中華民國第 56 屆中小學科學展覽會
作品說明書

高級中等學校組　數學科

第二名

050418

層層疊疊-雙心多邊形面積的一個有趣性質

學校名稱：國立金門高級中學

作者：	指導老師：
高三 李孟龍 高三 莊耀鈞	楊玉星

關鍵詞：雙心多邊形、內心、旁心

摘要

本研究從「**三角形的面積是其旁心三角形面積與內切圓切點三角形面積的等比中項**」出發，我們發現圓外切多邊形如果也有外接圓時**(雙心多邊形)**，會有相對應的結果。其中的**關鍵因素**是雙心多邊形的**旁心多邊形和內切圓切點多邊形會相似。**設雙心$n(n \geq 3)$邊形為$A_1A_2A_3\cdots A_n$，其旁心n邊形為$B_1B_2B_3\cdots B_n$，內切圓切點n邊形為$C_1C_2C_3\cdots C_n$，則$\boldsymbol{A_1A_2A_3\cdots A_n}$**面積**$=\sqrt{\boldsymbol{B_1B_2B_3\cdots B_n}\text{面積}\times\boldsymbol{C_1C_2C_3\cdots C_n}\text{面積}}$。也就是說，這三個多邊形的面積會形成一個等比數列，等比中項正好是雙心多邊形的面積，且此等比數列的**公比為**

$$\frac{\boldsymbol{sin(\frac{A_1+A_3}{2})}}{\boldsymbol{sin\frac{A_1}{2}sin\frac{A_3}{2}sinA_2}}$$。

此外，雙心$n(n \geq 3)$邊形的外心O正好是內切圓切點n邊形的外心O_1和旁心n邊形的外心O_2的**中點**。且任意三角形的外接圓正好是其旁心三角形的**九點圓**，而其它雙心$n(n \geq 4)$邊形也有相對應的結果，其外接圓正好是其旁心n邊形的$\boldsymbol{2n}$**點圓**。

壹、研究動機

在奧林匹亞數學中的幾何問題一書的第一篇第十五章性質 9 提到「**三角形的面積是其旁心三角形面積與內切圓切點三角形面積的等比中項**」。這讓我們想到此定理是否可以推廣到其它邊數的雙心多邊形，因此決定以此當作研究題材。

貳、研究目的

本研究的目的在討論並尋找其它雙心n邊形，使其符合上述性質：**雙心$\boldsymbol{n}$邊形的面積是其旁心$\boldsymbol{n}$邊形面積與內切圓切點$\boldsymbol{n}$邊形面積的等比中項**。並試著利用雙心n邊形的性質，證明此結果為真。

參、研究設備及器材

本研究主要利用 **GSP** 與**Geogebra** 等電腦動態幾何軟體進行研究問題的幾何實驗，透過實驗觀察、猜測與驗證，然後提出研究結果並加以證明。

肆、研究過程或方法

一、文獻探討

本研究範圍涉及**兩圓內接多邊形的相似**與**雙心多邊形的外接圓和其旁心多邊形之邊的相交問題**，將引用有關位似變換、九點圓、八點圓、婆羅摩及多定理、雙心四邊形的內切圓切點四邊形的兩對角線互相垂直的性質來探討：

(一)位似變換

1. 定義

O是平面π上一個定點，H是平面上的變換。若對於任一對應點P、P'，都有$\overrightarrow{OP'} = k\overrightarrow{OP}$($k$為非零實數)，則**稱$H$為位似變換**，記為$H(O,k)$，$O$叫做**位似中心**，$k$叫做**位似比**。

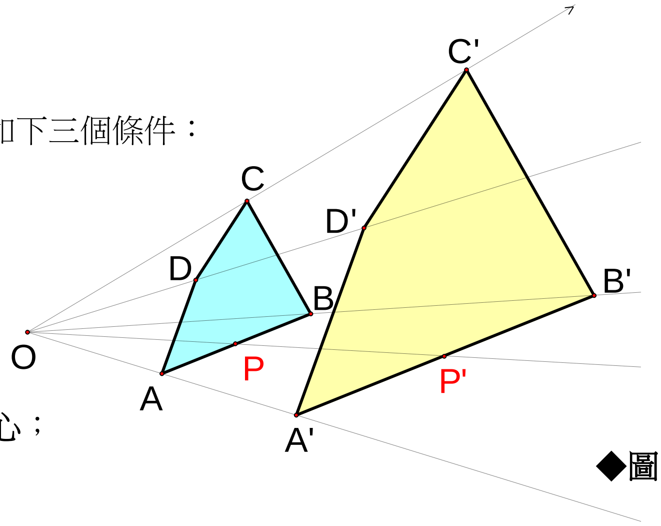
定義中的條件 $\overrightarrow{OP'} = k\overrightarrow{OP}$ 等價於如下三個條件：

(1) O，P，P'共線；

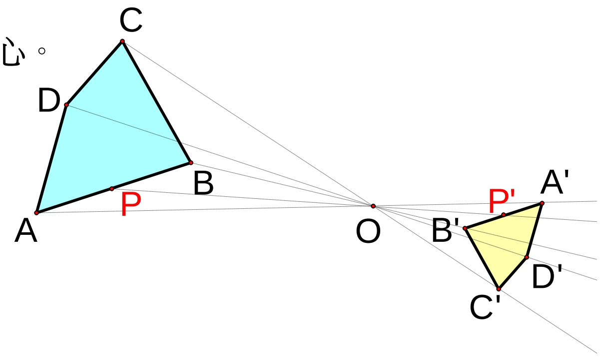
(2) $\overline{OP'} = |k|\overline{OP}$；

(3) 當$k > 0$時，P，P'在O點同側，如圖 1，此時O點叫做**外位似中心**；

當$k < 0$時，P，P'在O點異側，如圖 2，此時O點叫做**內位似中心**。



◆圖 1



◆圖 2

2. 性質

(1) 位似變換是相似變換，所以位似變換具有相似變換的所有性質。

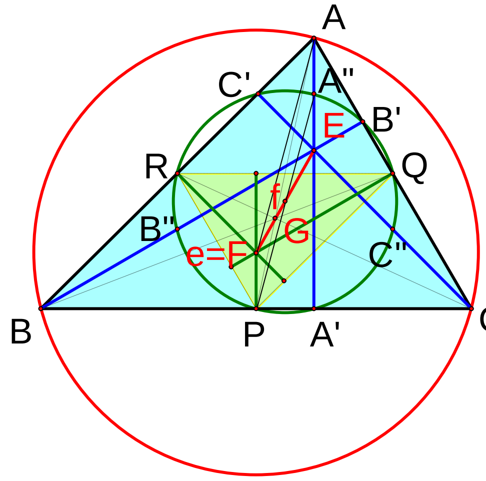
(2) 在位似變換下，位似中心是不變點，過位似中心的直線是不變直線。

(3) 在位似變換下，對應線段之比相等，對應角相等，不過中心的對應直線平行。

(4) 位似圖形一定是相似圖形，並且位似圖形的**對應線段平行**，**對應線段之比等於位似比**和**對應點的連線過位似中心**。

(二)九點圓

如圖 3，在ΔABC中，如下的九點共圓：三邊的中點P、Q、R，從三個頂點向對邊所作垂線的垂足A'、B'、C'，垂心到三個頂點所連線段的中點A''、B''、C''等九個點，且九點圓的圓心f是其外心F與垂心E所連線段的中點，另外，九點圓的半徑是ΔABC外接圓半徑的一半。



【證明】 **◆圖 3**

1. 如圖 3，P、Q、R三點是$\overline{BC}$、$\overline{CA}$、$\overline{AB}$的中點，顯然的，ΔPQR的垂心剛好是ΔABC的外心，並令G為ΔABC和ΔPQR的共同重心，由相關位置可以看出ΔPQR正是**ΔABC繞重心G旋轉$180°$之後再縮小一半**的結果。

2. 現在假設ΔABC的垂心E，外心F和重心G，以及ΔPQR的垂心e，外心f和重心G，由於在旋轉和縮放時角度的關係不變，ΔABC 的垂心E自然變換到ΔPQR的垂心e，又e同時也是ΔABC的外心F，所以**E、G、F三點共線(稱為尤拉線)**且$\overline{EG} = 2\overline{GF}$；又因$\overline{EA}$透過旋轉$180°$和縮小一半之後，變換到$\overline{FP}$，因此$\overline{EA} = 2\overline{FP}$。接著再將$\Delta ABC$的外心$F$繞$G$旋轉$180°$之後再縮小一半，得到$\Delta PQR$的外心$f$，因此$\overline{GF} = 2\overline{Gf}$。

3. 由於$\overline{EG} = 2\overline{GF} = 4\overline{Gf}$，所以$\overline{Ef} = \overline{EG} - \overline{Gf} = 3\overline{Gf}$，$\overline{Ff} = \overline{FG} + \overline{Gf} = 3\overline{Gf}$，故$\overline{Ef} = \overline{Ff}$，即**$f$是$\overline{EF}$的中點**。

4. 又$\overline{EA} = 2\overline{FP}$，因此若將$\overline{Pf}$延長之後，會交到$\overline{AE}$的中點$A''$，並且有$\overline{Pf} = \overline{fA''}$，在直角三角形$\Delta PA'A''$中，$f$是斜邊$\overline{PA''}$的中點，所以有$\overline{fA'} = \overline{fA''} = \overline{fP}$。

   同理可證 $\overline{fB'} = \overline{fB''} = \overline{fQ}$，$\overline{fC'} = \overline{fC''} = \overline{fR}$。

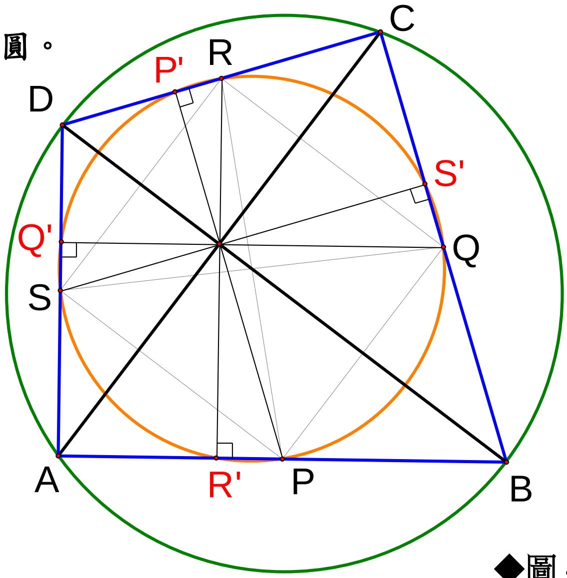
   故以f為圓心，$\overline{fP}$為半徑的圓會通過 **P、Q、R、A'、B'、C'、A''、B''、C''九個點**。

5. 連接$\overline{AF}$，則在ΔAEF中，$\because A''$和f分別為$\overline{AE}$和$\overline{EF}$的中點，$\therefore \overline{A''f} = \frac{1}{2}\overline{AF}$。

   即**九點圓的半徑是ΔABC外接圓半徑的一半**。

(三)八點圓

如圖 4，如果圓內接四邊形$ABCD$的兩對角線互相垂直，P、Q、R、S是各邊中點，$\overline{PP'}$、$\overline{QQ'}$、$\overline{RR'}$、$\overline{SS'}$分別垂直於對邊，P'、Q'、R'、S'為垂足，則 P、Q、R、S、P'、Q'、R'、S'這八點共圓。



◆圖 4

【證明】

1. 如圖 4，$\because \overline{AC} \perp \overline{BD}$，$P$、$Q$、$R$、$S$為各邊的中點，

   $\therefore \overline{PQ} = \overline{SR} = \frac{1}{2}\overline{AC}$，$\overline{PS} = \overline{QR} = \frac{1}{2}\overline{BD}$，故四邊形$\boldsymbol{PQRS}$為矩形。

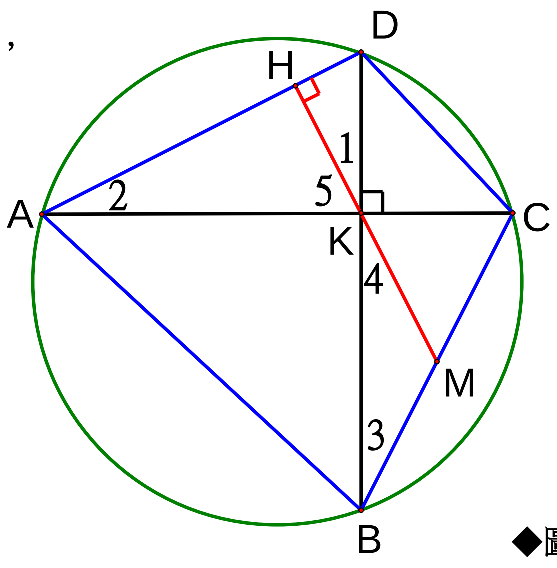
2. 以其對角線為直徑作矩形$PQRS$的外接圓O，

   $\because \angle PP'R = \angle QQ'S = \angle RR'P = \angle SS'Q = 90°$，且都是直徑上的圓周角，

   $\therefore$點 P'、Q'、R'、S'都在圓O上，即 $\boldsymbol{P}$、$\boldsymbol{Q}$、$\boldsymbol{R}$、$\boldsymbol{S}$、$\boldsymbol{P'}$、$\boldsymbol{Q'}$、$\boldsymbol{R'}$、$\boldsymbol{S'}$ 這八點共圓。

(四) 婆羅摩及多(Brahmagupta)定理

如圖 5，設內接於圓的四邊形$ABCD$的對角線$\overline{AC}$與$\overline{BD}$垂直相交於點K，過點K的直線與邊$\overline{AD}$、$\overline{BC}$分別相交於點H和M，則$\overline{KH} \perp \overline{AD}$的充要條件為$\overline{CM} = \overline{MB}$。



◆圖 5

【證明】

1. 如圖 5，$\because \overline{KH} \perp \overline{AD}$，$\overline{AC} \perp \overline{BD}$，$\therefore \angle 1 = \angle 2 = \angle 4$。

   又$\angle 2 = \angle 3$，$\therefore \angle 3 = \angle 4$，$\overline{MB} = \overline{MK}$。同理可證 $\overline{MC} = \overline{MK}$，故$\boldsymbol{\overline{CM} = \overline{MB}}$。

2. $\because \overline{CM} = \overline{MB}$，即$\overline{KM}$為直角三角形$\Delta BKC$斜邊$\overline{BC}$上的中線，

   因此有$\overline{MB} = \overline{MK}$，$\angle 3 = \angle 4$。又$\angle 3 = \angle 2$，$\angle 4 = \angle 1$，$\therefore \angle 1 = \angle 2$。

   而$\angle 1 + \angle 5 = 90°$，$\therefore \angle 2 + \angle 5 = 90°$，即$\boldsymbol{\overline{KH} \perp \overline{AD}}$。

(五) 雙心四邊形的內切圓切點四邊形的兩對角線互相垂直

如圖 6，若雙心四邊形$ABCD$四邊與內切圓依次切於E、F、G、H四點，則$\overline{EG} \perp \overline{FH}$。

【證明】

如圖 6，$\because ABCD$為雙心四邊形，

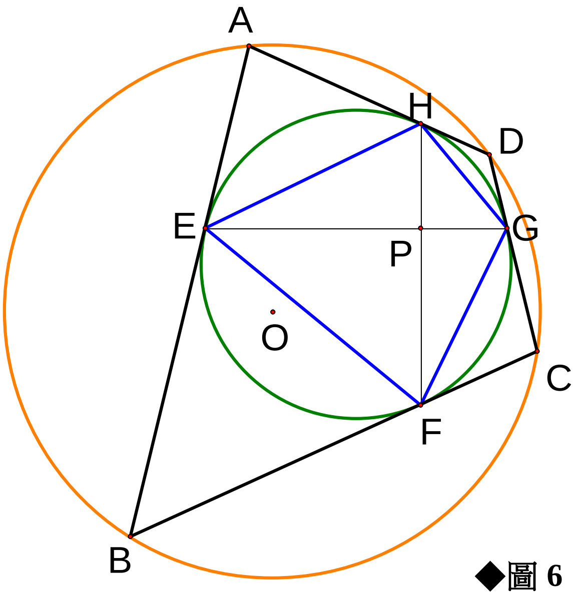
$\therefore \boldsymbol{\angle BAD + \angle BCD = 180°}$。

