_1^4 - C_2^4$	24		
12	1	(1,1,10)	$C_2^4 - C_1^4$	24	12	548
	2	(1,2,9)	$C_1^4 - C_1^4 - C_1^4$	64		
	3	(1,3,8)	$C_1^4 - C_1^4 - C_1^4$	64		
	4	(1,4,7)	$C_1^4 - C_1^4 - C_1^4$	64		
	5	(1,5,6)	$C_1^4 - C_1^4 - C_1^4$	64		
	6	(2,2,8)	$C_2^4 - C_1^4$	24		
	7	(2,3,7)	$C_1^4 - C_1^4 - C_1^4$	64		
	8	(2,4,6)	$C_1^4 - C_1^4 - C_1^4$	64		
	9	(2,5,5)	$C_1^4 - C_2^4$	24		
	10	(3,3,6)	$C_2^4 - C_1^4$	24		
	11	(3,4,5)	$C_1^4 - C_1^4 - C_1^4$	64		
	12	(4,4,4)	C_3^4	4		
13	1	(1,2,10)	$C_1^4 - C_1^4 - C_1^4$	64	13	632
	2	(1,3,9)	$C_1^4 - C_1^4 - C_1^4$	64		
	3	(1,4,8)	$C_1^4 - C_1^4 - C_1^4$	64		
	4	(1,5,7)	$C_1^4 - C_1^4 - C_1^4$	64		
	5	(1,6,6)	$C_1^4 - C_2^4$	24		
	6	(2,2,9)	$C_2^4 - C_1^4$	24		
	7	(2,3,8)	$C_1^4 - C_1^4 - C_1^4$	64		
	8	(2,4,7)	$C_1^4 - C_1^4 - C_1^4$	64		
	9	(2,5,6)	$C_1^4 - C_1^4 - C_1^4$	64		
	10	(3,3,7)	$C_2^4 - C_1^4$	24		
	11	(3,4,6)	$C_1^4 - C_1^4 - C_1^4$	64		
	12	(3,5,5)	$C_2^4 - C_1^4$	24		
	13	(4,4,5)	$C_2^4 - C_1^4$	24		
14	1	(1,3,10)	$C_1^4 - C_1^4 - C_1^4$	64	14	696
	2	(1,4,9)	$C_1^4 - C_1^4 - C_1^4$	64		
	3	(1,5,8)	$C_1^4 - C_1^4 - C_1^4$	64		
	4	(1,6,7)	$C_1^4 - C_1^4 - C_1^4$	64		
	5	(2,2,10)	$C_2^4 - C_1^4$	24		
	6	(2,3,9)	$C_1^4 - C_1^4 - C_1^4$	64		

	7	(2,4,8)	$C_1^4 - C_1^4 - C_1^4$	64		
	8	(2,5,7)	$C_1^4 - C_1^4 - C_1^4$	64		
	9	(2,6,6)	$C_1^4 - C_2^4$	24		
	10	(3,3,8)	$C_2^4 - C_1^4$	24		
	11	(3,4,7)	$C_1^4 - C_1^4 - C_1^4$	64		
	12	(3,5,6)	$C_1^4 - C_1^4 - C_1^4$	64		
	13	(4,4,6)	$C_2^4 - C_1^4$	24		
	14	(4,5,5)	$C_1^4 - C_2^4$	24		
15	1	(1,4,10)	$C_1^4 - C_1^4 - C_1^4$	64	15	740
	2	(1,5,9)	$C_1^4 - C_1^4 - C_1^4$	64		
	3	(1,6,8)	$C_1^4 - C_1^4 - C_1^4$	64		
	4	(1,7,7)	$C_1^4 - C_2^4$	24		
	5	(2,3,10)	$C_1^4 - C_1^4 - C_1^4$	64		
	6	(2,4,9)	$C_1^4 - C_1^4 - C_1^4$	64		
	7	(2,5,8)	$C_1^4 - C_1^4 - C_1^4$	64		
	8	(2,6,7)	$C_1^4 - C_1^4 - C_1^4$	64		
	9	(3,3,9)	$C_2^4 - C_1^4$	24		
	10	(3,4,8)	$C_1^4 - C_1^4 - C_1^4$	64		
	11	(3,5,7)	$C_1^4 - C_1^4 - C_1^4$	64		
	12	(3,6,6)	$C_1^4 - C_2^4$	24		
	13	(4,4,7)	$C_2^4 - C_1^4$	24		
	14	(4,5,6)	$C_1^4 - C_1^4 - C_1^4$	64		
	15	(5,5,5)	C_3^4	4		
16	1	(1,5,10)	$C_1^4 - C_1^4 - C_1^4$	64	15	760
	2	(1,6,9)	$C_1^4 - C_1^4 - C_1^4$	64		
	3	(1,7,8)	$C_1^4 - C_1^4 - C_1^4$	64		
	4	(2,4,10)	$C_1^4 - C_1^4 - C_1^4$	64		
	5	(2,5,9)	$C_1^4 - C_1^4 - C_1^4$	64		
	6	(2,6,8)	$C_1^4 - C_1^4 - C_1^4$	64		
	7	(2,7,7)	$C_1^4 - C_2^4$	24		
	8	(3,3,10)	$C_2^4 - C_1^4$	24		
	9	(3,4,9)	$C_1^4 - C_1^4 - C_1^4$	64		
	10	(3,5,8)	$C_1^4 - C_1^4 - C_1^4$	64		
	11	(3,6,7)	$C_1^4 - C_1^4 - C_1^4$	64		
	12	(4,4,8)	$C_2^4 - C_1^4$	24		
	13	(4,5,7)	$C_1^4 - C_1^4 - C_1^4$	64		
	14	(4,6,6)	$C_1^4 - C_2^4$	24		
	15	(5,5,6)	$C_2^4 - C_1^4$	24		
17	1	(1,6,10)	$C_1^4 - C_1^4 - C_1^4$	64	15	760
	2	(1,7,9)	$C_1^4 - C_1^4 - C_1^4$	64		
	3	(1,8,8)	$C_1^4 - C_2^4$	24		

	4	(2,5,10)	$C_1^4 - C_1^4 - C_1^4$	64					
	5	(2,6,9)	$C_1^4 - C_1^4 - C_1^4$	64					
	6	(2,7,8)	$C_1^4 - C_1^4 - C_1^4$	64					
	7	(3,4,10)	$C_1^4 - C_1^4 - C_1^4$	64					
	8	(3,5,9)	$C_1^4 - C_1^4 - C_1^4$	64					
	9	(3,6,8)	$C_1^4 - C_1^4 - C_1^4$	64					
	10	(3,7,7)	$C_1^4 - C_2^4$	24					
	11	(4,4,9)	$C_2^4 - C_1^4$	24					
	12	(4,5,8)	$C_1^4 - C_1^4 - C_1^4$	64					
	13	(4,6,7)	$C_1^4 - C_1^4 - C_1^4$	64					
	14	(5,5,7)	$C_2^4 - C_1^4$	24					
	15	(5,6,6)	$C_1^4 - C_2^4$	24					
	18	1	(1,7,10)	$C_1^4 - C_1^4 - C_1^4$			64	15	740
		2	(1,8,9)	$C_1^4 - C_1^4 - C_1^4$			64		
		3	(2,6,10)	$C_1^4 - C_1^4 - C_1^4$			64		
4		(2,7,9)	$C_1^4 - C_1^4 - C_1^4$	64					
5		(2,8,8)	$C_1^4 - C_2^4$	24					
6		(3,5,10)	$C_1^4 - C_1^4 - C_1^4$	64					
7		(3,6,9)	$C_1^4 - C_1^4 - C_1^4$	64					
8		(3,7,8)	$C_1^4 - C_1^4 - C_1^4$	64					
9		(4,4,10)	$C_2^4 - C_1^4$	24					
10		(4,5,9)	$C_1^4 - C_1^4 - C_1^4$	64					
11		(4,6,8)	$C_1^4 - C_1^4 - C_1^4$	64					
12		(4,7,7)	$C_1^4 - C_2^4$	24					
13		(5,5,8)	$C_2^4 - C_1^4$	24					
14		(5,6,7)	$C_1^4 - C_1^4 - C_1^4$	64					
15		(6,6,6)	C_3^4	4					
19	1	(1,8,10)	$C_1^4 - C_1^4 - C_1^4$	64	14	696			
	2	(1,9,9)	$C_1^4 - C_2^4$	24					
	3	(2,7,10)	$C_1^4 - C_1^4 - C_1^4$	64					
	4	(2,8,9)	$C_1^4 - C_1^4 - C_1^4$	64					
	5	(3,6,10)	$C_1^4 - C_1^4 - C_1^4$	64					
	6	(3,7,9)	$C_1^4 - C_1^4 - C_1^4$	64					
	7	(3,8,8)	$C_1^4 - C_2^4$	24					
	8	(4,5,10)	$C_1^4 - C_1^4 - C_1^4$	64					
	9	(4,6,9)	$C_1^4 - C_1^4 - C_1^4$	64					
	10	(4,7,8)	$C_1^4 - C_1^4 - C_1^4$	64					
	11	(5,5,9)	$C_2^4 - C_1^4$	24					
	12	(5,6,8)	$C_1^4 - C_1^4 - C_1^4$	64					
	13	(5,7,7)	$C_1^4 - C_2^4$	24					
	14	(6,6,7)	$C_2^4 - C_1^4$	24					

