中華民國第56屆中小學科學展覽會
作品說明書

國小組　數學科

第一名

080402

數字迷宮-雙對角線數字和最大值之研究

學校名稱：新北市私立康橋高級中學

作者：	指導老師：
小六 黃聖傑 小六 徐立承	楊錦花

關鍵詞：奇偶數、對角線、漢米爾頓路徑

得獎感言

與科展的相遇是從小五進入數理創思班開始，那年暑假我和夥伴一起研究「圍貓遊戲」，第一次參加科展得到新北市「優等」的成績。我們延續著對科展的熱情，小六時我們再協手合作，這次的主題「數字迷宮」。(聖傑)

在研究過程中，我覺得最辛苦的部分是，看似簡單的單對角線和雙對角線，常常我們自以為辛苦的找出答案了，卻在老師的要求下，不斷地用不同的方法去挑戰自己的解法，就以偶數的雙對角線來說，原本我們以為將連接格平均分配在對角線的兩側是最佳填法，後來發現因為不同連接格的安排，竟讓我們「雙對角線的最大值」突破了前人研究的答案。

研究表面積單對角線時，原本我們是用餘格一個一個把對角線數推出來，但後來我們又發現可以用相對位置的公式快速又簡單的一次算出一條對角線，所以其實要科展要得到好成績，不但要靠平時的努力，還必須要有一個好老師引導著我們精益求精。(立承)

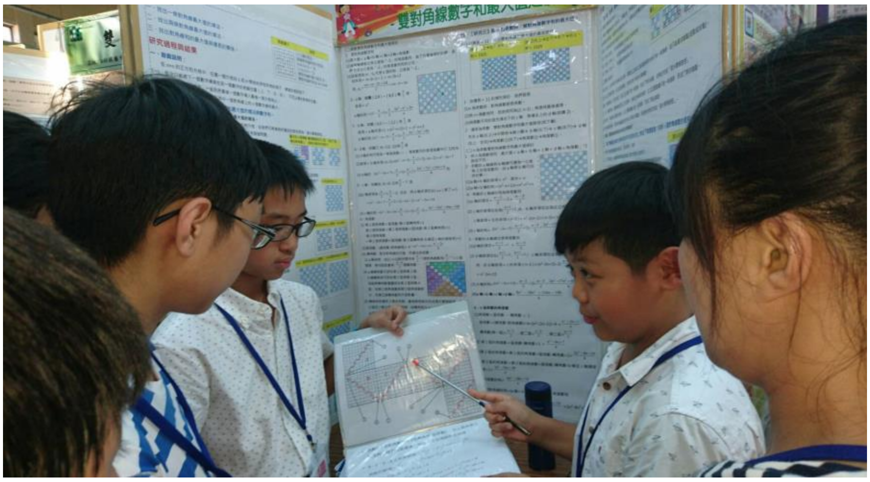
國展正式上場接受教授們提問的第一天，感受到評審中有人對我們的「數字迷宮」不是很感興趣，當時的我們心中難免有些失落。當天比賽結束回到飯店，與老師一起在房間裡對著教授拋出的問題，一遍遍的求出最佳解，一遍遍的練習如何更好的表達自己，為隔天卯足全力，努力讓評審們更了解我們所做的研究。(聖傑)

一路到全國展的這一年來體會到很多，學到的不只是數學上的知識，還有更多面對問題的方法與態度，學習如何經過一次又一次的跌倒後再站起來，學到了做什麼事情都要鍥而不捨精益求精，才能享受到甜蜜的果實。歷經這一年的洗禮，不管是在這條科展的路上，還是人生的旅途中，我們變得更勇敢，相信對未來的我們幫助很大！而最後能夠上台領取”第一名”的獎狀，這份榮耀與感動，是屬於所有默默在背後為我們付出的人。

謝謝楊老師的用心指導及協助，謝謝與我默契十足的戰友，我永遠不會忘記一起奮鬥的快樂日子，謝謝康橋的各項訓練。最後，感謝爸爸媽媽，給我最大的支持與鼓勵，每天陪伴我，耐心的聽我分享學校上發生的事，也不忘提醒我，能夠用平常心去面對比賽結果、享受比賽過程 。

「科展」，讓我們的小學生涯，添了令人難忘的一頁！跟夥伴每個假日在線上討論、一起加油打氣、一起準備簡報、口頭報告……點點滴滴，現在想起來還是記憶猶新呢！ (聖傑、立承)

第一次參展，點燃了對科展的熱情。



認真地對參觀群眾講解作品。

第一名的榮耀為小學生涯畫下完美的句點。

摘要

本研究源自第 49 屆中小學科展國小組「數字拼圖」，原作品找出了單一對角線的最大數字和，我們進一步將研究擴展到兩條對角線的最大數字和。

我們發現依遊戲規則將數字填滿所有格子是「漢米爾頓路徑」問題，所以我們重新由較單純的「單一對角線」出發，去尋找填數時餘格「漢米爾頓路徑」的限制，再利用這些發現，去找出雙對角線的填數規律，並將單對角線與雙對角線最大數字和的公式符號化。

以漢米爾頓路徑填完所有餘格的限制，除了一般熟知的「單一路徑」、「色格與白格的差」之外，影響我們找出最大值的關鍵是餘格出現的「階梯形階數」不可超過 3 階。這項發現讓我們找出雙對角線最大數字和的「填數規律」，並推出了雙對角線最大數字和的公式。

壹、 研究動機

「數字迷宮」這個遊戲是老師在課堂上介紹的遊戲，老師要我們把數字依序填入方格中，並找出哪一種填法的對角線和為最大值。

但是我們不管怎樣試，總是無法找出對角線的最大值，大家十分的懊惱，因此我們決定把這個遊戲當作研究的主題，繼續找出該如何填數字，才能使對角線的和為最大值，並求出最大值的公式。

貳、 研究目的

一、找出一條對角線最大值的填法。

二、找出兩條對角線最大值的填法

三、找出最大值的對角線與邊長的關係。

參、 研究設備及器材

筆記本、筆、黑板、電腦、方格紙。

肆、 研究過程

一、遊戲說明

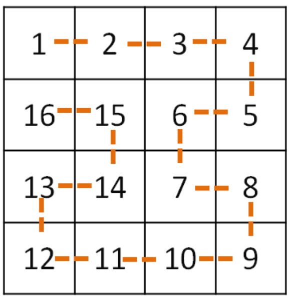
在 n×n 的正方形方格中，任選一個方格由 1 或最大數 n^2開始，依序填完所有的格子。

填寫的規則如下：

(一)每次只能將下一個數字填寫在前一個數字的相鄰位置（上、下、左、右），不可以填在對角的位置。

(二)由 1 或 n^2開始，依序填寫，一直到把最後一個數字填入最後一個方格為止。

(三)最後要比賽誰可以讓正方形其中一條對角線上的 n 個數字總和為最大。

遊戲說明	填寫結果
	兩條對角線的和分別為 1＋15＋7＋9＝32（左上→右下） 4＋6＋14＋12＝36（右上→左下） 以左圖的填法，單對角線的最大值為 36； 雙對角線的和為 36+32=68

二、文獻探討：

(一)相關作品分析

作品出處	題目	研究範疇
第 49 屆全國科展國小組數學	數字拼圖	一條對角線的最大值的填法及求最大值的規律。

1、研究方法：以實際走法去歸納出一條對角線的最大公式及走法。

2、研究結果：

(1) 找出單一對角線數字總和為最大的填法與單一對角線最大值的計算方法。

(2) 僅列出他們找出的雙對角線最大值，但沒說明填法與雙對角線最大值的計算方法。

(二)我們的研究特色

1、我們的研究皆由「漢米爾頓路徑」出發，去思考數字填法，進而推導出雙對角線最大值的公式。

2、我們研究的範疇以兩條對角線和為最大值為主軸，難度和變數增加很多，49 屆作品可能因為由經驗法則出發，故沒有推出兩條對角線和的最大值與填數字的方法，文末列出他們的雙對角線最大值，我們發現他們的資料當邊長超過 10 時就出現錯誤。

(1) 49 屆「數字拼圖」雙對角線數字和最大值資料

n ×n 正方形	雙對角線數字最大總和	n×n 正方形	雙對角線數字最大總和	n×n 正方形	雙對角線數字最大總和	n×n 正方形	雙對角線數字最大總和
1×1	1	5×5	141	9×9	993	13×13	3277
2×2	10	6×6	298	10×10	1510	14×14	4418
3×3	19	7×7	433	11×11	1911	15×15	5181
4×4	84	8×8	740	12×12	2686	16×16	6600

(2)我們研究結果

邊長		11×11	12×12	13×13	14×14	15×15	16×16
雙對角線數字和最大值	49 屆	1911	2686	3277	4418	5181	6600
	我們	1929	2706	3325	4422	5281	6750

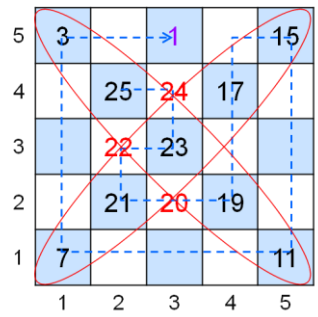
3、我們的創意：

(1) 以漢米爾頓路徑去思考如何有效地將較大的數字留在對角線，以座標位置(x , y)表示我們填數所在的位址。

(2) 在邊長為偶數雙對角線的研究，我們發現了「轉角數」的安排技巧，幫我們找到雙對角線最大值的填寫規則。

三、名詞定義

(一) 漢米爾頓路徑：給一圖 G＝(V,E)，通過圖中的每一頂點且只通過一次的路徑稱為漢米爾頓路徑。



(二)色格與白格

將「數字迷宮」的格子，仿西洋棋盤分為「色格」與「白格」。如圖中(1,1)、(1,3)、 (2,2)、(2,4)、…為色格，(1,2)、(1,4)、(2,1)、(2,3)、…為白格。

