中華民國第56屆中小學科學展覽會

作品說明書

高級中等學校組　數學科

050417

「哆」次的相遇——只有唯一，都是至「寶」

學校名稱：新北市立中和高級中學

作者：	指導老師：
高二 鄔玟潔	王晞安
高二 謝宏昀	趙志益
高二 鍾佳欣	

關鍵詞：排列組合、矩陣、區組設計

摘要

本研究第一部分從尋找牌組設計法出發，以不同的數學結構製造出牌組，再分析牌組結構中變數的關係，並寫下其關係式及特性。

第二部分進一步改變規則，研究在不同規則下牌組變數的關係及特性。

第三部份引入區組設計理論，將牌組的設計矩陣化後，可以透過定理來檢驗任一牌組是否符合哆寶規則，還能再將矩陣擴張，得到旋轉法的一般化設計法。另外也可以透過 0、1 之間的互換，得到新的設計方法以及適用條件。

壹、 研究動機

初次接觸到哆寶這個桌遊時（哆寶遊戲介紹見 P3），我們產生了許多疑問：作者是用什麼概念製造出這些卡牌？無論牌上面的圖案數有多少，都可以成功創造出符合哆寶規則的牌組嗎？哆寶的創作方式是如何？會不會有其他方式也可以創造符合規則的卡牌，但總牌數或總圖案數卻不同呢？如果有，那為什麼哆寶選擇此種方法？有什麼原因嗎？

貳、研究目的

一、找出哆寶牌組設計法(任兩張牌有一個圖案相同)