20	1	(1,9,10)	$C_1^4 - C_1^4 - C_1^4$	64	13	632
	2	(2,8,10)	$C_1^4 - C_1^4 - C_1^4$	64		
	3	(2,9,9)	$C_1^4 - C_2^4$	24		
	4	(3,7,10)	$C_1^4 - C_1^4 - C_1^4$	64		
	5	(3,8,9)	$C_1^4 - C_1^4 - C_1^4$	64		
	6	(4,6,10)	$C_1^4 - C_1^4 - C_1^4$	64		
	7	(4,7,9)	$C_1^4 - C_1^4 - C_1^4$	64		
	8	(4,8,8)	$C_1^4 - C_2^4$	24		
	9	(5,5,10)	$C_2^4 - C_1^4$	24		
	10	(5,6,9)	$C_1^4 - C_1^4 - C_1^4$	64		
	11	(5,7,8)	$C_1^4 - C_1^4 - C_1^4$	64		
	12	(6,6,8)	$C_2^4 - C_1^4$	24		
	13	(6,7,7)	$C_1^4 - C_2^4$	24		
21	1	(1,10,10)	$C_1^4 - C_2^4$	24	12	548
	2	(2,9,10)	$C_1^4 - C_1^4 - C_1^4$	64		
	3	(3,8,10)	$C_1^4 - C_1^4 - C_1^4$	64		
	4	(3,9,9)	$C_1^4 - C_2^4$	24		
	5	(4,7,10)	$C_1^4 - C_1^4 - C_1^4$	64		
	6	(4,8,9)	$C_1^4 - C_1^4 - C_1^4$	64		
	7	(5,6,10)	$C_1^4 - C_1^4 - C_1^4$	64		
	8	(5,7,9)	$C_1^4 - C_1^4 - C_1^4$	64		
	9	(5,8,8)	$C_1^4 - C_2^4$	24		
	10	(6,6,9)	$C_2^4 - C_1^4$	24		
	11	(6,7,8)	$C_1^4 - C_1^4 - C_1^4$	64		
	12	(7,7,7)	C_3^4	4		
22	1	(2,10,10)	$C_1^4 - C_2^4$	24	10	440
	2	(3,9,10)	$C_1^4 - C_1^4 - C_1^4$	64		
	3	(4,8,10)	$C_1^4 - C_1^4 - C_1^4$	64		
	4	(4,9,9)	$C_1^4 - C_2^4$	24		
	5	(5,7,10)	$C_1^4 - C_1^4 - C_1^4$	64		
	6	(5,8,9)	$C_1^4 - C_1^4 - C_1^4$	64		
	7	(6,6,10)	$C_2^4 - C_1^4$	24		
	8	(6,7,9)	$C_1^4 - C_1^4 - C_1^4$	64		
	9	(6,8,8)	$C_1^4 - C_2^4$	24		
	10	(7,7,8)	$C_2^4 - C_1^4$	24		
23	1	(3,10,10)	$C_1^4 - C_2^4$	24	8	352
	2	(4,9,10)	$C_1^4 - C_1^4 - C_1^4$	64		
	3	(5,8,10)	$C_1^4 - C_1^4 - C_1^4$	64		
	4	(5,9,9)	$C_1^4 - C_2^4$	24		
	5	(6,7,10)	$C_1^4 - C_1^4 - C_1^4$	64		
	6	(6,8,9)	$C_1^4 - C_1^4 - C_1^4$	64		

	7	(7,7,9)	$C_2^4 \cdot C_1^4$	24		
	8	(7,8,8)	$C_1^4 \cdot C_2^4$	24		
24	1	(4,10,10)	$C_1^4 \cdot C_2^4$	24	7	268
	2	(5,9,10)	$C_1^4 \cdot C_1^4 \cdot C_1^4$	64		
	3	(6,8,10)	$C_1^4 \cdot C_1^4 \cdot C_1^4$	64		
	4	(6,9,9)	$C_1^4 \cdot C_2^4$	24		
	5	(7,7,10)	$C_2^4 \cdot C_1^4$	24		
	6	(7,8,9)	$C_1^4 \cdot C_1^4 \cdot C_1^4$	64		
	7	(8,8,8)	C_3^4	4		
25	1	(5,10,10)	$C_1^4 \cdot C_2^4$	24	5	200
	2	(6,9,10)	$C_1^4 \cdot C_1^4 \cdot C_1^4$	64		
	3	(7,8,10)	$C_1^4 \cdot C_1^4 \cdot C_1^4$	64		
	4	(7,9,9)	$C_1^4 \cdot C_2^4$	24		
	5	(8,8,9)	$C_2^4 \cdot C_1^4$	24		
26	1	(6,10,10)	$C_1^4 \cdot C_2^4$	24	4	136
	2	(7,9,10)	$C_1^4 \cdot C_1^4 \cdot C_1^4$	64		
	3	(8,8,10)	$C_2^4 \cdot C_1^4$	24		
	4	(8,9,9)	$C_1^4 \cdot C_2^4$	24		
27	1	(7,10,10)	$C_1^4 \cdot C_2^4$	24	3	92
	2	(8,9,10)	$C_1^4 \cdot C_1^4 \cdot C_1^4$	64		
	3	(9,9,9)	C_3^4	4		
28	1	(8,10,10)	$C_1^4 \cdot C_2^4$	24	2	48
	2	(9,9,10)	$C_2^4 \cdot C_1^4$	24		
29	1	(9,10,10)	$C_1^4 \cdot C_2^4$	24	1	24
30	1	(10,10,10)	C_3^4	4	1	4
合計				9880	220	9880 種

◆ 觀察

1. 三張一組所形成的數字組合共 **220 種**，若再加上考慮花色，則共 **9880 種**。

在數字組合 (i, j, k)，我們觀察到主要有三種類型： $\{X, X, X\}$ 、 $\{X, X, Y\}$ 、 $\{X, Y, Z\}$ ，其數字組合我們是利用窮舉法列出，我們試著利用數學的「組合機率」去計算其結果，做為印證。如表 5-1-2 所示。

表 5-1-2 利用組合 combination 計算實際操作結果

類型	數學組合	加入花色的變化
$\{X, X, X\}$	$C_1^{10} = 10$	$C_1^{10} \cdot C_3^4 = 10 \cdot 4 = 40$
$\{X, X, Y\}$	$C_2^{10} \cdot 2 = 90$	$(C_2^{10} \cdot 2) \cdot (C_2^4 \cdot C_1^4) = 90 \cdot 24 = 2160$
$\{X, Y, Z\}$	$C_3^{10} = 120$	$C_3^{10} \cdot (C_1^4 \cdot C_1^4 \cdot C_1^4) = 120 \cdot 64 = 7680$
合計	220	9880

2. 接著,我們將表 5-1-1 結果整理為表 5-1-3,再利用這些數據繪製出折線圖,如圖 5-1-1、圖 5-1-2 所示。我們發現不管是數字組合的個數,或者是加入花色討論出來的個數,均是一個很工整的「**線對稱圖形**」。

表 5-1-3 數字組合和花色組合結果 (3~30)

點數	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
數字組合	1	1	2	3	4	5	7	8	10	12	13	14	15	15
花色組合	4	24	48	92	136	200	268	352	440	548	632	696	740	760
點數	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
數字組合	15	15	14	13	12	10	8	7	5	4	3	2	1	1
花色組合	760	740	696	632	548	440	352	268	200	136	92	48	24	4

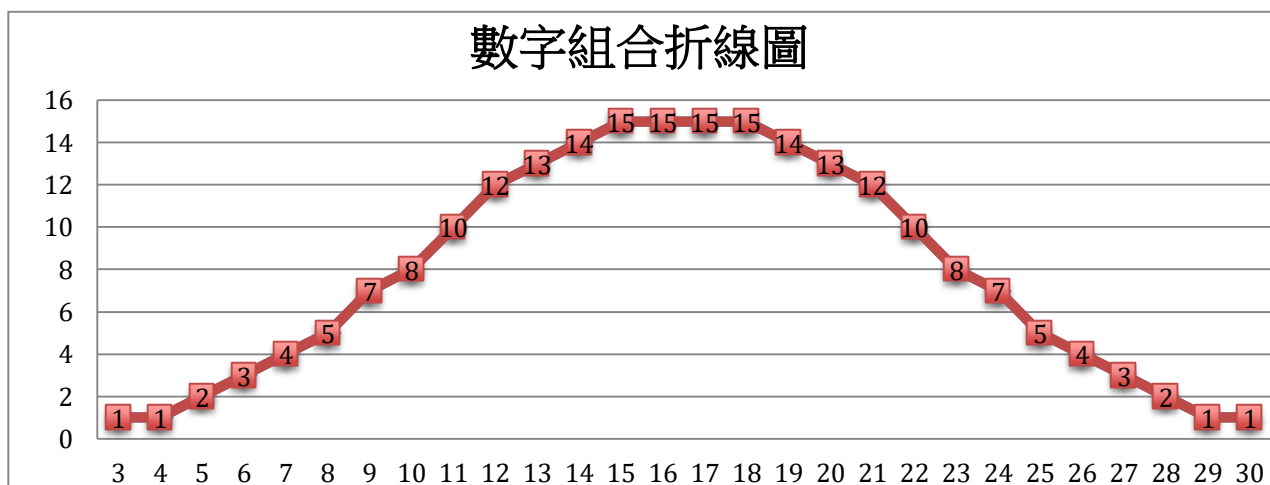


圖 5-1-1 數字組合個數折線圖

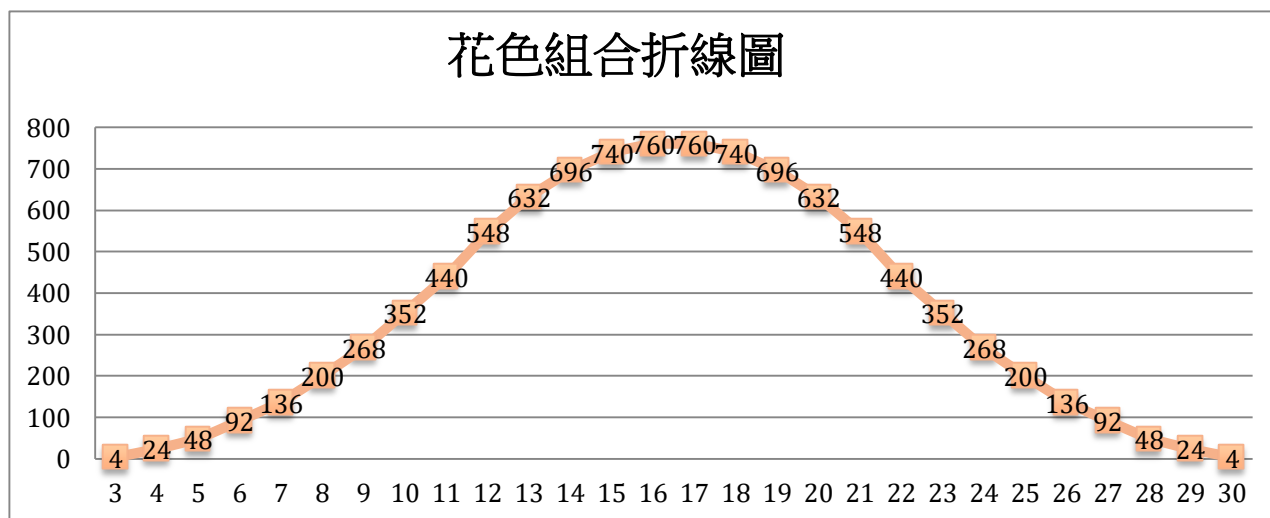


圖 5-1-2 花色組合個數折線圖

二、研究二：模擬不同尾數其成功牌組的出現機率

- ◆ **說明**：實際操作模擬「九、十九、廿九」這個遊戲，我們發現尾數九的三個成功牌組中，**[3,10,0]**、**[4,8,1]**和**[5,6,2]**出現的次數大不相同，其中**[5,6,2]**最難出現。再仔細看每一種成功牌組，就有很多不同的數字組合，加上總共十個尾數，要光靠人力做出來所有的情況，實在是不可能的一件事，因此我們將困境提出與老師討論，最後在老師的協助下，利用Python 寫出模擬結果的電腦程式，以下為整理下來的數據分析，如表 5-2-1 所示：

