

中華民國第 56 屆中小學科學展覽會 作品說明書

高級中等學校組 物理與天文學科

051802

Euler's disk 的影像和光

學校名稱：國立嘉義高級中學

作者： 高二 郭印心 高二 邱可力	指導老師： 周黛青 邱俊園
-------------------------	---------------------

關鍵詞：Euler's Disk、角速度、螺旋線

摘要

我們用 300fps 的高速攝影機拍攝 Euler's Disk 的實驗影片，分析各圓盤的旋轉時間，旋轉時的進動角速度 Ω 、自轉角速度 ω 、盤面傾斜角度 α 與時間的關係。發現直徑厚度皆大的黃銅盤對玻璃板時間最長。我們也在實驗時打光，利用反射光分析可得較精準且較小角度的 α 。雖然僅少數圓盤可成功，我們亦錄製圓盤旋轉敲打平板的聲音，分析旋轉時的進動角速度。

壹、研究動機：

在一次與同學們茶餘飯後的聊天中，我們一時興起拿起桌上的十元硬幣，比賽誰能讓它轉的最久，還討論怎麼轉才能贏。出於好奇我們更上網查了相關資料，發現了 Euler's Disk。而在 youtube 上也有在 Euler's Disk 打光的展示，引起我們做打光實驗的興趣。

貳、研究目的：

- 一、探討各圓盤旋轉時間的長短。
- 二、探討各圓盤旋轉時進動角速度、自轉角速度、盤面傾斜角度與時間的關係。
- 三、打雷射光於圓盤上，探討反射光在紙屏上形成圖形。
- 四、錄製圓盤敲打平板的聲音，探討聲音的波形。

參、研究器材：

1. 攝影機×2(可拍攝 300fps)，腳架×2，打光燈×2，麥克風。
2. 相片翻拍桌。
3. 電腦，Tracker 應用軟體，Startrails 應用軟體，Free Video to JPG Converter 應用軟體，Excel 試算表，Cool Edit pro 應用軟體。

4. 游標尺，電子天平，水平儀，標記貼紙，黑絨布。
5. 鋁板(4mm×30cm×30cm)，玻璃板。
6. CD片：1、2、4、6層。

CD片，直徑(12cm)	一層	二層	四層	六層
厚(mm)	1.22	2.41	5.02	7.29
質量(g)	16.2	32.6	66.0	98.7

7. 鋁圓盤

直徑 (cm)	5.08			7.62			10.16		
厚 (mm)	4	6	8	4	6	8	4	6	8
質量 (g)	22.2	33.6	44.4	49.5	73.7	98.6	88.7	131.7	175.5

8. 黃銅圓盤

直徑 (cm)	5.08			7.62			10.16		
厚 (mm)	4	6	8	4	6	8	4	6	8
質量 (g)	66.8	102.1	136.4	150.7	232.3	302.5	275.8	426.6	553.6

9. 布輪機，砂紙，量角器，尺。
10. 雷射，紙屏幕，碼錶。

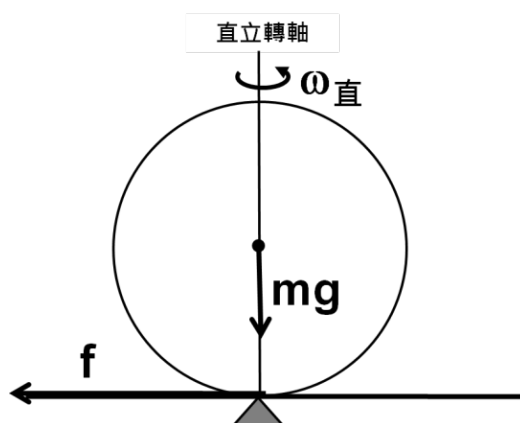


圖一：各式圓盤

肆、原理：

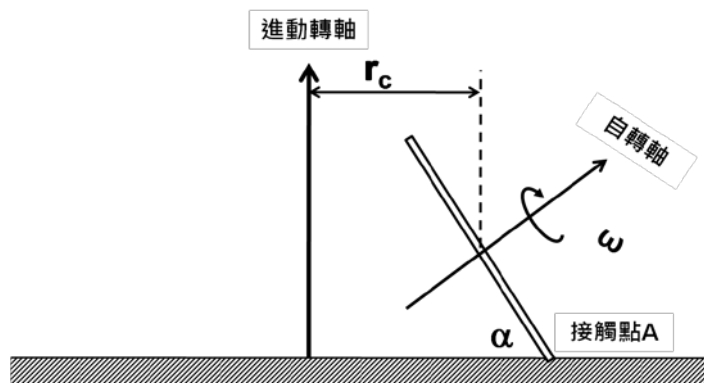
一、Euler's disk 的三階段運動：

1. 第一階段：直立自轉（spin）。如圖二，自轉軸通過直徑，圓盤會在板面上大幅度滑動，而自轉角速度 $\omega_{直}$ 會受施力的大小影響；接著，滑動幅度會漸漸減小，最後停在一小區域運動。此時摩擦力及重力通過支點，不造成力矩；所以在理想上，這種運動應該會持續到最後，當能量被摩擦力消耗完之後，圓盤會直接直立停止。



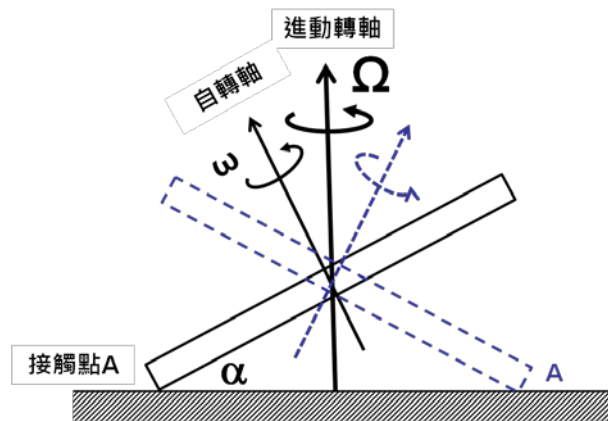
圖二：直立自轉

2. 第二階段：滾動（roll）。如圖三，自轉軸在偏離直徑的地方，圓盤繞著自轉軸自轉，此時重力造成力矩，使圓盤邊緣開始敲打板面，產生進動角速度 Ω 。在直立自轉的時候，只要圓盤稍微對地面傾斜一點，以頂部支點來看，摩擦力分力的力矩就會開始作用，將圓盤向下拉。拉到質心與底部支點連線超過垂直底面的垂線時，圓盤質心會瞬間下降，位能轉動能， ω 變快。



圖三：滾動

3. 第三階段：自轉運動。如圖四，自轉軸通過質心，重力力矩則以垂直角動量的方向，拉動圓盤做圓周運動。理論上，在沒有摩擦力的狀態下，會維持同一個傾斜角 α 運動。但在實際狀態仍有摩擦力會消耗能量，使得力學能耗損，圓盤傾斜角減小，位能變成動能；因此，如式 $\Omega = \sqrt{\frac{4g}{r \sin \alpha}}$ ，圓盤 Ω 越來越大，但 α 、 ω 越來越小。此時，還可以聽到圓盤撞擊板面的聲音越來越大、越來越快，終至停止。



圖四：自轉運動

伍、研究過程與方法：

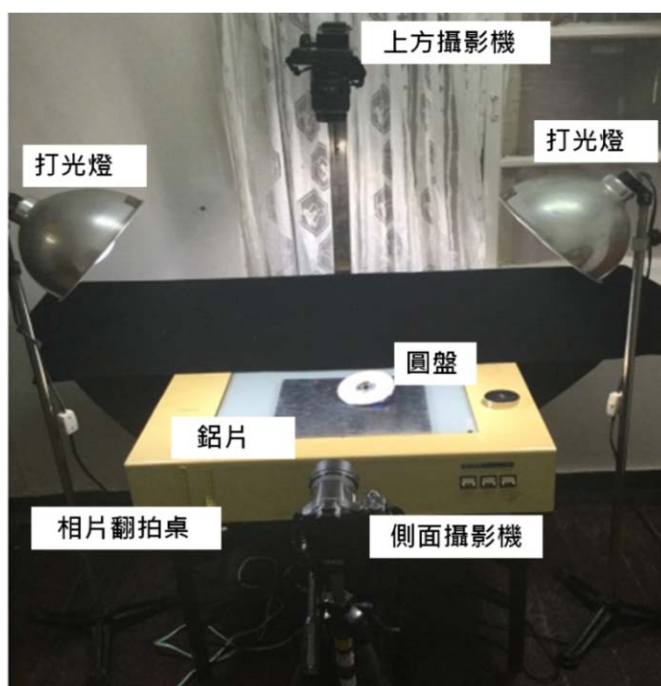
一、前置實驗：

1. 先在鋁板上，嘗試幾塊不同大小、厚度的鋁盤，發現直徑大的鋁盤的直立自轉和傾斜後的運動有較明顯的分隔、薄的圓盤在力量小時較不容易失敗，所以決定用直徑大、厚度小的鋁盤做實驗。
2. 用相差甚大的力量重複做幾次實驗，由上方看會發現進入第二階段的圓盤會有明顯繞小圈地運動，在此時按下碼錶，記錄到鋁盤旋轉停止。

二、拍攝各圓盤的旋轉影片：

1. 如圖五為實驗裝置，原本只打一邊光，在分析圓盤傾斜角時發現，另一邊不夠亮，位置模糊不易判讀，所以我們將兩邊都打光。
2. 底面置放鋁板。

3. 在上方和側面各置一台攝影機，同時拍攝，側面的攝影機由上往下調整，從原本可見鋁板面後方，直至恰看不到，使攝影機為由正側面拍攝。
4. 攝影機設為 300fps，逐一旋轉各圓盤，拍攝上方和側面的影片。
5. 底面改放玻璃板，重複步驟 3、4。
6. 由上方的影片分析自轉角速度 ω 。
7. 由側面影片分析進動角速度 Ω 、傾斜角 α 。