二、改變設計規則、探討變數之間的關係

三、建立區組設計與哆寶的連結，並據此擴充牌組設計法

參、研究器材

紙、筆、Microsoft Word

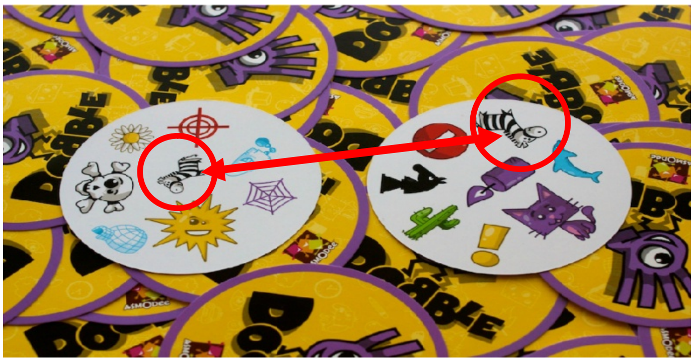
肆、哆寶的定義與原版哆寶示意圖

經過對牌組的觀察後，我們定義一組牌組設計稱為符合哆寶的規則，是指牌組滿足：

(1)每張牌上都具有相同的圖案數(且大於等於 2)；

(2)任 2 張牌都恰有 1 個圖案相同。

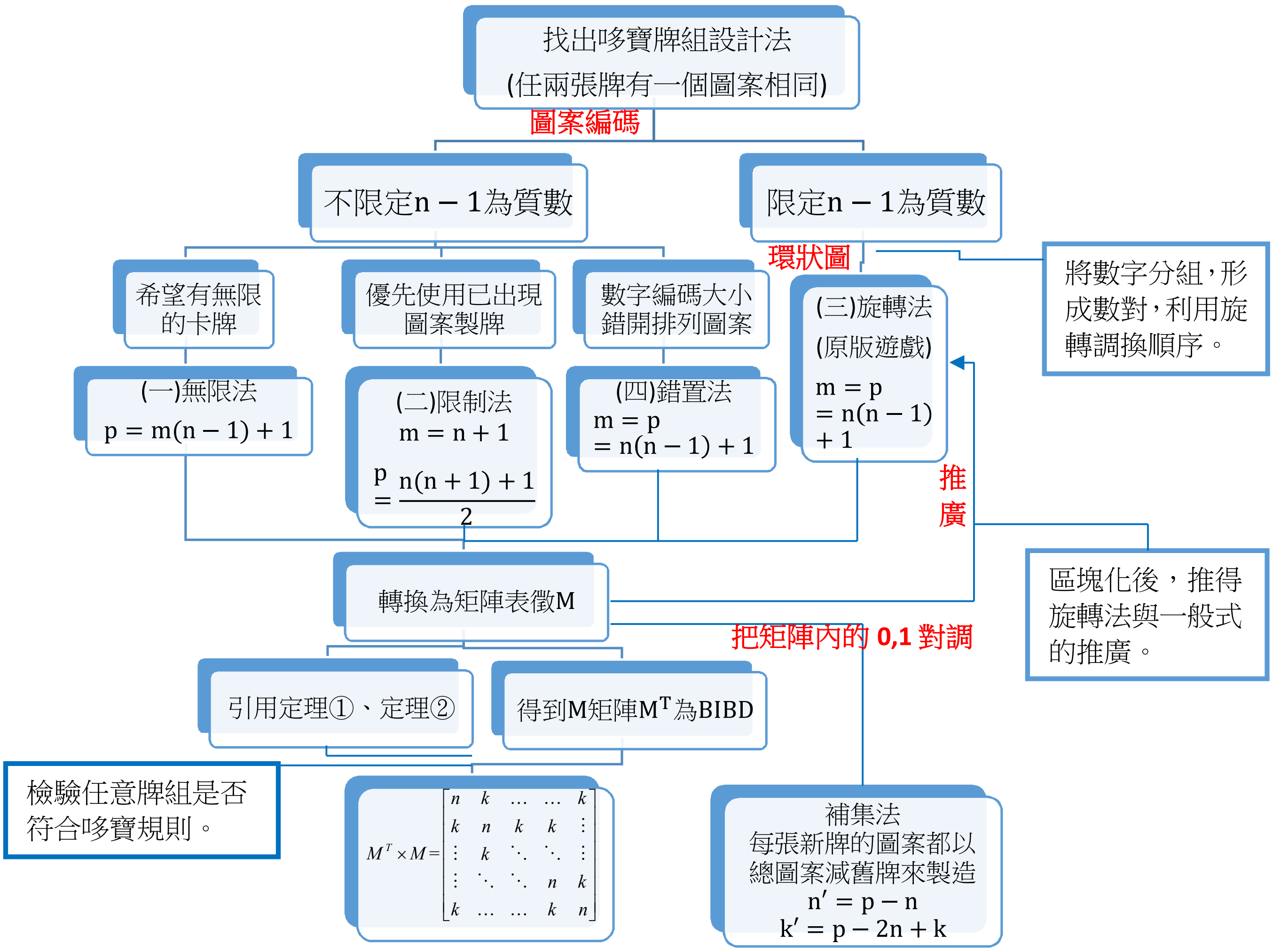
我們再將哆寶的遊戲規則推廣並規定變數：設總牌數為 m 張，每張牌上都有 n 個相異圖案，整副遊戲共有 p 種相異圖案，任 t 張牌恰有 k 種圖案相同，並且任兩張牌皆不相同。