表 5-2-1 成功牌組出現機率分析

不同尾數	成功牌組	出現情況	出現機率	牌組組數	加總
0	[5,8,0]	994	89.7%	2	1108
	[6,6,1]	114	10.3%		
9	[3,10,0]	584	52.7%	3	1108
	[4,8,1]	452	40.8%		
	[5,6,2]	72	6.5%		
8	[2,11,0]	277	25.0%	4	1108
	[3,9,1]	567	51.2%		
	[4,7,2]	253	22.8%		
	[5,5,3]	11	1.0%		
7	[1,12,0]	188	17.0%	4	1108
	[2,10,1]	519	46.8%		
	[3,8,2]	353	31.9%		
	[4,6,3]	48	4.3%		
6	[0,12,1]	188	17.0%	4	1108
	[1,10,2]	519	46.8%		
	[2,8,3]	353	31.9%		
	[3,6,4]	48	4.3%		
5	[0,11,2]	277	25.0%	4	1108
	[1,9,3]	567	51.2%		
	[2,7,4]	253	22.8%		
	[3,5,5]	11	1.0%		
4	[0,10,3]	584	52.7%	3	1108
	[1,8,4]	452	40.8%		
	[2,6,5]	72	6.5%		
3	[0,8,5]	994	89.7%	2	1108
	[1,6,6]	114	10.3%		
2	[0,7,6]	1108	100.0%	1	1108
1	[0,6,7]	1108	100.0%	1	1108
合計		11080		28	11080

◆ **觀察：**

1. 將成功牌組所有的情況列舉出來後，我們將不同尾數之成功牌組的成功情況統計出來，我們發現到不管哪一個尾數，成功牌組最後加總的情況都是 **1108** 組。
2. 我們發現到成功牌組出現次數，不同尾數間有很奇妙的對應關係，我們將出現次數繪製成長條圖表，如圖 5-2-1。結果我們發現到**對應的尾數**其長條圖是一模一樣的。
3. 接著我們再分析成功牌組所出現的**機率**，繪製出圓形圖對照，如圖 5-2-2 所示。我們發現到對應的尾數，其圓形圖都是一模一樣的。(1) 尾數 0 配尾數 3。(2) 尾數 9 配尾數 4。(3) 尾數 8 配尾數 5。(4) 尾數 7 配尾數 6。(5) 尾數 2 配尾數 1。

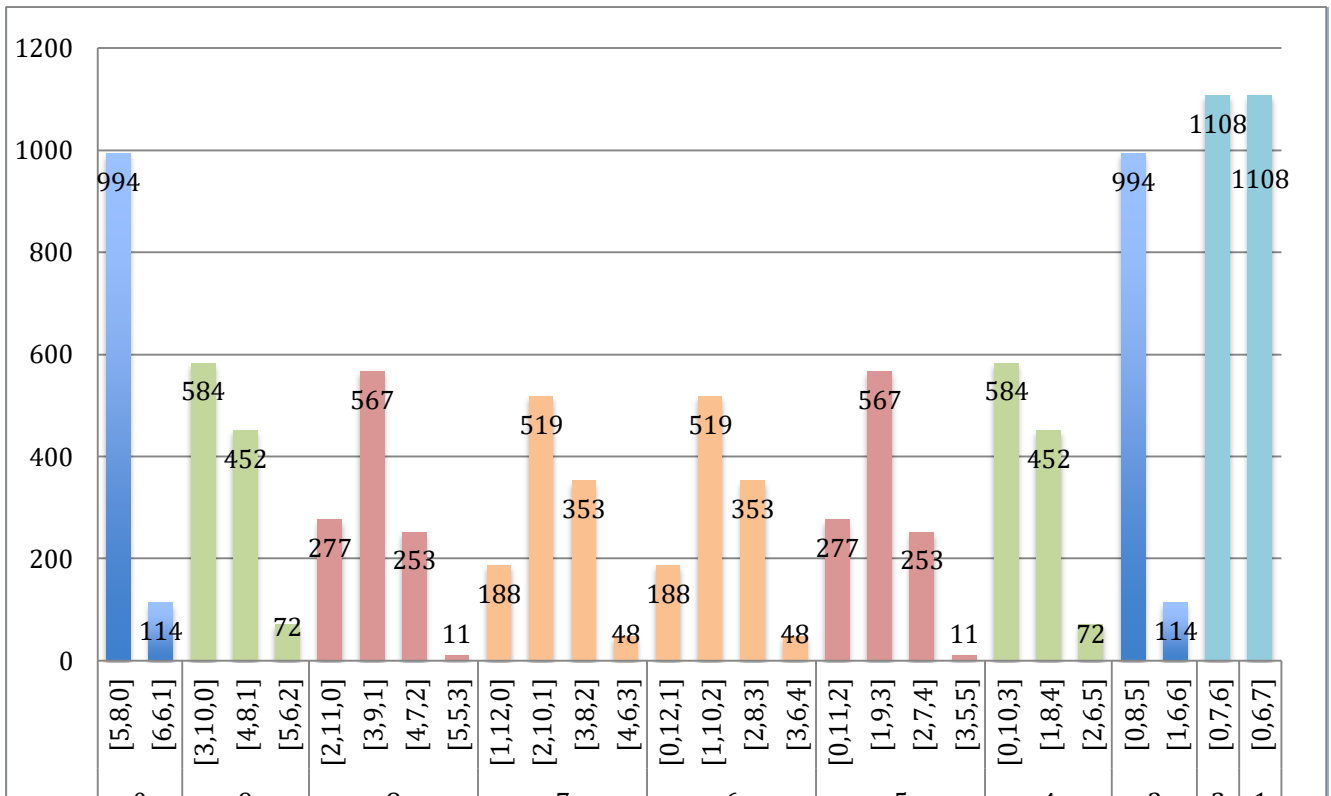
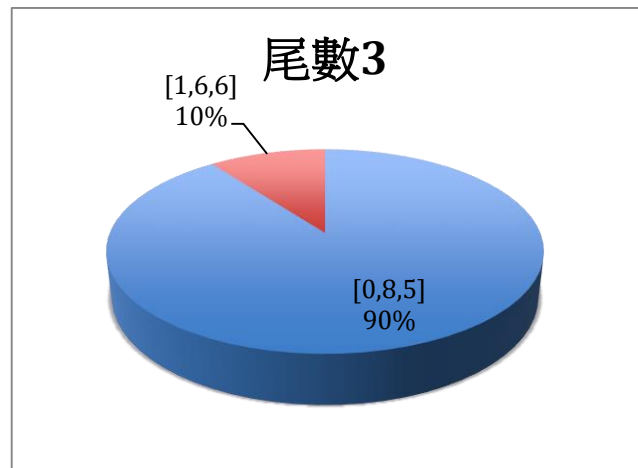
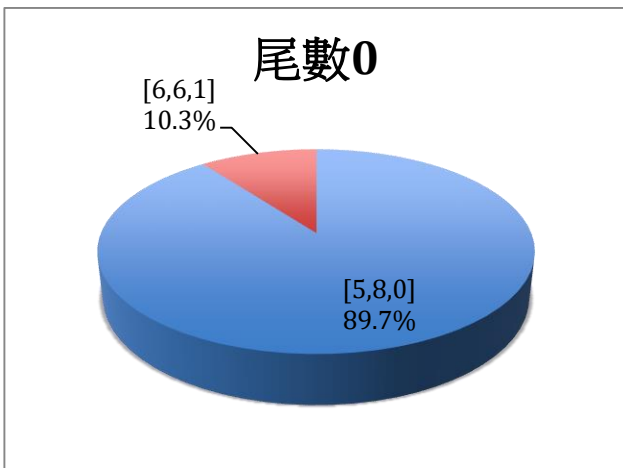