(三) 對角線數：填在對角線上的數字如圖中的 3、25、23、19、11 與 15、17、21、7。

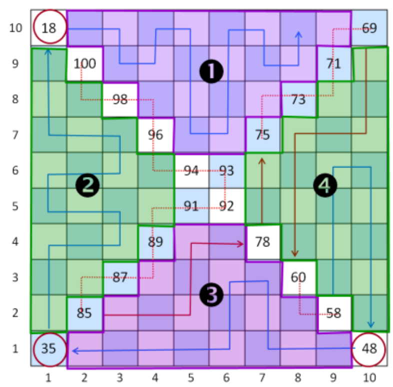
(四) 轉角數：

連接兩對角線格，與兩對角線相鄰的數。

如右上圖中的 24 連接 25 與 23，22 連接 23 與 21，20 連接 21 與 19；

「24」、「22」與「20」都可稱為轉角數。

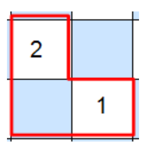
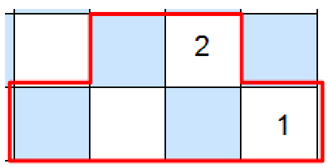
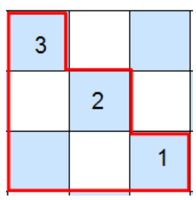
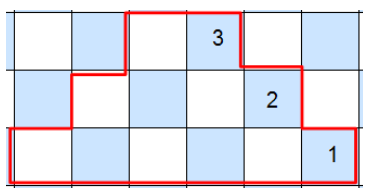
(五) 角落數：



對角線數中位於角落位址，且無法和其他對角線成等差數列的數，例右圖中 48、35、18 皆可稱為角落數。

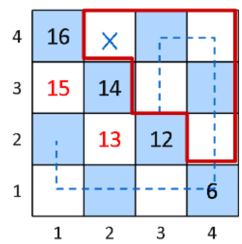
(六) 區格數：雙對角線將整個遊戲棋盤分隔為四區，每一區的格子數稱為區格數，如圖中紫色與綠色部分。

(七) 階梯形：餘格成連續階梯形狀(如紅線框起來部分)

2 階階梯	3 階階梯
 	 

(八) 缺格：無法以「漢米爾頓路徑」路徑填滿的格子，所剩下的空格統稱為「缺格」，以座標表示位址(x, y)。

如右圖(2, 4)位址，就是「缺格」



四、研究 1：單一對角線最大值。

(一)當 n=偶數時，單一對角線數字總和為最大值的填法與數字和。

1、遊戲規定每次只能填鄰格，且需依序填完整個方格，故我們可將填格所連成的路徑為一「漢米爾頓路徑」。

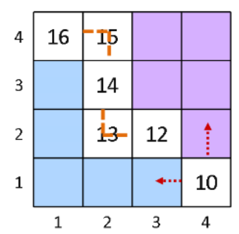
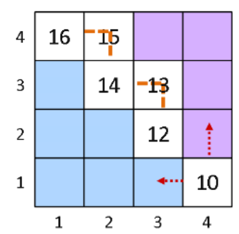
2、解決 n×n 對角線數字總和為最大值的問題需思考兩個問題：

(1) 盡量讓對角線數填入最大值。

(2) 必須隨時讓餘格保持為「漢米爾頓路徑」。

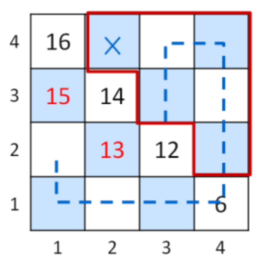
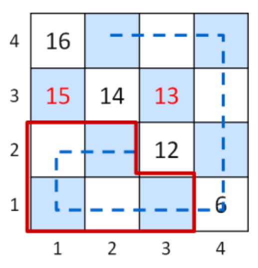
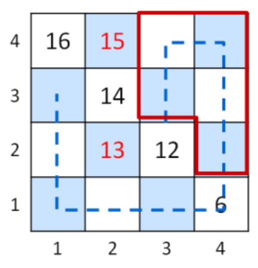
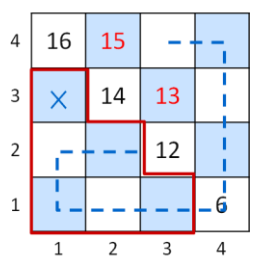
3、因為遊戲規定每一個數字只能填入下一個數字的相鄰位置，若最大數 n^2 為偶數，填入第一個對角線格，則所有對角線數都為偶數。

4、n＝為偶數時，將最大的 n 個偶數都填在對角線上是否可行？

		以 n＝4 為例， 若將 4 個最大的偶數 16、14、12、10 填在對角線，則會將整個圖形區隔成右上和左下兩區塊，而無法以「漢米爾頓路徑」填完整個格子。

5、若將 3 個最大偶數填在對角線，然後先走完右上或左下區塊，是否可行？

(1) 填完 16、14、12，尚缺兩個連接的「轉角數」15 與 13 未填，連接 16 與 14 的「15」的位置有兩個可能(1,3)與(2,4)；連接 14 與 12 的「13」的位置有兩個可能(2,2)與(3,3)。

圖 1：15(1,3)、13(2,2)	圖 2：15(1,3)、13(3,3)	圖 3：15(2,4)、13(2,2)	圖 4：15(2,4)、13(3,3)
			

(2) 檢視上圖 1 與圖 4，發現圖 1 的右上區域及圖 4 的左下區域都出現「3 階階梯形」的區域，3 層的階梯形區域的色格比白格多 2，因為「漢米爾頓路徑」必須白格與色格相間，白格與色格的差最多只能 1。

若「白格＝色格」，則起點與終點分別為空白格與色格；

若「白格－色格＝1」，則起點與終點皆為白格；

若「色格－白格＝1」，則起點與終點皆為色格；

故上圖 1 與圖 4 的餘格皆無法以「漢米爾頓路徑」填完所有的數。

(3) 而上圖 2 與上圖 3，都為色格比白格多 1 的狀況，且餘格起點 11 與終點 1 的位置為色格，故能以漢米爾頓路徑順利填完剩下的餘格。

圖 2

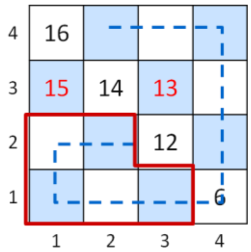
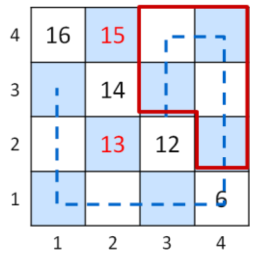


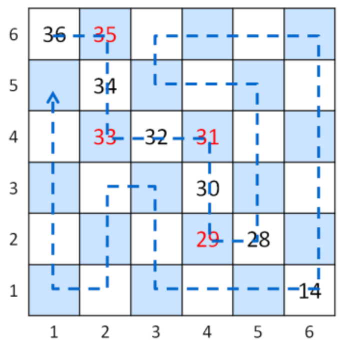
圖 3

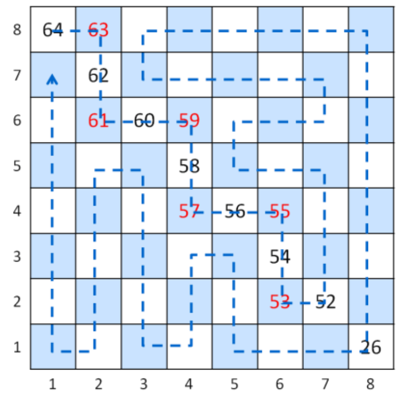


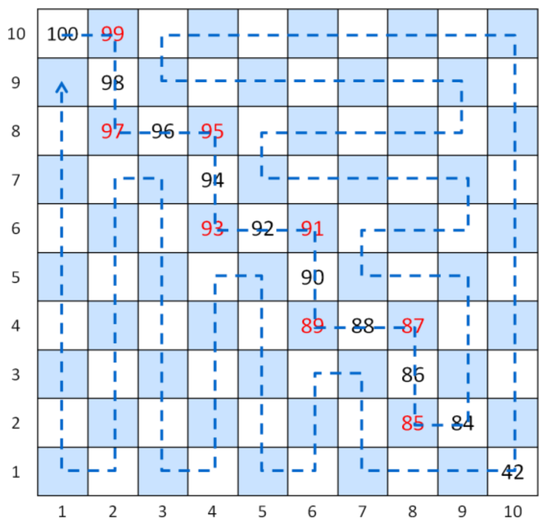
檢視圖 2 與圖 3 兩者路徑相似：

- 轉角數「15」和「13」分別填在對角線的左、右兩側。
- 先填 3 個對角線數➩填完其中一個區塊➩第 4 個對角線數➩填完所有格子。
- 最大對角線數字和的為 16＋14＋12＋6＝48。

6、以 n＝4 的填數模式，填 n＝6、8、10 皆能順利填完所有格子，且對角線數字和為最大值







n＝6，最大對角線的數字和為

36+34+32+30+28+14＝174

n＝8，最大對角線的數字和為

64+62+60+58+56+54+52+26＝432

n＝10，最大對角線的數字和為

100+98+96+94+92+90+88+86+84+42

＝870

7、偶數對角線的數和的最大值

n	4	6	8	10	…	n
第 1 個數	16	36	64	100	…	n^2
第 n-1 個數	12	28	52	84	…	$n^2-2[(n-1)-1)]=\ n^2-2n+4$
第 n 個數	6	14	26	42	…	$[n^2-2(n-2)]\div 2=\dfrac{n^2-2n+4}{2}$
對角線數字和	48	174	432	870	…	$\dfrac{2n^3-3n^2+4n}{2}$

8、單一對角線最大值

1~(n-1)個對角線數　　　　第 n 個對角線數

$$\boxed{[n^2+n^2-2n+4]\times(n-1)\div 2}+\frac{n^2-2n+4}{2}=\frac{2n^3-3n^2+4n}{2}$$

(二) **當 n= 奇數時，單一對角線數字總和為最大值的填法與數字和。**

1、n=5，仿照 n 為偶數模式，將 4 個最大奇數從(1,5)位置開始填在對角線，然後填走完右上或左下，再依序填滿所有的格子，是否可行？

(1) 填完 25、23、21、19，尚缺 3 個連接的轉角數 24、22 與 20 未填，

連接 25 與 23 的「24」的位置有兩個可能(2,5)與(1,4)；

連接 23 與 21 的「22」的位置有兩個可能(3,4)與(2,3)；

連接 21 與 19 的「20」的位置有兩個可能(4,3)與(3,2)