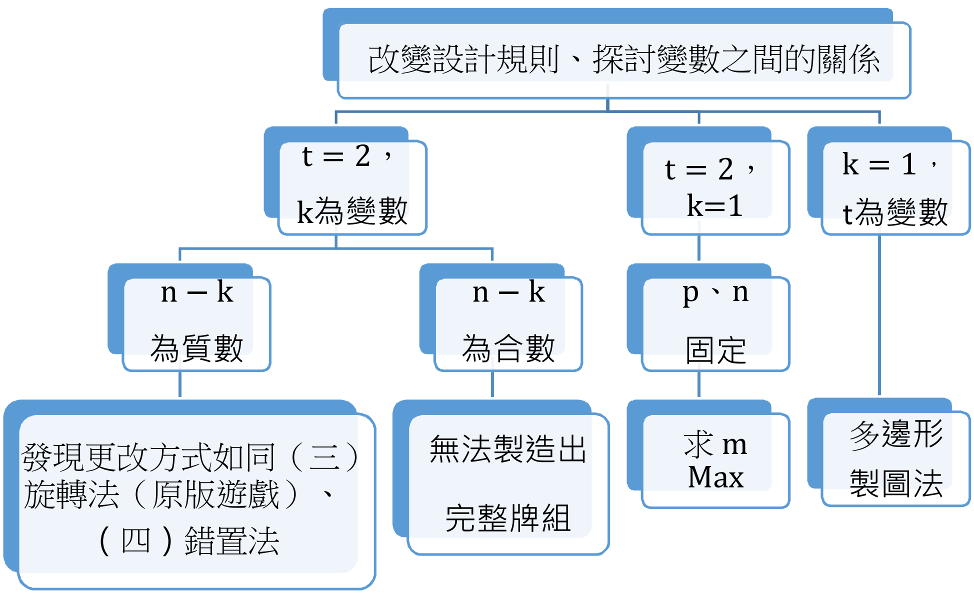
伍、研究架構圖

總牌數為 m 張，每張牌上都有 n 個相異圖案，整副遊戲共有 p 種相異圖案，任 t 張牌恰有 k 種圖案相同，並且任兩張牌皆不相同($m,n,p,k,t\in\mathbb{N}$，$n\geq 2$，$p\geq 3$，$t\geq 2$)。研究的架構圖如下：

研究架構圖一



研究架構圖二

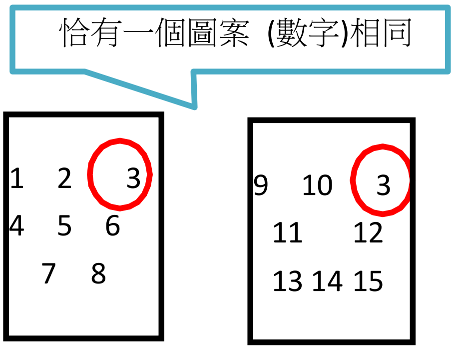


陸、研究過程與方法

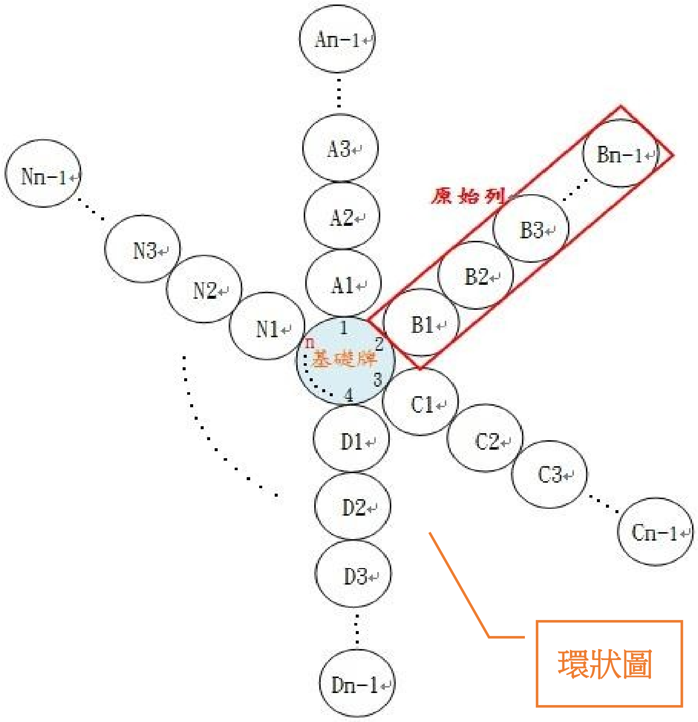
哆寶遊戲介紹

原版哆寶包含 57 張相異遊戲卡牌，含有 57 種相異圖案，每張卡牌上有 8 種圖案。玩家要做的就是用最快的速度找出兩張卡牌中相同的圖案，第一位找到相同符號的玩家大聲喊出結果後即可得分。