圖 5-2-1 成功牌組出現次數長條圖



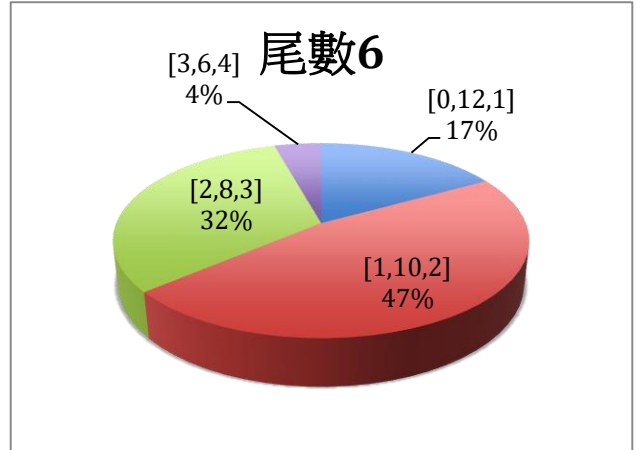
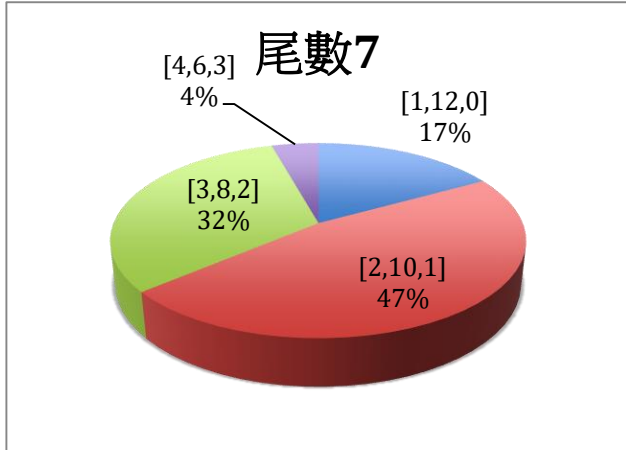
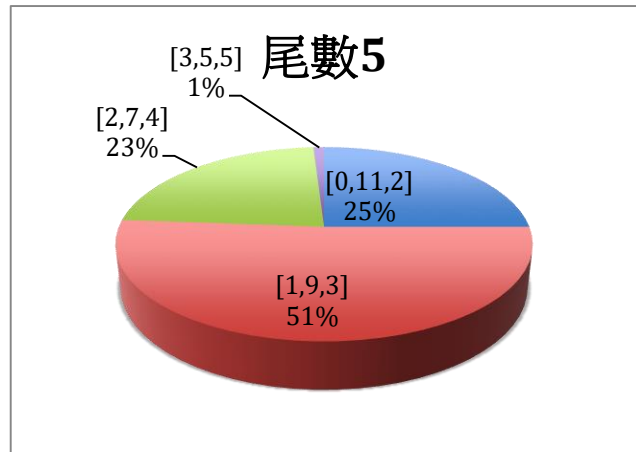
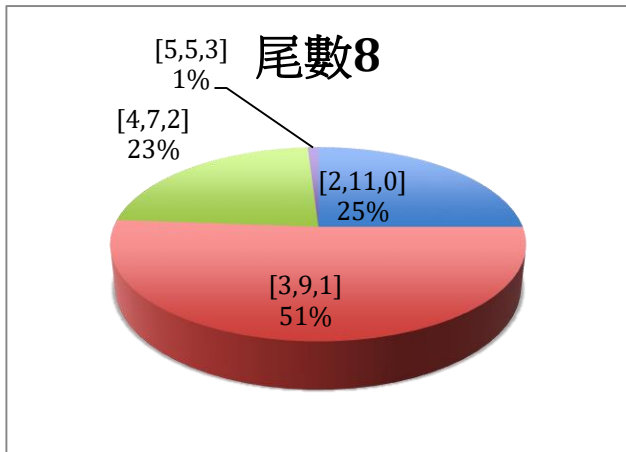
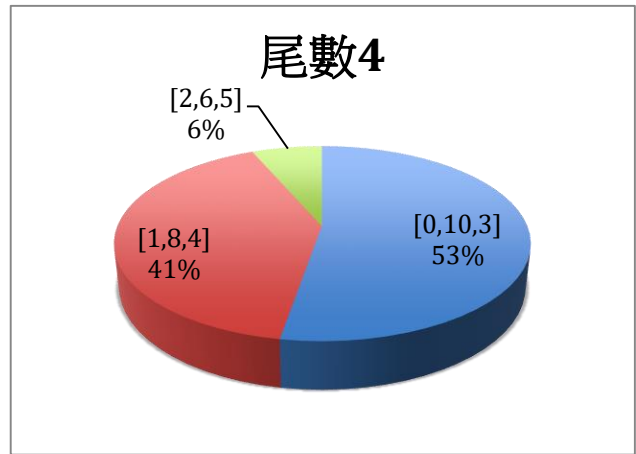
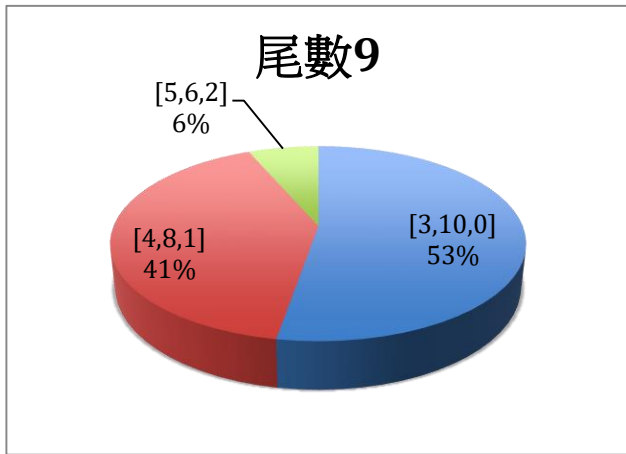


圖 5-2-2 成功牌組出現機率圓形圖

三、研究三：分析不同尾數其成功牌組內的數字組合

- ◆ **說明**：研究三我們針對成功牌做深入分析，透過電腦程式將成功牌組的數字組合都模擬出來後，我們再將每一個「**數字組合**」出現次數，利用 Excel 統計記錄下來，如表 5-3-1。

表 5-3-1 成功牌組其數字組合統計

尾數 0		尾數 9		尾數 8		尾數 7		尾數 6	
(1,1,8)	596	(1,1,7)	510	(1,1,6)	494	(1,1,5)	510	(1,1,4)	596
(1,2,7)	860	(1,2,6)	860	(1,2,5)	861	(1,2,4)	861	(1,2,3)	659
(1,3,6)	860	(1,3,5)	585	(1,3,4)	861	(1,3,3)	510	(2,2,2)	114
(1,4,5)	861	(1,4,4)	596	(2,2,4)	510	(2,2,3)	596	(1,5,10)	860
(2,2,6)	510	(2,2,5)	596	(2,3,3)	596	(1,6,10)	860	(1,6,9)	860
(2,3,5)	861	(2,3,4)	659	(1,7,10)	861	(1,7,9)	585	(1,7,8)	861
(2,4,4)	510	(3,3,3)	114	(1,8,9)	861	(1,8,8)	596	(2,4,10)	585
(3,3,4)	596	(1,8,10)	861	(2,6,10)	585	(2,5,10)	860	(2,5,9)	659
(1,9,10)	659	(1,9,9)	510	(2,7,9)	860	(2,6,9)	659	(2,6,8)	585
(2,8,10)	585	(2,7,10)	860	(2,8,8)	510	(2,7,8)	860	(2,7,7)	494
(2,9,9)	596	(2,8,9)	861	(3,5,10)	860	(3,4,10)	861	(3,3,10)	596
(3,7,10)	659	(3,6,10)	659	(3,6,9)	659	(3,5,9)	585	(3,4,9)	860
(3,8,9)	860	(3,7,9)	585	(3,7,8)	860	(3,6,8)	860	(3,5,8)	860
(4,6,10)	585	(3,8,8)	494	(4,4,10)	510	(3,7,7)	510	(3,6,7)	861
(4,7,9)	860	(4,5,10)	860	(4,5,9)	860	(4,4,9)	494	(4,4,8)	510
(4,8,8)	510	(4,6,9)	860	(4,6,8)	585	(4,5,8)	861	(4,5,7)	861
(5,5,10)	494	(4,7,8)	861	(4,7,7)	596	(4,6,7)	861	(4,6,6)	510
(5,6,9)	861	(5,5,9)	510	(5,5,8)	596	(5,5,7)	510	(5,5,6)	596
(5,7,8)	861	(5,6,8)	861	(5,6,7)	659	(5,6,6)	596	(6,10,10)	510
(6,6,8)	510	(5,7,7)	510	(6,6,6)	114	(7,10,10)	596	(7,9,10)	861
(6,7,7)	596	(6,6,7)	596	(8,10,10)	510	(8,9,10)	659	(8,8,10)	510
(10,10,10)	114	(9,10,10)	596	(9,9,10)	596	(9,9,9)	114	(8,9,9)	596

尾數 5		尾數 4		尾數 3		尾數 2		尾數 1	
(1,1,3)	510	(1,1,2)	596	(1,1,1)	114	(1,1,10)	596	(1,1,9)	510
(1,2,2)	596	(1,3,10)	861	(1,2,10)	659	(1,2,9)	861	(1,2,8)	861
(1,4,10)	861	(1,4,9)	860	(1,3,9)	585	(1,3,8)	860	(1,3,7)	585
(1,5,9)	585	(1,5,8)	659	(1,4,8)	659	(1,4,7)	659	(1,4,6)	860
(1,6,8)	860	(1,6,7)	860	(1,5,7)	585	(1,5,6)	860	(1,5,5)	510
(1,7,7)	510	(2,2,10)	510	(1,6,6)	494	(2,2,8)	510	(2,2,7)	494
(2,3,10)	861	(2,3,9)	861	(2,2,9)	596	(2,3,7)	860	(2,3,6)	861
(2,4,9)	860	(2,4,8)	585	(2,3,8)	860	(2,4,6)	585	(2,4,5)	861
(2,5,8)	659	(2,5,7)	860	(2,4,7)	860	(2,5,5)	596	(3,3,5)	510
(2,6,7)	860	(2,6,6)	510	(2,5,6)	861	(3,3,6)	596	(3,4,4)	596
(3,3,9)	510	(3,3,8)	494	(3,3,7)	510	(3,4,5)	659	(1,10,10)	596
(3,4,8)	860	(3,4,7)	861	(3,4,6)	861	(4,4,4)	114	(2,9,10)	861
(3,5,7)	585	(3,5,6)	861	(3,5,5)	510	(2,10,10)	510	(3,8,10)	860
(3,6,6)	596	(4,4,6)	510	(4,4,5)	596	(3,9,10)	861	(3,9,9)	510
(4,4,7)	596	(4,5,5)	596	(3,10,10)	596	(4,8,10)	585	(4,7,10)	659
(4,5,6)	659	(4,10,10)	510	(4,9,10)	860	(4,9,9)	494	(4,8,9)	860
(5,5,5)	114	(5,9,10)	860	(5,8,10)	860	(5,7,10)	860	(5,6,10)	860
(5,10,10)	494	(6,8,10)	585	(5,9,9)	510	(5,8,9)	861	(5,7,9)	585
(6,9,10)	861	(6,9,9)	596	(6,7,10)	861	(6,6,10)	510	(5,8,8)	596
(7,8,10)	861	(7,7,10)	596	(6,8,9)	861	(6,7,9)	861	(6,6,9)	596
(7,9,9)	510	(7,8,9)	659	(7,7,9)	510	(6,8,8)	510	(6,7,8)	659
(8,8,9)	596	(8,8,8)	114	(7,8,8)	596	(7,7,8)	596	(7,7,7)	114

- ◆ **重新整理數據**：表 5-3-1 中看似凌亂的數據，經過我們針對不同的尾數其數字組合的「出現次數」，按照升冪的方式重新排列，整理表 5-3-2 和表 5-3-3，我們可以從中發現很規律的情況，每個尾數出現的次數竟然都相同。