圖 1：缺格(1,4)、(4,4)

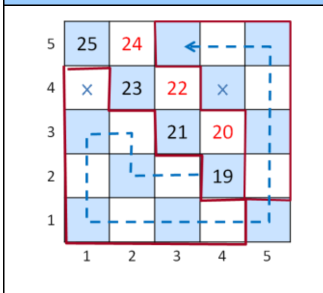


圖 2：缺格(3,5)

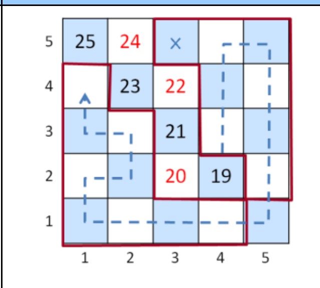


圖 3：缺格(1,3)、(1,4)

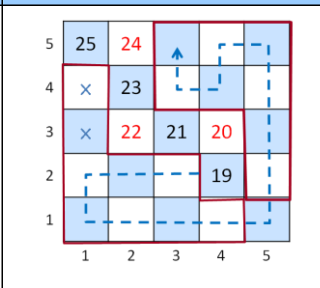
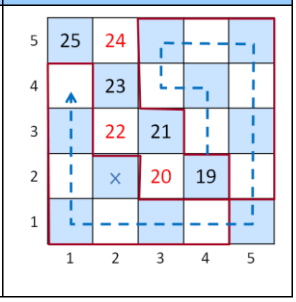


圖 4：缺格(2,2)



(2) 發現圖 1 左下，出現階梯形，且階數>3，故無法以「漢米爾頓路徑」填滿所有的格子。

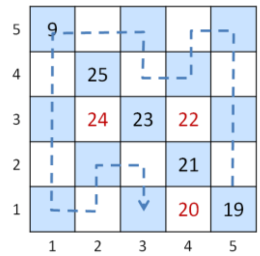
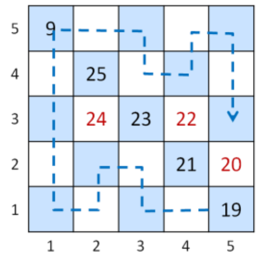
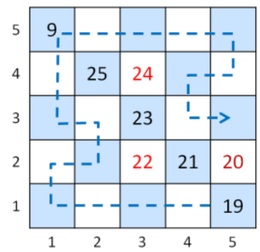
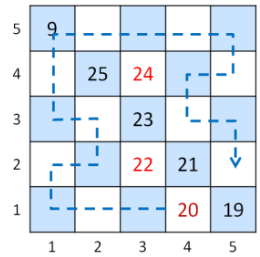
圖 2 右上(3,5)為單一路徑，只能做為起點或終點，故形成「缺格」。

圖 3 左下(1,4)為單一路徑，只能做為起點或終點，故形成「缺格」。

圖 4 左下(1,2)、(1,3)、(1,4)為單向路徑，故若(1,2)選擇(1,3)，則(2,2)就會形成「缺格」。

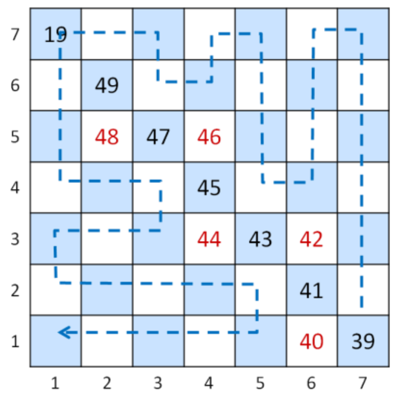
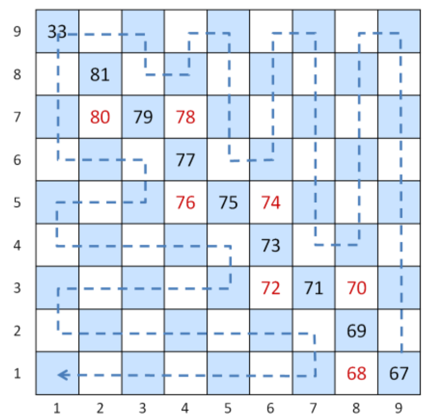
(3) 當 n＝奇數時，無法將最大數由左上角，如上圖(1,5)位置依序往下填而求得最大值。

2、以 n=5 為例，若將最大奇數 25 向右下移一格由(1,5)到(2,4)，23 由(2, 4)到(3,3)、21 由(3, 3)到(4,2)、19 由(4, 2)到(5,1)在依序往下填如下圖所示：

圖 1	圖 2	圖 3	圖 4
			

上圖 1~圖 4 皆能以漢米爾頓路徑填完所有的格子，且最後的(第 5 個)對角線數都為 9。

3、以相同的模式去檢視 n＝7 和 9

n ＝7	n ＝9
	

4、奇數對角線的數和的最大值

邊長	5	7	9	…	n
第 1 個數	25	49	81	…	n^2
第 n-1 個數	19	39	67	…	$n^2-2(n-2)=\ n^2-2n+4$
第 n 個數	9	19	33	…	$[n^2-2(n-2)-1]\div 2=\dfrac{n^2-2n+3}{2}$
對角線數字和	97	283	625	…	$\dfrac{2n^3-3n^2+4n-1}{2}$

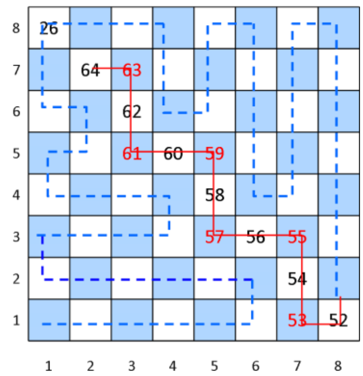
5、n 為奇數，單一對角線最大值

$$\overbrace{\boxed{[\,n^2+n^2-2n+4]\times(n-1)\div 2}}^{1\sim(n-1)\text{個對角線數}}+\overbrace{\frac{n^2-2n+3}{2}}^{\text{第 n 個對角線數}}$$

$$=\frac{(2n^2-2n+4)\times(n-1)}{2}+\frac{n^2-2n+3}{2}$$

$$=\frac{2n^3-2n^2+4n-2n^2+2n-4}{2}+\frac{n^2-2n+3}{2}$$

$$=\frac{2n^3-3n^2+4n-1}{2}$$



6、將最大數 n^2 由左上第二格填起，也適用在邊長為偶數的情形。

(三) 單對角線和最大值的最佳路徑需符合兩個原則：

1、將最大數 n^2 由左上第 2 格(2,n-1)格開始，依序遞減填完

(1) n-1 個對角線數→ (2)餘格的上半區塊(或左下區塊)→

(3)第 n 個對角線數→(4)餘格

2、連接對角線的轉角數，需依序平均分別填入右上、左下兩區才能使餘格保持為「漢米爾頓路徑」。

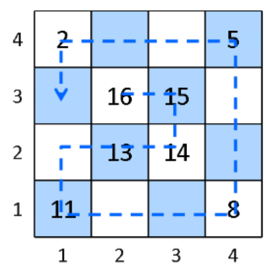
五、研究 2：當 n 為偶數時，如何走出雙對角線數字總和為最大值的路線。

(一) 若 n＝4，

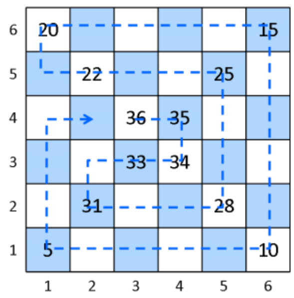
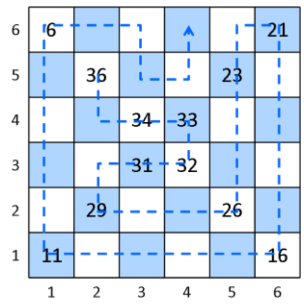
1、雙對角線為(1,1) 、 (2,2) 、 (3,3) 、 (4,4) 、(1,4) 、 (2,3) 、 (3,2) 、 (4,1) 位址。

2、中間 4 個位址連接一起，故最大數可由中間開始，再陸續完成 4 個角落的數。

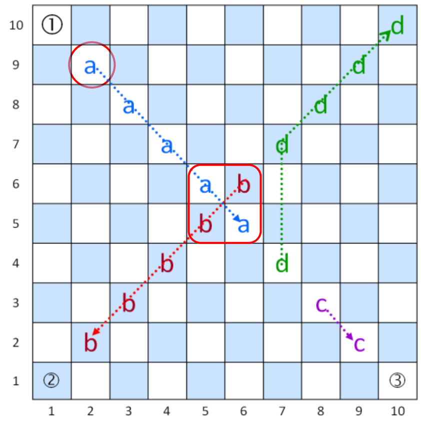
3、雙對角線數字和的最大值為 16+15+14+13+11+8+5+2＝84



(二) 若 n＝6

圖 1：由中間開始，和＝294 36+35+34+33+31+28+25+22+20+15+10+5＝294	圖 2：由(2,5)位置開始，和＝298 36+34+33+32+31+29+26+23+21+16+11+6＝298
	

由 n＝4 和 n＝6 的漢米爾頓路徑，我們暫時將雙對角線的最大值的路徑歸納如下：

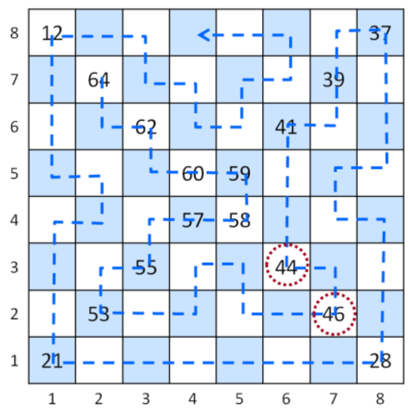
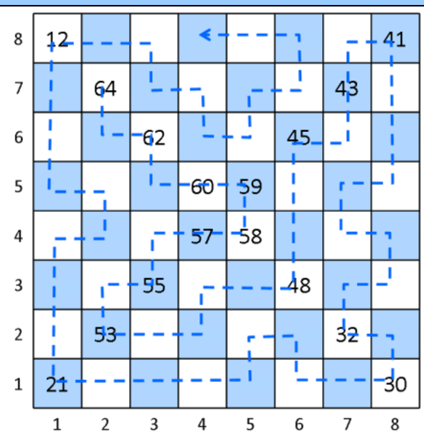