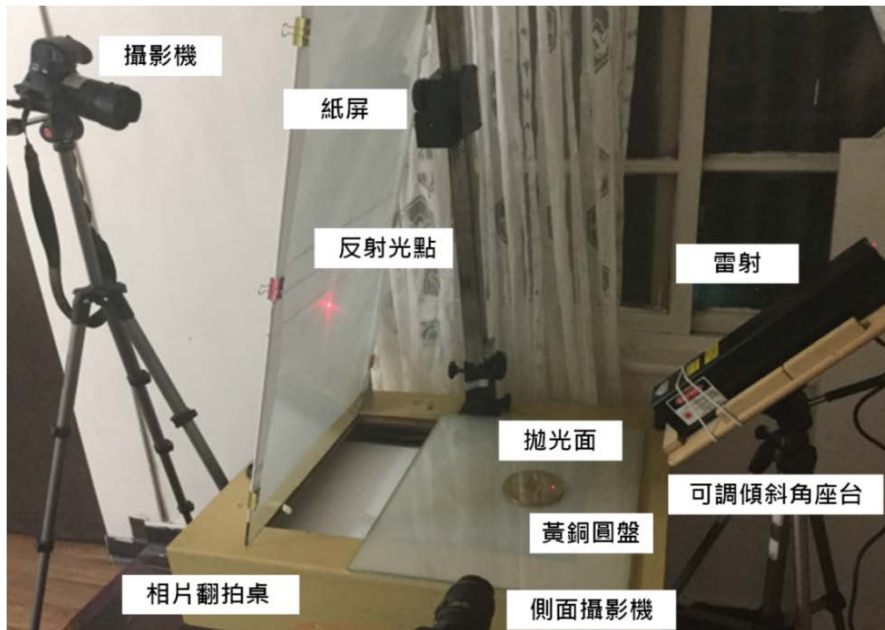


圖五：拍攝各圓盤的旋轉影片裝置圖

三、打雷射光在圓盤上，拍攝反射光在紙屏上的影像影片：

1. 先用布輪機拋光黃銅圓盤面，再用水砂紙拋光，愈換愈細的砂紙，再加牙膏拋光，使黃銅表面接近鏡面，可反射雷射光。亦有將鋁圓盤面拋光，但效果不好，所以反射部分只用黃銅圓盤和 CD 盤做。
2. 如圖六為實驗裝置，將木板底下鑽螺紋，鎖在雲台上，雷射綁於木板上。將雲台夾在腳架上，即可利用腳架調整雷射的入射角度。
3. 強化玻璃上夾上烤盤紙(透光)當紙屏幕，經圓盤反射的雷射光打在正面，攝影機在背面拍攝影像，側面亦架設一台攝影機，並調整成正側面，兩攝影機同時拍攝。

4. 攝影機設為 300fps，逐一旋轉各圓盤，拍攝反射光和側面的影片。
5. 底面改放玻璃板，重複步驟 3、4。

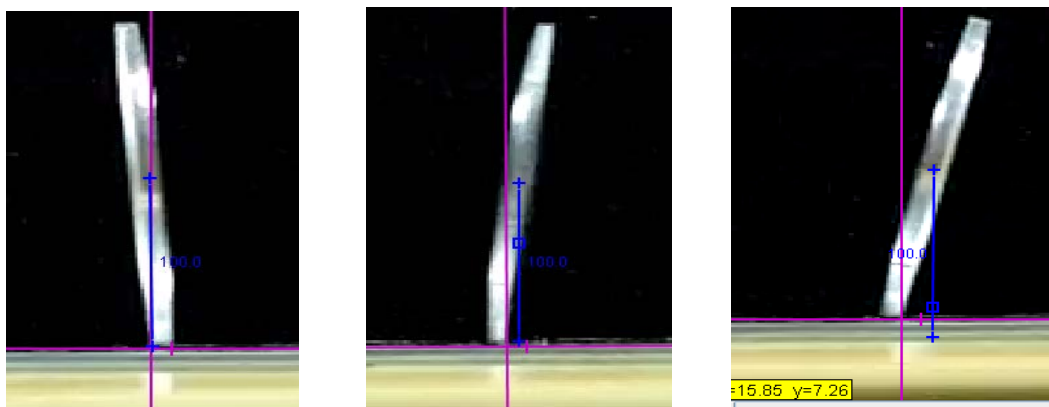


圖六：拍攝反射光在紙屏上的影像影片裝置圖

四、由影片讀取數據的方法：

(一) 分析側面拍攝的影片：

1. 從頭播放影片，如圖七，找出質心與底部支點連線超過垂直底面的垂線的幅數、最後停止的幅數，相減乘 $1/300$ ，得出轉動時間。



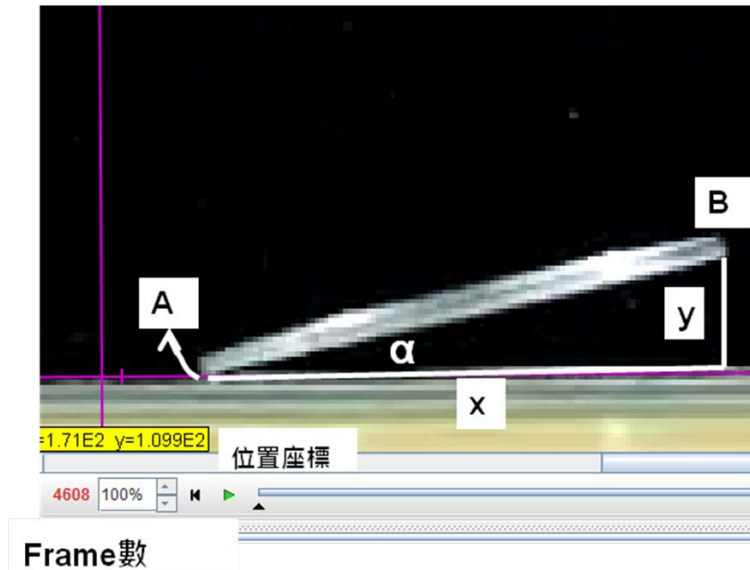
圖七：判斷質心是否超過垂直軸

2. 用 tracker 應用軟體處理，由圓盤停止後往前將影片一格格往前播放，

由最後一圈開始回讀，讀至圓盤因進動旋轉開始快速下降，記錄幅數。

3. 如圖八，由圓盤左邊 A 點接觸開始，繞一圈回來，讀取幅數，將幅數差乘 1/300 可得此段時間 Δt ，求得此時段內的平均進動角速度

$$\Omega = \frac{2\pi}{\Delta t}, \text{ 得 } \Omega \text{ 對 } t \text{ 關係。}$$



圖八：圓盤側面照片

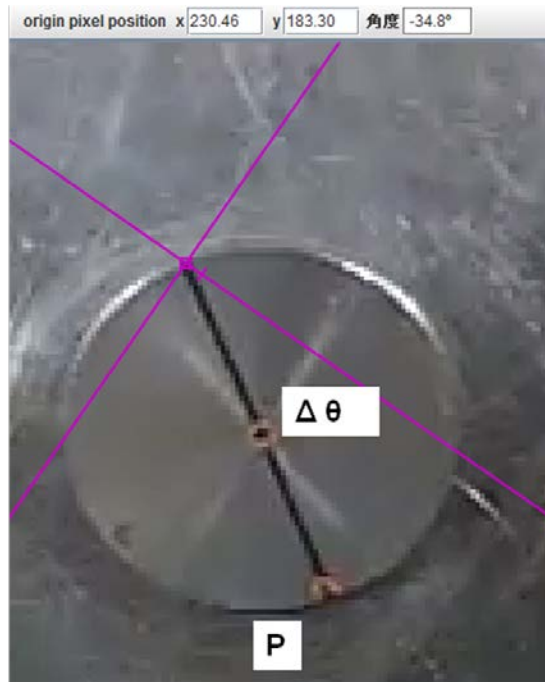
4. 續步驟 2，如圖八標示，讀取接觸點 A 和圓盤另一端 B 點的 (x, y) ，

由 $\tan \alpha = \frac{y}{x}$ ，可得圓盤傾斜角 α ，並由幅數換算時間，得 α 對 t 關係。

(二)分析上方拍攝的影片：

1. 如圖九，同樣由圓盤停止後往前將影片一格格往前播放，讀取橘色貼紙與板面的兩次接觸點 P、P' 的幅數和圓盤上黑色線段的旋轉角度 $\Delta \theta$ ，幅數差換算得時間 Δt ，即可得這時段內的平均自轉角速度

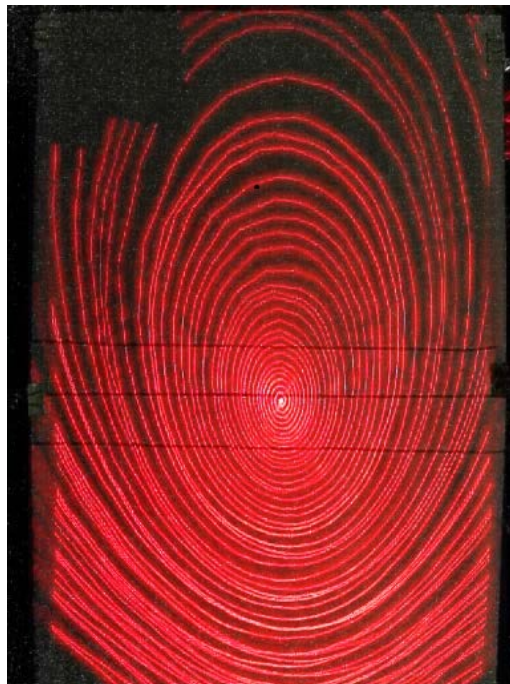
$$\omega = \frac{\Delta \theta}{\Delta t}, \text{ 得 } \omega \text{ 對 } t \text{ 關係。}$$