$\Rightarrow \frac{1}{2}(\widehat{EFGH} - \widehat{EH}) + \frac{1}{2}(\widehat{FEHG} - \widehat{FG}) = 180°$，

$\Rightarrow \frac{1}{2}(360° - 2\widehat{EH}) + \frac{1}{2}(360° - 2\widehat{FG}) = 180°$，

可推得$\boldsymbol{\widehat{EH} + \widehat{FG} = 180°}$。

$\therefore \angle EPH = \frac{1}{2}(\widehat{EH} + \widehat{FG}) = 90°$，即$\overline{EG} \perp \overline{FH}$。



◆圖 6

二、探索過程

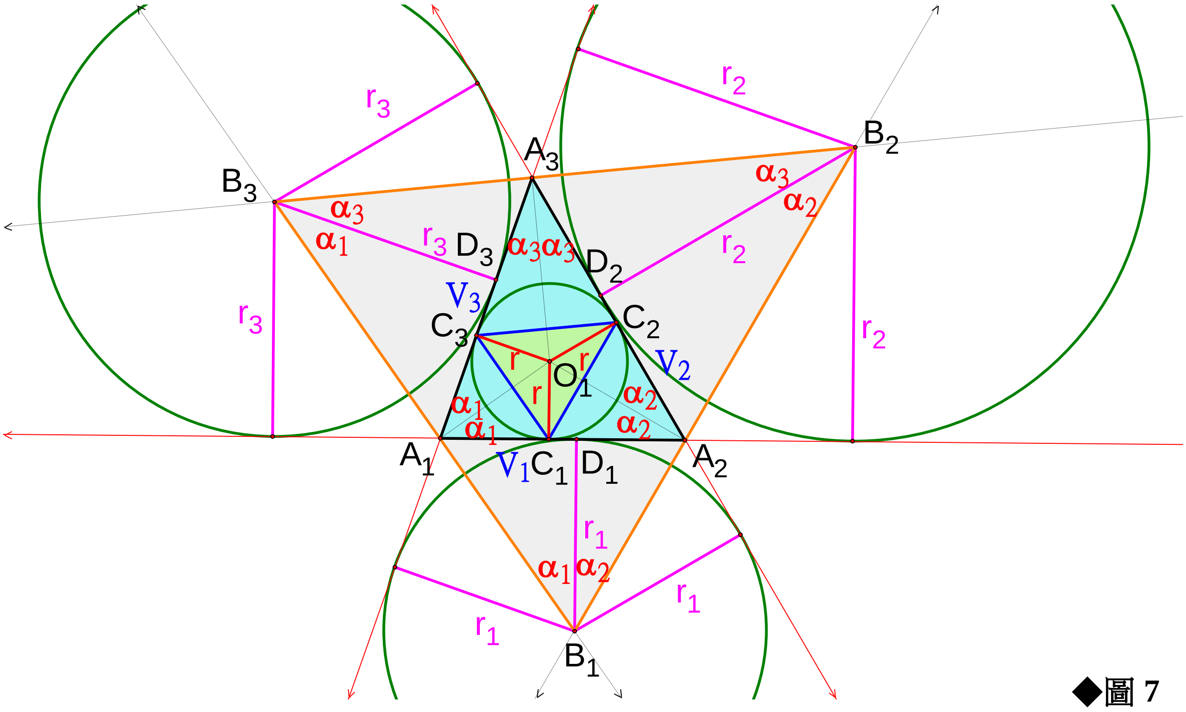
(一)原定理的證明

欲證明原定理，需先證明下面這個引理：

引理一：如圖 7，設$\Delta A_1A_2A_3$中，$\overline{A_1A_2} = V_1$，$\overline{A_2A_3} = V_2$，$\overline{A_3A_1} = V_3$，其內切圓半徑為 r，$\overline{A_1A_2}$、$\overline{A_2A_3}$、$\overline{A_3A_1}$ 的旁切圓半徑分別為 r_1、r_2、r_3，

則 $r_1 = \dfrac{r}{\tan\frac{A_1}{2}\tan\frac{A_2}{2}} = r\left(\dfrac{\cos\frac{A_1}{2}\cos\frac{A_2}{2}}{\sin\frac{A_1}{2}\sin\frac{A_2}{2}}\right)$，$r_2 = \dfrac{r}{\tan\frac{A_2}{2}\tan\frac{A_3}{2}} = r\left(\dfrac{\cos\frac{A_2}{2}\cos\frac{A_3}{2}}{\sin\frac{A_2}{2}\sin\frac{A_3}{2}}\right)$，

$r_3 = \dfrac{r}{\tan\frac{A_3}{2}\tan\frac{A_1}{2}} = r\left(\dfrac{\cos\frac{A_3}{2}\cos\frac{A_1}{2}}{\sin\frac{A_3}{2}\sin\frac{A_1}{2}}\right)$。



◆圖 7

【證明】如圖 7，∵ $V_1=\overline{A_1C_1}+\overline{C_1A_2}=\frac{r}{tan\frac{A_1}{2}}+\frac{r}{tan\frac{A_2}{2}}=\mathrm{r}(\frac{tan\frac{A_1}{2}+tan\frac{A_2}{2}}{tan\frac{A_1}{2}tan\frac{A_2}{2}})$，

且 $V_1=\overline{A_1D_1}+\overline{D_1A_2}=r_1(tan\frac{A_1}{2}+tan\frac{A_2}{2})$

∴ $r(\frac{tan\frac{A_1}{2}+tan\frac{A_2}{2}}{tan\frac{A_1}{2}tan\frac{A_2}{2}})=r_1(tan\frac{A_1}{2}+tan\frac{A_2}{2})$，

故$\boldsymbol{r_1\left(tan\frac{A_1}{2}+tan\frac{A_2}{2}\right)=\mathrm{r}(\frac{tan\frac{A_1}{2}+tan\frac{A_2}{2}}{tan\frac{A_1}{2}tan\frac{A_2}{2}})}$，推得$r_1=\frac{r}{tan\frac{A_1}{2}tan\frac{A_2}{2}}=r(\frac{cos\frac{A_1}{2}cos\frac{A_2}{2}}{sin\frac{A_1}{2}sin\frac{A_2}{2}})$。

同理有$r_2=\frac{r}{tan\frac{A_2}{2}tan\frac{A_3}{2}}=r(\frac{cos\frac{A_2}{2}cos\frac{A_3}{2}}{sin\frac{A_2}{2}sin\frac{A_3}{2}})$，$r_3=\frac{r}{tan\frac{A_3}{2}tan\frac{A_1}{2}}=r(\frac{cos\frac{A_3}{2}cos\frac{A_1}{2}}{sin\frac{A_3}{2}sin\frac{A_1}{2}})$。

定理一：三角形的面積是其旁心三角形面積與內切圓切點三角形面積的等比中項。

設$\Delta A_1A_2A_3$的旁心三角形為$\Delta B_1B_2B_3$，內切圓切點三角形為$\Delta C_1C_2C_3$，

則$\Delta A_1A_2A_3$面積$=\sqrt{\Delta B_1B_2B_3\text{面積}\times\Delta C_1C_2C_3\text{面積}}$。

【證明】

1. 如圖 7，設$\Delta A_1A_2A_3$的面積為S，其內切圓切點三角形$\Delta C_1C_2C_3$的面積為S_1，旁心三角形$\Delta B_1B_2B_3$ 的面積為S_2，$\overline{A_1A_2}=V_1$，$\overline{A_2A_3}=V_2$，$\overline{A_3A_1}=V_3$，

其內切圓半徑為 r，$\overline{A_1A_2}$、$\overline{A_2A_3}$、$\overline{A_3A_1}$ 的旁切圓半徑分別為 r_1、r_2、r_3，

則 $S=\frac{1}{2}V_1r+\frac{1}{2}V_2r+\frac{1}{2}V_3r=\boldsymbol{\frac{1}{2}(V_1+V_2+V_3)r}$。

且 $V_1+V_2+V_3$

$$=\left(\frac{r}{tan\frac{A_1}{2}}+\frac{r}{tan\frac{A_2}{2}}\right)+\left(\frac{r}{tan\frac{A_2}{2}}+\frac{r}{tan\frac{A_3}{2}}\right)+\left(\frac{r}{tan\frac{A_3}{2}}+\frac{r}{tan\frac{A_1}{2}}\right)$$

$$=2\mathrm{r}(\frac{1}{tan\frac{A_1}{2}}+\frac{1}{tan\frac{A_2}{2}}+\frac{1}{tan\frac{A_3}{2}})$$

$$=2\mathrm{r}(\frac{tan\frac{A_2}{2}tan\frac{A_3}{2}+tan\frac{A_1}{2}tan\frac{A_3}{2}+tan\frac{A_1}{2}tan\frac{A_2}{2}}{tan\frac{A_1}{2}tan\frac{A_2}{2}tan\frac{A_3}{2}})$$

又 $\frac{1}{tan\frac{A_1}{2}}=cot\frac{A_1}{2}=tan\frac{A_2+A_3}{2}=\frac{tan\frac{A_2}{2}+tan\frac{A_3}{2}}{1-tan\frac{A_2}{2}tan\frac{A_3}{2}}$，

推得 $\tan\frac{A_2}{2}tan\frac{A_3}{2}+\tan\frac{A_1}{2}tan\frac{A_3}{2}+\tan\frac{A_1}{2}tan\frac{A_2}{2}=1$。

$\therefore \boldsymbol{V_1+V_2+V_3=\frac{2r}{tan\frac{A_1}{2}tan\frac{A_2}{2}tan\frac{A_3}{2}}}$ ，故 $\boldsymbol{S=\frac{r^2}{2}(\frac{2}{tan\frac{A_1}{2}tan\frac{A_2}{2}tan\frac{A_3}{2}})}$。

2. $\because \angle C_3O_1C_1=\theta_1$， $\angle C_1O_1C_2=\theta_2$， $\angle C_2O_1C_3=\theta_3$，

$\therefore$ $S_1=\frac{1}{2}r^2sin\theta_1+\frac{1}{2}r^2sin\theta_2+\frac{1}{2}r^2sin\theta_3$

$=\frac{1}{2}r^2sinA_1+\frac{1}{2}r^2sinA_2+\frac{1}{2}r^2sinA_3$

$=\boldsymbol{\frac{r^2}{2}(sinA_1+sinA_2+sinA_3)}$。

且 $sinA_1+sinA_2+sinA_3=2\sin\frac{A_1+A_2}{2}cos\frac{A_1-A_2}{2}+2sin\frac{A_3}{2}cos\frac{A_3}{2}$

$=2\cos\frac{A_3}{2}cos\frac{A_1-A_2}{2}+2cos\frac{A_1+A_2}{2}cos\frac{A_3}{2}$

$=2\cos\frac{A_3}{2}(cos\frac{A_1+A_2}{2}+cos\frac{A_1-A_2}{2})$

$=2\cos\frac{A_3}{2}\left(2cos\frac{A_1}{2}cos\frac{A_2}{2}\right)=4cos\frac{A_1}{2}cos\frac{A_2}{2}cos\frac{A_3}{2}$，

推得

$$S_1=\frac{r^2}{2}\left(4cos\frac{A_1}{2}cos\frac{A_2}{2}cos\frac{A_3}{2}\right)=\frac{r^2}{2}(\frac{2}{tan\frac{A_1}{2}tan\frac{A_2}{2}tan\frac{A_3}{2}})(2sin\frac{A_1}{2}sin\frac{A_2}{2}sin\frac{A_3}{2})$$

$=S(2\sin\frac{A_1}{2}sin\frac{A_2}{2}sin\frac{A_3}{2})$。

因此有 $\frac{\boldsymbol{S}}{\boldsymbol{S_1}}=\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{2sin\frac{A_1}{2}sin\frac{A_2}{2}sin\frac{A_3}{2}}}$。

3. 如圖 7，$\because\overline{A_1C_1}=\overline{A_1C_3}$(切線等長)，且$\overline{A_1O_1}$平分$\angle C_1A_1C_3$，$\therefore\overline{C_1C_3}\perp\overline{A_1O_1}$。

且$\overline{B_1B_3}\perp\overline{A_1O_1}$(**同一頂點處內、外角平分線互相垂直**)，$\therefore\overline{B_1B_3}//\overline{C_1C_3}$。

同理有 $\overline{B_1B_2}//\overline{C_1C_2}$，$\overline{B_2B_3}//\overline{C_2C_3}$，

故旁心三角形$\Delta B_1B_2B_3$和內切圓切點三角形$\Delta C_1C_2C_3$**會相似**。

由引理一知 $r_1=r(\frac{cos\frac{A_1}{2}cos\frac{A_2}{2}}{sin\frac{A_1}{2}sin\frac{A_2}{2}})$， $r_2=r(\frac{cos\frac{A_2}{2}cos\frac{A_3}{2}}{sin\frac{A_2}{2}sin\frac{A_3}{2}})$，$r_3=r(\frac{cos\frac{A_3}{2}cos\frac{A_1}{2}}{sin\frac{A_3}{2}sin\frac{A_1}{2}})$。

$$\text{且 }\overline{B_1B_2}=\frac{r_1}{cos\frac{A_2}{2}}+\frac{r_2}{cos\frac{A_2}{2}}=r\left(\frac{cos\frac{A_1}{2}}{sin\frac{A_1}{2}sin\frac{A_2}{2}}\right)+r\left(\frac{cos\frac{A_3}{2}}{sin\frac{A_2}{2}sin\frac{A_3}{2}}\right)$$

$$=r\left(\frac{sin\frac{A_3}{2}cos\frac{A_1}{2}+cos\frac{A_3}{2}sin\frac{A_1}{2}}{sin\frac{A_1}{2}sin\frac{A_2}{2}sin\frac{A_3}{2}}\right)=r\frac{sin(\frac{A_1+A_3}{2})}{sin\frac{A_1}{2}sin\frac{A_2}{2}sin\frac{A_3}{2}}=r\frac{cos\frac{A_2}{2}}{sin\frac{A_1}{2}sin\frac{A_2}{2}sin\frac{A_3}{2}},$$

又 $\overline{C_1C_2}=rcos\frac{A_2}{2}+rcos\frac{A_2}{2}=2rcos\frac{A_2}{2}$，

故 $\frac{\overline{\boldsymbol{B_1B_2}}}{\overline{\boldsymbol{C_1C_2}}}=\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{2sin\frac{A_1}{2}sin\frac{A_2}{2}sin\frac{A_3}{2}}}$，推得 $\frac{S_2}{S_1}=\frac{\overline{B_1B_2}^2}{\overline{C_1C_2}^2}=(\frac{1}{2sin\frac{A_1}{2}sin\frac{A_2}{2}sin\frac{A_3}{2}})^2$。

又由 2.知 $\frac{\boldsymbol{S}}{\boldsymbol{S_1}}=\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{2sin\frac{A_1}{2}sin\frac{A_2}{2}sin\frac{A_3}{2}}}$，

故 $\frac{S_2}{S}=\frac{(\frac{S_2}{S_1})}{(\frac{S}{S_1})}=\frac{1}{2sin\frac{A_1}{2}sin\frac{A_2}{2}sin\frac{A_3}{2}}$，推得 $\frac{S_2}{S}=\frac{S}{S_1}\Rightarrow S=\sqrt{S_1S_2}$。

即 $\Delta\boldsymbol{A_1A_2A_3}$**面積** $=\sqrt{\Delta\boldsymbol{B_1B_2B_3}\textbf{面積}\times\Delta\boldsymbol{C_1C_2C_3}\textbf{面積}}$。

為了證明雙心四邊形也有相對應的結果，我們試著找出其**共通的幾何方法**去證原命題。接著將證明改寫如下：

【證明】

1. 如圖 7，$\because\overline{A_1C_1}=\overline{A_1C_3}$(切線等長)，且$\overline{A_1O_1}$平分$\angle C_1A_1C_3$，$\therefore\overline{C_1C_3}\perp\overline{A_1O_1}$。