表 5-3-2 數字組合出現次數分析（尾數 0、9、8、7、6）

項次	尾數 0	尾數 9	尾數 8	尾數 7	尾數 6	出現次數
1	(10,10,10)	(3,3,3)	(6,6,6)	(9,9,9)	(2,2,2)	114
2	(5,5,10)	(3,8,8)	(1,1,6)	(4,4,9)	(2,7,7)	494
3	(2,2,6)	(1,1,7)	(2,2,4)	(1,1,5)	(4,4,8)	510
4	(2,4,4)	(1,9,9)	(2,8,8)	(1,3,3)	(4,6,6)	510
5	(4,8,8)	(5,5,9)	(4,4,10)	(3,7,7)	(6,10,10)	510
6	(6,6,8)	(5,7,7)	(8,10,10)	(5,5,7)	(8,8,10)	510
7	(2,8,10)	(1,3,5)	(2,6,10)	(1,7,9)	(2,4,10)	585
8	(4,6,10)	(3,7,9)	(4,6,8)	(3,5,9)	(2,6,8)	585
9	(1,1,8)	(1,4,4)	(2,3,3)	(2,2,3)	(1,1,4)	596
10	(3,3,4)	(2,2,5)	(4,7,7)	(1,8,8)	(3,3,10)	596
11	(2,9,9)	(6,6,7)	(5,5,8)	(5,6,6)	(5,5,6)	596
12	(6,7,7)	(9,10,10)	(9,9,10)	(7,10,10)	(8,9,9)	596
13	(1,9,10)	(2,3,4)	(3,6,9)	(2,6,9)	(1,2,3)	659
14	(3,7,10)	(3,6,10)	(5,6,7)	(8,9,10)	(2,5,9)	659
15	(1,2,7)	(1,2,6)	(2,7,9)	(1,6,10)	(1,5,10)	860
16	(1,3,6)	(2,7,10)	(3,5,10)	(2,5,10)	(1,6,9)	860
17	(3,8,9)	(4,5,10)	(3,7,8)	(2,7,8)	(3,4,9)	860
18	(4,7,9)	(4,6,9)	(4,5,9)	(3,6,8)	(3,5,8)	860
19	(1,4,5)	(1,8,10)	(1,2,5)	(1,2,4)	(1,7,8)	861
20	(2,3,5)	(2,8,9)	(1,3,4)	(3,4,10)	(3,6,7)	861
21	(5,6,9)	(4,7,8)	(1,7,10)	(4,5,8)	(4,5,7)	861
22	(5,7,8)	(5,6,8)	(1,8,9)	(4,6,7)	(7,9,10)	861
					合計次數	14404 次

表 5-3-3 數字組合出現次數分析（尾數 5、4、3、2、1）

項次	尾數 5	尾數 4	尾數 3	尾數 2	尾數 1	出現次數
1	(5,5,5)	(8,8,8)	(1,1,1)	(4,4,4)	(7,7,7)	114
2	(5,10,10)	(3,3,8)	(1,6,6)	(4,9,9)	(2,2,7)	494
3	(1,1,3)	(2,2,10)	(3,3,7)	(2,2,8)	(1,1,9)	510
4	(1,7,7)	(2,6,6)	(3,5,5)	(2,10,10)	(1,5,5)	510
5	(3,3,9)	(4,4,6)	(5,9,9)	(6,6,10)	(3,3,5)	510
6	(7,9,9)	(4,10,10)	(7,7,9)	(6,8,8)	(3,9,9)	510
7	(1,5,9)	(2,4,8)	(1,3,9)	(2,4,6)	(1,3,7)	585
8	(3,5,7)	(6,8,10)	(1,5,7)	(4,8,10)	(5,7,9)	585
9	(1,2,2)	(1,1,2)	(2,2,9)	(1,1,10)	(3,4,4)	596
10	(3,6,6)	(4,5,5)	(4,4,5)	(2,5,5)	(1,10,10)	596
11	(4,4,7)	(6,9,9)	(3,10,10)	(3,3,6)	(5,8,8)	596
12	(8,8,9)	(7,7,10)	(7,8,8)	(7,7,8)	(6,6,9)	596
13	(2,5,8)	(1,5,8)	(1,2,10)	(1,4,7)	(4,7,10)	659
14	(4,5,6)	(7,8,9)	(1,4,8)	(3,4,5)	(6,7,8)	659
15	(1,6,8)	(1,4,9)	(2,3,8)	(1,3,8)	(1,4,6)	860
16	(2,4,9)	(1,6,7)	(2,4,7)	(1,5,6)	(3,8,10)	860
17	(2,6,7)	(2,5,7)	(4,9,10)	(2,3,7)	(4,8,9)	860
18	(3,4,8)	(5,9,10)	(5,8,10)	(5,7,10)	(5,6,10)	860
19	(1,4,10)	(1,3,10)	(2,5,6)	(1,2,9)	(1,2,8)	861
20	(2,3,10)	(2,3,9)	(3,4,6)	(3,9,10)	(2,3,6)	861
21	(6,9,10)	(3,4,7)	(6,7,10)	(5,8,9)	(2,4,5)	861
22	(7,8,10)	(3,5,6)	(6,8,9)	(6,7,9)	(2,9,10)	861
					合計次數	14404 次

◆ **觀察：**

1. 每個尾數成功牌組內的數字組合出現的組數都是 **22 種**，出現總數也都是 **14404 次**。另外出現的次數，我們發現不管每一種尾數都是相同結果。分別是 114 次一種、494 次一種、510 次四種、585 次兩種、596 次四種、659 次兩種、860 次四種、861 次四種。我們整理成表 5-3-4，如下表所示：

表 5-3-4 數字組合出現次數統計

	成功牌組的數字組合出現次數								合計
出現次數	114 次	494 次	510 次	585 次	596 次	659 次	860 次	861 次	14404 次
組	1 種	1 種	4 種	2 種	4 種	2 種	4 種	4 種	22 種

2. 我們將不同尾數之**數字組合出現的組數**，按照□、1□和 2□做出統計，記錄每一尾數出現的組數，如表 5-3-5。我們也發現有趣的巧合，尾數 0 和尾數 3 一組、尾數 9 和尾數 4 一組、尾數 8 和尾數 5 一組、尾數 7 尾數 6 一組、尾數 1 和尾數 2 一組，這個與我們在研究二所發現到的**尾數對應**相同。

表 5-3-5 數字組合出現的組數

尾數	尾數 0	尾數 9	尾數 8	尾數 7	尾數 6	尾數 5	尾數 4	尾數 3	尾數 2	尾數 1
□	8	7	5	4	3	2	1	1	0	0
1□	13	14	15	15	15	15	14	13	12	10
2□	1	1	2	3	4	5	7	8	10	12
合計	22	22	22	22	22	22	22	22	22	22

3. 接著在統計不同尾數之**數字組合出現的次數總和**，一樣依照□、1□和 2□做出統計，如表 5-3-6。在這裡，我們一樣發現到尾數 0 和尾數 3 一組、尾數 9 和尾數 4 一組、尾數 8 和尾數 5 一組、尾數 7 尾數 6 一組、尾數 1 和尾數 2 一組的巧合。

表 5-3-6 數字組合出現的次數總和

尾數	尾數 0	尾數 9	尾數 8	尾數 7	尾數 6	尾數 5	尾數 4	尾數 3	尾數 2	尾數 1
□	5654	3920	3322	2477	1369	1106	596	114	0	0
1□	8636	9888	9976	10558	10558	9976	9888	8636	7756	6648
2□	114	596	1106	1369	2477	3322	3920	5654	6648	7756
合計	14404	14404	14404	14404	14404	14404	14404	14404	14404	14404

4. 我們試著從「**數字組成**」和「**出現次數**」找出數字間的關係，經過我們不斷的思考、分析和討論。我們發現不同尾數「出現的數字」和「次數」有一個巧妙的關係存在。我們設計了一個有趣的規則，首先利用觀察的結果，先將每個尾數的數字進行分組，共分為 A、B、C、D 四組，整理成表 5-3-7。

表 5-3-7 不同尾數數字分類表

組別	尾數 0	尾數 9	尾數 8	尾數 7	尾數 6	尾數 5	尾數 4	尾數 3	尾數 2	尾數 1
A	10	3	6	9	2	5	8	1	4	7
B	5	8	1	4	7	10	3	6	9	2
C	2、4	1、5	2、4	1、3	4、6	1、3	2、4	3、5	2、6	1、3
	6、8	7、9	8、10	5、7	8、10	7、9	6、10	7、9	8、10	5、9
D	1、3	2、4	3、5	2、6	1、3	2、4	1、5	2、4	1、3	4、6
	7、9	6、10	7、9	8、10	5、9	6、8	7、9	8、10	5、7	8、10

5. 按照我們的分組，再與出現的次數連結，我們發現每一個尾數都存在這樣的關係，如表 5-3-8 和表 5-3-9 所示。(C,C 框起來的部份，代表是從 C 組挑選一樣的數字)

表 5-3-8 不同尾數與分組的連結 (尾數 0、9、8、7、6)

出現次數	與分組連結	尾數 0	尾數 9	尾數 8	尾數 7	尾數 6
114	(A, A, A)	(10,10,10)	(3,3,3)	(6,6,6)	(9,9,9)	(2,2,2)
494	(A, B, B)	(5,5,10)	(3,8,8)	(1,1,6)	(4,4,9)	(2,7,7)
510	(<u>C, C</u> , C)	(2,2,6)	(1,1,7)	(2,2,4)	(1,1,5)	(4,4,8)
510	(<u>C, C</u> , C)	(2,4,4)	(1,9,9)	(2,8,8)	(1,3,3)	(4,6,6)
510	(<u>C, C</u> , C)	(4,8,8)	(5,5,9)	(4,4,10)	(3,7,7)	(6,10,10)
510	(<u>C, C</u> , C)	(6,6,8)	(5,7,7)	(8,10,10)	(5,5,7)	(8,8,10)
585	(A, C, C)	(2,8,10)	(1,3,5)	(2,6,10)	(1,7,9)	(2,4,10)
585	(A, C, C)	(4,6,10)	(3,7,9)	(4,6,8)	(3,5,9)	(2,6,8)
596	(C, <u>D, D</u>)	(1,1,8)	(1,4,4)	(2,3,3)	(2,2,3)	(1,1,4)
596	(C, <u>D, D</u>)	(3,3,4)	(2,2,5)	(4,7,7)	(1,8,8)	(3,3,10)
596	(C, <u>D, D</u>)	(2,9,9)	(6,6,7)	(5,5,8)	(5,6,6)	(5,5,6)
596	(C, <u>D, D</u>)	(6,7,7)	(9,10,10)	(9,9,10)	(7,10,10)	(8,9,9)
659	(A, D, D)	(1,9,10)	(2,3,4)	(3,6,9)	(2,6,9)	(1,2,3)
659	(A, D, D)	(3,7,10)	(3,6,10)	(5,6,7)	(8,9,10)	(2,5,9)
860	(C, D, D)	(1,2,7)	(1,2,6)	(2,7,9)	(1,6,10)	(1,5,10)
860	(C, D, D)	(1,3,6)	(2,7,10)	(3,5,10)	(2,5,10)	(1,6,9)
860	(C, D, D)	(3,8,9)	(4,5,10)	(3,7,8)	(2,7,8)	(3,4,9)
860	(C, D, D)	(4,7,9)	(4,6,9)	(4,5,9)	(3,6,8)	(3,5,8)
861	(B, C, D)	(1,4,5)	(1,8,10)	(1,2,5)	(1,2,4)	(1,7,8)
861	(B, C, D)	(2,3,5)	(2,8,9)	(1,3,4)	(3,4,10)	(3,6,7)
861	(B, C, D)	(5,6,9)	(4,7,8)	(1,7,10)	(4,5,8)	(4,5,7)
861	(B, C, D)	(5,7,8)	(5,6,8)	(1,8,9)	(4,6,7)	(7,9,10)