例如：



圖一：n=8，k= 1的示範圖



圖二：名稱解釋圖

我們找出五種牌組的製作方式，在研究目的一中，有無限法、限制法、旋轉法、錯置法；第五種補集法在研究目的三。

一、找出哆寶牌組設計法(任兩張牌有一個圖案相同)

以下我們把相異圖案代換成數字（1.2.3...）做處理。

（一）無限法（t = 2，k = 1）

EX：一張牌上共有 3 個圖案（n = 3）。

1,2,3	1,4,5	1,6,7	1,8,9

我們固定一種圖案（即數字 1），另外再加上兩個圖案。

每增加一張牌，可以一直向外再擴張兩種數字，將可製造出無限張牌。每一張牌都含有一個與其他牌相同的數字（即數字 1 所代表的圖案，此稱為第一個圖案），每張牌除了第一個圖案以外會剩下 n−1 個圖案，依照製圖規則來看，這些剩下的圖案都不相同。

由此可推論總牌數及總圖案數的關係：

p	=	m	×	（n−1）	+	1
總圖案數		總牌數		一張牌的圖案數扣除第一圖案		第一個圖案

（二）限制法（t=2，k=1）

以一張牌上共有 4 個圖案（n = 4），任兩張牌共有 1 種圖案相同為例：

1，2，3，4	……甲卡
1，5，6，7	……乙卡
2，5，8，9	……丙卡
3，6，8，10	……丁卡
4，7，9，10	……戊卡

在甲卡中取一個數字（1），增加額外三個數字以組成 4 個數字當乙卡；從甲卡和乙卡中各取一個數字（2，5）並再增加額外兩個數字（8，9）給丙卡……以此類推，最後從甲卡、乙卡、丙卡、丁卡各挑一個數字（4，7，9，10）組成戊卡。此時的牌數是最大值，因為如果要製造出己卡，需要 4 個數字，前面已無可使用的數字，無法造出己卡。同理可證，以一張牌共有 n 種圖案，任兩張牌有一種圖案相同時：

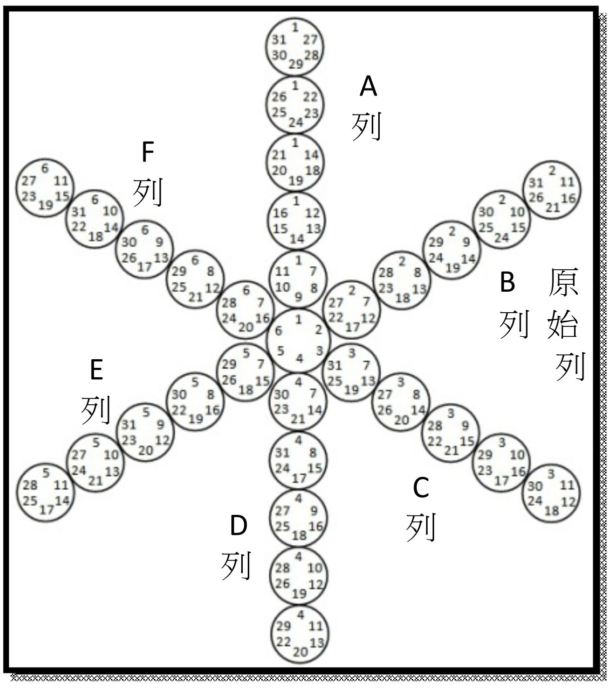
m	=	n	+	1
總牌數		有 n 種圖案為首的選擇可創造新牌		甲卡(基礎牌)

p	=	n	×	（n＋1）	/	2
總圖案數		一張牌的圖案數		總牌數(m)		每個圖案出現兩次

（三）旋轉法(原版哆寶) (t=2，k=1)