且$\overline{B_1B_3}\perp\overline{A_1O_1}$(**同一頂點處內、外角平分線互相垂直**)，$\therefore\overline{B_1B_3}//\overline{C_1C_3}$。

同理有 $\overline{B_1B_2}//\overline{C_1C_2}$，$\overline{B_2B_3}//\overline{C_2C_3}$，

故旁心三角形$\Delta B_1B_2B_3$和內切圓切點三角形$\Delta C_1C_2C_3$**會相似**。

由引理一知 $r_1=r(\frac{cos\frac{A_1}{2}cos\frac{A_2}{2}}{sin\frac{A_1}{2}sin\frac{A_2}{2}})$， $r_2=r(\frac{cos\frac{A_2}{2}cos\frac{A_3}{2}}{sin\frac{A_2}{2}sin\frac{A_3}{2}})$，$r_3=r(\frac{cos\frac{A_3}{2}cos\frac{A_1}{2}}{sin\frac{A_3}{2}sin\frac{A_1}{2}})$。

且 $\overline{B_1B_2}=\frac{r_1}{cos\frac{A_2}{2}}+\frac{r_2}{cos\frac{A_2}{2}}=r\left(\frac{cos\frac{A_1}{2}}{sin\frac{A_1}{2}sin\frac{A_2}{2}}\right)+r\left(\frac{cos\frac{A_3}{2}}{sin\frac{A_2}{2}sin\frac{A_3}{2}}\right)$

$$=r\left(\frac{sin\frac{A_3}{2}cos\frac{A_1}{2}+cos\frac{A_3}{2}sin\frac{A_1}{2}}{sin\frac{A_1}{2}sin\frac{A_2}{2}sin\frac{A_3}{2}}\right)=\boldsymbol{r}\frac{\boldsymbol{sin}(\frac{\boldsymbol{A_1+A_3}}{\boldsymbol{2}})}{\boldsymbol{sin\frac{A_1}{2}sin\frac{A_2}{2}sin\frac{A_3}{2}}},$$

又 $\overline{C_1C_2}=rcos\frac{A_2}{2}+rcos\frac{A_2}{2}=2rcos\frac{A_2}{2}$，

故 $\frac{\overline{B_1B_2}}{\overline{C_1C_2}}=\frac{\sin(\frac{A_1+A_3}{2})}{2sin\frac{A_1}{2}sin\frac{A_2}{2}sin\frac{A_3}{2}cos\frac{A_2}{2}}=\frac{\mathbf{sin}(\frac{\boldsymbol{A_1+A_3}}{\boldsymbol{2}})}{\boldsymbol{sin\frac{A_1}{2}sin\frac{A_3}{2}sinA_2}}$。

同理有 $\frac{\overline{B_2B_3}}{\overline{C_2C_3}}=\frac{\sin(\frac{A_2+A_1}{2})}{sin\frac{A_2}{2}sin\frac{A_1}{2}sinA_3}$，$\frac{\overline{B_3B_1}}{\overline{C_3C_1}}=\frac{\sin(\frac{A_3+A_2}{2})}{sin\frac{A_3}{2}sin\frac{A_2}{2}sinA_1}$。

∵旁心三角形$\Delta B_1B_2B_3$和內切圓切點三角形為$\Delta C_1C_2C_3$相似，

∴ $\frac{\sin(\frac{A_1+A_3}{2})}{sin\frac{A_1}{2}sin\frac{A_3}{2}sinA_2}=\frac{\sin(\frac{A_2+A_1}{2})}{sin\frac{A_2}{2}sin\frac{A_1}{2}sinA_3}=\frac{\sin(\frac{A_3+A_2}{2})}{sin\frac{A_3}{2}sin\frac{A_2}{2}sinA_1}$。

推得 $\frac{\sin(\frac{A_2+A_1}{2})}{sin\frac{A_2}{2}sin\frac{A_1}{2}}=\frac{\mathbf{sin}(\frac{\boldsymbol{A_1+A_3}}{\boldsymbol{2}})\boldsymbol{sinA_3}}{\boldsymbol{sin\frac{A_1}{2}sin\frac{A_3}{2}sinA_2}}$，$\frac{\sin(\frac{A_3+A_2}{2})}{sin\frac{A_3}{2}sin\frac{A_2}{2}}=\frac{\mathbf{sin}(\frac{\boldsymbol{A_1+A_3}}{\boldsymbol{2}})\boldsymbol{sinA_1}}{\boldsymbol{sin\frac{A_1}{2}sin\frac{A_3}{2}sinA_2}}$。

設旁心三角形$\Delta B_1B_2B_3$的面積為S_2，內切圓切點三角形$\Delta C_1C_2C_3$的面積為S_1

則 $\frac{S_2}{S_1}=\frac{\overline{B_1B_2}^2}{\overline{C_1C_2}^2}=(\frac{\mathbf{sin}(\frac{\boldsymbol{A_1+A_3}}{\boldsymbol{2}})}{\boldsymbol{sin\frac{A_1}{2}sin\frac{A_3}{2}sinA_2}})^{\mathbf{2}}$。

2. ∵$\angle C_3O_1C_1=\theta_1$， $\angle C_1O_1C_2=\theta_2$，$\angle C_2O_1C_3=\theta_3$，

∴ $S_1=\frac{1}{2}r^2sin\theta_1+\frac{1}{2}r^2sin\theta_2+\frac{1}{2}r^2sin\theta_3$

$$=\frac{1}{2}r^2sinA_1+\frac{1}{2}r^2sinA_2+\frac{1}{2}r^2sinA_3$$

$$=\frac{\boldsymbol{r^2}}{\mathbf{2}}(\boldsymbol{sinA_1}+\boldsymbol{sinA_2}+\boldsymbol{sinA_3})。$$

如圖 7，設$\Delta A_1A_2A_3$的面積S，$\overline{A_1A_2}=V_1$，$\overline{A_2A_3}=V_2$，$\overline{A_3A_1}=V_3$，

其內切圓半徑和三個旁切圓半徑依序為 r，r_1，r_2，r_3，

則 $S=\frac{1}{2}V_1r+\frac{1}{2}V_2r+\frac{1}{2}V_3r=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}(\boldsymbol{V_1}+\boldsymbol{V_2}+\boldsymbol{V_3})\boldsymbol{r}$。

且 $V_1+V_2+V_3$

$$=\left(\frac{r}{tan\frac{A_1}{2}}+\frac{r}{tan\frac{A_2}{2}}\right)+\left(\frac{r}{tan\frac{A_2}{2}}+\frac{r}{tan\frac{A_3}{2}}\right)+\left(\frac{r}{tan\frac{A_3}{2}}+\frac{r}{tan\frac{A_1}{2}}\right)$$

$$=r\left(\frac{1}{tan\frac{A_1}{2}}+\frac{1}{tan\frac{A_3}{2}}+\frac{1}{tan\frac{A_2}{2}}+\frac{1}{tan\frac{A_1}{2}}+\frac{1}{tan\frac{A_3}{2}}+\frac{1}{tan\frac{A_2}{2}}\right)$$

$$=r\left(\frac{cos\frac{A_1}{2}}{sin\frac{A_1}{2}}+\frac{cos\frac{A_3}{2}}{sin\frac{A_3}{2}}+\frac{cos\frac{A_2}{2}}{sin\frac{A_2}{2}}+\frac{cos\frac{A_1}{2}}{sin\frac{A_1}{2}}+\frac{cos\frac{A_3}{2}}{sin\frac{A_3}{2}}+\frac{cos\frac{A_2}{2}}{sin\frac{A_2}{2}}\right)$$

$$=r\left(\frac{\sin\left(\frac{A_1+A_3}{2}\right)}{sin\frac{A_1}{2}sin\frac{A_3}{2}}+\frac{\sin\left(\frac{A_2+A_1}{2}\right)}{sin\frac{A_2}{2}sin\frac{A_1}{2}}+\frac{\sin\left(\frac{A_3+A_2}{2}\right)}{sin\frac{A_3}{2}sin\frac{A_2}{2}}\right)$$

$$=r\left(\frac{\sin\left(\frac{A_1+A_3}{2}\right)}{sin\frac{A_1}{2}sin\frac{A_3}{2}}+\frac{\sin(\frac{A_1+A_3}{2})sinA_3}{sin\frac{A_1}{2}sin\frac{A_3}{2}sinA_2}+\frac{\sin(\frac{A_1+A_3}{2})sinA_1}{sin\frac{A_1}{2}sin\frac{A_3}{2}sinA_2}\right)$$

$$=\boldsymbol{r}\frac{\mathbf{sin}\left(\frac{\boldsymbol{A_1}+\boldsymbol{A_3}}{\mathbf{2}}\right)}{\boldsymbol{sin}\frac{\boldsymbol{A_1}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{sin}\frac{\boldsymbol{A_3}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{sinA_2}}(\mathbf{sin}\boldsymbol{A_2}+\mathbf{sin}\boldsymbol{A_3}+\mathbf{sin}\boldsymbol{A_1})\text{，}$$

故 $S=\frac{\sin\left(\frac{A_1+A_3}{2}\right)}{sin\frac{A_1}{2}sin\frac{A_3}{2}sinA_2}\frac{\mathrm{r}^2}{2}(\sin A_1+\sin A_2+\sin A_3)=\frac{\sin\left(\frac{A_1+A_3}{2}\right)}{sin\frac{A_1}{2}sin\frac{A_3}{2}sinA_2}S_1$。

$\therefore\frac{S}{S_1}=\frac{\sin\left(\frac{A_1+A_3}{2}\right)}{sin\frac{A_1}{2}sin\frac{A_3}{2}sinA_2}$，且 $\frac{S_2}{S_1}=\frac{\overline{B_1B_2}^2}{\overline{C_1C_2}^2}=\left(\frac{\mathbf{sin}(\frac{\boldsymbol{A_1}+\boldsymbol{A_3}}{\mathbf{2}})}{\boldsymbol{sin}\frac{\boldsymbol{A_1}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{sin}\frac{\boldsymbol{A_3}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{sinA_2}}\right)^{\mathbf{2}}$，

因此有 $\frac{S_2}{S}=\frac{(\frac{S_2}{S_1})}{(\frac{S}{S_1})}=\frac{\sin\left(\frac{A_1+A_3}{2}\right)}{sin\frac{A_1}{2}sin\frac{A_3}{2}sinA_2}$，推得 $\frac{S_2}{S}=\frac{S}{S_1}\Rightarrow S=\sqrt{S_1S_2}$。

即 $\Delta\boldsymbol{A_1A_2A_3}$**面積** $=\sqrt{\Delta\boldsymbol{B_1B_2B_3}\text{面積}\times\Delta\boldsymbol{C_1C_2C_3}\text{面積}}$。

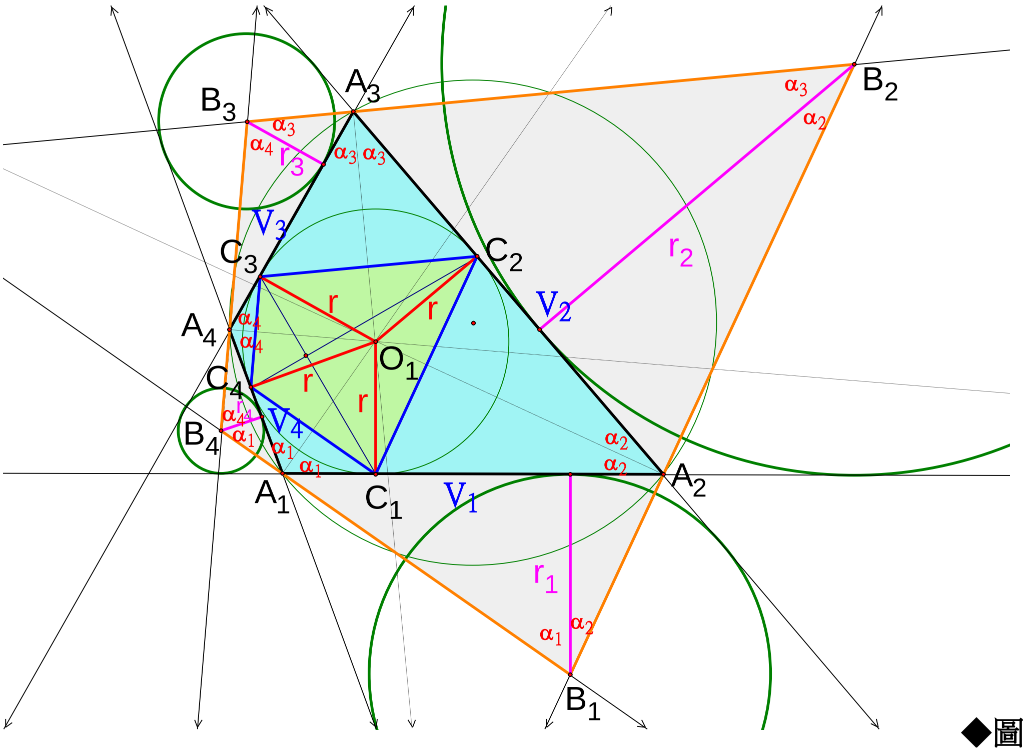
(二)原定理的推廣

若是圓外切四邊形的情形，則對應邊平行並**不能推得**其旁心四邊形和內切圓切點四邊形**會相似**，於是我們考慮雙心四邊形，並證明它也有相對應的結果，證明如下：

定理二：雙心四邊形的面積是其旁心四邊形面積與內切圓切點四邊形面積的等比中項。

設雙心四邊形$\boldsymbol{A_1A_2A_3A_4}$的旁心四邊形為$\boldsymbol{B_1B_2B_3B_4}$，內切圓切點四邊形為$\boldsymbol{C_1C_2C_3C_4}$，

則$\boldsymbol{A_1A_2A_3A_4}$面積 $= \sqrt{\boldsymbol{B_1B_2B_3B_4}\text{面積} \times \boldsymbol{C_1C_2C_3C_4}\text{面積}}$。



◆圖 8

【證明】

1. 如圖 8，$\because \overline{A_1C_1} = \overline{A_1C_4}$(切線等長)，且$\overline{A_1O_1}$平分$\angle C_1A_1C_4$，$\therefore \overline{C_1C_4} \perp \overline{A_1O_1}$。

   且$\overline{B_1B_4} \perp \overline{A_1O_1}$(同一頂點處內、外角平分線互相垂直)，$\therefore \overline{B_1B_4} // \overline{C_1C_4}$。

   同理有 $\overline{B_1B_2} // \overline{C_1C_2}$，$\overline{B_2B_3} // \overline{C_2C_3}$，$\overline{B_3B_4} // \overline{C_3C_4}$，

   故旁心四邊形$B_1B_2B_3B_4$和內切圓切點四邊形$C_1C_2C_3C_4$的**對應角相等**。

   由引理一知 $r_1 = r\left(\frac{\cos\frac{A_1}{2}\cos\frac{A_2}{2}}{\sin\frac{A_1}{2}\sin\frac{A_2}{2}}\right)$，$r_2 = r\left(\frac{\cos\frac{A_2}{2}\cos\frac{A_3}{2}}{\sin\frac{A_2}{2}\sin\frac{A_3}{2}}\right)$，$r_3 = r\left(\frac{\cos\frac{A_3}{2}\cos\frac{A_4}{2}}{\sin\frac{A_3}{2}\sin\frac{A_4}{2}}\right)$。

   同理有 $r_4 = r\left(\frac{\cos\frac{A_4}{2}\cos\frac{A_1}{2}}{\sin\frac{A_4}{2}\sin\frac{A_1}{2}}\right)$。

   且 $\overline{B_1B_2} = \frac{r_1}{\cos\frac{A_2}{2}} + \frac{r_2}{\cos\frac{A_2}{2}} = r\left(\frac{\cos\frac{A_1}{2}}{\sin\frac{A_1}{2}\sin\frac{A_2}{2}}\right) + r\left(\frac{\cos\frac{A_3}{2}}{\sin\frac{A_2}{2}\sin\frac{A_3}{2}}\right)$

$$=r\left(\frac{sin\frac{A_3}{2}cos\frac{A_1}{2}+cos\frac{A_3}{2}sin\frac{A_1}{2}}{sin\frac{A_1}{2}sin\frac{A_2}{2}sin\frac{A_3}{2}}\right)=r\frac{sin(\frac{A_1+A_3}{2})}{sin\frac{A_1}{2}sin\frac{A_2}{2}sin\frac{A_3}{2}},$$