1、先從(2, n-1)開始往中間。

2、到達中間走完中間四格，依序走完左下、右下、右上對角線數，最後再走最後一圈角落數，完成漢米爾頓路徑。

3、我們把最外一層稱為「外圈」，其餘的稱為「內圈」，所以雙對角線最大值的漢米爾頓路徑是完成內圈對角線數後，再走完外圈與其餘的格子。

(三) 若 n＝8

圖 1：先完成右下(c 軸)，和＝736	圖 2：先完成右上(d 軸)，和＝740
	

1、圖 1 按照 n＝6 走法，會發現在(6, 3)與(7, 2)兩個位置需做調整，才不會出現缺格。

圖 1：64+62+60+59+58+57+55+53+46+44+41+39+37+28+21+12=736

圖 2：64+62+60+59+58+57+55+53+48+45+43+41+32+30+21+12=740

2、圖 1 走法為先完成右下軸線(c 軸)，再完成右上軸線(d 軸)；

圖 2 相反，先完成右上，再完成右下。

3、檢視 2 條路徑最大的差別在內圈對角線格(角落數除外)，圖 1 右下軸線無法從較內圈的(6,3)位置先填，而多走了兩格(5, 2)與(6, 2)，完成右下的 c 軸線，故和的最大值會略遜一籌。

(四) 若 n＝10

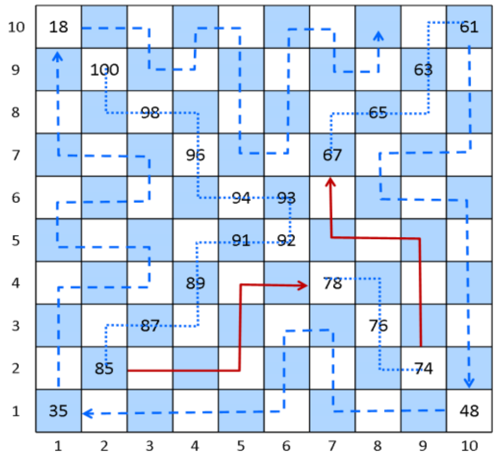
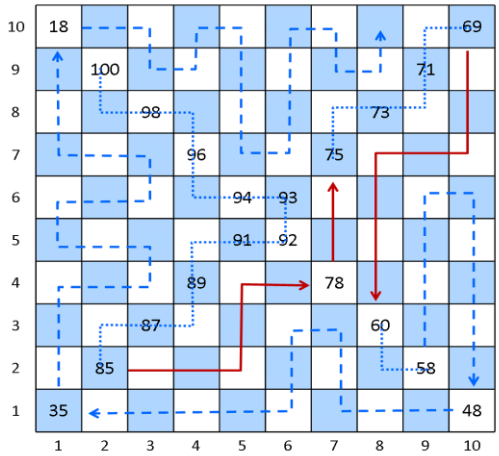
圖 1：先完成右下 c 軸，和＝1510	圖 2：先完成右上 d 軸，和＝1510
	

圖 1：100+98+96+94+93+92+91+89+87+85+78+76+74+67+65+63+61+48+35+18=1510

圖 2：100+98+96+94+93+92+91+89+87+85+78+75+73+71+69+60+58+48+35+18=1510

當 n＝10 時，無論先走 c 軸或先走 d 軸都可使雙對角線的數字和呈現最大值 1510。

(五) 統整 n 為偶數雙對角線數字和為最大值的路徑發現：

1、將雙對角線的最大值 n^2 由（2，n-1）格開始，沿 a 軸往中間走。

2、到達中間走完中間四格，再依序走完左下 b 軸、右上 d 軸和右下 c 軸內圈，最後再走最外圈③、②、① 3 個角落數，完成漢米爾頓路徑。

3、將此規則在 n＝12、n＝14、…、n＝24 都能順利以漢米爾頓路徑走完所有的格子，且使雙對角線的和呈現最大值。

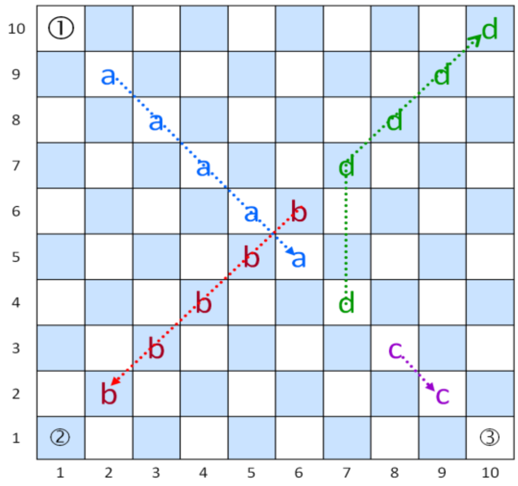


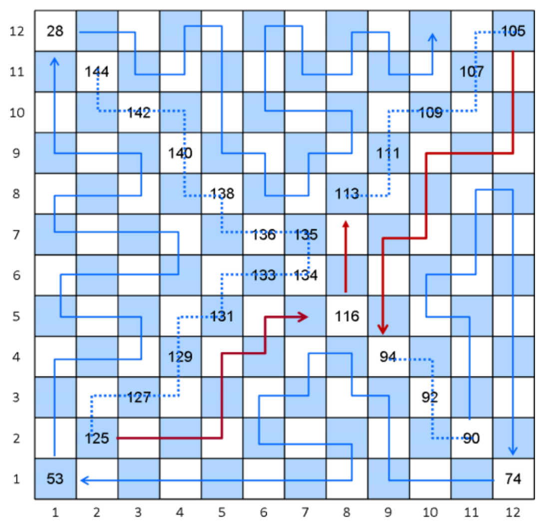
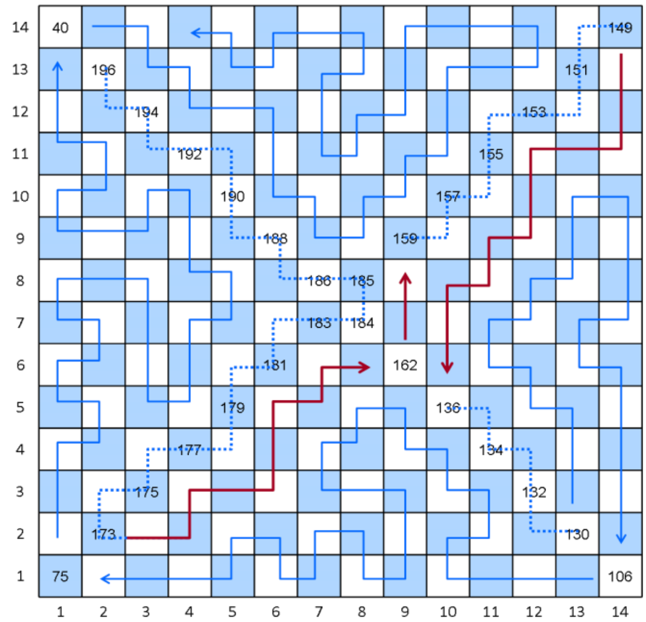
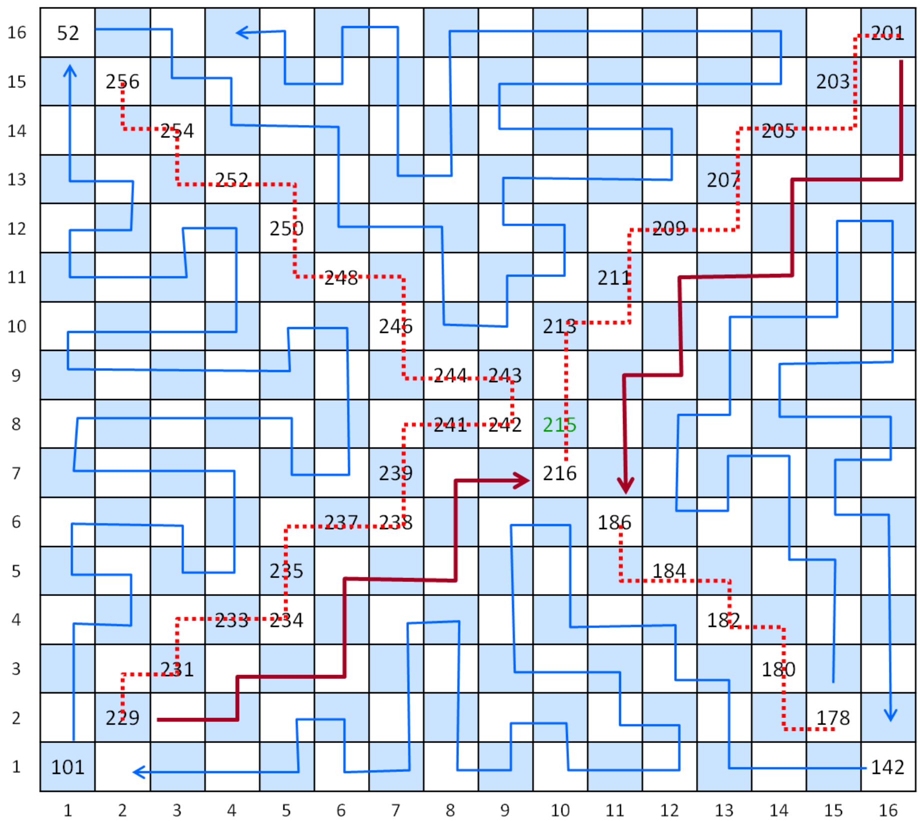
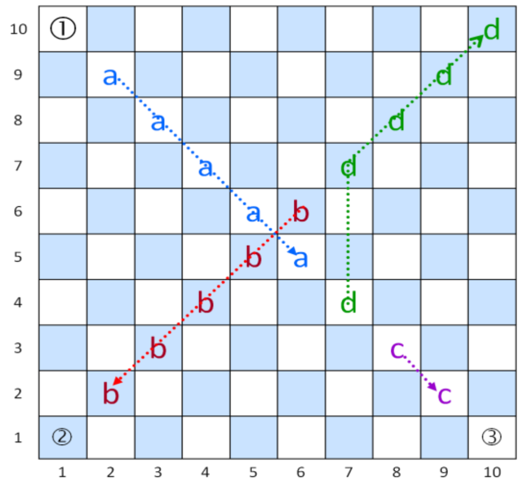
圖 1：n＝12，和＝2706	圖 2：n＝14，和＝4422
	