圖九：圓盤上方照片

(三) 分析反射光在紙屏上的影像的影片：

1. 用 Video to JPG Converter 應用軟體，將紙屏上的影像的影片轉成每秒 300 張照片，再用 Startrails 應用軟體，將照片疊圖，結果如圖十。



圖十：反射光在紙屏上的影像軌跡圖

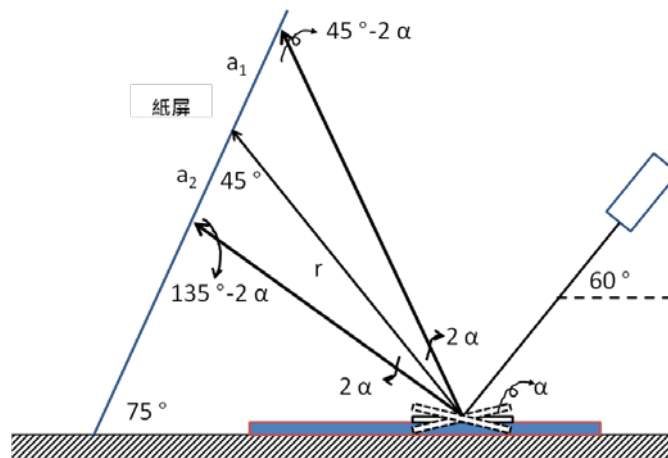
2. 由圖中任一圈最上和最小的光點，分析 α 較小時的反射光。雷射光打在圓盤上點變動很小視成固定，圓盤左右傾斜 α ，光線圖如圖十一（實驗的 r 約50cm），可得

$$\frac{a_1}{\sin 2\alpha} = \frac{r}{\sin(45^\circ - 2\alpha)} \Rightarrow a_1 = \frac{\sqrt{2}r \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha - \sin 2\alpha} \dots(1)$$

$$\Rightarrow \cot 2\alpha = \frac{\sqrt{2}r}{a_1} + 1 \dots(2)$$

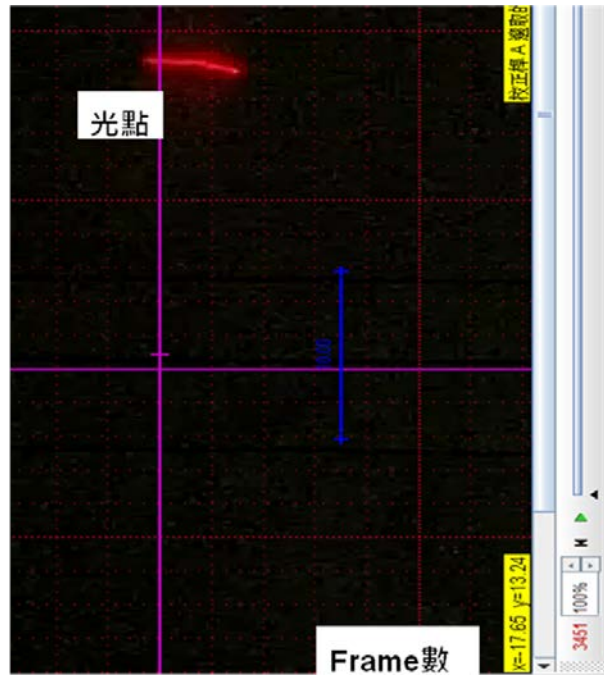
$$\frac{a_2}{\sin 2\alpha} = \frac{r}{\sin(135^\circ - 2\alpha)} \Rightarrow a_2 = \frac{\sqrt{2}r \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha + \sin 2\alpha} \dots(3)$$

$$\Rightarrow \cot 2\alpha = \frac{\sqrt{2}r}{a_2} - 1 \dots(4)$$



圖十一：上和下的光點分析圖

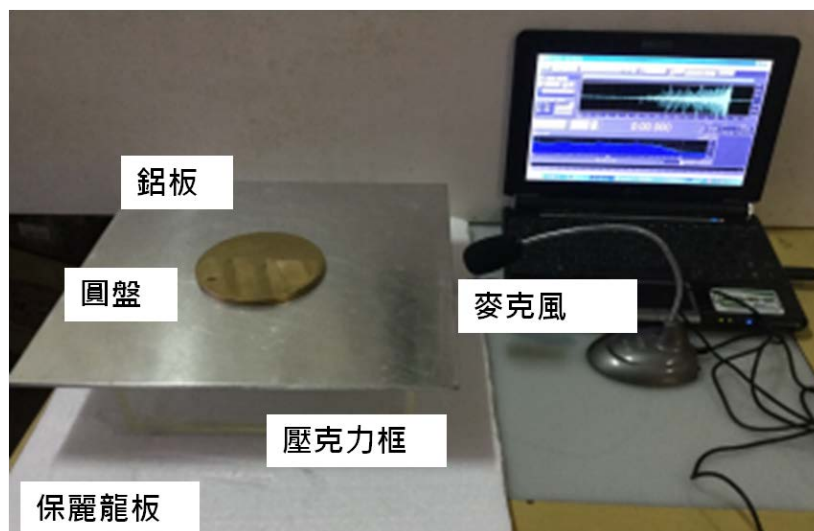
3. 用 tracker 應用軟體讀出影片中的 a_1 和幅數，如圖十二，由(1)式求得 α ，並由幅數算得時間，得 α 對 t 關係。
4. 再用 tracker 應用軟體讀側面影片，由圓盤停止往前看，找到同樣圈數，讀取 α （詳見前述(一)分析上方拍攝的影片），與步驟 4 中用反射光所得的 α 比較。



圖十二：在 tracker 讀光點位置圖

五、錄製圓盤敲打平板的聲音：

1. 將麥克風接到電腦，並盡量靠近圓盤放置，用 Cool Edit Pro 2.0 軟體錄下圓盤敲平板的聲音。
2. 原本平板是放置在翻拍桌上，圓盤敲打平板發出的聲音會受到桌面影響，所錄到的聲音很難判斷圓盤轉一圈的時間。所以我們將平板用壓克力做的方框架高，如圖十三，壓克力框下墊一保麗龍板，麥克風放在平板邊中央收錄音。



圖十三：錄製圓盤旋轉敲打平板的聲音裝置圖

3. 由軟體直接讀出兩最大聲的間隔時間 Δt ，亦可求得此時段內的平均進

動角速度 $\Omega = \frac{2\pi}{\Delta t}$ ，得 Ω 對 t 關係。

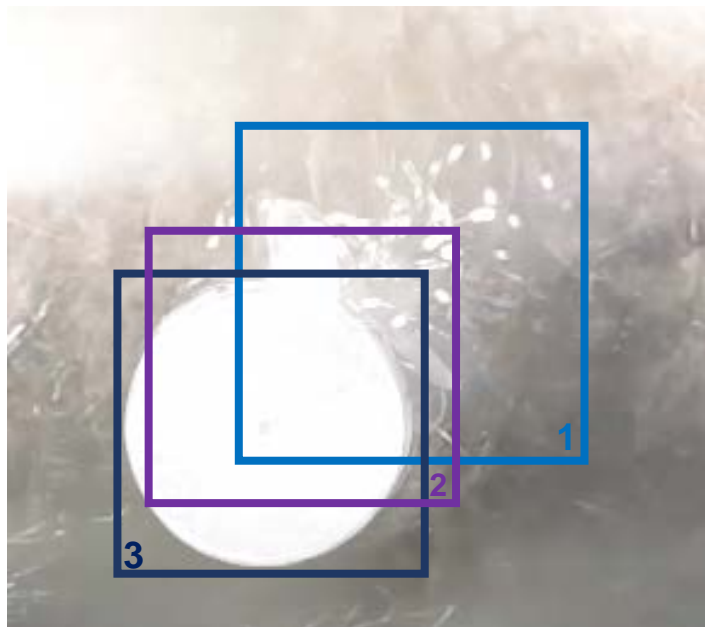
陸、研究結果與討論：

一、前置實驗：

(一) 直徑大厚度小的鋁盤對鋁板六次實驗結果：11.41s、11.10s、10.76s、10.85s、11.43s、10.78s，平均 11.06

(二) 發現力的大小果然不甚影響第二階段加第三階段的時間長度，所以第一階段的時間不列入時間長度計算內。由此我們推測第二階段的起始狀況是約略相同的。

(三) 圓盤的轉動進動所繞的軸在轉動的前段部分會大幅移動，但因為圓盤有滑動摩擦力作用，此軸移動會愈來愈小、愈來愈穩定；最後就幾乎不動，進到轉動第 3 階段。如圖十四由上方影片的疊圖顯示。