表 5-3-9 不同尾數與分組的連結（尾數 5、4、3、2、1）

出現次數	與分組連結	尾數 5	尾數 4	尾數 3	尾數 2	尾數 1
114	(A, A, A)	(5,5,5)	(8,8,8)	(1,1,1)	(4,4,4)	(7,7,7)
494	(A, B, B)	(5,10,10)	(3,3,8)	(1,6,6)	(4,9,9)	(2,2,7)
510	(<u>C, C</u> , C)	(1,1,3)	(2,2,10)	(3,3,7)	(2,2,8)	(1,1,9)
510	(<u>C, C</u> , C)	(1,7,7)	(2,6,6)	(3,5,5)	(2,10,10)	(1,5,5)
510	(<u>C, C</u> , C)	(3,3,9)	(4,4,6)	(5,9,9)	(6,6,10)	(3,3,5)
510	(<u>C, C</u> , C)	(7,9,9)	(4,10,10)	(7,7,9)	(6,8,8)	(3,9,9)
585	(A, C, C)	(1,5,9)	(2,4,8)	(1,3,9)	(2,4,6)	(1,3,7)
585	(A, C, C)	(3,5,7)	(6,8,10)	(1,5,7)	(4,8,10)	(5,7,9)
596	(C, <u>D, D</u>)	(1,2,2)	(1,1,2)	(2,2,9)	(1,1,10)	(3,4,4)
596	(C, <u>D, D</u>)	(3,6,6)	(4,5,5)	(4,4,5)	(2,5,5)	(1,10,10)
596	(C, <u>D, D</u>)	(4,4,7)	(6,9,9)	(3,10,10)	(3,3,6)	(5,8,8)
596	(C, <u>D, D</u>)	(8,8,9)	(7,7,10)	(7,8,8)	(7,7,8)	(6,6,9)
659	(A, D, D)	(2,5,8)	(1,5,8)	(1,2,10)	(1,4,7)	(4,7,10)
659	(A, D, D)	(4,5,6)	(7,8,9)	(1,4,8)	(3,4,5)	(6,7,8)
860	(C, D, D)	(1,6,8)	(1,4,9)	(2,3,8)	(1,3,8)	(1,4,6)
860	(C, D, D)	(2,4,9)	(1,6,7)	(2,4,7)	(1,5,6)	(3,8,10)
860	(C, D, D)	(2,6,7)	(2,5,7)	(4,9,10)	(2,3,7)	(4,8,9)
860	(C, D, D)	(3,4,8)	(5,9,10)	(5,8,10)	(5,7,10)	(5,6,10)
861	(B, C, D)	(1,4,10)	(1,3,10)	(2,5,6)	(1,2,9)	(1,2,8)
861	(B, C, D)	(2,3,10)	(2,3,9)	(3,4,6)	(3,9,10)	(2,3,6)
861	(B, C, D)	(6,9,10)	(3,4,7)	(6,7,10)	(5,8,9)	(2,4,5)
861	(B, C, D)	(7,8,10)	(3,5,6)	(6,8,9)	(6,7,9)	(2,9,10)

6. 我們自行找出來的分類規則，針對十個尾數中的 22 種數字組合均符合且適用，最後我們在把這樣奇妙的關係，整理為表 5-3-10，如下表所示：

表 5-3-10 出現次數與分組的連結關係

出現次數與分組的連結關係				
分組	(A, A, A)	(A, B, B)	(<u>C, C</u> , C)	(A, C, C)
出現次數	114 次	494 次	510 次	585 次
分組	(C, <u>D, D</u>)	(A, D, D)	(C, D, D)	(B, C, D)
出現次數	596 次	659 次	860 次	861 次

四、研究四：遊戲加入 JQK 撲克牌，並探討其中的變化

- ◆ **說明**：破解不同尾數，所會剩下的撲克牌後，我們又想到如果把 JQK 加入遊戲後，是否會有不同的結果？一樣可以進行遊戲？一樣會剩下一張牌嗎？同樣的尾數會剩下同樣的數字嗎？我們決定直接使用數學方程式破解：

◆ 情況一：將 JQK 當作數字 10，尾數九遊戲數學方程式計算如下：

- (一) 從一加到十為 55，加上 JQK（當作 10）十二張，故總點數為 340。
- (二) 設 9、19 和 29 的組數分別為 x 組、 y 組和 z 組 ($x+y+z=17$)
- (三) 故剩下的點數為 $340-9x-19y-29z$ ($1 \leq \text{剩下的點數} \leq 10$)
- (四) 整理為 $340-9(x+y+z)-10y-20z$
- (五) 整理為 $340-9(x+y+z)-10(y+2z)$
- (六) 代入 $x+y+z=17$ ，且令 $y+2z=n$
- (七) 得到 $340-153-10n$
- (八) 根據 $1 \leq \text{剩下的點數} \leq 10$ ，得到 $1 \leq 187-10n \leq 10$
- (九) 解出 $n=18$ ，剩下的點數為 7。
- (十) 因此也求出 $y+2z=18$ ，利用這性質和 $x+y+z=17$ ，推算討論下列各種成功牌組的可能。如下表 5-4-1。

表 5-4-1 尾數 9 的成功牌組

尾數為 9	情況一	情況二	情況三	情況四
29 的組數 z	4	3	2	1
19 的組數 y	10	12	14	16
9 的組數 x	3	2	1	0

- **延伸**：利用同樣的方式計算出不同尾數所會剩下的那張牌，以及其成功牌組！以下針對不同尾數遊戲，加入 JQK 後，將方程式結果整理如表 5-4-2。

表 5-4-2 不同尾數成功遊戲後剩下的數字（加入 JQK）

尾數	整理後的方程式	設 $y+2z=n$	使用的組合			剩下的數字
0	$1 \leq 170-10n \leq 10$	$n=16$	10	20	30	10
9	$1 \leq 187-10n \leq 10$	$n=18$	9	19	29	7
8	$1 \leq 204-10n \leq 10$	$n=20$	8	18	28	4
7	$1 \leq 221-10n \leq 10$	$n=22$	7	17	27	1
6	$1 \leq 238-10n \leq 10$	$n=23$	6	16	26	8
5	$1 \leq 255-10n \leq 10$	$n=25$	5	15	25	5
4	$1 \leq 272-10n \leq 10$	$n=27$	4	14	24	2
3	$1 \leq 289-10n \leq 10$	$n=28$	3	13	23	9
2	$1 \leq 306-10n \leq 10$	$n=30$	2	12	22	6
1	$1 \leq 323-10n \leq 10$	$n=32$	1	11	21	3

- **延伸**：利用方程式 $y+2z=n$ 和 $x+y+z=17$ 的結果去聯立出不同尾數的成功牌組，我們整理為表 5-4-3，如下表所示：

表 5-4-3 不同尾數的成功牌組（加入 JQK）

尾數	剩下數字	[2□、1□、□]成功牌組組數					
0	10	[5,6,6]	[4,8,5]	[3,10,4]	[2,12,3]	[1,14,2]	[0,16,1]
9	7	[4,10,3]	[3,12,2]	[2,14,1]	[1,16,0]		
8	4	[6,8,3]	[5,10,2]	[4,12,1]	[3,14,0]		
7	1	[8,6,3]	[7,8,2]	[6,10,1]	[5,12,0]		
6	8	[10,3,4]	[9,5,3]	[8,7,2]	[7,9,1]	[6,11,0]	
5	5	[11,3,3]	[10,5,2]	[9,7,1]	[8,9,0]		
4	2	[12,3,2]	[11,5,1]	[10,7,0]			
3	9	[12,4,1]	[11,6,0]				
2	6	[13,4,0]					
1	3	[15,2,0]					

■ **驗證：**最後根據上面計算出來的結果，我們**實際操作**撲克牌模擬不同尾數的情況：

◆ **尾數 0，實際模擬成功牌組[5,6,6]，最後剩下撲克牌 10**

成功牌組						
30	(10,10,10)	(10,10,10)	(10,10,10)	(10,10,10)	(10,10,10)	
20	(3,8,9)	(4,7,9)	(4,8,8)	(5,6,9)	(5,6,9)	(6,7,7)
10	(1,1,8)	(1,2,7)	(1,4,5)	(2,2,6)	(2,3,5)	(3,3,4)

◆ **尾數 9，實際模擬成功牌組[4,10,3]，最後剩下撲克牌 7**

成功牌組						
29	(10,10,9)	(10,10,9)	(10,10,9)	(10,10,9)		
19	(1,8,10)	(1,8,10)	(2,7,10)	(3,6,10)	(3,6,10)	(3,8,8)
	(4,5,10)	(4,5,10)	(4,5,10)	(6,6,7)		
9	(1,1,7)	(2,2,5)	(2,3,4)			

◆ **尾數 8，實際模擬成功牌組[6,8,3]，最後剩下撲克牌 4**

成功牌組						
28	(8,10,10)	(8,10,10)	(8,10,10)	(8,10,10)	(9,9,10)	(9,9,10)
18	(1,7,10)	(4,4,8)	(3,5,10)	(3,5,10)	(1,7,10)	(5,6,7)
	(5,6,7)	(2,6,10)				
8	(1,1,6)	(2,2,4)	(2,3,3)			

◆ **尾數 7，實際模擬成功牌組[8,6,3]，最後剩下撲克牌 1**

成功牌組						
27	(7,7,10)	(7,7,10)	(7,7,10)	(7,7,10)	(8,9,10)	(8,9,10)
	(8,9,10)	(8,9,10)				
17	(2,5,10)	(2,5,10)	(3,4,10)	(3,4,10)	(5,6,6)	(5,6,6)
7	(1,2,4)	(1,2,4)	(1,3,3)			

◆ **尾數 6，實際模擬成功牌組[8,7,2]，最後剩下撲克牌 8**

成功牌組						
26	(6,10,J)	(6,10,J)	(6,Q,K)	(7,9,J)	(7,9,Q)	(7,9,Q)
	(7,9,K)	(8,8,K)				
16	(1,5,10)	(1,5,K)	(2,4,J)	(2,4,Q)	(3,3,10)	(4,4,8)
	(5,5,6)					
6	(1,2,3)	(1,2,3)				

◆ 尾數 5，實際模擬成功牌組[10,5,2]，最後剩下撲克牌 5

成功牌組						
25	(5,10,10)	(5,Q,K)	(5,K,K)	(6,9,10)	(6,9,J)	(6,9,J)
	(6,9,Q)	(7,8,J)	(7,8,Q)	(7,8,Q)		
15	(1,4,10)	(2,3,J)	(2,3,K)	(3,4,8)	(4,4,7)	
5	(1,1,3)	(1,2,2)				