又 $\overline{C_1C_2}=rcos\frac{A_2}{2}+rcos\frac{A_2}{2}=2rcos\frac{A_2}{2}$和**圓內接四邊形對角互補**，

故

$$\frac{\overline{B_1B_2}}{\overline{C_1C_2}}=\frac{\sin(\frac{A_1+A_3}{2})}{2sin\frac{A_1}{2}sin\frac{A_2}{2}sin\frac{A_3}{2}cos\frac{A_2}{2}}=\frac{\sin(\frac{A_1+A_3}{2})}{sin\frac{A_1}{2}sin\frac{A_3}{2}sinA_2}=\frac{1}{sin\frac{A_1}{2}cos\frac{A_1}{2}sinA_2}=\frac{2}{sinA_1sinA_2}。$$

同理有

$$\frac{\overline{B_2B_3}}{\overline{C_2C_3}}=\frac{\sin(\frac{A_2+A_4}{2})}{sin\frac{A_2}{2}sin\frac{A_4}{2}sinA_3}=\frac{1}{sin\frac{A_2}{2}cos\frac{A_2}{2}sinA_1}=\frac{2}{sinA_1sinA_2},$$

$$\frac{\overline{B_3B_4}}{\overline{C_3C_4}}=\frac{\sin(\frac{A_3+A_1}{2})}{sin\frac{A_3}{2}sin\frac{A_1}{2}sinA_4}=\frac{1}{cos\frac{A_1}{2}sin\frac{A_1}{2}sinA_2}=\frac{2}{sinA_1sinA_2},$$

$$\frac{\overline{B_4B_1}}{\overline{C_4C_1}}=\frac{\sin(\frac{A_4+A_2}{2})}{sin\frac{A_4}{2}sin\frac{A_2}{2}sinA_1}=\frac{1}{cos\frac{A_2}{2}sin\frac{A_2}{2}sinA_1}=\frac{2}{sinA_1sinA_2}。$$

因此旁心四邊形$B_1B_2B_3B_4$和內切圓切點四邊形$C_1C_2C_3C_4$的**對應邊也成比例，從而相似**。

$$\therefore\ \frac{\sin(\frac{A_1+A_3}{2})}{sin\frac{A_1}{2}sin\frac{A_3}{2}sinA_2}=\frac{\sin(\frac{A_2+A_4}{2})}{sin\frac{A_2}{2}sin\frac{A_4}{2}sinA_3}=\frac{\sin(\frac{A_3+A_1}{2})}{sin\frac{A_3}{2}sin\frac{A_1}{2}sinA_4}=\frac{\sin(\frac{A_4+A_2}{2})}{sin\frac{A_4}{2}sin\frac{A_2}{2}sinA_1}。$$

推得 $\frac{\sin(\frac{A_2+A_4}{2})}{sin\frac{A_2}{2}sin\frac{A_4}{2}}=\boldsymbol{\frac{\sin(\frac{A_1+A_3}{2})sinA_3}{sin\frac{A_1}{2}sin\frac{A_3}{2}sinA_2}}$，$\frac{\sin(\frac{A_3+A_1}{2})}{sin\frac{A_3}{2}sin\frac{A_1}{2}}=\boldsymbol{\frac{\sin(\frac{A_1+A_3}{2})sinA_4}{sin\frac{A_1}{2}sin\frac{A_3}{2}sinA_2}}$，

$\frac{\sin(\frac{A_4+A_2}{2})}{sin\frac{A_4}{2}sin\frac{A_2}{2}}=\boldsymbol{\frac{\sin(\frac{A_1+A_3}{2})sinA_1}{sin\frac{A_1}{2}sin\frac{A_3}{2}sinA_2}}$。

設旁心四邊形$B_1B_2B_3B_4$的面積為S_2，內切圓切點四邊形$C_1C_2C_3C_4$的面積為S_1

則 $\frac{S_2}{S_1}=\frac{\overline{B_1B_2}^2}{\overline{C_1C_2}^2}=\boldsymbol{\left(\frac{\sin(\frac{A_1+A_3}{2})}{sin\frac{A_1}{2}sin\frac{A_3}{2}sinA_2}\right)^2}$。

2. $\because \angle C_4O_1C_1=\theta_1$，$\angle C_1O_1C_2=\theta_2$，$\angle C_2O_1C_3=\theta_3$，$\angle C_3O_1C_4=\theta_4$，

$\therefore\ S_1=\frac{1}{2}r^2sin\theta_1+\frac{1}{2}r^2sin\theta_2+\frac{1}{2}r^2sin\theta_3+\frac{1}{2}r^2sin\theta_4$

$$=\frac{1}{2}r^2sinA_1+\frac{1}{2}r^2sinA_2+\frac{1}{2}r^2sinA_3+\frac{1}{2}r^2sinA_4$$

$$=\boldsymbol{\frac{r^2}{2}(sinA_1+sinA_2+sinA_3+sinA_4)}\text{。}$$

如圖 8，設雙心四邊形$A_1A_2A_3A_4$的面積為S，$\overline{A_1A_2}=V_1$，$\overline{A_2A_3}=V_2$，$\overline{A_3A_4}=V_3$，$\overline{A_4A_1}=V_4$，其內切圓半徑和五個旁切圓半徑依序為 r，r_1，r_2，r_3，r_4，

則 $S=\frac{1}{2}V_1r+\frac{1}{2}V_2r+\frac{1}{2}V_3r+\frac{1}{2}V_4r=\boldsymbol{\frac{1}{2}(V_1+V_2+V_3+V_4)r}$。

且 $V_1+V_2+V_3+V_4$

$$=\left(\frac{r}{tan\frac{A_1}{2}}+\frac{r}{tan\frac{A_2}{2}}\right)+\left(\frac{r}{tan\frac{A_2}{2}}+\frac{r}{tan\frac{A_3}{2}}\right)+\left(\frac{r}{tan\frac{A_3}{2}}+\frac{r}{tan\frac{A_4}{2}}\right)+\left(\frac{r}{tan\frac{A_4}{2}}+\frac{r}{tan\frac{A_1}{2}}\right)$$

$$=r(\frac{1}{tan\frac{A_1}{2}}+\frac{1}{tan\frac{A_3}{2}}+\frac{1}{tan\frac{A_2}{2}}+\frac{1}{tan\frac{A_4}{2}}+\frac{1}{tan\frac{A_3}{2}}+\frac{1}{tan\frac{A_1}{2}}+\frac{1}{tan\frac{A_4}{2}}+\frac{1}{tan\frac{A_2}{2}})$$

$$=r(\frac{cos\frac{A_1}{2}}{sin\frac{A_1}{2}}+\frac{cos\frac{A_3}{2}}{sin\frac{A_3}{2}}+\frac{cos\frac{A_2}{2}}{sin\frac{A_2}{2}}+\frac{cos\frac{A_4}{2}}{sin\frac{A_4}{2}}+\frac{cos\frac{A_3}{2}}{sin\frac{A_3}{2}}+\frac{cos\frac{A_1}{2}}{sin\frac{A_1}{2}}+\frac{cos\frac{A_4}{2}}{sin\frac{A_4}{2}}+\frac{cos\frac{A_2}{2}}{sin\frac{A_2}{2}})$$

$$=r(\frac{\sin\left(\frac{A_1+A_3}{2}\right)}{sin\frac{A_1}{2}sin\frac{A_3}{2}}+\frac{\sin\left(\frac{A_2+A_4}{2}\right)}{sin\frac{A_2}{2}sin\frac{A_4}{2}}+\frac{\sin\left(\frac{A_3+A_1}{2}\right)}{sin\frac{A_3}{2}sin\frac{A_1}{2}}+\frac{\sin\left(\frac{A_4+A_2}{2}\right)}{sin\frac{A_4}{2}sin\frac{A_2}{2}})$$

$$=r(\frac{\sin\left(\frac{A_1+A_3}{2}\right)}{sin\frac{A_1}{2}sin\frac{A_3}{2}}+\frac{\sin(\frac{A_1+A_3}{2})sinA_3}{sin\frac{A_1}{2}sin\frac{A_3}{2}sinA_2}+\frac{\sin(\frac{A_1+A_3}{2})sinA_4}{sin\frac{A_1}{2}sin\frac{A_3}{2}sinA_2}+\frac{\sin(\frac{A_1+A_3}{2})sinA_1}{sin\frac{A_1}{2}sin\frac{A_3}{2}sinA_2})$$

$$=\boldsymbol{r\frac{\sin\left(\frac{A_1+A_3}{2}\right)}{sin\frac{A_1}{2}sin\frac{A_3}{2}sinA_2}(\sin A_2+\sin A_3+\sin A_4+\sin A_1)}\text{，}$$

故 $S=\frac{\sin\left(\frac{A_1+A_3}{2}\right)}{sin\frac{A_1}{2}sin\frac{A_3}{2}sinA_2}\frac{\mathrm{r}^2}{2}(\sin A_1+\sin A_2+\sin A_3+\sin A_4)=\frac{\sin\left(\frac{A_1+A_3}{2}\right)}{sin\frac{A_1}{2}sin\frac{A_3}{2}sinA_2}S_1$。

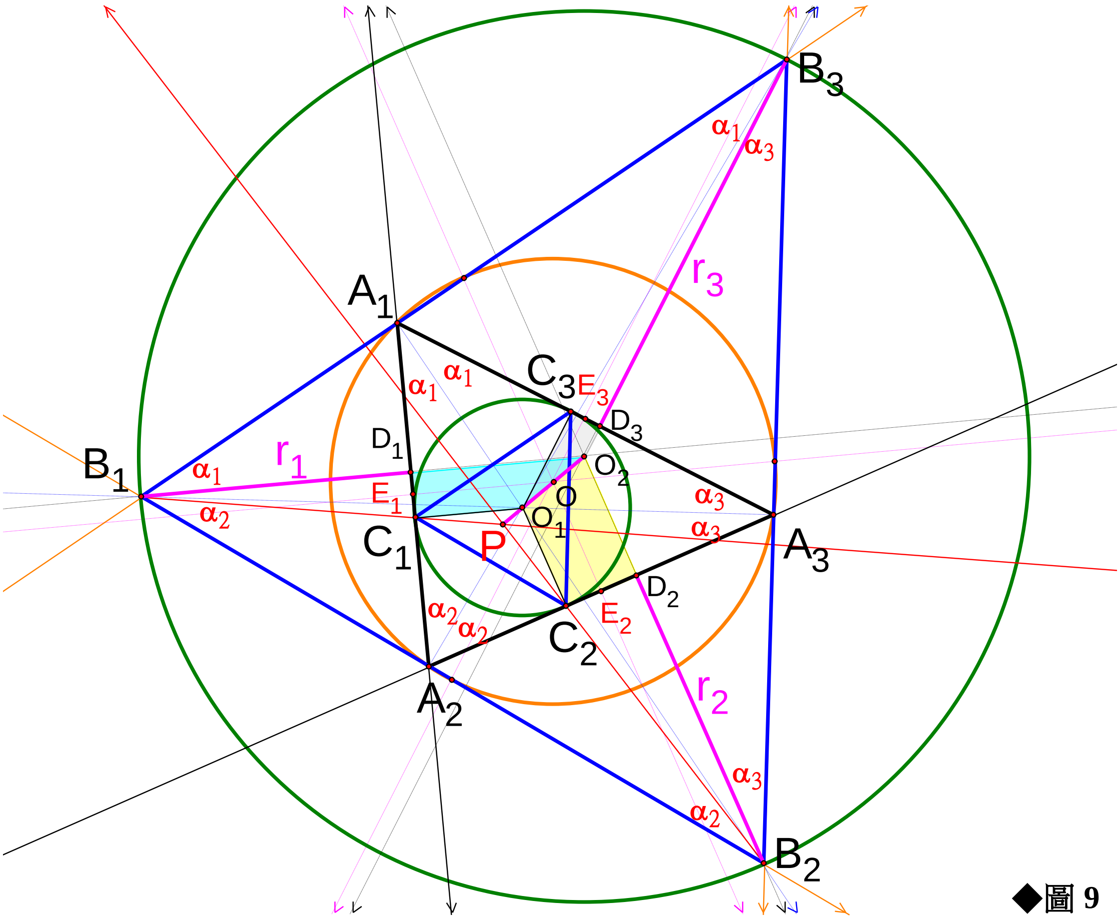
$\therefore\ \frac{S}{S_1}=\frac{\sin\left(\frac{A_1+A_3}{2}\right)}{sin\frac{A_1}{2}sin\frac{A_3}{2}sinA_2}$，且 $\frac{S_2}{S_1}=\frac{\overline{B_1B_2}^2}{\overline{C_1C_2}^2}=\boldsymbol{(\frac{\sin(\frac{A_1+A_3}{2})}{sin\frac{A_1}{2}sin\frac{A_3}{2}sinA_2})^2}$，

因此有 $\frac{S_2}{S}=\frac{(\frac{S_2}{S_1})}{(\frac{S}{S_1})}=\frac{\sin\left(\frac{A_1+A_3}{2}\right)}{sin\frac{A_1}{2}sin\frac{A_3}{2}sinA_2}$，推得 $\frac{S_2}{S}=\frac{S}{S_1}\Rightarrow S=\sqrt{S_1S_2}$。

即 $\boldsymbol{A_1A_2A_3A_4}$**面積**$=\sqrt{\boldsymbol{B_1B_2B_3B_4}\text{面積}\times\boldsymbol{C_1C_2C_3C_4}\text{面積}}$。

為了證明其它雙心$n(n \geq 5)$邊形也有相對應的結果，我們試著證明圓外切n邊形**如果也有外接圓時(雙心n邊形)**，就可以推得其旁心n邊形和內切圓切點n邊形會相似，於是我們需先證明下面這個引理：

引理二：設雙心n邊形為$A_1A_2A_3\cdots A_n$，其旁心n邊形為$B_1B_2B_3\cdots B_n$，內切圓切點n邊形為$C_1C_2C_3\cdots C_n$，則旁心n邊形和內切圓切點n邊形會相似。且設三者的外心依序為O、O_2、O_1，則O點為連心線$\overline{O_1O_2}$的中點。



◆圖 9

【證明】

1.(1)如圖 9，設$\Delta A_1A_2A_3$的旁心三角形為$\Delta B_1B_2B_3$，內切圓切點三角形為$\Delta C_1C_2C_3$，

$\because \overline{B_1B_2}//\overline{C_1C_2}$，$\overline{B_2B_3}//\overline{C_2C_3}$，$\overline{B_3B_1}//\overline{C_3C_1}$，

$\therefore$旁心三角形$\Delta B_1B_2B_3$和內切圓切點三角形$\Delta C_1C_2C_3$**會相似**。

連接$\overrightarrow{B_1C_1}$和$\overrightarrow{B_2C_2}$，設交於P點，則**P點為$\Delta B_1B_2B_3$和$\Delta C_1C_2C_3$的位似中心**。

又三者的外心依序為O、O_2、O_1，

$\therefore$連接$\overleftrightarrow{O_1C_1}$、$\overleftrightarrow{O_1C_2}$、$\overleftrightarrow{O_1C_3}$，必分別垂直$\overline{A_1A_2}$、$\overline{A_2A_3}$、$\overline{A_3A_1}$於點$C_1$、$C_2$、$C_3$；

再分別作$\overline{A_1A_2}$、$\overline{A_2A_3}$、$\overline{A_3A_1}$的中垂線，則此三中垂線必相交於$\Delta A_1A_2A_3$的

外心O，且設其分別垂直$\overline{A_1A_2}$、$\overline{A_2A_3}$、$\overline{A_3A_1}$於E_1、E_2、E_3。