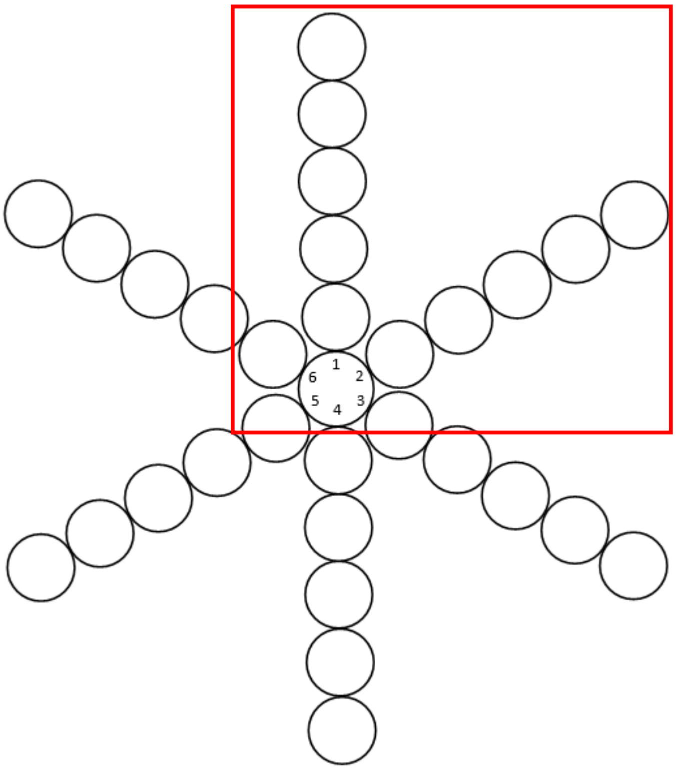
（n 的限制：n ≥ 3 且 n ∈ Z，n − 1 為質數）以一張牌上共有 6 個圖案（n = 6），任兩張牌共有 1 種圖案相同為例。如圖三：以基礎牌（1，2，3，4，5，6）為中心放射出 6 列，一列共延伸出 5 張牌。

因為每張牌填入基礎牌中的一個數字後（A 列均先填 1、B 列均先填 2、……、E 列均先填 5），每張牌還差 5 個數字，把 A 列填滿（A1 填入 7.8.9.10.11，A2 填入 12.13.14.15.16，…，以此類推），填完後考慮 B～F 列，而每張牌的 5 個空缺可以從 A 列的每張牌各取一個數字，才能構成完整牌組。