圖十四：上方拍攝影片的疊圖

(四) 厚度較大的圓盤因底面較大，摩擦力分布平均而不易影響圓盤，較

不容易傾斜，就會有轉到最後都不傾斜就停止的狀況。所以做厚度較大的圓盤的實驗的時候，會故意稍微先傾斜一點轉，較容易成功。

二、時間長度：

(一) 長度比較：每個取三次成功數據，將此三次數據取平均。

1. 鋁板上時間 (s) 的比較：

表 1：鋁盤黃銅盤對鋁板

厚度 (mm) 圓盤、 直徑 (cm)		薄 (4) 標示為 1	中 (6) 標示為 2	厚 (8) 標示為 3
鋁盤	平均	11.62	7.71	12.86
	10.16 標示為大	11.58	7.75	12.90
		11.63	7.62	12.83
		11.65	7.76	12.86
	平均	6.51	10.77	7.50
	7.62 標示為中	6.46	10.75	7.45
		6.53	10.82	7.53
		6.55	10.73	7.46
	平均	2.38	7.60	6.19
	5.08 標示為小	2.31	7.62	6.10
		2.42	7.58	6.20
		2.41	7.54	6.27
黃銅盤	平均	11.56	15.80	13.15
	10.16	11.53	15.85	13.10
		11.60	15.78	13.16
		11.56	15.79	13.20
	平均	10.00	11.11	10.29
	7.62	9.95	11.14	10.26
		10.03	11.03	10.22
		10.06	11.16	10.38
	平均	15.14	16.10	11.63
	5.08	15.20	16.02	11.70
		15.11	16.16	11.58
		15.12	16.20	11.62

表 2：CD 盤對鋁板

層數(mm)	1 (1.22)	2 (2.41)	4 (5.02)	6 (7.29)
平均	5.89	5.58	8.08	14.55
	5.88	5.63	7.99	14.62
	5.94	5.55	8.13	14.53
	5.86	5.57	8.11	14.49

2. 玻璃板上時間 (s) 的比較：

表 3：鋁盤黃銅盤對玻璃板

厚度 (mm) 圓盤、 直徑 (cm)		薄 (4)	中 (6)	厚 (8)
鋁盤	平均	11.65	13.49	9.76
	10.16	11.76	13.58	9.84
		11.63	13.42	9.79
		11.56	13.46	9.66
	平均	8.51	9.76	13.53
	7.62	8.43	9.88	13.62
		8.53	9.72	13.50
		8.58	9.68	13.48
	平均	4.83	5.54	4.49
	5.08	4.72	5.48	4.40
		4.86	5.60	4.52
		4.90	5.55	4.55
黃銅盤	平均	15.33	13.64	16.15
	10.16	15.20	13.57	16.08
		15.31	13.62	16.14
		15.48	13.74	16.24
	平均	12.43	12.83	12.19
	7.62	12.38	12.72	12.11
		12.39	12.86	12.16
		12.52	12.92	12.29
	平均	5.50	8.76	7.66
	5.08	5.42	8.69	7.54
		5.54	8.72	7.68
		5.62	8.88	7.77

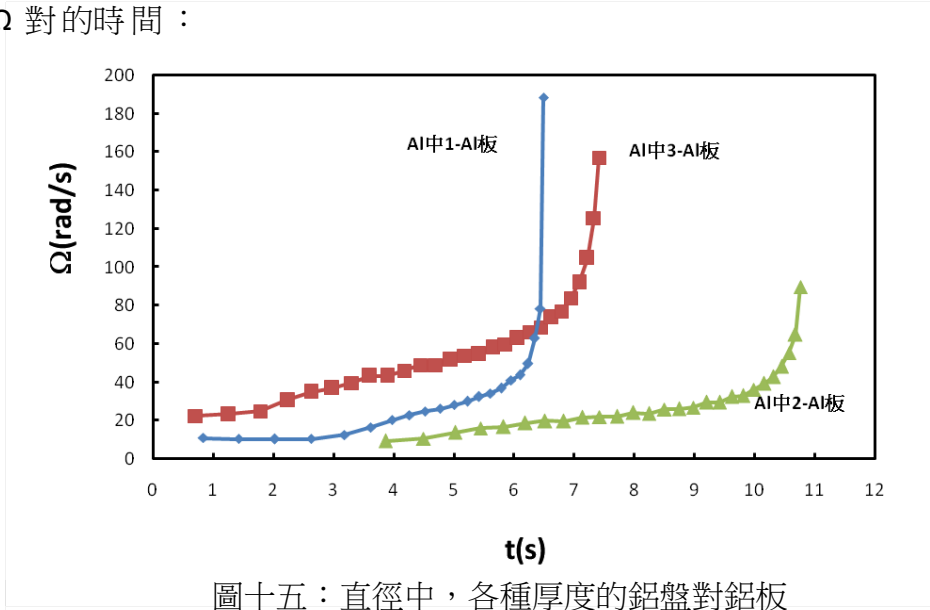
表 4：CD 盤對玻璃板

層數(mm)	1 (1.22)	2 (2.41)	4 (5.02)	6 (7.29)
平均	2.13	4.10	9.10	9.10
	2.04	3.98	8.97	9.11
	2.14	4.15	9.20	9.08
	2.21	4.12	9.14	9.23

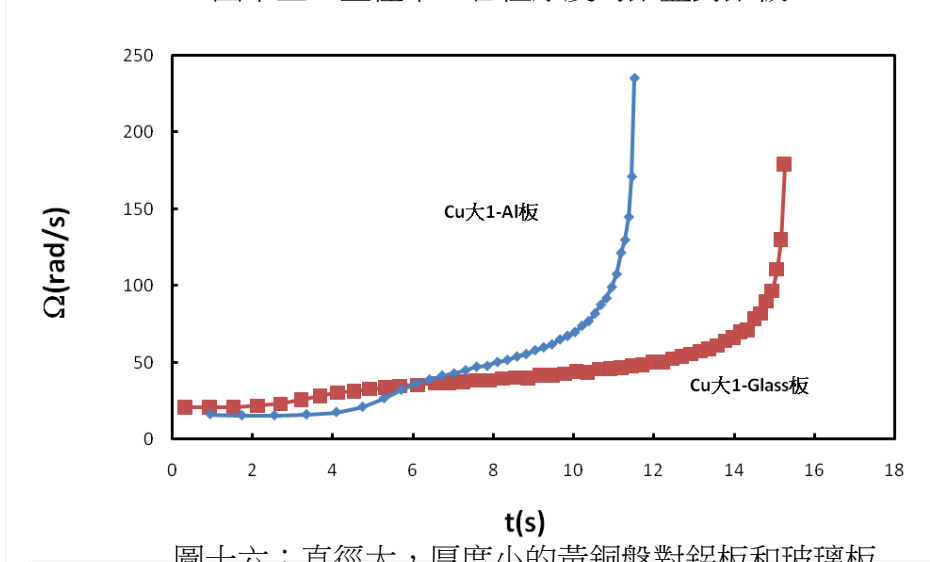
- (二) 結果可見三次實驗數據其實蠻接近的，所以後面我們都只挑一個實驗影片分析。
- (三) 最小的圓盤、最薄的圓盤和 CD 盤，第一階段時間明顯較小。
- (四) 越厚的 CD 盤旋轉時間越長。
- (五) 我們曾猜測質量大的圓盤因為角動量可以比較大轉動時間應較長，實驗出來發現反而是中間厚度的轉動時間普遍較長。我們猜是因為質量大摩擦力也大，所以不一定會轉得較久；不過時間最長的仍是直徑厚度皆大的黃銅盤對玻璃板的時間。
- (六) 在分析時我們也發現向左或向右傾時兩邊傾角會不一樣，一個雖已經到了應該倒下的角度，另一邊卻要再過好幾圈才會到，所以在分析時會先找出哪一邊角度小，以那一邊倒下為主。有時候，雖然兩邊都已倒下，但是後面可能又會有角度變大的情況，如討論四圖二十三的 α 對時間圖，所以會再往後確認傾角是否又變大。

三、 進動角速度 Ω :

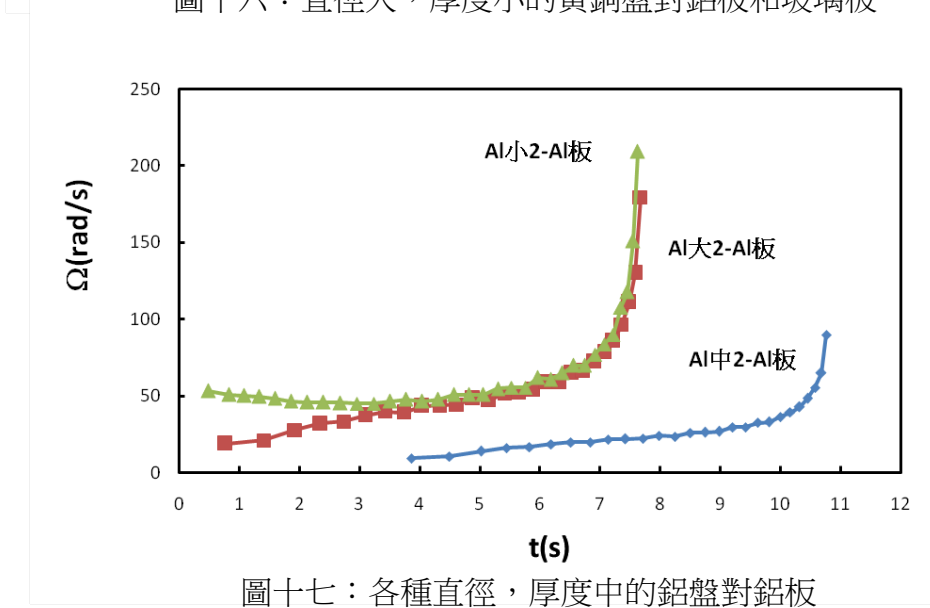
(一) Ω 對的時間 :