(2)作$\overleftrightarrow{B_1D_1}$、$\overleftrightarrow{B_2D_2}$、$\overleftrightarrow{B_3D_3}$分別垂直$\overline{A_1A_2}$、$\overline{A_2A_3}$、$\overline{A_3A_1}$於點$D_1$、$D_2$、$D_3$，

則$\overline{B_1D_1}$、$\overline{B_2D_2}$、$\overline{B_3D_3}$分別為$\overline{A_1A_2}$、$\overline{A_2A_3}$、$\overline{A_1A_3}$的旁切圓半徑。

設$\overline{B_1D_1}=r_1$，$\overline{B_2D_2}=r_2$，$\overline{B_3D_3}=r_3$，$\Delta \mathrm{A_1A_2A_3}$的內切圓半徑為 r，

由引理一知 $r_1=\frac{r}{tan\frac{A_1}{2}tan\frac{A_2}{2}}$，$r_2=\frac{r}{tan\frac{A_2}{2}tan\frac{A_3}{2}}$，$r_3=\frac{r}{tan\frac{A_3}{2}tan\frac{A_1}{2}}$。

$\therefore \overline{A_1D_1}=r_1tan\frac{A_1}{2}=\frac{r}{tan\frac{A_2}{2}}=\overline{A_2C_1}$，$\overline{A_2D_2}=r_2tan\frac{A_2}{2}=\frac{r}{tan\frac{A_3}{2}}=\overline{A_3C_2}$，

$\overline{A_3D_3}=r_3tan\frac{A_3}{2}=\frac{r}{tan\frac{A_1}{2}}=\overline{A_1C_3}$。

$\because$ $\overline{A_1E_1}=\overline{A_2E_1}$，$\overline{A_2E_2}=\overline{A_3E_2}$，$\overline{A_3E_3}=\overline{A_1E_3}$，

且 $\overline{A_1D_1}=\overline{A_2C_1}$，$\overline{A_2D_2}=\overline{A_3C_2}$，$\overline{A_3D_3}=\overline{A_1C_3}$，

$\therefore$ $\overline{A_2E_1}-\overline{A_2C_1}=\overline{A_1E_1}-\overline{A_1D_1}\Rightarrow\overline{C_1E_1}=\overline{E_1D_1}$，$E_1$為$\overline{C_1D_1}$的中點。

$\overline{A_3C_2}-\overline{A_3E_2}=\overline{A_2D_2}-\overline{A_2E_2}\Rightarrow\overline{C_2E_2}=\overline{E_2D_2}$，$E_2$為$\overline{C_2D_2}$的中點。

$\overline{A_1E_3}-\overline{A_1C_3}=\overline{A_3E_3}-\overline{A_3D_3}\Rightarrow\overline{C_3E_3}=\overline{E_3D_3}$，$E_3$為$\overline{C_3D_3}$的中點。

設$\overleftrightarrow{B_1D_1}$、$\overleftrightarrow{B_2D_2}$相交於一點$O_2'$，

則O_1、O、O_2'在$\overline{A_1A_2}$、$\overline{A_2A_3}$的投影分別為C_1、E_1、D_1和C_2、E_2、D_2。

$\because\overline{O_1O_2'}$在兩條相交直線上的投影均被$O$點的的投影所平分，

$\therefore \boldsymbol{O}$點為$\boldsymbol{\overline{O_1O_2'}}$ 的中點……①。

同理，若設$\overleftrightarrow{B_1D_1}$、$\overleftrightarrow{B_3D_3}$相交於一點$O"_2$，

則O_1、O、$O"_2$在$\overline{A_1A_2}$、$\overline{A_1A_3}$的投影分別為C_1、E_1、D_1和C_3、E_3、D_3。

$\because\overline{O_1O"_2}$在兩條相交直線上的投影均被$O$點的的投影所平分，

$\therefore \boldsymbol{O}$點也是$\boldsymbol{\overline{O_1O"_2}}$ 的中點……②。

由①、②可知：$O_2'=O"_2$，即**$\boldsymbol{\overleftrightarrow{B_1D_1}}$、$\boldsymbol{\overleftrightarrow{B_2D_2}}$、$\boldsymbol{\overleftrightarrow{B_3D_3}}$相交於一點$\boldsymbol{O_2'}$**。

(3)又$\angle \mathrm{A_1B_1D_1}=\frac{\angle A_1}{2}=\angle \mathrm{A_1B_3D_3}$，$\angle \mathrm{A_2B_1D_1}=\frac{\angle A_2}{2}=\angle \mathrm{A_2B_2D_2}$，

$\angle \mathrm{A_3B_2D_2}=\frac{\angle A_3}{2}=\angle \mathrm{A_3B_3D_3}$，

∴$\overleftrightarrow{B_1D_1}$、$\overleftrightarrow{B_2D_2}$、$\overleftrightarrow{B_3D_3}$的交點$O_2'$，滿足$\overline{O'_2B_1}=\overline{O'_2B_2}=\overline{O'_2B_3}$，

因此也是$\Delta B_1B_2B_3$的外心O_2，即$O_2'=O_2$。

故$\boldsymbol{O}$點為$\overline{\boldsymbol{O_1O_2}}$ 的中點，且$\boldsymbol{P}$、$\boldsymbol{O_1}$、$\boldsymbol{O_2}$三點共線。

2. (1)如圖 10，雙心n邊形為$A_1A_2A_3\cdots A_n(n\geq 4)$，其旁心$n$邊形為$B_1B_2B_3\cdots B_n$，

內切圓切點n邊形為$C_1C_2C_3\cdots C_n$，

連接$\overrightarrow{B_1C_1}$和$\overrightarrow{B_2C_2}$，設交於P點，欲證明P點即為旁心n邊形$B_1B_2B_3\cdots B_n$和

切點n邊形$C_1C_2C_3\cdots C_n$的位似中心。

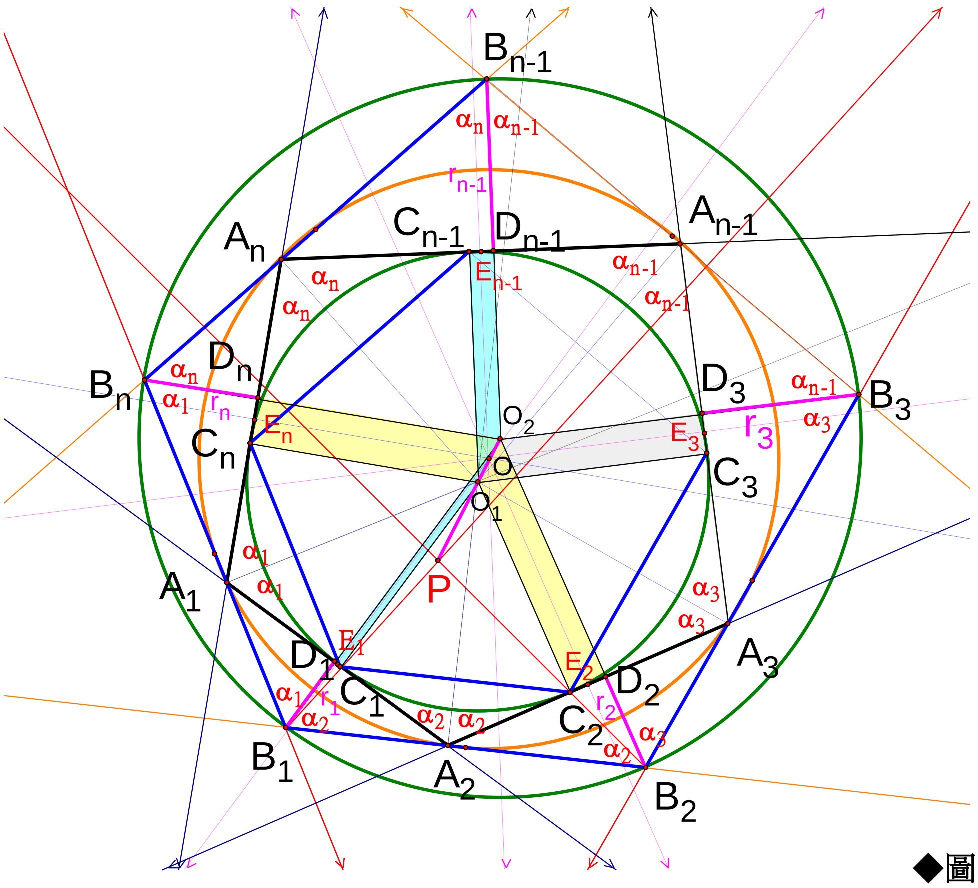
又三者的外心依序為O、O_2、O_1，∴連接$\overleftrightarrow{O_1C_1}$、$\overleftrightarrow{O_1C_2}$、$\overleftrightarrow{O_1C_3}$、⋯、$\overleftrightarrow{O_1C_{n-1}}$、$\overleftrightarrow{O_1C_n}$，

必分別垂直$\overline{A_1A_2}$、$\overline{A_2A_3}$、⋯、$\overline{A_{n-1}A_n}$、$\overline{A_nA_1}$於點C_1、C_2、⋯、C_{n-1}、C_n；

再分別作$\overline{A_1A_2}$、$\overline{A_2A_3}$、⋯、$\overline{A_{n-1}A_n}$、$\overline{A_nA_1}$的中垂線，則此n條中垂線必相交於

雙心n邊形$A_1A_2A_3\cdots A_n$的外心O，且設其分別垂直$\overline{A_1A_2}$、$\overline{A_2A_3}$、⋯、$\overline{A_{n-1}A_n}$、

$\overline{A_nA_1}$於點E_1、E_2、⋯、E_{n-1}、E_n。



◆**圖 10**

(2)作$\overleftrightarrow{B_1D_1}$、$\overleftrightarrow{B_2D_2}$分別垂直$\overline{A_1A_2}$、$\overline{A_2A_3}$於$D_1$、$D_2$，

則$\overline{B_1D_1}$、$\overline{B_2D_2}$分別為$\overline{A_1A_2}$、$\overline{A_2A_3}$的旁切圓半徑。

設$\overline{B_1D_1}=r_1$，$\overline{B_2D_2}=r_2$，雙心n邊形$A_1A_2A_3\cdots A_n$的內切圓半徑為 r，

由引理一知 $r_1=\frac{r}{tan\frac{A_1}{2}tan\frac{A_2}{2}}$，$r_2=\frac{r}{tan\frac{A_2}{2}tan\frac{A_3}{2}}$。

$\therefore \overline{A_1D_1}=r_1tan\frac{A_1}{2}=\frac{r}{tan\frac{A_2}{2}}=\overline{A_2C_1}$，$\overline{A_2D_2}=r_2tan\frac{A_2}{2}=\frac{r}{tan\frac{A_3}{2}}=\overline{A_3C_2}$。

$\because$ $\overline{A_1E_1}=\overline{A_2E_1}$，$\overline{A_2E_2}=\overline{A_3E_2}$，且 $\overline{A_1D_1}=\overline{A_2C_1}$，$\overline{A_2D_2}=\overline{A_3C_2}$，

$\therefore$ $\overline{A_2E_1}-\overline{A_2C_1}=\overline{A_1E_1}-\overline{A_1D_1}\Rightarrow\overline{C_1E_1}=\overline{E_1D_1}$，$E_1$為$\overline{C_1D_1}$的中點。

$\overline{A_3C_2}-\overline{A_3E_2}=\overline{A_2D_2}-\overline{A_2E_2}\Rightarrow\overline{C_2E_2}=\overline{E_2D_2}$，$E_2$為$\overline{C_2D_2}$的中點。

設$\overleftrightarrow{B_1D_1}$、$\overleftrightarrow{B_2D_2}$相交於一點$O_2'$，

則O_1、O、O_2'在$\overline{A_1A_2}$、$\overline{A_2A_3}$的投影分別為C_1、E_1、D_1和C_2、E_2、D_2。

$\because\overline{O_1O_2'}$在兩相交直線上的投影均被$O$點的的投影所平分，

$\therefore$**O點為$\overline{O_1O_2'}$ 的中點**。

再作$\overleftrightarrow{B_3D_3}$、⋯、$\overleftrightarrow{B_{n-1}D_{n-1}}$、$\overleftrightarrow{B_nD_n}$分別垂直$\overline{A_3A_4}$、⋯、$\overline{A_{n-1}A_n}$、$\overline{A_nA_1}$於點$D_3$、⋯、$D_{n-1}$、$D_n$，

則$\overline{B_3D_3}$、⋯、$\overline{B_{n-1}D_{n-1}}$、$\overline{B_nD_n}$分別為$\overline{A_3A_4}$、⋯、$\overline{A_{n-1}A_n}$、$\overline{A_nA_1}$的旁切圓半徑，

設$\overline{B_3D_3}=r_3$，⋯，$\overline{B_{n-1}D_{n-1}}=r_{n-1}$，$\overline{B_nD_n}=r_n$，

同上可得 E_3為$\overline{C_3D_3}$的中點，⋯，E_{n-1}為$\overline{C_{n-1}D_{n-1}}$的中點，$E_n$為$\overline{C_nD_n}$的中點。

同 1(2)可得 **$\overleftrightarrow{B_3D_3}$、⋯、$\overleftrightarrow{B_{n-1}D_{n-1}}$、$\overleftrightarrow{B_nD_n}$相交於一點$O_2'$**。

(3)又$\angle \mathrm{A_1B_1D_1}=\frac{\angle A_1}{2}=\angle \mathrm{A_1B}_n\mathrm{D}_n$，$\angle \mathrm{A_2B_1D_1}=\frac{\angle A_2}{2}=\angle \mathrm{A_2B_2D_2}$，

$\angle \mathrm{A_3B_2D_2}=\frac{\angle A_3}{2}=\angle \mathrm{A_3B_3D_3}$，$\cdots\angle \mathrm{A}_{n-1}\mathrm{B}_{n-2}\mathrm{D}_{n-2}=\frac{\angle A_{n-1}}{2}=\angle \mathrm{A}_{n-1}\mathrm{B}_{n-1}\mathrm{D}_{n-1}$，

$\angle \mathrm{A}_n\mathrm{B}_{n-1}\mathrm{D}_{n-1}=\frac{\angle A_n}{2}=\angle \mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{D}_n$，

$\therefore\overleftrightarrow{B_1D_1}$、$\overleftrightarrow{B_2D_2}$、$\overleftrightarrow{B_3D_3}$、⋯、$\overleftrightarrow{B_{n-1}D_{n-1}}$、$\overleftrightarrow{B_nD_n}$的交點$O_2'$，

滿足$\overline{O'_2B_1}=\overline{O'_2B_2}=\overline{O'_2B_3}=\cdots=\overline{O'_2B_n}$，因此也是旁心$n$邊形$B_1B_2B_3\cdots B_n$的外心$O_2$，即$O_2'=O_2$。