圖 3：n＝16，和＝6750



(六)偶數雙對角線數字和最大值探討

1、雙對角線數字和



(1) 最大值＝a 軸＋b 軸＋c 軸＋d 軸＋角落數

a 軸，如圖（2, 9）~（6, 5）

b 軸，如圖（6, 6）~（2, 2）

c 軸，如圖（8, 3）~（9, 2）

d 軸，如圖（7, 4）~（10, 10）

角落數，如圖①（10, 1）、②（1, 1）、③(1, 10)

(2) 每條軸線都出現公差為「－2」的等差數列

(3) 由於每條軸線都是公差為「－2」的等差數列，為了方便後面的計算，我們先求出公差為－2 的等差數列的和。

設首項為 m，S_k代表 k 項的和，公差為「－2」，故末項＝m－(k－1)× 2＝m－2k＋2

$$S_n=\frac{(m+m-2k+2)k}{2}=(m-k+1)k$$

2、a 軸：如圖（2,9）~（6,5）

首項(m)＝n^2，項次(k)＝$\frac{n}{2}$（由第 n-1 列到第 $\frac{n}{2}$ 列）

$$a\text{ 軸的和}=\left(n^2-\frac{n}{2}+1\right)\times\frac{n}{2}=\frac{2n^3-n^2+2n}{4}$$

a 軸	8*8	10*10	12*12	14*14	16*16	…	$N*n$
項次(k)	4	5	6	7	8	…	$\frac{n}{2}$
首項(m)	64	100	144	196	256	…	n^2
和	244	480	834	1330	1992	…	$\frac{2n^3-n^2+2n}{4}$

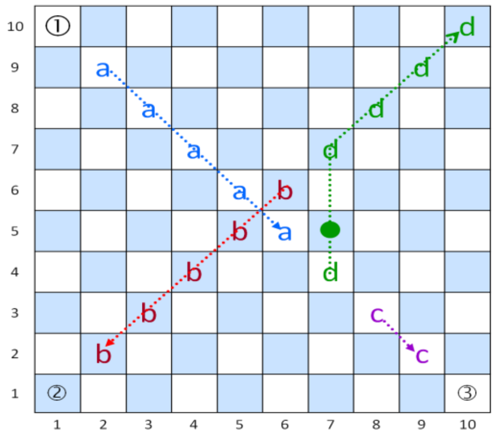
3、b 軸，如圖（6,6）~（2,2）有 $\frac{n}{2}$ 項

項次(k)＝$\frac{n}{2}$（由 $\frac{n}{2}$+1 列到 2 列）

首項(m)＝a 軸末項＋1＝n^2－n＋2+1＝n^2－n＋3，

b 軸＝$[(n^2-n+3)-\frac{n}{2}+1]\times\frac{n}{2}=\frac{2n^3-3n^2+8n}{4}$

B 軸	8*8	10*10	12*12	14*14	16*16	…	n*n
項次(k)	4	5	6	7	8	…	$\frac{n}{2}$
首項(m)	59	93	135	185	243	…	n^2-n+3
和	224	445	780	1253	1888	…	$\frac{2n^3-3n^2+8n}{4}$



4、d 軸，如圖（7, 4）~（10, 10）

(1) 將（7,4）的位置向上移一格，則（7,5）~（10,10）為一等差數列，故 d 軸的和可視為一列「等差級數＋1」的和。

(2) 等差數列的首項為圖中（7, 5）位址

(3) b 軸的末項（2, 2）~ d 等差數列首項（$\frac{n}{2}+2, \frac{n}{2}$）

差了$(\frac{n}{2}-2)+(\frac{n}{2}+2-2)=$n－2

(4) d 軸首項(m)＝b 軸末項－（n－2）＝$[(n^2-n+3)-\frac{n}{2}\times2+2]-(n-2)=n^2-3n+7$

d 軸的項數(k)＝$\frac{n}{2}$

(5) d 軸的和＝$[(n^2-3n+7)-\frac{n}{2}+1]\times\frac{n}{2}+1=\frac{2n^3-7n^2+16n+4}{4}$

d 軸	8*8	10*10	12*12	14*14	16*16	⋯	n*n
項次(k)	4	5	6	7	8	⋯	$\frac{n}{2}$
首項(m)	47	77	115	161	215	⋯	n^2-3n+7
和	117	366	661	1086	1665	⋯	$\frac{2n^3-7n^2+16n+4}{4}$

5、c 軸，如圖（8, 3）~（9, 2）

(1) c 軸首項為（$\frac{n}{2}+3$, $\frac{n}{2}-2$）位址，與 d 軸末項位址（n,n）差了

$[n-(\frac{n}{2}+3)]+[n-(\frac{n}{2}-2)]=n-1$

(2) c 軸首項＝d 軸末項－(n－1)＝$(n^2-3n+7-\frac{n}{2}\times 2+2)-(n-1)=n^2-5n+10$

c 軸的項數＝$\frac{n}{2}-3$

(3) c 軸的和＝$[\,n^2-5n+10-(\frac{n}{2}-3)+1\,]\times(\frac{n}{2}-3)=\frac{2n^3-23n^2+94n-168}{4}$

c 軸	8*8	10*10	12*12	14*14	16*16	⋯	n*n
項次(k)	1	2	3	4	5	⋯	$\frac{n}{2}-3$
首項(m)	32 例外	60	94	136	186	⋯	$n^2-5n+10$
末項		58	90	130	178	⋯	$n^2-6n+18$
和	32 例外	118	276	910	1820	⋯	$\frac{2n^3-23n^2+94n-168}{4}$

6、角落數

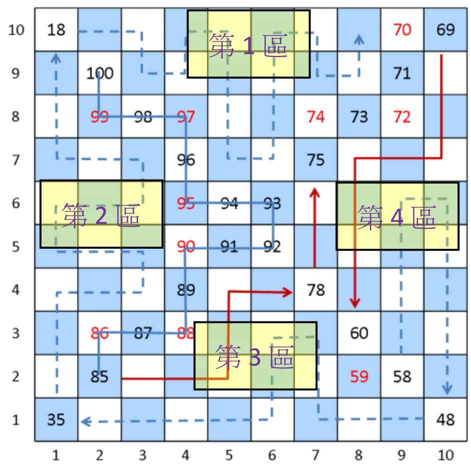
(1) 第 1 個角落數＝區格數－第 1 區轉角格＋1

第 2 個角落數＝第 1 個角落數＋(區格數－第 2 區轉角格)＋1

第 3 個角落數＝第 2 個角落數＋(區格數－第 3 區轉角格)＋1

(2) 區格數：(總格數－對角線格) ÷ 4－轉角格

區格數＝ (n^2-2n) ÷ 4＝$\dfrac{n^2-2n}{4}$



(3) 轉角格：配合對角線的行進，所產生的格數

$\boldsymbol{a}$ 軸由（2, n-1）到中間共有 $\dfrac{n}{2}-1$ 個對角線數，

有 $(\dfrac{n}{2}-1)-1$ 個間隔，換句話說會有 $\dfrac{n-4}{2}$ 個轉角數。

(4) a 軸轉角格可排在第 1 區與第 2 區，我們發現若能將轉角數儘量排在第 2 區與第 4 區，則第 1 個角落數與第 3 個角落數會較大，而第 2 個角落數則不受影響。

轉角格若連排 3 個在同側，會使餘格無法完成漢米爾頓路徑，故每 3 個至少要出現 1 個在異側，故轉角格分 p、q 兩種。p 安排在第 1、3 區，q 安排在第 2、4 區。

$p=\left\lfloor \dfrac{n-4}{2}\div 3\right\rfloor$；$q=\dfrac{n-4}{2}-p$；以 n＝10 為例； $p=\dfrac{10-4}{2}\div 3=1$；$q=\dfrac{10-4}{2}-1=2$

邊長	10	12	14	16	…	n
p 值	1	1	1	2		$\left\lfloor \dfrac{n-4}{2}\div 3\right\rfloor$
q 值	2	3	4	4		$\dfrac{n-4}{2}-p$

(5) 第 1 區的的轉角格＝$2p+1$(加 d 軸轉角落數的連接)

第 2 區的轉角格＝$2q$

第 3 區的轉角格＝$2p+(n-4)$ (加 b 軸至 c 軸的連接)

邊長 / 轉角格	10	12	14	16	…	n
第 1 區	3(1*2+1)	3(1*2+1)	3(1*2+1)	5(2*2+1)		$2p+1$
第 2 區	4[(3-1)*2]	6[(4-1)*2]	8[(5-1)*2]	8[(6-2)*2]		$2q=(\dfrac{n-4}{2}-p)\times 2$
第 3 區	2(1*2)＋6	2(1*2)＋8	4(1*2)＋10	4(2*2)＋12		$2p+n-4$

(6) 角落數

第 1 個角落數＝區格數－第 1 區轉角格＋1＝$\frac{n^2-2n}{4}-(2p+1)+1=\boxed{\frac{n^2-2n}{4}-2p}$

第 2 個角落數＝第 1 個角落數＋(第 2 區格數－第 2 區轉角格)＋1

$$=(\frac{n^2-2n}{4}-2p)+[\frac{n^2-2n}{4}-(\frac{n-4}{2}-p)\times 2]+1=\boxed{\frac{n^2-4n}{2}+5}$$

第 3 個角落數＝第 2 個角落數＋(區格數－第 3 區轉角格)＋1

$$=\frac{n^2-4n}{2}+5+[\frac{n^2-2n}{4}-(2p+n-4)]+1=\boxed{\frac{3n^2-14n}{4}-2p+10}$$