圖十五：直徑中，各種厚度的鋁盤對鋁板



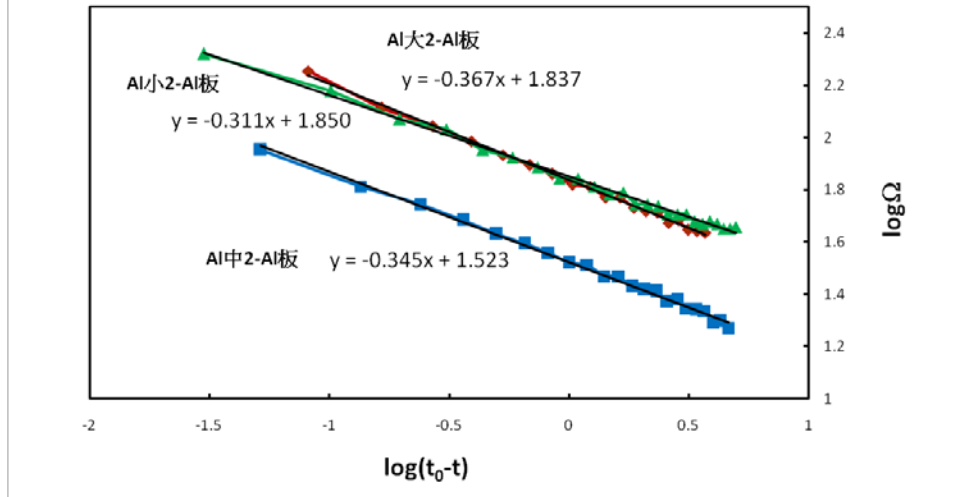
圖十六：直徑大，厚度小的黃銅盤對鋁板和玻璃板



圖十七：各種直徑，厚度中的鋁盤對鋁板

(二) 如圖十五、圖十六和圖十七是若干數據的比較，可見每組的 Ω 皆越來越大，在接近結束的時候 Ω 急速上升，最後圓盤面傾角為零時會撞擊到平板而急停。

(三) n 值比較：

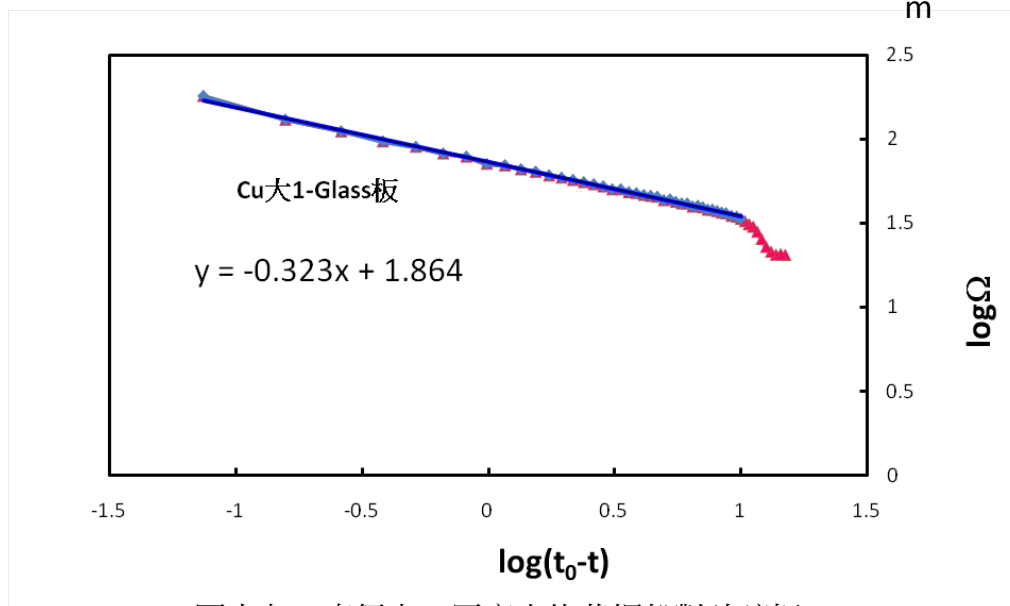


圖十八：各種直徑，厚度中的鋁盤對鋁板

1. 將 Ω 取 \log ， (t_0-t) 也取 \log ， t_0 為旋轉時間長度，如圖十八，可見數據關係接近直線。

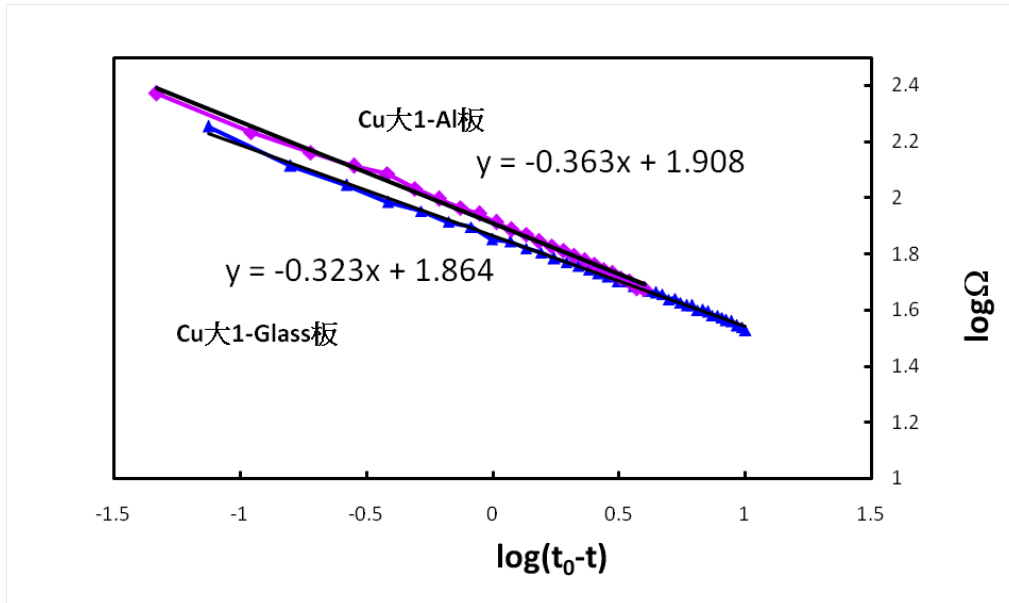
2. 實驗結果符合文獻資料 $\Omega \approx \left(\frac{1}{t_0-t}\right)^{\frac{1}{n}} \Rightarrow \log \Omega \approx -\frac{1}{n} \log(t_0-t)$ 。

3. 將數據取一條線性回歸趨勢線，得此線的斜率 m ， $n = \frac{1}{m}$ 即可得 n 。

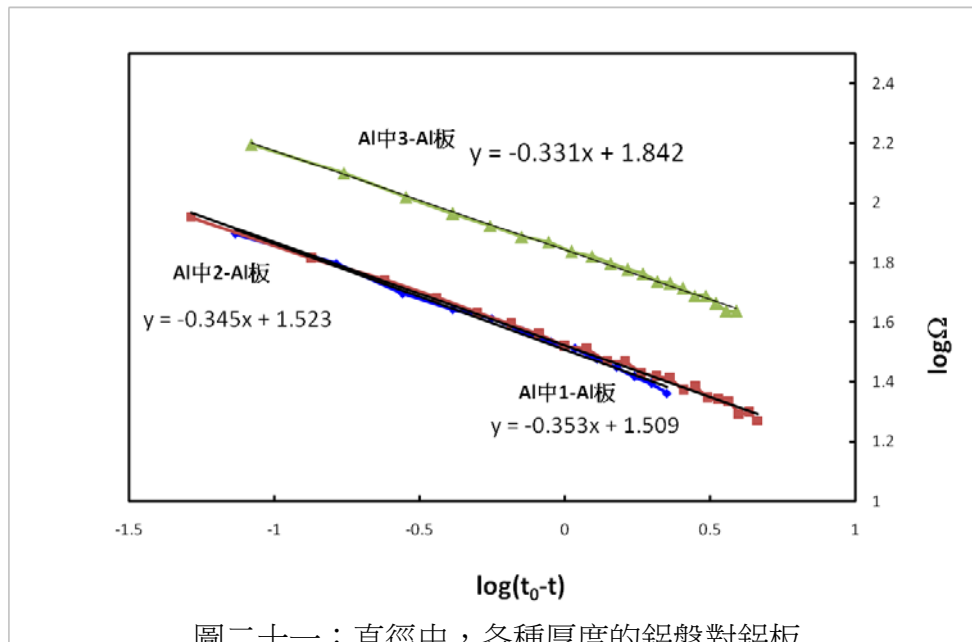


圖十九：直徑大，厚度小的黃銅盤對玻璃板

4. 如圖十九，由上實驗結果亦可看出前段時間與後一小段時間不在同一直線上，是因為第二階段有較大的滑動摩擦力，與理想中無滑動摩擦力的假設差太遠。所以會取較後半時段的數據來做線性回歸，即第三階段，其他圓盤實驗數據亦有此結果。



圖二十：直徑大，厚度小的黃銅盤對鋁板和玻璃板



圖二十一：直徑中，各種厚度的鋁盤對鋁板

5. 我們實驗得到的 n 如表 5，範圍為 2.75~3.10。

表 5：n 值比較

	鋁盤對鋁板				黃銅盤對鋁板	黃銅盤對玻璃板
直徑	大	中			小	大
厚度	中	薄	中	厚	中	薄
N	2.96	2.83	2.90	3.02	2.92	3.10