故**O點為$\overline{O_1O_2}$ 的中點**，且**P、O_1、O_2三點共線**。

設旁心n邊形$B_1B_2B_3\cdots B_n$的外接圓為R，切點n邊形$C_1C_2C_3\cdots C_n$的外接圓為r，

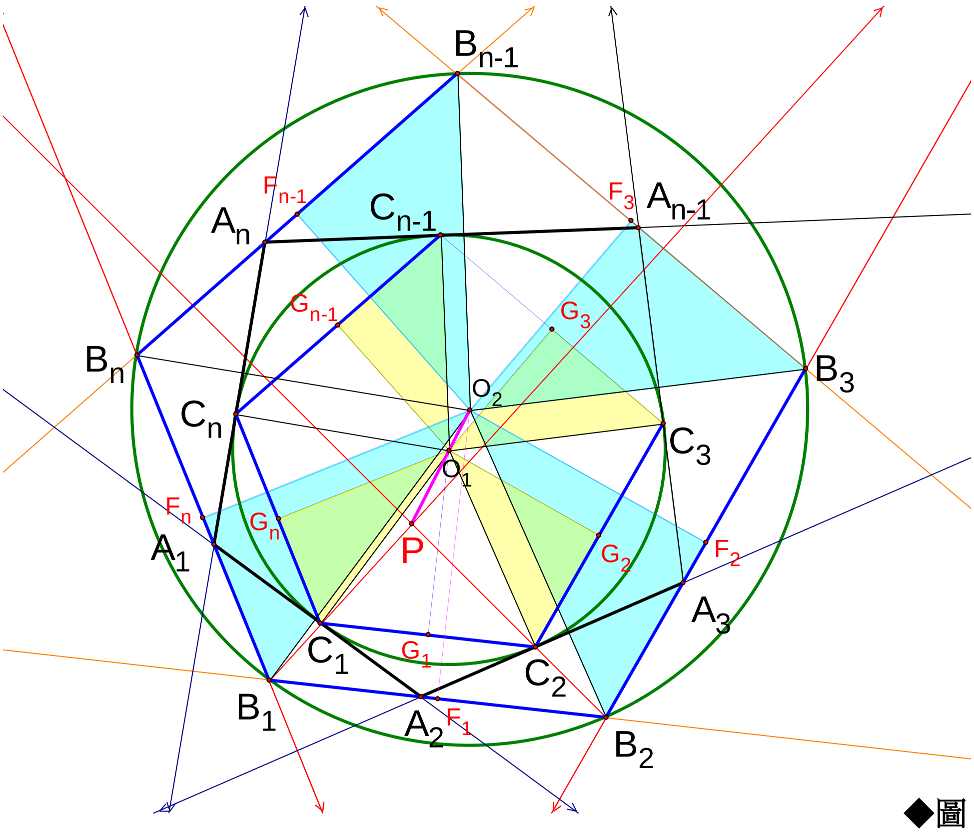
$\because\overleftrightarrow{O_2B_1}$和$\overleftrightarrow{O_1C_1}$都垂直$\overline{A_1A_2}$，$\overleftrightarrow{O_2B_2}$和$\overleftrightarrow{O_1C_2}$都垂直$\overline{A_2A_3}$，

$\therefore\overleftrightarrow{O_2B_1}\parallel\overleftrightarrow{O_1C_1}$且$\overleftrightarrow{O_2B_2}\parallel\overleftrightarrow{O_1C_2}$。

推得$\overline{PB_1}:\overline{PC_1}=\overline{O_2B_1}:\overline{O_1C_1}=\overline{PO_2}:\overline{PO_1}=\overline{PB_2}:\overline{PC_2}=\overline{O_2B_2}:\overline{O_1C_2}=R:r$，

又$\overleftrightarrow{B_1B_2}\parallel\overleftrightarrow{C_1C_2}$，推得$\overline{PB_1}:\overline{PC_1}=\overline{PB_2}:\overline{PC_2}=\overline{B_1B_2}:\overline{C_1C_2}$，

$\therefore\boldsymbol{\overline{B_1B_2}:\overline{C_1C_2}=R:r}$。



◆圖 11

(4)如圖 11，$\because\overline{B_1B_2}//\overline{C_1C_2}$，$\overline{B_2B_3}//\overline{C_2C_3}$，⋯，$\overline{B_{n-1}B_n}//\overline{C_{n-1}C_n}$，$\overline{B_nB_1}//\overline{C_nC_1}$，

$\therefore\angle B_nB_1B_2=\angle C_nC_1C_2$，$\angle B_1B_2B_3=\angle C_1C_2C_3$，$\angle B_2B_3B_4=\angle C_2C_3C_4$，

⋯，$\angle B_{n-2}B_{n-1}B_n=\angle C_{n-2}C_{n-1}C_n$，$\angle B_{n-1}B_nB_1=\angle C_{n-1}C_nC_1$。

在$\Delta O_2B_1B_2$與$\Delta O_1C_1C_2$中，

$\because\overline{O_2B_1}:\overline{O_1C_1}=\overline{O_2B_2}:\overline{O_1C_2}=\overline{B_1B_2}:\overline{C_1C_2}$，

$\therefore\boldsymbol{\Delta O_2B_1B_2\sim\Delta O_1C_1C_2}$，可得$\angle O_2B_1B_2=\angle O_1C_1C_2$，$\angle O_2B_2B_1=\angle O_1C_2C_1$。

推得$\angle O_2B_1B_n=\angle O_1C_1C_n$，$\angle O_2B_2B_3=\angle O_1C_2C_3$。

作旁心n邊形$B_1B_2B_3\cdots B_n$各邊的中垂線，設其分別交$\overline{B_1B_2}$、$\overline{B_2B_3}$、 $\overline{B_3B_4}$、⋯、$\overline{B_{n-1}B_n}$、$\overline{B_nB_1}$於點F_1、F_2、F_3、⋯、F_{n-1}、F_n，

也作內切圓切點n邊形$C_1C_2C_3\cdots C_n$各邊的中垂線，設其分別交$\overline{C_1C_2}$、$\overline{C_2C_3}$、$\overline{C_3C_4}$、⋯、$\overline{C_{n-1}C_n}$、$\overline{C_nC_1}$於點G_1、G_2、G_3、⋯、G_{n-1}、G_n，

在$\Delta O_2B_2F_2$與$\Delta O_1C_2G_2$中，

$\because \angle O_2B_2F_2=\angle O_1C_2G_2$，$\angle O_2F_2B_2=90°=\angle O_1G_2C_2$，

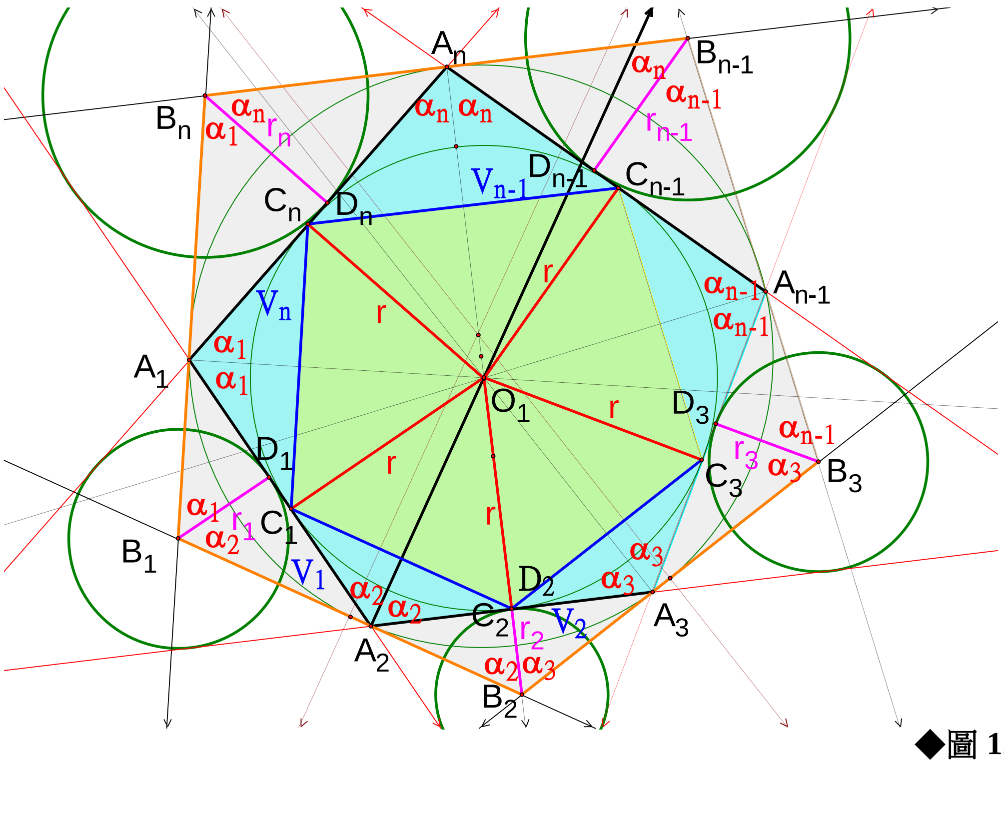
$\therefore \mathbf{\Delta O_2B_2F_2 \sim \Delta O_1C_2G_2}$，可得$\overline{B_2F_2}:\overline{C_2G_2}=R:r\Rightarrow\overline{B_2B_3}:\overline{C_2C_3}=R:r$。

同理可證 $\overline{B_3B_4}:\overline{C_3C_4}=\cdots=\overline{B_{n-1}B_n}:\overline{C_{n-1}C_n}=\overline{B_nB_1}:\overline{C_nC_1}=R:r$。

故旁心n邊形$B_1B_2B_3\cdots B_n$和內切圓切點n邊形$C_1C_2C_3\cdots C_n$會相似。

定理三：雙心n邊形的面積是其旁心n邊形面積與內切圓切點n邊形面積的等比中項。

設雙心n邊形$A_1A_2A_3\cdots A_n$的旁心n邊形為$B_1B_2B_3\cdots B_n$，內切圓切點n邊形為$C_1C_2C_3\cdots C_n$，則$A_1A_2A_3\cdots A_n$面積$=\sqrt{B_1B_2B_3\cdots B_n\text{面積}\times C_1C_2C_3\cdots C_n\text{面積}}$。



◆**圖 12**

【證明】

1. 如圖 12，$\because \overline{A_1C_1}=\overline{A_1C_n}$(切線等長)，且$\overline{A_1O_1}$平分$\angle C_1A_1C_n$，$\therefore \overline{C_1C_n}\perp\overline{A_1O_1}$。

且$\overline{B_1B_n}\perp\overline{A_1O_1}$**(同一頂點處內、外角平分線互相垂直)**，$\therefore \overline{B_1B_n}//\overline{C_1C_n}$。

同理有 $\overline{B_1B_2}//\overline{C_1C_2}$，$\overline{B_2B_3}//\overline{C_2C_3}$，…，$\overline{B_{n-1}B_n}//\overline{C_{n-1}C_n}$，

又外切n邊形$A_1A_2A_3\cdots A_n$為雙心n邊形，從而其旁心n邊形$B_1B_2B_3\cdots B_n$和內切圓切點n邊形$C_1C_2C_3\cdots C_n$**會相似**。

由**引理一**知 $r_1=r\left(\frac{cos\frac{A_1}{2}cos\frac{A_2}{2}}{sin\frac{A_1}{2}sin\frac{A_2}{2}}\right)$，$r_2=r\left(\frac{cos\frac{A_2}{2}cos\frac{A_3}{2}}{sin\frac{A_2}{2}sin\frac{A_3}{2}}\right)$，$r_3=r\left(\frac{cos\frac{A_3}{2}cos\frac{A_1}{2}}{sin\frac{A_3}{2}sin\frac{A_1}{2}}\right)$。

同理有 $r_4=r\left(\frac{cos\frac{A_4}{2}cos\frac{A_5}{2}}{sin\frac{A_4}{2}sin\frac{A_5}{2}}\right)$，$r_5=r\left(\frac{cos\frac{A_5}{2}cos\frac{A_1}{2}}{sin\frac{A_5}{2}sin\frac{A_1}{2}}\right)$，…，

$$r_{n-1}=r\left(\frac{cos\frac{A_{n-1}}{2}cos\frac{A_n}{2}}{sin\frac{A_{n-1}}{2}sin\frac{A_n}{2}}\right)，r_n=r\left(\frac{cos\frac{A_n}{2}cos\frac{A_1}{2}}{sin\frac{A_n}{2}sin\frac{A_1}{2}}\right)。$$

且 $\overline{B_1B_2}=\frac{r_1}{cos\frac{A_2}{2}}+\frac{r_2}{cos\frac{A_2}{2}}=r\left(\frac{cos\frac{A_1}{2}}{sin\frac{A_1}{2}sin\frac{A_2}{2}}\right)+r\left(\frac{cos\frac{A_3}{2}}{sin\frac{A_2}{2}sin\frac{A_3}{2}}\right)$

$$=r\left(\frac{sin\frac{A_3}{2}cos\frac{A_1}{2}+cos\frac{A_3}{2}sin\frac{A_1}{2}}{sin\frac{A_1}{2}sin\frac{A_2}{2}sin\frac{A_3}{2}}\right)=\boldsymbol{r}\,\frac{\boldsymbol{sin(\frac{A_1+A_3}{2})}}{\boldsymbol{sin\frac{A_1}{2}sin\frac{A_2}{2}sin\frac{A_3}{2}}}，$$

又 $\overline{C_1C_2}=rcos\frac{A_2}{2}+rcos\frac{A_2}{2}=2rcos\frac{A_2}{2}$，

故 $\frac{\overline{B_1B_2}}{\overline{C_1C_2}}=\frac{\sin(\frac{A_1+A_3}{2})}{2sin\frac{A_1}{2}sin\frac{A_2}{2}sin\frac{A_3}{2}cos\frac{A_2}{2}}=\frac{\boldsymbol{\sin(\frac{A_1+A_3}{2})}}{\boldsymbol{sin\frac{A_1}{2}sin\frac{A_3}{2}sinA_2}}$。

同理有 $\frac{\overline{B_2B_3}}{\overline{C_2C_3}}=\frac{\sin(\frac{A_2+A_4}{2})}{sin\frac{A_2}{2}sin\frac{A_4}{2}sinA_3}$，$\frac{\overline{B_3B_4}}{\overline{C_3C_4}}=\frac{\sin(\frac{A_3+A_5}{2})}{sin\frac{A_3}{2}sin\frac{A_5}{2}sinA_4}$，…，

$$\frac{\overline{B_{n-1}B_n}}{\overline{C_{n-1}C_n}}=\frac{\sin(\frac{A_{n-1}+A_1}{2})}{sin\frac{A_{n-1}}{2}sin\frac{A_1}{2}sinA_n}，\frac{\overline{B_nB_1}}{\overline{C_nC_1}}=\frac{\sin(\frac{A_n+A_2}{2})}{sin\frac{A_n}{2}sin\frac{A_2}{2}sinA_1}。$$

$\because$旁心n邊形$B_1B_2B_3\cdots B_n$和內切圓切點n邊形$C_1C_2C_3\cdots C_n$相似，

$$\therefore\frac{\sin(\frac{A_1+A_3}{2})}{sin\frac{A_1}{2}sin\frac{A_3}{2}sinA_2}=\frac{\sin(\frac{A_2+A_4}{2})}{sin\frac{A_2}{2}sin\frac{A_4}{2}sinA_3}=\cdots=\frac{\sin(\frac{A_{n-1}+A_1}{2})}{sin\frac{A_{n-1}}{2}sin\frac{A_1}{2}sinA_n}=\frac{\sin(\frac{A_n+A_2}{2})}{sin\frac{A_n}{2}sin\frac{A_2}{2}sinA_1}$$

推得 $\dfrac{\sin(\frac{A_2+A_4}{2})}{sin\frac{A_2}{2}sin\frac{A_4}{2}} = \dfrac{\sin(\frac{A_1+A_3}{2})sinA_3}{sin\frac{A_1}{2}sin\frac{A_3}{2}sinA_2}$，…，

$\dfrac{\sin(\frac{A_{n-1}+A_1}{2})}{sin\frac{A_{n-1}}{2}sin\frac{A_1}{2}} = \dfrac{\sin(\frac{A_1+A_3}{2})sinA_n}{sin\frac{A_1}{2}sin\frac{A_3}{2}sinA_2}$，$\dfrac{\sin(\frac{A_n+A_2}{2})}{sin\frac{A_n}{2}sin\frac{A_2}{2}} = \dfrac{\sin(\frac{A_1+A_3}{2})sinA_1}{sin\frac{A_1}{2}sin\frac{A_3}{2}sinA_2}$。

設旁心n邊形$B_1B_2B_3\cdots B_n$的面積為S_2，內切圓切點n邊形$C_1C_2C_3\cdots C_n$的面積為S_1，

則 $\dfrac{S_2}{S_1} = \dfrac{\overline{B_1B_2}^2}{\overline{C_1C_2}^2} = \boldsymbol{(\dfrac{\sin(\frac{A_1+A_3}{2})}{sin\frac{A_1}{2}sin\frac{A_3}{2}sinA_2})^2}$。

2. $\because \angle C_nO_1C_1 = \theta_1$， $\angle C_1O_1C_2 = \theta_2$，$\angle C_2O_1C_3 = \theta_3$，…，$\angle C_{n-2}O_1C_{n-1} = \theta_{n-1}$，$\angle C_{n-1}O_1C_n = \theta_n$，