(7) 3 個角落數＝$(\frac{n^2-2n}{4}-2p)+(\frac{n^2-4n}{2}+5)+(\frac{3n^2-14n}{4}-2p+10)$

$$=\boxed{\frac{3n^2-12n}{2}-4p+15}$$

7、偶數最大值

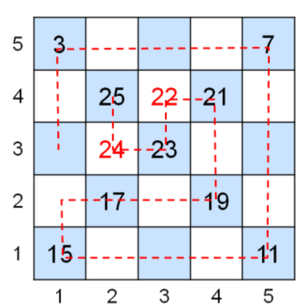
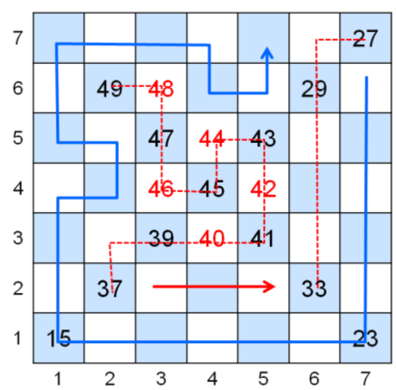
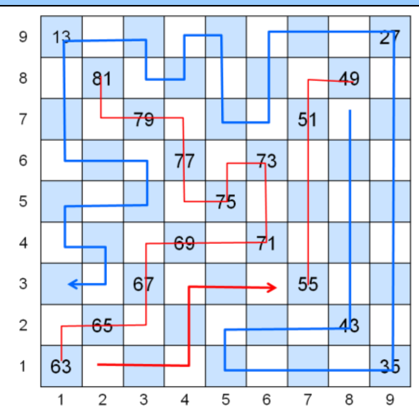
最大值＝a 軸＋b 軸＋c 軸＋d 軸＋角落數

$$=\frac{2n^3-n^2+2n}{4}+\frac{2n^3-3n^2+8n}{4}+\frac{2n^3-7n^2+16n+4}{4}+\frac{2n^3-23n^2+94n-168}{4}$$

$$+\frac{3n^2-12n}{2}-4p+15=\boxed{2n^3-7n^2+24n-26-4p}$$

六、研究 3：當為奇數時，如何走出雙對角線數字總和為最大值的路徑。

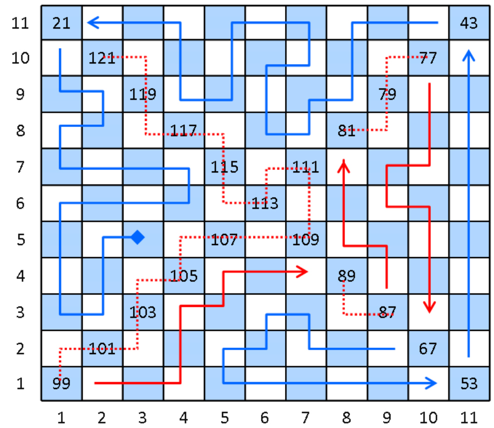
(一) 仿照 n＝偶數模式，最大數 n^2 從（2, n-1）位址出發，依 a 軸→ b 軸→ c 軸→ d 軸→角落數，依序以漢米爾頓路徑走完所有格子。

n＝5，和＝141	n＝7，和＝433	n＝9，和＝993
		

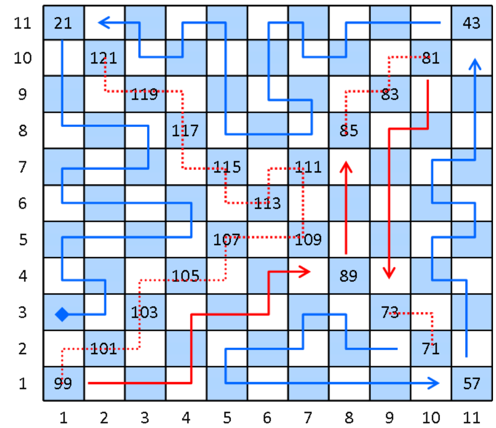
在邊長＝9 的情形下，我們發現了一個新的走法，先將左下的 b 軸線走完，再陸續完成 d 與 c 兩軸線，可以得到雙對角線的最大值，於是我們決定重新定位邊長奇數雙對角線雙對角線和最大值的路徑。

(二)以邊長＝11，找出雙對角線和最大值的最佳路徑

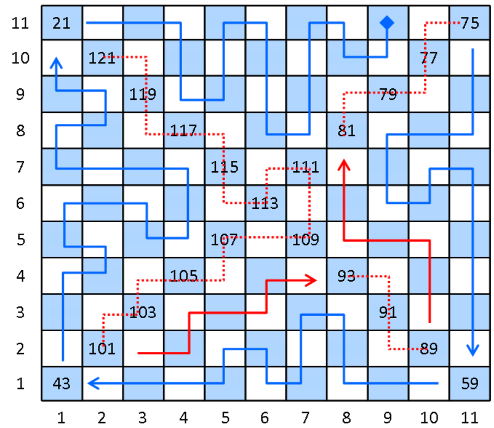
左上→左下(包括角落數)→右下→右上。
和＝1917



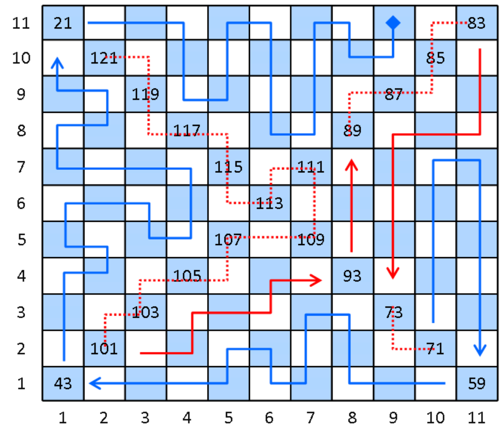
左上→左下(包括角落數)→右上→右下。
和＝1923



左上→左下→右下→右上(包括角落數)。
和＝1929

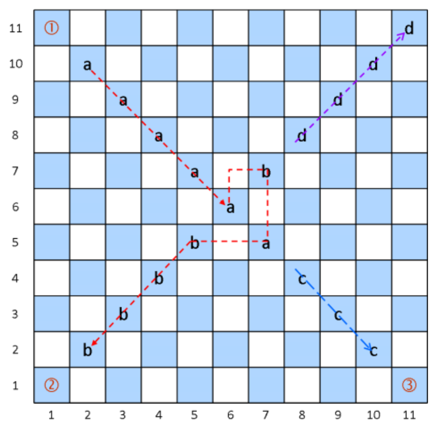


左上→左下→右上(包括角落數)→右下。
和＝1925



1、由邊長＝11 的情形探討，我們發現雙對角線和最大值的最佳路徑為
先走 a 軸→中間格→繞小圈→b 軸→c 軸→d 軸(包括角落數)→角落數③→角落數②→角落數①。

2、將此路徑沿用到邊長為 13、15、…發現都能找出邊長為奇數雙對角線和為最大值的路徑。



(三) n 為奇數雙對角線數字和最大值探討

1、n＝偶數模式時，對角線位址有奇數，有偶數；而 n＝奇數模式，對角線位址上的數，都是奇數。

2、與 n 為偶數相同，最大值＝a 軸＋b 軸＋c 軸＋d 軸＋角落數；但路徑不同。

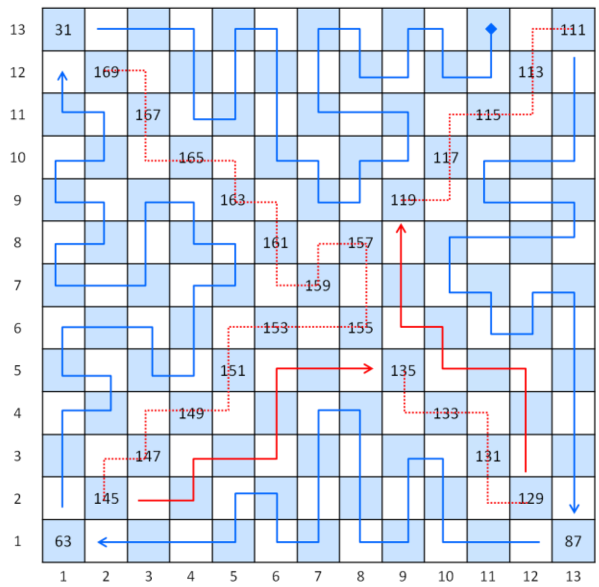
3、奇數的 a 軸線與 b 軸線可連為一公差為－2 的等差數列，故 a 軸與 b 軸可合併計算。

(1) a 軸＋b 軸的項次＝ n，首項＝ n^2，

末項＝首項－(項次－1) × 2＝$n^2-(n-1)\times 2=n^2-2n+2$。

(2) a 軸＋ b 軸的和＝（n^2+n^2-2n+2）× n $\times\frac{1}{2}=(2n^2-2n+2)\times n\times\frac{1}{2}=\boxed{n^3-n^2+n}$

4、奇數的 c 軸線的和為一等差數列



(1) c 軸，如圖（9,5）~（12, 2）

n＝11； 93+91+89＝273

n＝13；135+133+131+129＝528

n＝15；185+183+181+179+177＝905

……

c 軸的和可視為一等差級數

(2) c 軸的項次＝$\frac{n-1}{2}-2=\frac{n-5}{2}$

首項＝b 的末項－(n－3)

$=n^2-2n+2-(n-3)=n^2-3n+5$。

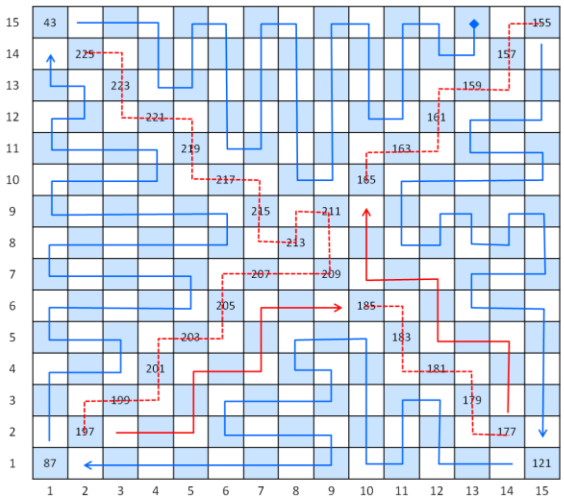
末項＝$n^2-3n+5-(\frac{n-5}{2}-1)\times 2=n^2-4n+12$