(四) 圓盤傾斜角愈來愈小的原因，即造成圓盤力學能耗損的原因有二，

一為空氣黏滯阻力，二為滾動阻力。由文獻知，能量損耗率 Φ 與進動角速度的關係：

1. 由空氣黏滯阻力造成： $\Phi_{\text{air drag}} \propto \Omega^{2.5} \sim \Omega^4$ ，導得

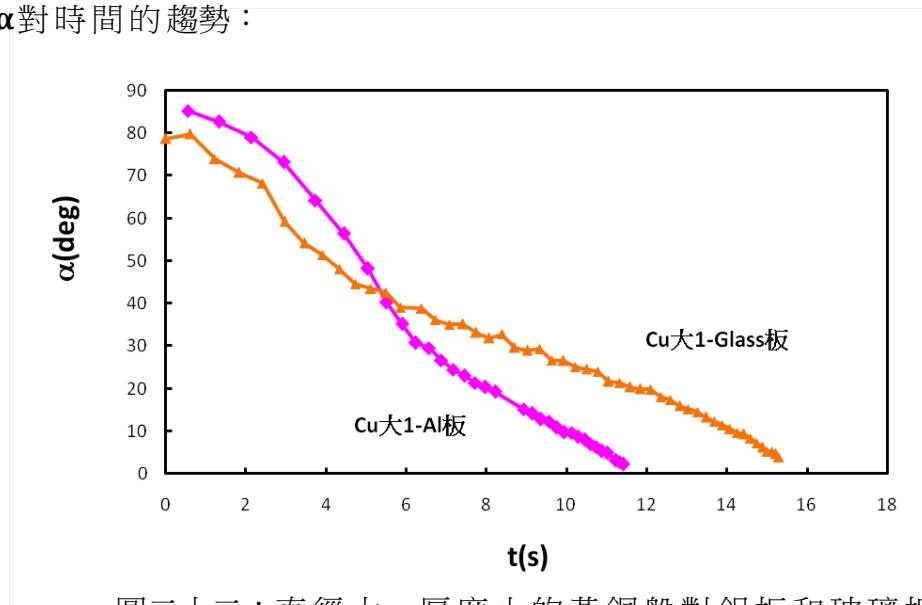
$$\Omega \approx \left(\frac{1}{t_0 - t} \right)^{\frac{1}{4.5}} \sim \left(\frac{1}{t_0 - t} \right)^{\frac{1}{6}}$$

2. 由滾動阻力造成： $\Phi_{\text{rolling resistance}} \propto \Omega^1$ ，導得 $\Omega \approx \left(\frac{1}{t_0 - t} \right)^{\frac{1}{3}}$

我們實驗得到的 n 是較接近第 2 個，所以我們認為滾動阻力造成我們實驗中圓盤的力學能損耗率的影響較大。

四、圓盤傾斜角 α ：

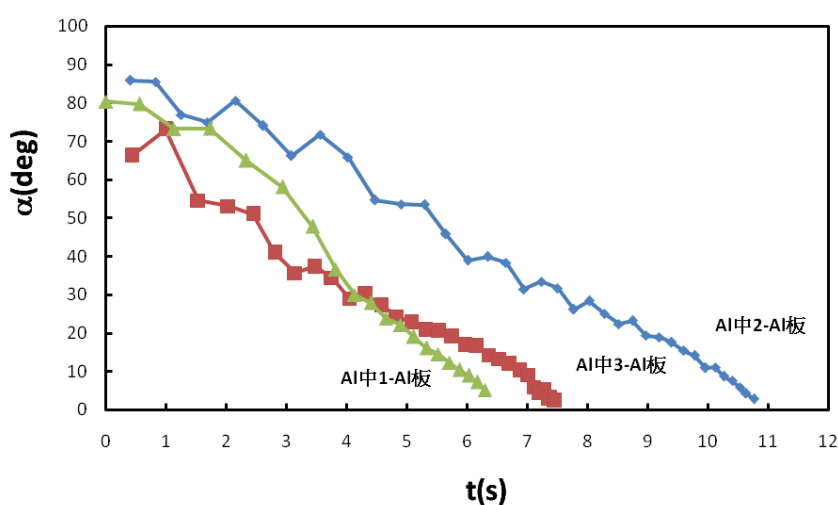
(一) α 對時間的趨勢：



圖二十二：直徑大，厚度小的黃銅盤對鋁板和玻璃板

(二) 如圖二十二、圖二十三，可見 α 隨時間大致是不斷下降，在結束時下降至零。傾斜角 α 較小部分，由影像分析較難判讀，所以我們亦用反射光來做，並分析比較。

(三) 如圖二十二，雖然趨勢皆愈來愈小，但是前半段和後半段趨勢有明顯不一樣，前半段下降較後半段快速。我們覺得因前半段為第二階段，有滑動摩擦造成下降較快速，後半段為第三階段。然而不管前半段或後半段在玻璃板上的曲線較平緩，應是玻璃摩擦力較小的結果。



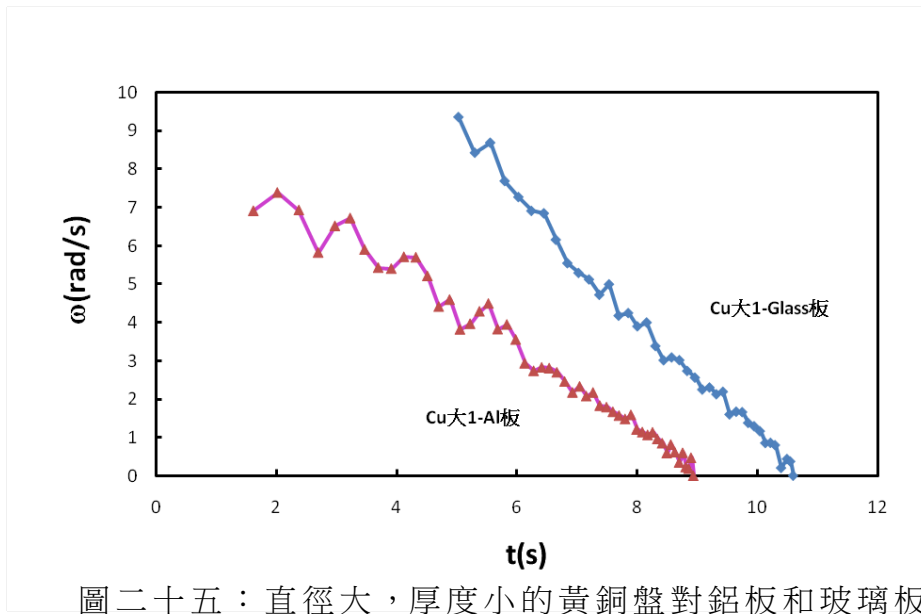
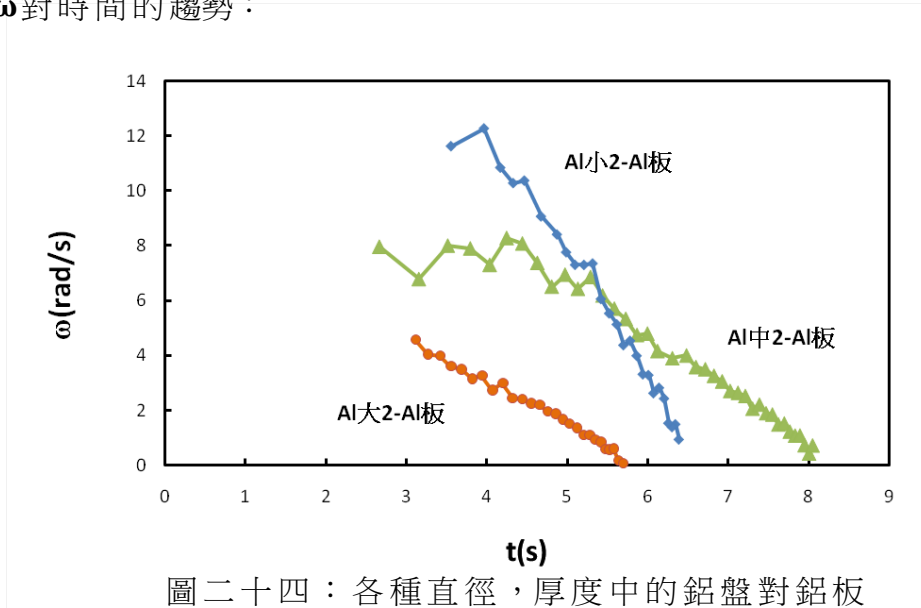
圖二十三：直徑中，各種厚度的鋁盤對鋁板

(四) 將圖二十二、圖二十三比較，鋁盤對鋁板第二階段有鋸齒狀忽大忽小的變化，是滑動摩擦力造成抬升的現象；而黃銅的摩擦力較小，曲線較平滑。第三階段黃銅盤對鋁板比鋁盤對鋁板較平緩，亦應是黃銅摩擦力較小的結果。

(五) 我們在做量化分析時，為了吻合理論所做的假設：沒有滑動摩擦力、且進動軸通過質心，會取較後半時段的數據來分析。

五、圓盤自轉角速度 ω ：

(一) ω 對時間的趨勢：

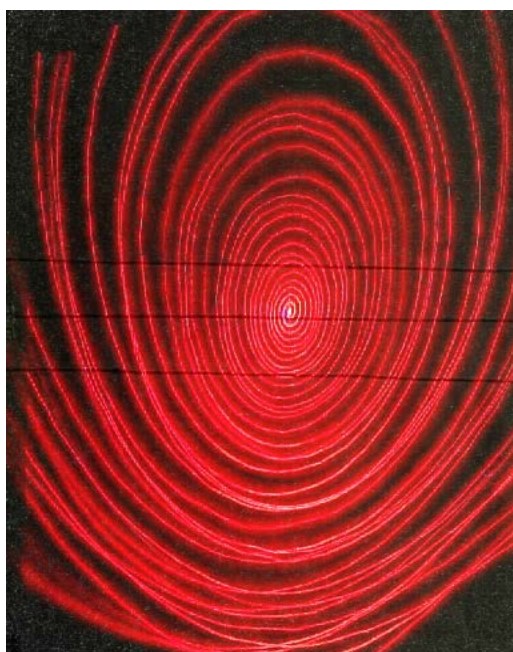


(二) 如圖二十四、圖二十五，可見 ω 的趨勢隨時間下降。在前半會有鋸齒狀忽大忽小的變化，推測是圓盤質心移動，接觸點有相對滑動，平板給圓盤的摩擦力方向與移動方向相反，但與 ω 轉動同向，而造成 ω 變大效應。