◆ 尾數 4，實際模擬成功牌組[11,5,1]，最後剩下撲克牌 2

成功牌組						
24	(4,J,Q)	(4,J,Q)	(4,Q,K)	(4,K,K)	(5,9,10)	(5,9,J)
	(5,9,Q)	(5,9,K)	(6,8,10)	(6,8,10)	(7,7,J)	
14	(1,6,7)	(1,6,7)	(2,2,10)	(3,3,8)	(3,3,8)	
4	(1,1,2)					

◆ 尾數 3，實際模擬成功牌組[11,6,0]，最後剩下撲克牌 9

成功牌組						
23	(3,10,J)	(3,10,Q)	(3,Q,K)	(4,9,10)	(4,9,J)	(4,9,K)
	(5,8,10)	(5,8,Q)	(5,8,K)	(6,7,J)	(6,7,J)	
13	(1,2,Q)	(1,2,K)	(1,5,7)	(1,6,6)	(2,3,8)	(2,4,7)
3	無					

◆ 尾數 2，實際模擬成功牌組[13,4,0]，最後剩下撲克牌 6

成功牌組						
22	(2,10,K)	(2,J,Q)	(2,Q,K)	(3,9,10)	(3,9,Q)	(3,9,K)
	(4,8,J)	(4,8,J)	(4,8,Q)	(5,7,10)	(5,7,10)	(5,7,K)
	(6,6,J)					
12	(1,2,9)	(1,3,8)	(1,4,7)	(1,5,6)		
2	無					

◆ 尾數 1，實際模擬成功牌組[15,2,0]，最後剩下撲克牌 3

成功牌組						
21	(1,10,K)	(1,J,J)	(1,J,K)	(2,9,J)	(2,9,Q)	(2,9,K)
	(3,8,10)	(3,8,Q)	(3,8,Q)	(4,7,Q)	(4,7,K)	(5,6,10)
	(5,6,10)	(5,7,9)	(6,7,8)			
11	(1,4,6)	(2,4,5)				
1	無					

- ◆ **小結**：情況一加入 JQK（當作 10），利用方程式找出不同尾數遊戲，最後剩下的那一張數字牌皆不相同。此外，在成功牌組的部份，因為加入 JQK 之後，可代表 10 的撲克牌增加為 16 張，所以可以湊出 30 這個數字的牌數增加，造成尾數 0 的成功牌組也增加到高達 6 組，其他尾數，受限於可組成數字的牌數關係，所以成功牌組的組數也受到限制。像是尾數 1 和尾數 2 因為三張牌不可能湊出 1 和 2 這個數字，所以兩個尾數都只有一組成功牌組。

◆ 情況二：原本遊戲加入 JQK（將 JQK 當作數字 11、12、13）

◆ 說明：破解把 JQK 當作 10 後，我們決定再探討第二種情況，將 JQK 當作撲克牌遊戲中的 11、12、13，一樣先利用數學方程式求出會剩下來的那一張牌，接著同樣利用 $y+2z=n$ 和 $x+y+z=17$ 去聯立出成功牌組的結果，以下以尾數九做為示範：

- (一) 從一加到十為 55，加上 JQK（當作 11、12、13），點數為 91，故總點數為 364。
- (二) 設 9、19 和 29 的組數分別為 x 組、 y 組和 z 組 ($x+y+z=17$)
- (三) 故剩下的點數為 $364-9x-19y-29z$ ($1 \leq \text{剩下的點數} \leq 10$)
- (四) 整理為 $364-9(x+y+z)-10y-20z$
- (五) 整理為 $364-9(x+y+z)-10(y+2z)$
- (六) 代入 $x+y+z=17$ ，且令 $y+2z=n$
- (七) 得到 $364-153-10n$
- (八) 根據 $1 \leq \text{剩下的點數} \leq 10$ ，得到 $1 \leq 211-10n \leq 10$
- (九) 解出 $n=18$ ，剩下的點數為 1。
- (十) 因此也求出 $y+2z=21$ ，利用這性質和 $x+y+z=17$ ，推算討論下列各種成功牌組的可能。如下表 5-4-4。

表 5-4-4 尾數 9 的成功牌組（JQK 當作 11、12、13）

尾數為 9	情況一	情況二	情況三	情況四
29 的組數 z	4	3	2	1
19 的組數 y	10	12	14	16
9 的組數 x	3	2	1	0

■ 延伸：利用同樣的方式計算出不同尾數所會剩下的那張牌，以及其成功牌組！以下針對不同尾數遊戲，加入 JQK 後，將方程式結果整理如表 5-4-5。

表 5-4-5 不同尾數成功遊戲後剩下的數字（JQK 當作 11、12、13）

尾數	整理後的方程式	設 $y+2z=n$	使用的組合			剩下的數字
0	$1 \leq 194-10n \leq 10$	$n=19$	10	20	30	4
9	$1 \leq 211-10n \leq 10$	$n=21$	9	19	29	1
8	$1 \leq 228-10n \leq 10$	$n=22$	8	18	28	8
7	$1 \leq 245-10n \leq 10$	$n=24$	7	17	27	5
6	$1 \leq 262-10n \leq 10$	$n=26$	6	16	26	2
5	$1 \leq 279-10n \leq 10$	$n=27$	5	15	25	9
4	$1 \leq 296-10n \leq 10$	$n=29$	4	14	24	6
3	$1 \leq 313-10n \leq 10$	$n=31$	3	13	23	3
2	$1 \leq 330-10n \leq 10$	$n=32$	2	12	22	10
1	$1 \leq 347-10n \leq 10$	$n=34$	1	11	21	7

■ 延伸：利用方程式 $y+2z=n$ 和 $x+y+z=17$ 的結果去聯立出不同尾數的成功牌組，我們整理為表 5-4-6，如下表所示：

表 5-4-6 不同尾數的成功牌組 (JQK 當作 11、12、13)

尾數	剩下數字	[2□、1□、□]成功牌組組數						
0	4	[5,9,3]	[4,11,2]	[3,13,1]	[2,15,0]			
9	1	[10,5,6]	[9,6,5]	[8,7,4]	[7,8,3]	[6,9,2]	[5,11,1]	[4,13,0]
8	8	[11,0,6]	[10,2,5]	[9,4,4]	[8,6,3]	[7,8,2]	[6,10,1]	[5,12,0]
7	5	[12,0,5]	[11,2,4]	[10,4,3]	[9,6,2]	[8,8,1]	[7,10,0]	
6	2	[13,0,4]	[12,2,3]	[11,4,2]	[10,6,1]	[9,8,0]		
5	9	[13,1,3]	[12,3,2]	[11,5,1]	[10,7,0]			
4	6	[14,1,2]	[13,3,1]	[12,5,0]				
3	3	[15,1,1]	[14,3,0]					
2	10	[16,1,0]						
1	7	[17,0,0]						

■ 驗證：根據上面計算出來的結果，我們實際操作撲克牌模擬不同尾數的情況：

◆ 尾數 0，實際模擬成功牌組[5,9,3]，最後剩下撲克牌 4

成功牌組						
30	(5,Q,K)	(5,Q,K)	(6,Q,Q)	(8,9,K)	(10,10,10)	
20	(1,9,10)	(2,7,J)	(2,7,J)	(3,4,K)	(3,6,J)	(3,8,9)
	(4,5,J)	(4,7,9)	(6,6,8)			
10	(1,1,8)	(1,2,7)	(2,3,5)			

◆ 尾數 9，實際模擬成功牌組[6,9,2]，最後剩下撲克牌 1

成功牌組						
29	(4,Q,K)	(6,10,K)	(7,9,K)	(7,10,Q)	(8,8,K)	(8,9,Q)
19	(1,7,J)	(1,8,10)	(2,5,Q)	(2,6,J)	(3,5,J)	(3,5,J)
	(3,7,9)	(4,5,10)	(4,6,9)			
9	(1,2,6)	(2,3,4)				

◆ 尾數 8，實際模擬成功牌組[7,8,2]，最後剩下撲克牌 8

成功牌組						
28	(2,K,K)	(4,J,K)	(4,Q,Q)	(5,10,K)	(5,J,Q)	(6,10,Q)
	(9,9,10)					
18	(1,6,J)	(1,7,10)	(1,8,9)	(1,8,9)	(2,5,J)	(4,6,8)
	(5,6,7)	(7,4,7)				
8	(2,3,3)	(2,3,3)				

◆ 尾數 7，實際模擬成功牌組[9,6,2]，最後剩下撲克牌 5

成功牌組						
27	(1,K,K)	(2,Q,K)	(3,Q,Q)	(4,10,K)	(5,10,Q)	(5,J,J)
	(6,10,J)	(8,8,J)	(9,9,9)			
17	(1,8,8)	(2,5,10)	(2,6,9)	(3,7,7)	(4,6,7)	(4,6,7)
7	(1,2,4)	(1,3,3)				

◆ 尾數 6，實際模擬成功牌組[9,8,0]，最後剩下撲克牌 2

成功牌組						
26	(3,J,Q)	(3,J,Q)	(4,9,K)	(4,10,Q)	(5,8,K)	(6,7,K)
	(6,8,Q)	(7,9,10)	(8,9,9)			
16	(1,2,K)	(1,4,J)	(1,5,10)	(1,5,10)	(2,3,J)	(2,6,8)
	(3,6,7)	(4,5,7)				
6	無					

◆ 尾數 5，實際模擬成功牌組[11,5,1]，最後剩下撲克牌 9

成功牌組						
25	(2,10,K)	(2,J,Q)	(3,9,K)	(3,10,Q)	(4,8,K)	(4,9,Q)
	(5,7,K)	(5,9,J)	(6,7,Q)	(6,8,J)	(7,8,10)	
15	(1,3,J)	(1,6,8)	(1,4,10)	(3,5,7)	(4,5,6)	
5	(1,2,2)					

◆ 尾數 4，實際模擬成功牌組[13,3,1]，最後剩下撲克牌 6

成功牌組						
24	(1,10,K)	(1,J,Q)	(2,9,K)	(2,10,Q)	(3,8,K)	(3,10,J)
	(4,8,Q)	(4,9,J)	(5,6,K)	(5,7,Q)	(5,9,10)	(6,7,J)
	(7,8,9)					
14	(2,4,8)	(3,4,7)	(3,5,6)			
4	(1,1,2)					

◆ 尾數 3，實際模擬成功牌組[14,3,0]，最後剩下撲克牌 3

成功牌組						
23	(1,10,Q)	(2,8,K)	(2,9,Q)	(2,9,Q)	(3,7,K)	(3,8,Q)
	(3,9,J)	(4,6,K)	(4,8,J)	(4,9,10)	(5,5,K)	(5,8,10)
	(6,6,J)	(6,7,10)				
13	(1,1,J)	(1,5,7)	(2,4,7)			
3	無					