$\therefore$ $S_1 = \frac{1}{2}r^2sin\theta_1 + \frac{1}{2}r^2sin\theta_2 + \frac{1}{2}r^2sin\theta_3 + \cdots + \frac{1}{2}r^2sin\theta_{n-1} + \frac{1}{2}r^2sin\theta_n$

$= \frac{1}{2}r^2sinA_1 + \frac{1}{2}r^2sinA_2 + \frac{1}{2}r^2sinA_3 + \cdots + \frac{1}{2}r^2sinA_{n-1} + \frac{1}{2}r^2sinA_n$

$= \boldsymbol{\frac{r^2}{2}(sinA_1 + sinA_2 + sinA_3 + \cdots + sinA_{n-1} + sinA_n)}$。

如圖 12，設雙心n邊形$A_1A_2A_3\cdots A_n$的面積為S，$\overline{A_1A_2} = V_1$，$\overline{A_2A_3} = V_2$，…，$\overline{A_{n-1}A_n} = V_{n-1}$，$\overline{A_nA_1} = V_n$，

其內切圓半徑和n個旁切圓半徑依序為 r，r_1，r_2，r_3，…，r_{n-1}，r_n，

則 $S = \frac{1}{2}V_1r + \frac{1}{2}V_2r + \frac{1}{2}V_3r \cdots + \frac{1}{2}V_{n-1}r + \frac{1}{2}V_nr$

$= \boldsymbol{\frac{1}{2}(V_1 + V_2 + V_3 + \cdots + V_{n-1} + V_n)r}$。

且 $V_1 + V_2 + V_3 + \cdots + V_{n-1} + V_n$

$$= \left(\frac{r}{tan\frac{A_1}{2}} + \frac{r}{tan\frac{A_2}{2}}\right) + \left(\frac{r}{tan\frac{A_2}{2}} + \frac{r}{tan\frac{A_3}{2}}\right) + \left(\frac{r}{tan\frac{A_3}{2}} + \frac{r}{tan\frac{A_4}{2}}\right) + \cdots +$$

$$\left(\frac{r}{tan\frac{A_{n-1}}{2}} + \frac{r}{tan\frac{A_n}{2}}\right) + \left(\frac{r}{tan\frac{A_n}{2}} + \frac{r}{tan\frac{A_1}{2}}\right)$$

$$= r(\frac{1}{tan\frac{A_1}{2}} + \frac{1}{tan\frac{A_3}{2}} + \frac{1}{tan\frac{A_2}{2}} + \frac{1}{tan\frac{A_4}{2}} + \frac{1}{tan\frac{A_3}{2}} + \frac{1}{tan\frac{A_5}{2}} +$$

$$+ \frac{1}{tan\frac{A_{n-1}}{2}} + \frac{1}{tan\frac{A_1}{2}} + \frac{1}{tan\frac{A_n}{2}} + \frac{1}{tan\frac{A_2}{2}})$$

$$=r\left(\frac{cos\frac{A_1}{2}}{sin\frac{A_1}{2}}+\frac{cos\frac{A_3}{2}}{sin\frac{A_3}{2}}+\frac{cos\frac{A_2}{2}}{sin\frac{A_2}{2}}+\frac{cos\frac{A_4}{2}}{sin\frac{A_4}{2}}+\frac{cos\frac{A_3}{2}}{sin\frac{A_3}{2}}+\frac{cos\frac{A_5}{2}}{sin\frac{A_5}{2}}+\cdots\right.$$

$$\left.+\frac{cos\frac{A_{n-1}}{2}}{sin\frac{A_{n-1}}{2}}+\frac{cos\frac{A_1}{2}}{sin\frac{A_1}{2}}+\frac{cos\frac{A_n}{2}}{sin\frac{A_n}{2}}+\frac{cos\frac{A_2}{2}}{sin\frac{A_2}{2}}\right)$$

$$=r\left(\frac{\sin\left(\frac{A_1+A_3}{2}\right)}{sin\frac{A_1}{2}sin\frac{A_3}{2}}+\frac{\sin\left(\frac{A_2+A_4}{2}\right)}{sin\frac{A_2}{2}sin\frac{A_4}{2}}+\frac{\sin\left(\frac{A_3+A_5}{2}\right)}{sin\frac{A_3}{2}sin\frac{A_5}{2}}+\cdots+\frac{\sin\left(\frac{A_{n-1}+A_1}{2}\right)}{sin\frac{A_{n-1}}{2}sin\frac{A_1}{2}}+\frac{\sin\left(\frac{A_n+A_2}{2}\right)}{sin\frac{A_n}{2}sin\frac{A_2}{2}}\right)$$

$$=r\left(\frac{\sin\left(\frac{A_1+A_3}{2}\right)}{sin\frac{A_1}{2}sin\frac{A_3}{2}}+\frac{\sin(\frac{A_1+A_3}{2})sinA_3}{sin\frac{A_1}{2}sin\frac{A_3}{2}sinA_2}+\frac{\sin(\frac{A_1+A_3}{2})sinA_4}{sin\frac{A_1}{2}sin\frac{A_3}{2}sinA_2}+\cdots+\frac{\sin(\frac{A_1+A_3}{2})sinA_n}{sin\frac{A_1}{2}sin\frac{A_3}{2}sinA_2}\right.$$

$$\left.+\frac{\sin(\frac{A_1+A_3}{2})sinA_1}{sin\frac{A_1}{2}sin\frac{A_3}{2}sinA_2}\right)$$

$$\boldsymbol{=r\frac{\sin\left(\frac{A_1+A_3}{2}\right)}{sin\frac{A_1}{2}sin\frac{A_3}{2}sinA_2}(\sin A_2+\sin A_3+\sin A_4+\cdots+\sin A_n+\sin A_1)}\text{，}$$

故 $S=\frac{\sin\left(\frac{A_1+A_3}{2}\right)}{sin\frac{A_1}{2}sin\frac{A_3}{2}sinA_2}\frac{\mathrm{r}^2}{2}(\sin A_1+\sin A_2+\sin A_3+\sin A_4+\cdots+\sin A_n)$

$$=\frac{\sin\left(\frac{A_1+A_3}{2}\right)}{sin\frac{A_1}{2}sin\frac{A_3}{2}sinA_2}S_1\text{。}$$

$\therefore\frac{S}{S_1}=\frac{\sin\left(\frac{A_1+A_3}{2}\right)}{sin\frac{A_1}{2}sin\frac{A_3}{2}sinA_2}$，且 $\frac{S_2}{S_1}=\frac{\overline{B_1B_2}^2}{\overline{C_1C_2}^2}=\boldsymbol{\left(\frac{\sin(\frac{A_1+A_3}{2})}{sin\frac{A_1}{2}sin\frac{A_3}{2}sinA_2}\right)^2}$，

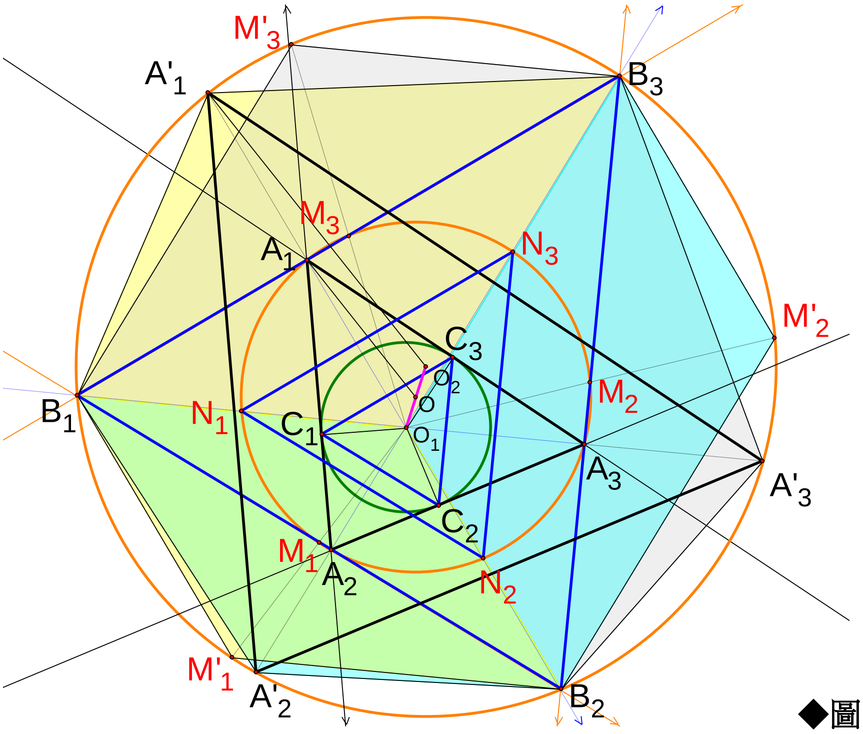
因此有 $\frac{S_2}{S}=\frac{(\frac{S_2}{S_1})}{(\frac{S}{S_1})}=\frac{\sin\left(\frac{A_1+A_3}{2}\right)}{sin\frac{A_1}{2}sin\frac{A_3}{2}sinA_2}$，推得 $\frac{S_2}{S}=\frac{S}{S_1}\Rightarrow S=\sqrt{S_1S_2}$。

即 $\boldsymbol{A_1A_2A_3\cdots A_n}$**面積** $=\sqrt{\boldsymbol{B_1B_2B_3\cdots B_n}\text{面積}\times\boldsymbol{C_1C_2C_3\cdots C_n}\text{面積}}$。

伍、討論

一、設$\Delta A_1A_2A_3$的旁心三角形為$\Delta B_1B_2B_3$，內切圓切點三角形為$\Delta C_1C_2C_3$，

則$\Delta A_1A_2A_3$的外接圓正好是$\Delta B_1B_2B_3$的九點圓，且其半徑恰為$\Delta B_1B_2B_3$的外接圓之半。



◆圖 13

【證明】

1. 如圖 13，$\overleftrightarrow{A_1O_1} \perp \overleftrightarrow{B_1B_3}$(同一頂點處內、外角平分線互相垂直)，

   且$\overleftrightarrow{A_1O_1}$必過旁心$B_2$(一內角平分線和另兩內角的外角平分線必相交於旁心)，

   $\therefore \overleftrightarrow{B_2A_1}$為$\overline{B_1B_3}$的垂線。

   同理有 $\overleftrightarrow{B_3A_2}$為$\overline{B_1B_2}$的垂線，$\overleftrightarrow{B_1A_3}$為$\overline{B_2B_3}$的垂線。

   故O_1為$\Delta \mathrm{B_1B_2B_3}$的垂心，$A_1$、$A_2$、$A_3$ 分別為$\overline{B_3B_1}$、$\overline{B_1B_2}$、$\overline{B_2B_3}$的垂足。

   設M_3、M_1、M_2分別為$\overline{B_3B_1}$、$\overline{B_1B_2}$、$\overline{B_2B_3}$的中點，

   連接$\overline{O_1M_3}$並延長至M_3'；作O_1關於$\overline{B_3B_1}$的對稱點A_1'，

   $\because \angle \mathrm{B_1O_1B_3} = \angle A_2O_1A_3 = 180° - \angle B_1B_2B_3$，

   且$\angle \mathrm{B_1}A_1'\mathrm{B_3} = \angle \mathrm{B_1O_1B_3} = 180° - \angle B_1B_2B_3$，

   $\therefore B_1$、B_2、B_3、A_1'四點共圓。

   又$\overline{B_3B_1}$和$\overline{O_1M_3'}$互相平分於M_3，$\therefore$四邊形$\mathrm{B_1O_1B_3M_3'}$為平行四邊形。

   故$\angle \mathrm{B_1}M_3'\mathrm{B_3} = \angle \mathrm{B_1O_1B_3} = 180° - \angle B_1B_2B_3$，$\therefore B_1$、$B_2$、$B_3$、$M_3'$四點共圓。

由上可知 B_1、B_2、B_3、A'_1、M'_3五點共圓。

同理，對於$\overline{B_1B_2}$、$\overline{B_2B_3}$上的A_2、M_1和A_3、M_2也會有同樣的結論。

故B_1、B_2、B_3、A'_1、A'_2、A'_2、M'_1、M'_2、M'_3九點共圓。

此圓即為$\Delta B_1B_2B_3$的外接圓圓O_2。

2. 接著，將圓O_2上的九個點和點O_2本身，以垂心O_1為位似中心，$\frac{1}{2}$為位似比作位似變換。

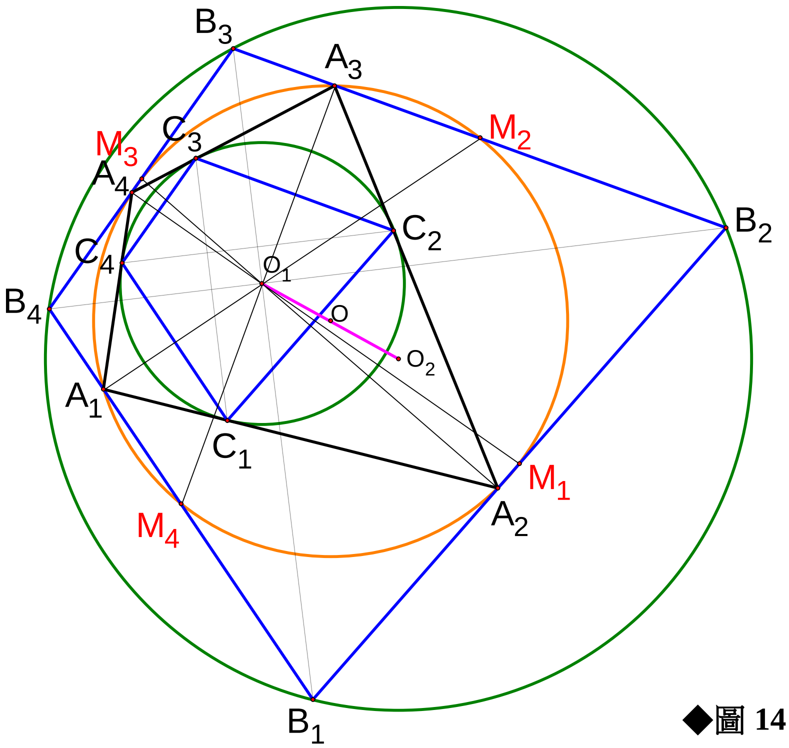
那麼A'_1變成A_1，A'_2變成A_2，A'_3變成A_3(**三高的垂足**)；M'_1變成M_1，M'_2變成M_2，M'_3變成M_3(**三邊的中點**)；B_1變成N_1，B_2變成N_2，B_3變成N_3(**垂心與各頂點連線的中點**)，

∵位似變換將圓仍映射為圓，∴圓O_2上的九個點變成了圓O上的九個點，

且圓O的半徑是圓O_2的一半。故$\Delta A_1A_2A_3$的外接圓正好是$\Delta B_1B_2B_3$的九點圓。

雙心四邊形也有相對應的結果，其外接圓會通過其「**內切圓的圓心在旁心四邊形各邊的垂足**」和「**旁心四邊形各邊的中點**」。只是此時外接圓不再通過「**內切圓的圓心至旁心四邊形各頂點的中點**」，且其半徑不為旁心四邊形的外接圓之半。

二、設雙心四邊形$A_1A_2A_3A_4$的旁心四邊形為$B_1B_2B_3B_4$，內切圓切點四邊形為$C_1C_2C_3C_4$，則四邊形$A_1A_2A_3A_4$的外接圓正好通過四邊形$B_1B_2B_3B_4$各邊的中點，也就是四邊形$B_1B_2B_3B_4$的八點圓。



◆圖 14

【證明】

1. 如圖 14，∵雙心四邊形$A_1A_2A_3A_4$的內切圓切點四邊形$C_1C_2C_3C_4$的兩對角線互相垂直，∴$\overline{C_1C_3} \perp \overline{C_2C_4}$且四邊形$C_1C_2C_3C_4$內接於圓$O_1$。

   又旁心四邊形為$B_1B_2B_3B_4$和內切圓切點四邊形$C_1C_2C_3C_4$會相似，

   ∴$\overline{B_1B_3} \perp \overline{B_2B_4}$且四邊形$B_1B_2B_3B_4$內接於圓$O_2$。

2. 由**婆羅摩及多定理知** ∵$\overleftrightarrow{A_4O_1}$交$\overline{B_1B_2}$於$M_1$且$\overline{A_4O_1} \perp \overline{B_3B_4}$，∴$\overline{B_1M_1} = \overline{M_1B_2}$；