(三) 後半時段，各圓盤關係皆接近直線。

六、 反射光影像：

- (一) 反射光影像拍攝的 α 約為小於 10 度的反射影像，因為角度大的反射光太大圈會超出紙屏範圍。
- (二) 由反射光影像疊圖，如圖十、二十六，看見光點所形成的線像螺旋線一樣從大一直繞到小，並不是完整的橢圓。
- (三) 較大圈的光線常有交叉的狀況，表示圓盤主軸還不是很穩定，轉到內圈時光線雖然很靠近但不重疊的漸小，表示圓盤主軸幾不移動。
- (四) 上點 a_1 大於下點 a_2 ，如圖十一，與我們推出的結果符合。圓盤向側面左右傾斜 α ，對反射光的影響是對稱的，所以左右點 b 相同。 b 比 a 小，是因為入射線法線平面向左右傾與原平面不同，入射角會比較小。



圖二十六：反射光在紙屏上的影像軌跡圖（Cu 大 1-Al 板）

(五) 傾斜角 α 由反射光和側面影像得到結果表如下：

1. 側面影像快結束時的最後幾圈，雖然還可看到圓盤有轉動，但由於角度太小角度較難判讀，故無數據。
2. 圈數要小心交叉比對，基本上兩個方法得到的角度差在 0.1 度內。

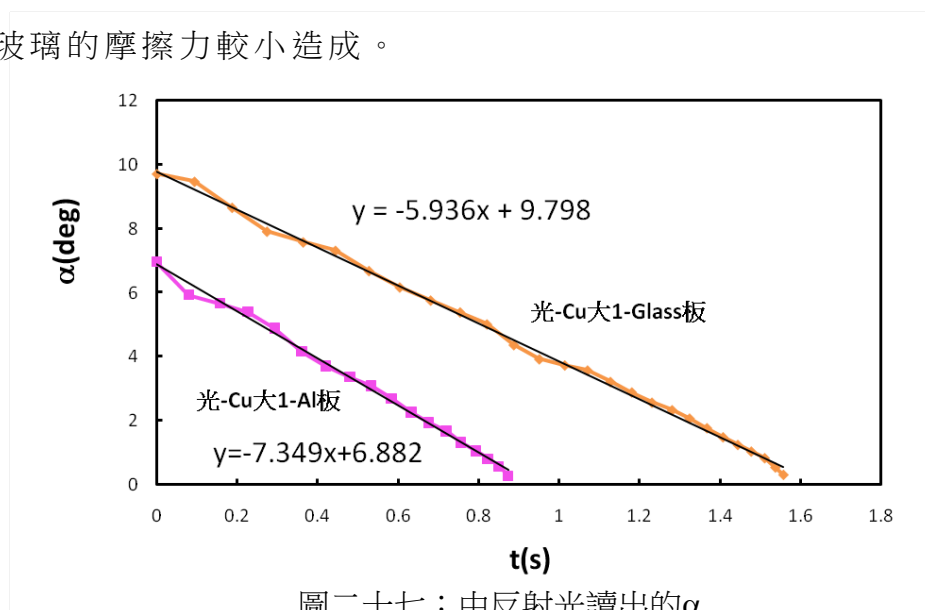
表 6：r=50.4cm，直徑大，厚度小的黃銅盤對玻璃板

t(s)	a ₁ (cm)	α(deg) 反射光	α(deg) 影像	t(s)	a ₁ (cm)	α(deg) 反射光	α(deg) 影像
1.557	0.77	0.306	難 判 讀 無 數 據	0.95	11.39	3.922	3.910
1.537	1.365	0.538		0.887	12.94	4.368	4.341
1.51	2.12	0.827		0.82	15.31	5.013	5.080
1.477	2.671	1.034		0.753	16.76	5.390	5.403
1.444	3.23	1.241		0.68	18.25	5.761	5.809
1.407	3.89	1.481		0.603	19.96	6.170	6.232
1.367	4.69	1.766		0.527	22.22	6.684	6.613
1.3237	5.549	2.066	2.090	0.443	25.2	7.319	7.311
1.28	6.32	2.328	2.287	0.363	26.5	7.582	7.633
1.23	7.03	2.565	2.512	0.273	28.22	7.917	7.975
1.18	8.01	2.884	2.954	0.187	32.33	8.665	8.642
1.127	9.05	3.214	3.161	0.093	37.3	9.480	9.579
1.07	10.21	3.571	3.489	0	38.88	9.720	9.840
1.013	10.74	3.730	3.702		11.39		

表 7：r=51cm，直徑大，厚度小的黃銅盤對鋁板

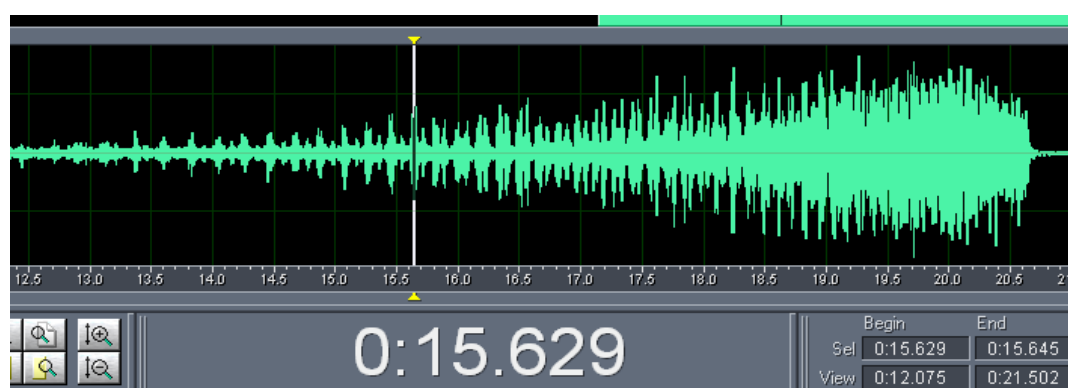
t(s)	a ₁ (cm)	α(deg) 反射光	α(deg) 影像	t(s)	a ₁ (cm)	α(deg) 反射光	α(deg) 影像
0.873	0.7	0.279	難 判 讀 無 數 據	0.533	8.65	3.088	2.972
0.850	1.43	0.563		0.480	9.55	3.369	3.412
0.823	2.08	0.812		0.420	10.68	3.712	3.802
0.793	2.73	1.056		0.360	12.22	4.163	4.212
0.757	3.46	1.325		0.293	14.86	4.894	4.988
0.720	4.44	1.678		0.227	16.81	5.402	5.486
0.677	5.17	1.934		0.157	17.9	5.676	5.682
0.633	6.14	2.267	2.198	0.08	18.99	5.940	6.013
0.583	7.44	2.700	2.610	0	23.52	6.967	7.042

(六) 將上表由反射光得的傾斜角 α 對時間作圖，結果如圖二十七，關係接近直線，斜率大小對玻璃板 5.936 小於對鋁板 7.349，亦可看出是對玻璃的摩擦力較小造成。



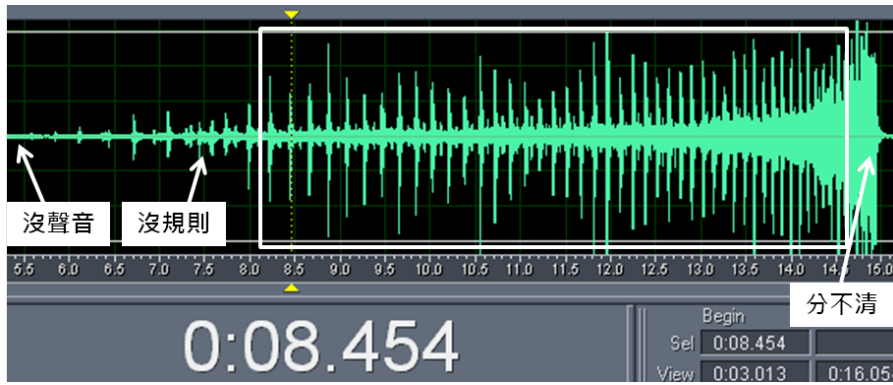
七、 敲打平板的聲音：

(一) 所錄得的聲音並不是都夠清楚可分析，直徑小各厚度、直徑大厚度小的圓盤因前後距離不大或敲打的力道較小，較不清楚，而難以分辨，所以無法得數據。如圖二十八直徑大厚度小的黃銅盤對鋁板的聲音波形，亦是難以分辨，只有如圖二十九直徑大厚度大的黃銅盤對鋁板的聲音波形，較清楚易分辨。