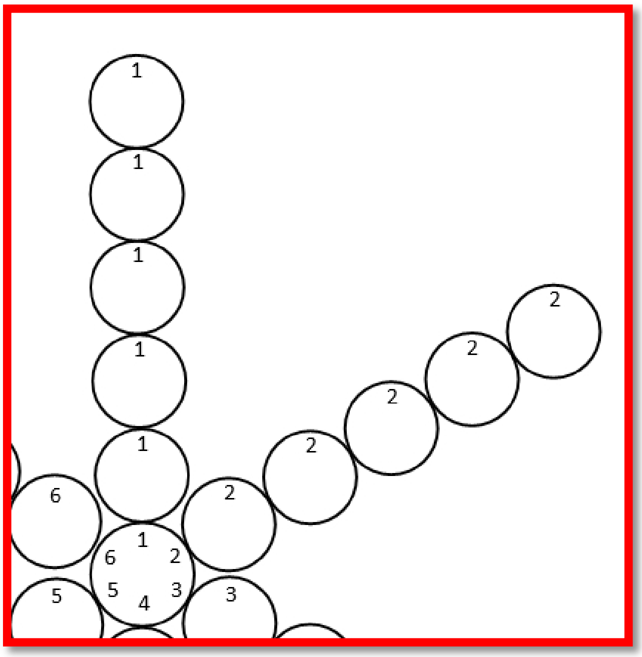
圖三：n=6 的示意圖

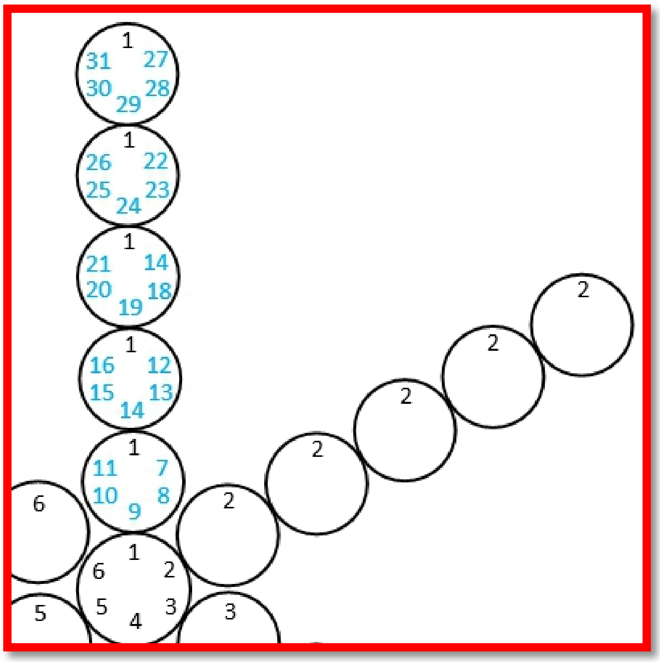
A 列和基礎牌皆有共同數字 1，扣除基礎牌已有的數字（從 7，8，9，10……），依序填入卡牌補滿。B 列和基礎牌皆有共同圖數字 2，必須取基礎牌、A1、A2、A3、 A4、A5 各取一個數字構成第一張牌，以此類推完成 B 列。