   ∵$\overleftrightarrow{A_1O_1}$交$\overline{B_2B_3}$於$M_2$且$\overline{A_1O_1} \perp \overline{B_4B_1}$，∴$\overline{B_2M_2} = \overline{M_2B_3}$；

   ∵$\overleftrightarrow{A_2O_1}$交$\overline{B_3B_4}$於$M_3$且$\overline{A_2O_1} \perp \overline{B_1B_2}$，∴$\overline{B_3M_3} = \overline{M_3B_4}$；

   ∵$\overleftrightarrow{A_3O_1}$交$\overline{B_4B_1}$於$M_4$且$\overline{A_3O_1} \perp \overline{B_2B_3}$，∴$\overline{B_4M_4} = \overline{M_4B_1}$。

   故由八點圓性質知：A_1、A_2、A_3、A_4、M_1、M_2、M_3、M_4這八點共圓。

為了證明**雙心$\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n} \geq \mathbf{5})$邊形**也有相對應的結果，我們試著找出其**共通的幾何方法**去證原命題。接著將證明改寫如下：

【證明】

1. 如圖 15，由O_1點向旁心四邊形$B_1B_2B_3B_4$的各邊作垂線，則A_1、A_2、A_3、A_4分別為$\overline{B_4B_1}$、$\overline{B_1B_2}$、$\overline{B_2B_3}$、$\overline{B_3B_4}$的垂足，

   設M_4、M_1、M_2、M_3分別為$\overline{B_4B_1}$、$\overline{B_1B_2}$、$\overline{B_2B_3}$、$\overline{B_3B_4}$的中點，

   ∵O_2為旁心四邊形$B_1B_2B_3B_4$的外心，

   ∴$\overline{O_2M_4}$、$\overline{O_2M_1}$、$\overline{O_2M_2}$、$\overline{O_2M_3}$分別為$\overline{B_4B_1}$、$\overline{B_1B_2}$、$\overline{B_2B_3}$、$\overline{B_3B_4}$的中垂線。

2. 連接$\overline{O_1A_1}$，則$\overline{O_1A_1} \perp \overline{B_4B_1}$。再連接$\overline{O_2M_4}$，則$\overline{O_2M_4} \perp \overline{B_4B_1}$。

   再過四邊形$A_1A_2A_3A_4$的外心O，作$\overline{OH_4} \perp \overline{B_4B_1}$。推得$\overline{O_1A_1}//\overline{OH_4}//\overline{O_2M_4}$。

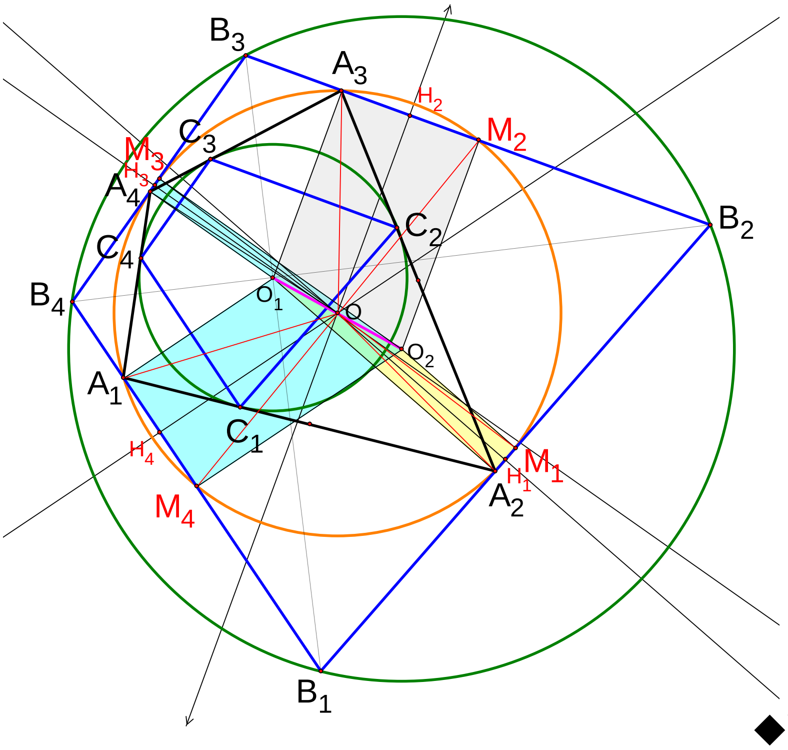
   又O點為$\overline{O_1O_2}$ 的中點，∴$\overline{A_1H_4} = \overline{M_4H_4}$。

   故$\overleftrightarrow{OH_4}$為$\overline{A_1M_4}$的中垂線，推得$\overline{OA_1} = \overline{OM_4}$。即$M_4$在四邊形$A_1A_2A_3A_4$的外接圓上。

   同理可證 M_1、M_2、M_3也在四邊形$A_1A_2A_3A_4$的外接圓上。

   故雙心四邊形$A_1A_2A_3A_4$的外接圓正好通過其旁心四邊形$B_1B_2B_3B_4$各邊的中點。

   也就是四邊形$B_1B_2B_3B_4$的八點圓。



◆圖 15

雙心$n(n \geq 5)$邊形也有相對應的結果，其外接圓會通過其「**內切圓的圓心在旁心n邊形各邊上的垂足**」和「**旁心n邊形各邊的中點**」。只是此時外接圓不再通過「**內切圓的圓心至旁心n邊形各頂點的中點**」，且其半徑不為旁心n邊形的外接圓之半。

三、設雙心$n(n \geq 5)$邊形為$A_1A_2A_3 \cdots A_n$，其旁心n邊形為$B_1B_2B_3 \cdots B_n$，內切圓切點n邊形為$C_1C_2C_3 \cdots C_n$，則n邊形$A_1A_2A_3 \cdots A_n$的外接圓正好通過n邊形$B_1B_2B_3 \cdots B_n$各邊的中點，我們不妨稱它是n邊形$B_1B_2B_3 \cdots B_n$的$2n$點圓。

【證明】

1. 如圖 16，由O_1點向旁心n邊形為$B_1B_2B_3 \cdots B_n$的各邊作垂線，則A_1、A_2、A_3、…、A_{n-1}、A_n分別為$\overline{B_nB_1}$、$\overline{B_1B_2}$、$\overline{B_2B_3}$、…、$\overline{B_{n-2}B_{n-1}}$、$\overline{B_{n-1}B_n}$的垂足，
   設M_n、M_1、M_2、…、M_{n-2}、M_{n-1}分別為$\overline{B_nB_1}$、$\overline{B_1B_2}$、$\overline{B_2B_3}$、…、$\overline{B_{n-2}B_{n-1}}$、$\overline{B_{n-1}B_n}$的中點，
   $\because O_2$為旁心n邊形$B_1B_2B_3 \cdots B_n$的外心，
   $\therefore \overline{O_2M_n}$、$\overline{O_2M_1}$、$\overline{O_2M_2}$、…、$\overline{O_2M_{n-1}}$分別為$\overline{B_nB_1}$、$\overline{B_1B_2}$、$\overline{B_2B_3}$、…、$\overline{B_{n-1}B_n}$的中垂線。
2. 連接$\overline{O_1A_1}$，則$\overline{O_1A_1} \perp \overline{B_nB_1}$。再連接$\overline{O_2M_n}$，則$\overline{O_2M_n} \perp \overline{B_nB_1}$。
   再過n邊形$A_1A_2A_3 \cdots A_n$的外心O，作$\overline{OH_n} \perp \overline{B_nB_1}$，推得$\overline{O_1A_1}//\overline{OH_n}//\overline{O_2M_n}$。

又O點為$\overline{O_1O_2}$ 的中點，$\therefore \overline{A_1H_n} = \overline{M_nH_n}$。

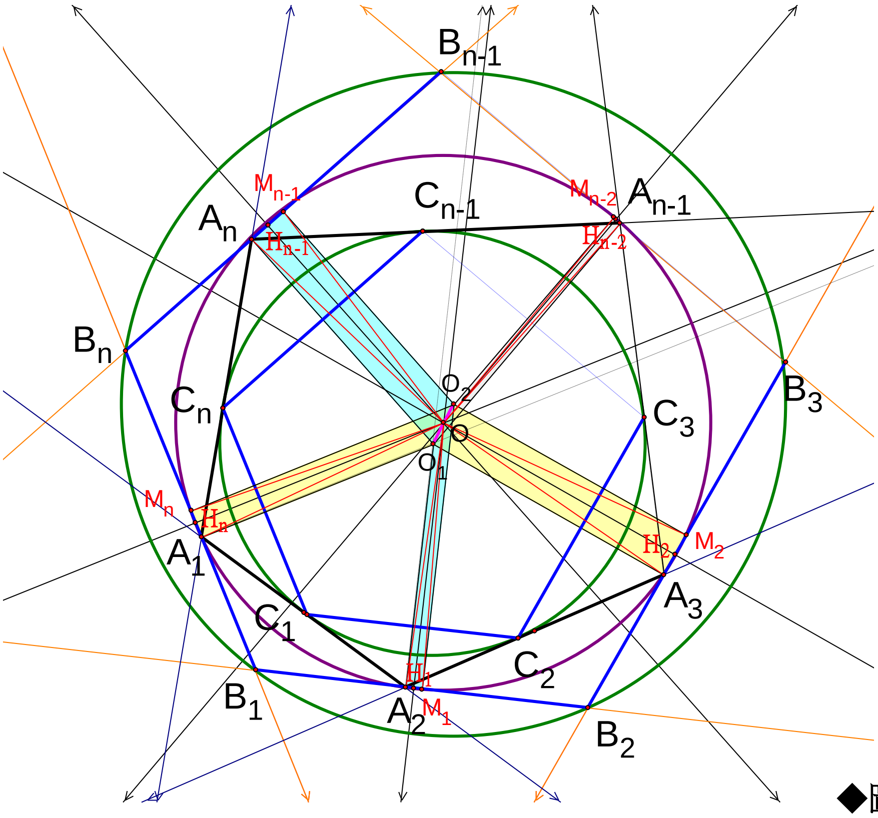
故$\overleftrightarrow{OH_n}$為$\overline{A_1M_n}$的中垂線，推得$\overline{OA_1} = \overline{OM_n}$。

即M_n在n邊形$A_1A_2A_3 \cdots A_n$的外接圓上。

同理可證 M_1、M_2、…、M_{n-2}、M_{n-1}也在n邊形$A_1A_2A_3 \cdots A_n$的外接圓上。

故雙心n邊形$A_1A_2A_3 \cdots A_n$的外接圓正好通過其旁心n邊形$B_1B_2B_3 \cdots B_n$**各邊的中點**。

也就是n邊形$B_1B_2B_3 \cdots B_n$的$2n$點圓。



◆圖 16

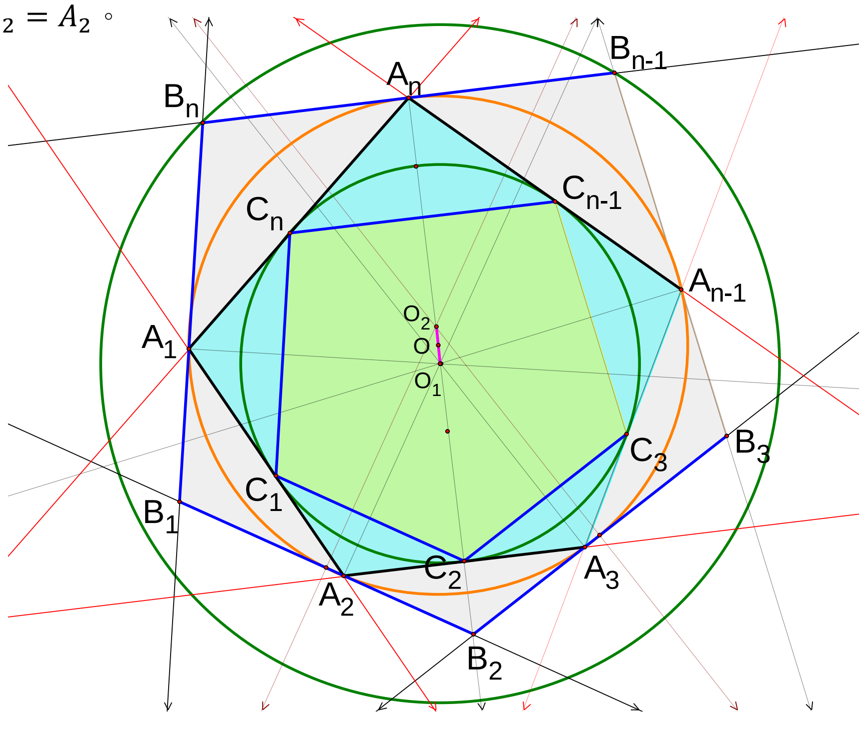
陸、結論

一、 雙心$n(n \geq 3)$邊形$A_1A_2A_3 \cdots A_n$的旁心n邊形$B_1B_2B_3 \cdots B_n$和內切圓切點n邊形$C_1C_2C_3 \cdots C_n$**會相似**。

二、 雙心$n(n \geq 3)$邊形的外心O正好是內切圓切點n邊形的外心O_1和旁心n邊形的外心O_2的**中點**。

三、 任意三角形的外接圓正好是其旁心三角形的**九點圓**，且其半徑恰為旁心三角形的外接圓之半。而其它雙心$n(n \geq 4)$邊形也有相對應的結果，其外接圓正好是其旁心n邊形的**$2n$點圓**。只是雙心$n(n \geq 4)$邊形的外接圓，除了過其頂點**(內切圓的圓心在旁心n邊形各邊上的垂足)**外，也通過**旁心n邊形各邊的中點**。但不再通過其「**內切圓的圓心至旁心n邊形各頂點的中點**」，且其半徑不為旁心n邊形的外接圓之半。

四、 如圖 17，設雙心$n(n \geq 3)$邊形$A_1A_2A_3 \cdots A_n$的旁心n邊形為$B_1B_2B_3 \cdots B_n$，內切圓切點n邊形為$C_1C_2C_3 \cdots C_n$，則$\boldsymbol{A_1A_2A_3 \cdots A_n}$**面積** $= \sqrt{\boldsymbol{B_1B_2B_3 \cdots B_n}\text{面積}\times \boldsymbol{C_1C_2C_3 \cdots C_n}\text{面積}}$。也就是說，這三個多邊形的面積會形成一個等比數列，等比中項正好是雙心多邊形的面積，且此等比數列的**公比為**$\dfrac{\sin(\frac{A_1+A_3}{2})}{\sin\frac{A_1}{2}\sin\frac{A_3}{2}\sin A_2} = \dfrac{\sin(\frac{A_k+A_{k+2}}{2})}{\sin\frac{A_k}{2}\sin\frac{A_{k+2}}{2}\sin A_{k+1}}, k = 1,2,\cdots,\text{n}$，其中$A_{n+1} = A_1$，$A_{n+2} = A_2$。



◆圖 17

柒、參考資料及其他

1. 張堯・冷崗松・沈文選。奧林匹亞數學中的幾何問題。曉園出版社，P172。
2. 許志農。高中數學第三冊第一章。99 課綱。新北市：龍騰文化。
3. 左銓如・季素月著。初等幾何研究。九章出版社，P149~156。
4. 黃家禮編著。幾何明珠。九章出版社，P142~156。
5. 張海潮(98 年 6 月)。從旋轉及縮放看尤拉線及九點圓。數學傳播 33 卷 2 期，中央研究院數學研究所，P48~51。
6. **李孟龍　莊耀鈞。三角形和圓內接四邊形的一個性質。中華民國第五十五屆中小學科展。**

【評語】050418

本科展作品討論一平面幾何的問題，其動機來自數奧的一個幾何課題。問題本身是求取旁心與面積的關係，並利用面積會形成一個等比數列的特性，得到一數學上的公比，是一件在幾何上數學科展的良好作品。