圖二十八：直徑大，厚度小的黃銅盤對鋁板

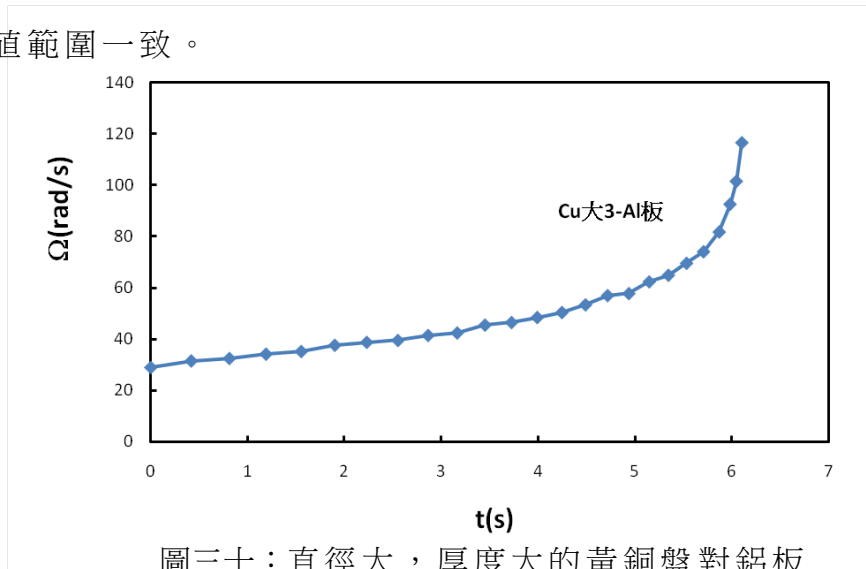
(二) 如圖二十九，第二階段開始點無法判讀，因聲音太小、且主軸移動無明顯規律的大小聲或區分不出，所以圓盤轉動時間長度無法取得。接近結束時因轉動太快，亦無法區分一圈的大小聲變化。



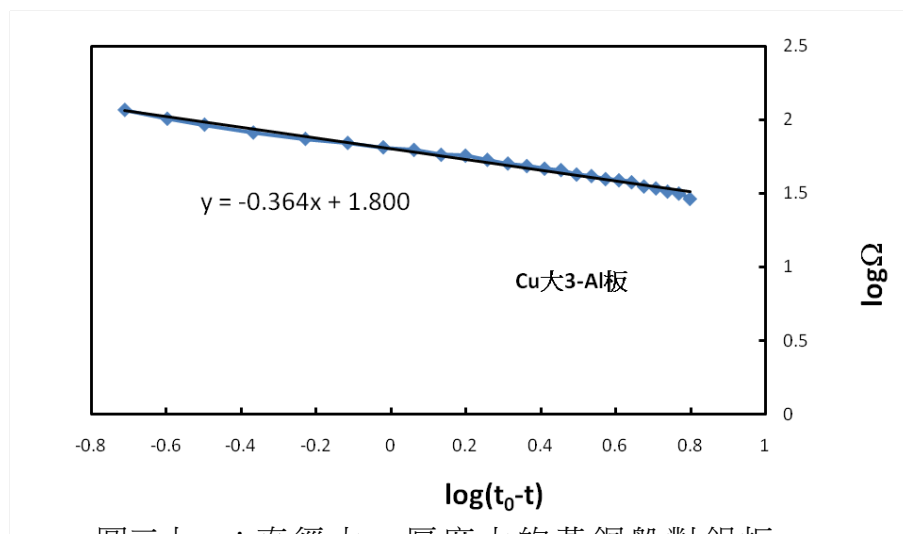
圖二十九：直徑大，厚度大的黃銅盤對鋁板

(三)聲音只能分析出 Ω 。

(四)如圖三十為直徑大厚度大黃銅盤對鋁板的聲音，只讀取框內的數據，結果如圖三十一。雖然讀不到前後的數據，但可看出 Ω 越來越大，接近結束的時候加速上升。分析得到的 $n=0.364$ 與由影像分析得值範圍一致。



圖三十：直徑大，厚度大的黃銅盤對鋁板



圖三十一：直徑大，厚度大的黃銅盤對鋁板

柒、 結論與檢討改進：

- 一、力的大小不甚影響第二階段加第三階段的時間長度，而第二階段的起始狀況應該是約略相同的。
- 二、圓盤的進動所繞的軸在轉動前部分是有移動的，所以有受到滑動摩擦力的作用；但此軸移動會愈來愈小、愈來愈穩定，到較後段，軸就幾乎不動進到轉動第 3 階段。
- 三、厚度較大的圓盤因底面較大，摩擦力分布平均而不易影響圓盤，較不容易傾斜，也就會有轉到最後都不傾斜就停止的狀況。
- 四、時間長最小的圓盤、最薄的圓盤和 CD 盤，幾乎沒有第一階段。
- 五、越厚的 CD 盤轉動時間越長。
- 六、中間厚度的轉動時間普遍較長，厚度大的因為質量大摩擦力也大，所以不一定會轉得較久；不過時間最長的仍是直徑厚度皆大的黃銅盤對玻璃板的時間。
- 七、在分析時我們也發現向左或向右傾時兩邊傾角會不一樣，一個雖已經到了應該倒下的角度，另一邊卻要再過好幾圈才會到。而就算兩邊都已倒下，後面可能又會回復。
- 八、 Ω 皆越來越大，在接近結束時 Ω 急速上升。
- 九、將 Ω 取 \log ， (t_0-t) 也取 \log ，做線性回歸後，可得此線的斜率 m ， $n = \frac{1}{m}$ 即可得 n 值。實驗得到的 n 值與文獻資料符合。
- 十、造成圓盤力學能耗損的原因有二個，得進動角速度的關係分別如下：

1. 由空氣黏滯阻力造成：
$$\Omega \approx \left(\frac{1}{t_0 - t} \right)^{4.5} \sim \left(\frac{1}{t_0 - t} \right)^{\frac{1}{6}}$$

2. 由滾動阻力造成：
$$\Omega \approx \left(\frac{1}{t_0 - t} \right)^{\frac{1}{3}}$$

我們實驗得到的 $n=2.75\sim 3.10$ 是較接近第 2 個，所以我們認為滾動阻力造成我們實驗中圓盤的力學能損耗率的影響較大。

- 十一、 α 隨時間大致是不斷下降，在結束時下降至零。
- 十二、 雖然 α 趨勢皆是愈來愈小，但是前半段和後半段趨勢有明顯不一樣，前半段下降較後半段快速，前半段為第二階段，有滑動摩擦造成下降較快速，後半段為第三階段。
- 十三、 後段時間傾斜角 α 由影像分析較粗略，所以我們亦用反射光來分析。黃銅盤和厚度小的鋁盤的 α 相對較平滑，而其他鋁盤的 α 則有鋸齒狀忽大忽小的變化，推測應該和摩擦力有關係。厚度較大的鋁盤和黃銅盤摩擦力較大。
- 十四、 ω 的趨勢為隨時間下降。
- 十五、 ω 在前半會有鋸齒狀忽大忽小的變化，推測是因主軸移動圓盤與平板間會有滑動摩擦力，平板給圓盤摩擦力方向與主軸移動方向相反，但與 ω 轉動同向，而造成 ω 變大效應。而後半時段，各圓盤關係皆接近直線。
- 十六、 反射光影像拍攝的 α 約為小於 10 度的反射影像。
- 十七、 較大圈的光線常有交叉的狀況，表示圓盤主軸還不是很穩定時；轉到內圈時，光線雖然很靠近但不重疊的漸小，表示圓盤主軸幾乎不移動。
- 十八、 b 比 a 小，是入射線法線平面向左右傾與原平面不同，入射角會比較小造成的。
- 十九、 由反射光影像疊圖，看見光點所形成的線像螺旋線一樣從大一直繞到小，並不是完整的橢圓。
- 二十、 由反射光可較精準的求得運動較後段的微小 α 。
- 二十一、 所錄得的聲音並不是都夠清楚可分析，直徑小各厚度、直徑大厚度薄的圓盤因前後距離不大或敲打的力道較小，較不清楚，難

以分辨，所以無法得數據。

二十二、 由聲音的波形第二階段開始點是無法判讀的，因聲音太小、且因主軸移動無明顯規律的大小聲或區分不出，所以圓盤轉動時間長度無法取得。接近結束的因轉動太快，亦無法區分一圈的大小聲變化。

二十三、 聲音只能分析出 Ω 。雖然讀不到前後的數據，但可看出 Ω 越來越大，接近結束的時候加速上升。分析得到的 $n=0.364$ 與由影像分析得的值範圍一致。

二十四、 拍攝時圓盤常常轉出板外，且為了分析較準確，盡量讓圓盤的旋轉可以在較中間，所以一個圓盤就要拍攝很多次，取比較在中間旋轉的做分析。

二十五、 我們最初是使用 60fps 的攝影機，但我們發現在分析時，圓盤每格變化過大，難以分析。而 600fps、1200fps 所拍出的解析度又太低。因此我們最後使用 300fps 的高速攝影機，可以分析 1/300 秒內的運動。但單一筆資料平均就有七十多個數據，且逐一判讀時極為費神，也極為費時，讓我們吃盡苦頭，花了許多時間分析影片。

二十六、 本實驗可貴的地方在於使用的器材都是隨手可得的物品，藉由我們的追根究底的精神，也將這個實驗做的有模有樣，我們也為此而感到相當有成就感。

捌、參考資料：

- 一、 Real World Physics Problems--Eular's Disk.
<http://www.real-world-physics-problems.com/eulers-disk.html>
- 二、 侯宗昆、戴明鳳、洪在明。演示課的啟發。
<http://www.scu.edu.tw/physics/physdemo2009/>
- 三、 國立台中教育大學 NTCU 科學教育與應用學系。歐拉盤一窺銅板滾動的奧秘。
<http://scigame.ntcu.edu.tw/power/power-043.html>
- 四、 Alexander J. McDonald、Kirk T. McDonald, Rolling Motion of a Disk on a Horizontal Plane, (2001).
- 五、 H.K. Moffatt, Euler's disk and its finite-time singularity, Nature 404, 833-834 (2000).
- 六、 溫炯亮、王派祥編譯，應用力學-動力學第 21 章，p527~p548，培生教育出版集團。

【評語】 051802

作品以手啟動圓盤轉動，圓盤與底板接觸面的幾何結構，應是直接影響相互運動的關鍵物理參數。或許可以再對圓盤接觸面的實際結構，如平滑度及曲度，以便實質理解該幾何結構對圓盤運動的影響。