◆ 尾數 2，實際模擬成功牌組[15,2,0]，最後剩下撲克牌 10

成功牌組						
22	(1,8,K)	(1,9,Q)	(1,10,J)	(2,7,K)	(2,8,Q)	(2,9,J)
	(3,6,K)	(3,7,Q)	(3,8,J)	(3,9,10)	(4,5,K)	(4,6,Q)
	(4,7,J)	(4,8,10)	(6,7,9)			
12	(1,5,6)	(2,5,5)				
2	無					

◆ 尾數 1，實際模擬成功牌組[17,0,0]，最後剩下撲克牌 7

成功牌組						
21	(1,7,K)	(1,8,Q)	(1,10,10)	(1,10,10)	(2,6,K)	(2,7,Q)
	(2,8,J)	(2,8,J)	(3,5,K)	(3,6,Q)	(3,9,9)	(3,9,9)
	(4,4,K)	(4,5,Q)	(4,6,J)	(5,5,J)	(6,7,8)	
11	無					
1	無					

- ◆ **小結**：情況二：當把加入的 JQK 當成 11、12、13 後，數字組成排列的變化就更多了，比起情況一把 JQK 都作 10，我們可以湊出更多不同的數字組合方式。因此，在成功牌組的分析上，也變得更加複雜。因為 JQK 的加入和改變，所以不同尾數所會剩下的最後一張牌也跟著變化，而有所不同。但可以知道的是，用不同尾數來進行遊戲，剩下來的牌皆不會重複，成功遊戲後，不同尾數的玩法都會剩下到一張不同的數字牌。

五、研究五：將單人玩法改成可以多人遊戲

- ◆ **說明**：遊戲本來的方式是只能一個人進行的遊戲，我們已經發現原來利用其他的尾數，一樣可以用來玩這個數學遊戲，只是剩下的數字牌會不同。在研究五，我們透過研究的結果，自創遊戲的多人玩法，讓這個有趣的數學遊戲，不再是單人遊戲，也可以多人一起同樂。我們想出了三個玩法，遊戲說明如下：（以 40 張牌，尾數 9、19、29 遊戲為例）

玩法一：你撿我配

- （一）每人發給四張牌。
- （二）剩下的牌放在中央牌堆，翻出二張牌。
- （三）一次出一張牌，當自己的牌可以與桌面上已翻起的牌湊成 9、19、29。
- （四）即可以收回來，當作一組成功牌組。
- （五）每組成功牌組的分數為 1 分。
- （六）遊戲進行到最後已經無法湊出 9、19、29，即結束。
- （七）最後統計分數，分數高者為勝利者。

玩法二：鬼牌大作戰

- （一）每人發給五張牌。
- （二）剩下的牌放在中央牌堆，當作抽牌區。
- （三）每個人輪抽從抽牌區抽一張牌。
- （四）當出現 9、19、29 時，可以選擇出牌或不出牌。
- （五）當成功牌組有出現 3，即可以得到勝利點數一點。
- （六）當三張 3 都出現時，第四張 3 即變成鬼牌。
- （七）最後，每人輪流抽牌，拿到鬼牌的人，扣勝利點數一點。
- （八）幾個回合後，統計每個人的分數，決定勝利者。

玩法三：Set Poker

- （一）先將會剩下來的牌 3 拿出來。
- （二）任意洗牌後，遊戲先發 12 張牌在桌上。
- （三）當看到「9、19、29」時，就要大喊「SET」並挑出。
- （四）一組「SET」，可得到 1 分。
- （五）如果 12 張牌都無法湊出 9、19 和 29，就可以再加發 3 張牌。
- （六）遊戲在最後 39 張牌都用完後，統計每個人的分數。

- ◆ **小結**：透過這樣的方式，以及我們研究的結果，同樣的玩法，可以自行變化，只需根據要玩的「尾數」和「人數」，來做適當的調整即可。讓同學們可以從數學遊戲中，進行心算的練習。

陸、討論

一、研究一

1. 三張一組所形成的數字組合共 **220 種**，若再加上考慮花色，則共 **9880 種**。
2. 在數字組合 (i, j, k) 共 220 種中，我們觀察到主要有三種類型： $\{X, X, X\}$ 有 10 種、 $\{X, X, Y\}$ 有 90 種、 $\{X, Y, Z\}$ 有 120 種，共 220 種，加入花色後， $\{X, X, X\}$ 有 40 種、 $\{X, X, Y\}$ 有 2160 種、 $\{X, Y, Z\}$ 有 7680 種，總共 9880 種。
3. 將所有數字組合的數據繪製成折線圖，呈現一個很工整的「**對稱圖形**」。

二、研究二

1. 利用程式模擬出成功牌組內的數字組合所有情況，我們發現不管是哪個尾數，最後加總的情況都是 **1108 組**，且破解不同尾數其成功牌組會出現的機率。
2. 不同尾數之「成功牌組」、「出現次數」和「出現機率」，經過統計後，也發現有趣的巧合。尾數 0 對應尾數 3、尾數 9 對應尾數 4、尾數 8 對應尾數 5、尾數 7 對應尾數 6、尾數 2 對應尾數 1。

三、研究三

1. 不同尾數成功牌組的數字組合都是 **22 種**，出現的總數也都是 **14404 次**。研究一的數字分析，3~30 共 220 種數字組合，220 除以十種尾數，每個尾數皆 **22 種**。
2. 出現的 22 種中，發現不管是哪一個尾數，結果都是相同。分別是 114 次一種、494 次一種、510 次四種、585 次兩種、596 次四種、659 次兩種、860 次四種、861 次四種。
3. 不管是成功牌組的組數或是出現次數總合，一樣出現對應的關係：尾數 0 對應尾數 3、尾數 9 對應尾數 4、尾數 8 對應尾數 5、尾數 7 對應尾數 6、尾數 2 對應尾數 1。
4. 我們從中尋找規律，自行設計分類編碼的方式，將數字分組編碼，找出「**出現次數**」與「**編碼分組**」的關係，**每一個尾數都適用這個規則**。 $(A, A, A) = 114$ 次、 $(A, B, B) = 494$ 次、 $(\boxed{C}, \boxed{C}, C) = 510$ 次、 $(A, C, C) = 585$ 次、 $(C, \boxed{D}, \boxed{D}) = 596$ 次、 $(A, D, D) = 659$ 次、 $(C, D, D) = 860$ 次、 $(B, C, D) = 861$ 次。

四、研究四

1. 透過改變遊戲的牌數，我們將原本沒用到的 JQK 加進來遊戲中，看看是否有不同的結果。經過方程式計算和實際操作模擬，我們發現到加入 JQK 後，一樣可以用來進行遊戲，三張一組也會配對好指定尾數的成功牌組。
2. 用不同的尾數來進行遊戲，最後**剩下的那一張數字牌也都不會重複**，每個尾數都會**對應到一張不同的數字牌**。所以加入 JQK 後，一樣可以進行遊戲。

五、研究五

1. 利用研究結果，我們設計了「你撿我配」、「鬼牌大作戰」和「Set Poker」三種玩法。
2. 這樣的改變原本較單調的單人心算練習，變成多人可以一起同樂的桌上遊戲，我們將自己設計後的遊戲在班上教會其他同學，大家都覺得很好玩。

柒、結論

- 一、**工整的對稱**：進行「數字組成」以及「花色」的分析，以「九、十九、廿九」的規則，三張牌一組，共可湊出 3~30 的數字，最後我們發現數字的組成和排列，均呈現很工整的對稱圖形關係。不同尾數間也有很巧合的對應關係。
- 二、**成功牌組的對應關係**：不同尾數進行遊戲，所形成的情況千變萬化。原本我們以為成功牌組之間應該沒什麼關聯，但根據我們分析的結果，發現不同尾數的成功牌組、出現次數和出現機率，都有相對應的關係。遊戲加入 JQK 後，我們利用方程式計算，聯立討論出來的成功牌組，**再輔以實際操作模擬，以求正確無誤**，且可以更深入了解「九、十九、廿九」這個遊戲。

尾數	尾數 0	尾數 9	尾數 8	尾數 7	尾數 2
配對關係	尾數 3	尾數 4	尾數 5	尾數 6	尾數 1

- 三、**數字組合的關聯性**：我們第一個發現奇妙的地方，就是不同尾數的數字組合「□、1□、2□」加起來竟然都是 22 種。於是我們又接著統計其出現次數，發現「**數字組成**」和「**出現次數**」會有一個巧妙的關係存在，而我是自行整理出其中規律，分為 ABCD 共四組，不同尾數的數字組合所對應的出現次數都可以適用我們自創的公式。
- 四、**不同尾數會剩下不同數字牌**：我們將討論的三種情況，整理成表 7-4-1：

表 7-4-1 不同尾數所剩下的牌分析

尾數	原始遊戲玩法 (只用 1~10, 共 40 張牌)	加入 JQK (當作 10)	加入 JQK (當作 11、12、13)
0	10	10	4
9	3	7	1
8	6	4	8
7	9	1	5
6	2	8	2
5	5	5	9
4	8	2	6
3	1	9	3
2	4	6	10
1	7	3	7

- 五、**遊戲方式的創新**：「九、十九、廿九」是一個很棒的數學心算遊戲，但是單人遊戲只能自己練習。因此，我們根據研究的結果，設計出多人的玩法，讓這個有趣的數學遊戲，也可以多人一起同樂。此外，遊戲的方式也不限於尾數九，也可以運用其他不同的尾數來玩，甚至還可以把原本遊戲方式要拿掉的 JQK 加進來，讓我們在學到類似數學單元的時候，可以當作延伸的學習活動，讓大家一起來從**遊戲中發現「數學」**。

捌、參考資料及其他

- 一、中華民國第45屆中小學科學展覽會國小組數學作品。九尾謎咒。
- 二、中華民國第52屆中小學科學展覽會國小組數學作品。揪出「小三」。
- 三、翰林文教事業（2016）。國民小學數學學習領域第九冊-第九單元線對稱圖形。台北：翰林文教事業股份有限公司。
- 四、翰林文教事業（2016）。國民小學數學學習領域第十冊-第五單元統計圖表。台北：翰林文教事業股份有限公司。
- 五、翰林文教事業（2016）。國民小學數學學習領域第十冊-第六單元未知數。台北：翰林文教事業股份有限公司。
- 六、翰林文教事業（2016）。國民小學數學學習領域第十二冊-第五單元怎樣解題。台北：翰林文教事業股份有限公司。

【評語】 080403

1. 本件作品主要是探討撲克牌算術的問題。這個主題有一定的趣味性，作者除了討論數字和之外，也加入討論花色問題這讓這件作品更加豐富。
2. 本作品的討論，在深入度及完整性方面可以再加強。