(3) c 軸的和＝ $(\underline{n^2-3n+5}+\underline{n^2-4n+12})\times\frac{n-5}{2}\times\frac{1}{2}$

$=(2n^2-7n+17)(n-5)\times\frac{1}{4}=(2n^3-7n^2+17n-10n^2+35n-85)\times\frac{1}{4}$

$=\boxed{\frac{2n^3-17n^2+52n-85}{4}}$

5、奇數的 d 軸線



(1) 如圖（8, 4）~（10, 2）也是個等差數列。

n＝11；81+79+77+75＝312

n＝13；119+117+115+113+111＝575

n＝15；165+163+161+159+157+155＝960

……

(2) d 軸的項次＝$\dfrac{n-1}{2}-1=\dfrac{n-3}{2}$

數列首項＝c 軸末項－（n－3）

$=n^2-4n+12-(n-3)=n^2-4n+12-n+3=n^2-5n+15$

末項$=n^2-5n+15-(\dfrac{n-3}{2}-1)\times 2=n^2-5n+15-n+5=n^2-6n+20$

(3) d 軸的和＝$(\underline{n^2-5n+15}+\underline{n^2-6n+20})\times(\dfrac{n-3}{2})\div 2$

$=(2n^2-11n+35)\times\dfrac{n-3}{4}$

$=(2n^3-11n^2+35n-6n^2+33n-105)\times\dfrac{1}{4}$

$=\dfrac{2n^3-17n^2+68n-105}{4}$

6、角落數

(1) 角落數＝區格數－轉角數

n 為奇數的區格數$=[n^2-(2n-1)]\div 4=\dfrac{n^2-2n+1}{4}$

(2) 第 1 區的角落數＝區格數－轉角數＋1$=\dfrac{n^2-2n+1}{4}-\dfrac{n-1}{2}+1=\dfrac{n^2-4n+7}{4}$

(3) 第 2 區的角落數＝第 1 區的角落數＋區格數－轉角數＋1

$=\dfrac{n^2-4n+7}{4}+\dfrac{n^2-2n+1}{4}-\dfrac{n-3}{2}+1=\dfrac{n^2-4n+7+n^2-2n+1-2n+6+4}{4}$

$=\dfrac{2n^2-8n+18}{4}$

(4) 第 3 區的角落數＝第 2 區的角落數＋區格數－轉角數－b 軸至 c 軸連接格＋1

$$=\frac{2n^2-8n+18}{4}+\frac{n^2-2n+1}{4}-\frac{n-5}{2}-(n-4)+1$$

$$=\frac{2n^2-8n+18+n^2-2n+1-2n+10-4n+16+4}{4}$$

$$=\frac{3n^2-16n+49}{4}$$

(5) 角落數的和 $=\frac{n^2-4n+7}{4}+\frac{2n^2-8n+18}{4}+\frac{3n^2-16n+49}{4}=\frac{6n^2-28n+74}{4}$

7、雙對角線的和

$$n^3-n^2+n+\frac{2n^3-17n^2+52n-85}{4}+\frac{2n^3-17n^2+68n-105}{4}+\frac{6n^2-28n+74}{4}$$

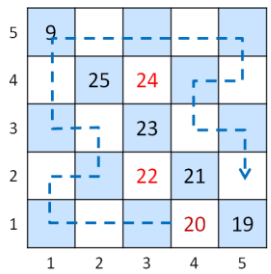
$$=\frac{4n^3-4n^2+4n+2n^3-17n^2+52n-85+2n^3-17n^2+68n-105+6n^2-28n+74}{4}$$

$$=\frac{8n^3-32n^2+96n-116}{4}=2n^3-8n^2+24n-29$$

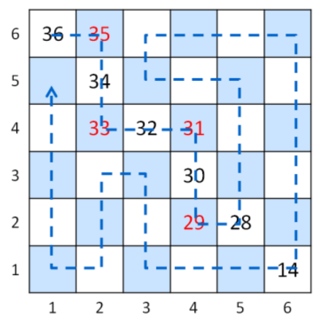
伍、 研究結果

一、單一對角線的填法

(一)將最大數 n^2 由對角線格(2,n-1)位置沿對角線蛇形而下，將轉角數依序平均分配在右上區與左下區，至(n,n)位址，再完成左下區(或右上區)的餘格，至(1,n)格位置填完最後一個對角線數後，再完成右上區餘格。



(二) 而偶數則多一種填法，最大差異在起始點，偶數的起始點除了(2,n-1)位置外，亦可由或(1,n)的位置開始，依序完成 n-1 個角落數，接著完成右上區(或左下區)的餘格，至(n,1)格位置填完最後一個對角線數後，再完成左下區(或右上區)餘格。



二、單一對角線數字和的最大值

$$奇數=\frac{2n^3-3n^2+4n-1}{2}\text{；}偶數=\frac{2n^3-3n^2+4n}{2}\text{。}$$

三、雙對角線的填法

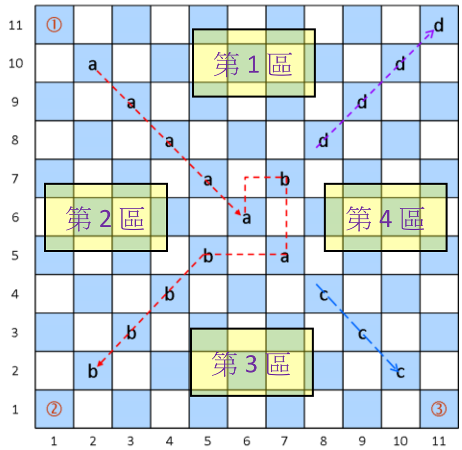
(一) 奇數

1、將最大數 n^2 由(2，n-1)格開始，沿 a 軸往中間填。

2、到達中間繞小圈填完中間五格

3、再依序填完左下 b 軸、左下 c 軸和右上 d 軸。

4、最後再填第 4 區餘格→角落數③→第 3 區餘格→角落數②→第 2 區餘格→角落數①→第 1 區餘格。

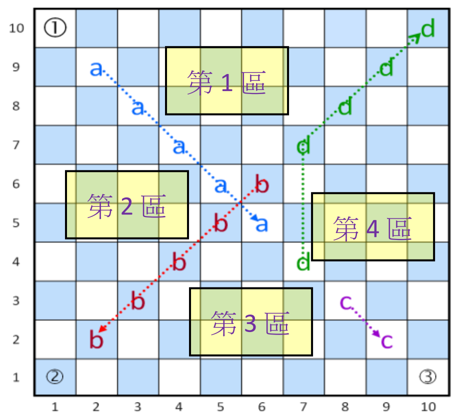


(二) 偶數

1、將最大數 n^2 由(2，n-1)格開始，沿 a 軸往中間走。

2、到達中間走完中間四格，再依序走完左下 b 軸、右上 d 軸和右下 c 軸。

3、最後再填第 4 區餘格→角落數③→第 3 區餘格→角落數②→第 2 區餘格→角落數①→第 1 區餘格。



四、雙對角線數字和的最大值

(一) 奇數 $=2n^3-8n^2+24n-29$；

(二) 偶數 $=2n^3-7n^2+24n-26-4p$；$p=\left\lfloor \frac{n-4}{2}\div 3 \right\rfloor$

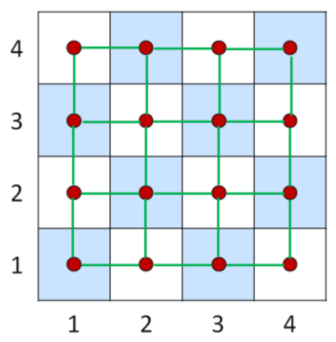
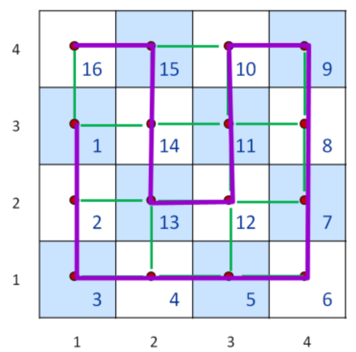
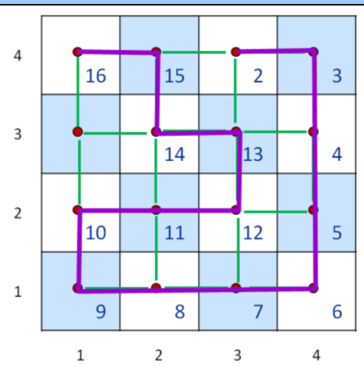
陸、討論

一、數字迷宮遊戲 VS 漢米爾頓路徑

(一) 漢米爾頓路徑：給一圖 G=(V,E)，連接圖中的每一頂點，且該點只通過一次的路徑稱為「漢米爾頓路徑」。

(二) 數字迷宮遊戲：遊戲規定在 n*n 的正方形方格，每次依序填數字，且只能在前一數字的相鄰位置填入下一個數字，且需把所有格子填滿。

1、若我們將遊戲格上的的每一格當成漢米爾頓路徑的每一個頂點，能填完所有格子，即代表通過所有的頂點。

<table>
<tr><th>圖 1</th><th>圖 2</th><th>圖 3</th></tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

(1) 如圖 1，線上的每一格代表圖上的點(16 格共 16 點)，垂直或水平方向的相鄰格可視可連接的線。

(2) 如圖 2，將 1~16 依序填入所有的格子，依序填完了所有格子的路徑，就是一條「漢米爾頓路徑」。

(3) 如圖 3，有一紅點(1，3)位置的格子未連接，即圖 3 未成功的連出漢米爾頓路徑。

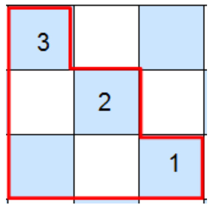
2、換句話說，「數字迷宮」遊戲不但需努力將較大的數填在對角線格，也需注意餘格需保持能連出「漢米爾頓路徑」。

二、為什麼「餘格」需避開 3 層以上的階梯形狀？

(一)單側 3 層階梯：

1、單側 3 層階梯共有 4 個色格，2 個白格，色格比白格多 2，

由棋盤格可發現，每個色格旁邊皆為白格；每個白格旁邊也皆為色格，故在棋盤完成「漢米爾頓路徑」必須 1 格白格，1 格色格，故白格與色格的差最多只能 1。

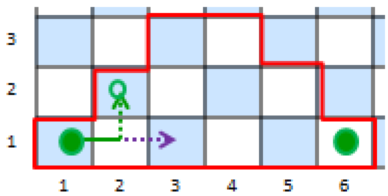
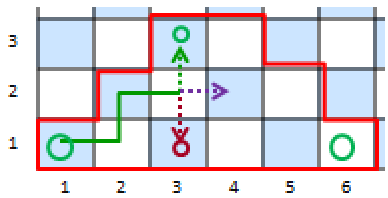


若「白格＝色格」，則起點與終點分別為空白格與色格；

若「白格－色格＝1」，則起點與終點皆為白格；

若「色格－白格＝1」，則起點與終點皆為色格；

2、雙側 3 層階梯：

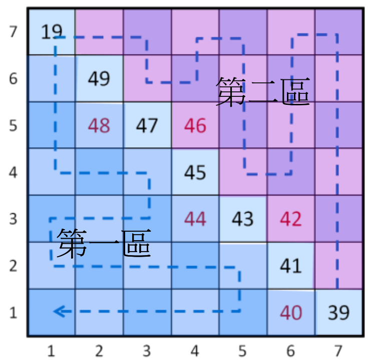
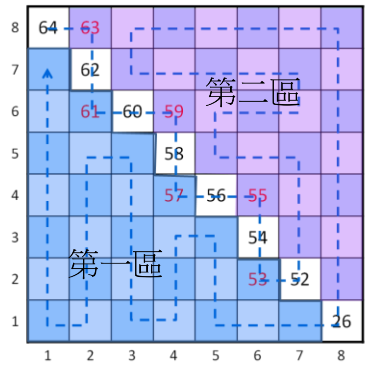
	(1) 每個格子都看成點的話，那麼(1,1)和(6,1)這兩點與其他格只有一條連線，故只能當成端點(起點或終點)。 (2) 以(1,1)位置當起點，(6,1)就是終點，其他的格子都無法當端點。 (3) 若「選擇紫線」往右的話，則(2,2)位置只剩一條連線，就成了新的端點，故無法完成「漢米爾頓路徑」。
	(4) 若「選擇綠線」當綠線走到(3,2)位置時，無論走綠線或紫線，(3,1)位置都會只剩一條連線，而成了新的端點。 (5) 相同的，無論走紅線或紫線，(3,3)位置都會只剩一條連線，而成了新的端點。 (6) 故無論選綠線、紅線或紫線都會使餘格出現新的端點，而使餘格無法完成「漢米爾頓路徑」。 (6) 故雙側 3 層階梯的餘格無法完成漢米爾頓路徑。

三、為什麼單對角線的的轉角數須平均安排在左下(第一區)和右上(第二區)兩個區塊？與第 n 個對角線數的值有什麼關係？

(一)單對角線的兩個區格數都呈「單側階梯」形狀。

1、以下圖為例，單側階梯狀每兩層就會出現的色格比白格多 1。

2、所以每兩層就須安排 1 個轉角數(紅字)，才能使餘格的的白格和色格的差維持在＜2 的狀況，才能使左上與右下兩個區格都能順利完成漢米爾頓路徑。

圖 1(奇數)	圖 2(偶數)
	

(二) 這也說明了為什麼邊長 n 為奇數時，第 n 個對角線數＝(第 n－1 個對角線數－1)÷ 2；n 為偶數時，第 n 個對角線數＝第 n－1 個對角線數 ÷ 2

1、n＝奇數時，

(1) 區格數的餘格＝$n^2-[n+(n-2)]=n^2-2n+2$（第一區比第二區多 1 轉角格）故

第一區餘格＝$\dfrac{n^2-2n+1}{2}$，第二區餘格＝$\dfrac{n^2-2n+3}{2}$

(2)第 n 個對角線數＝第一區餘格＋1＝$\dfrac{n^2-2n+1}{2}+1=\boxed{\dfrac{n^2-2n+3}{2}}$

(3) 第 n－1 個對角線數＝2 區餘格＋2＝$(n^2-2n+2)+2=\boxed{n^2-2n+4}$（由餘格思考）

＝$n^2-[(n-1)-1]\times 2=n^2-2n+4$（由等差數列第 n-1 項思考）

(4) 所以第 n 個對角線數＝（第 n－1 個對角線數－1）÷ 2

2、n＝偶數時，

(1) 區格數的餘格＝$n^2-[n+(n-2)]=n^2-2n+2$（轉角數為偶數且平分兩區）故

各區餘格＝$\dfrac{n^2-2n+2}{2}$

(2)第 n 個對角線數＝第一區餘格＋1＝($\frac{n^2-2n+2}{2}$)＋1＝$\boxed{\frac{n^2-2n+4}{2}}$

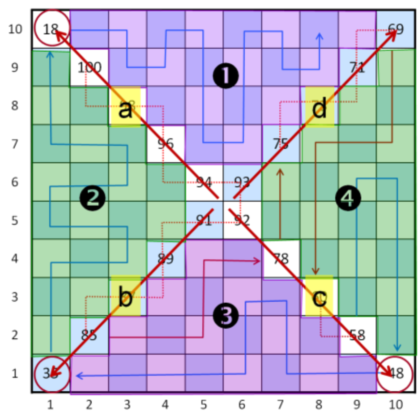
(3) 第 n－1 個對角線數＝2 區餘格＋2＝(n^2－2n＋2)＋2＝$\boxed{n^2-2n+4}$（由餘格思考）

＝n^2－[(n－1)－1]× 2＝n^2－2n＋4（由等差數列第 n-1 項思考）

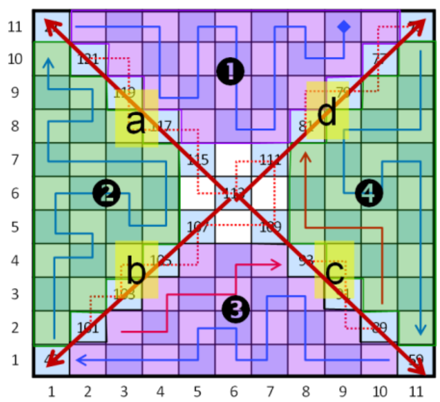
(4) 所以第 n 個對角線數＝第 n－1 個對角線數÷ 2

三、為什麼邊長為奇數的對角線，無法如邊長為偶數的對角線，將轉角數盡量安排在第 2 區和第 4 區？

(一) n＝偶數時

	1、n 為偶數時，一條對角線為偶數，一條對角線為奇數，故同一區的轉角格一側為色格，一側為白格。 2、每個區格數為雙側階梯形，每層為偶數格，換句話說每個區格數的白格＝色格。 3、以第❶區為例，若 a 軸和 d 軸的轉角數同時「－1」，第 1 區餘格的白格還是等於色格。 4、換句話說，任一區的兩條軸線同時增加或減少 x 格，則白格還是等於色格，不會因此而影響「漢米爾頓路徑」的完成。

(二) n＝奇數時

	1、n 為奇數時，兩條對角線都是奇數，故同一區的轉角格都是白格。 2、每個區格數為雙側階梯形，每層為奇數格，也就是說每一層會多 1 個白格。 3、為使白格＝色格則每一層需少掉一個白格(即安排 1 個轉角數 4、以第❶區為例，若 a 軸和 d 軸的需合力安排每一層都需有個轉角數

	5、換句話說，每條軸線的轉角數需輪流安排在軸線兩側的區格，才能使每個區格的餘格都保持白格與色格的差＜2，不會因此而影響「漢米爾頓路徑」的完成。

柒、結論

一、求單對角線或雙對角線最大值的填法，都能以（2, n-1）為起始格填入最大數，但需時時注意餘格隨時維持為「漢米爾頓路徑」。

二、對角線和為最大值的填法就是先填完軸線上的「對角線數」，再處理位於對角線上的「角落數」和各區的餘格。

三、連接對角線上的「轉角數」該填在軸線的哪個區格，是影響對角線數和能否為最大值的關鍵。

(一) 轉角數的位置會影響各區的餘格是否為「漢米爾頓路徑」，會不會留下「缺格」。

(二) 轉角數的安排也會影響到最後的 3 個角落數，這現象我們在邊長為偶數的雙對角線看到明顯的例子。

四、求雙對角線數字和最大值的歷程雖然複雜，但最大值的公式卻簡潔有力

(一) 奇數 $=2n^3-8n^2+24n-29$；

(二) 偶數 $=2n^3-7n^2+24n-26-4p$；$p=\left\lfloor \frac{n-4}{2}\div 3 \right\rfloor$

捌、 感想與展望

一、在填雙對角線數時，我們猶如墜入迷宮，哪條路徑才能順利地填出最大值，又不會留下「缺格」而功虧一簣，因此我們把這個遊戲命名為「數字迷宮」。

二、數字迷宮遊戲似乎還有很大的發展空間：

(一) 求正方體上六個面雙對角線上的最大值。

(二) 如何走出立體的對角線數的最大數字和。

玖、 參考資料

一、第 49 屆全國科展國小組數學：數字拼圖

二、徐力行（2004）。沒有數字的數學。臺北市：天下遠見。

三、康軒文教事業（2014）。國小數學課本第 11 冊第 5 單元數量關係。新北市：康軒。

四、康軒文教事業（2014）。國小數學課本第 11 冊第 9 單元列式與等量公理。新北市：康軒。

五、康軒文教事業（2015）。國小數學課本第 12 冊第 1 單元分數與小數的四則計算。新北市：康軒。

六、康軒文教事業（2015）。國小數學課本第 12 冊第 6 單元怎樣解題。新北市：康軒。

【評語】080402

1. 本案作品的分析，還算相當完整，主題的選擇也相當的有趣。從深度及廣度來看這是一件不錯的作品。

2. 作者在處理所提的問題時，探討各種對角線數字和的可能性，做了相當有深度的分析。