圖四−1：

將 1.2.3.4.5.6 各向外延伸 5 張牌。



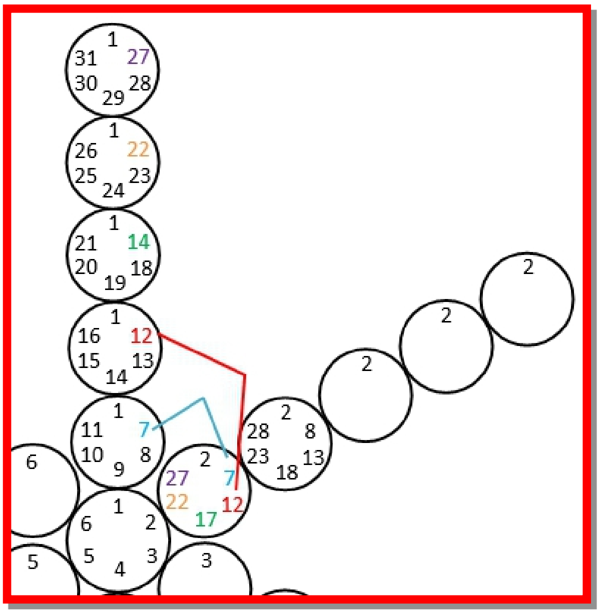


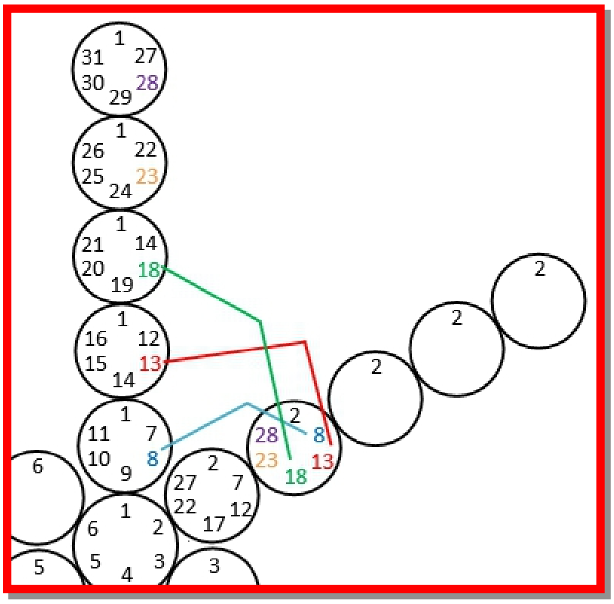
圖四−2：

在 A 列、B 列、C 列、D 列、E 列、F 列各往外延伸 5 張牌，在 A 列各張牌填入 1、在 B 列各張牌填入 2……以此類推。

圖四−3：

在 A 列依序填入 7.8.9.10.11、12.13.14.15.16.⋯⋯.31。



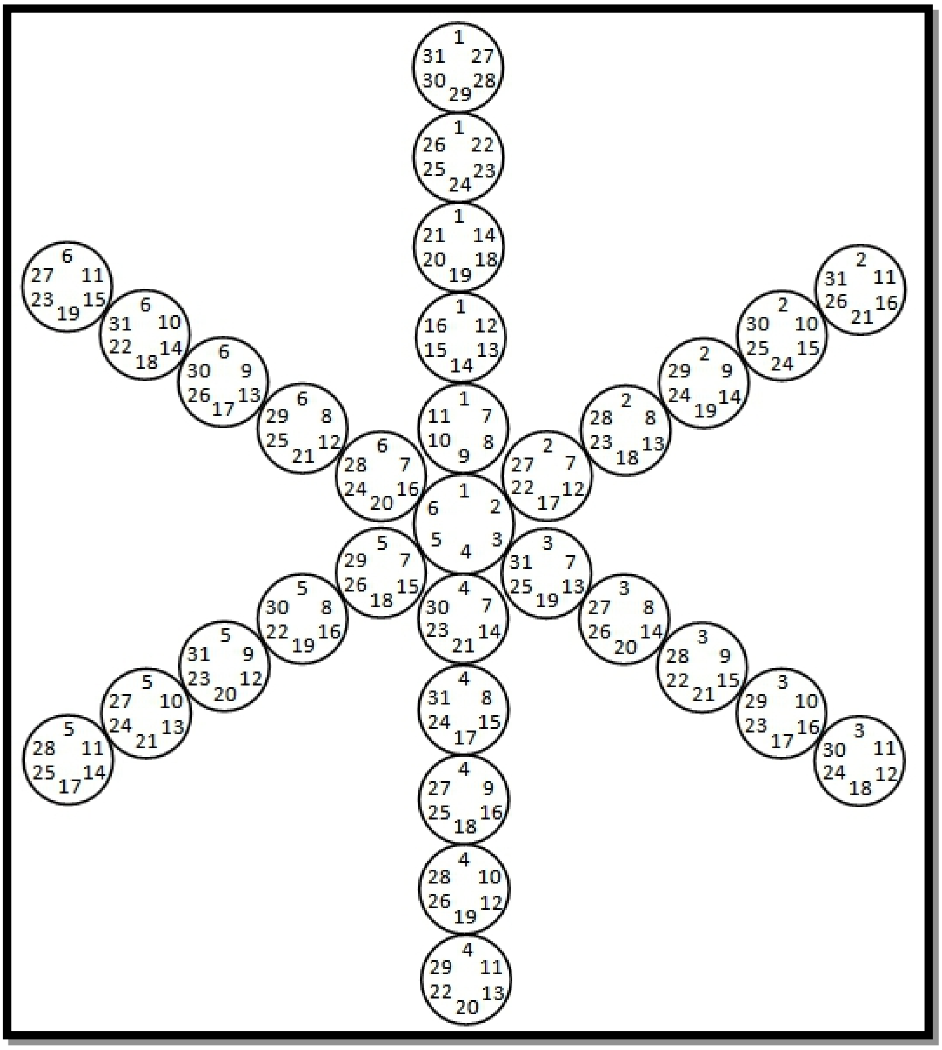


圖四-4：

B1 選取 A 列各張牌的第 1 個數字 7.12.17.22.27。

圖四-5：

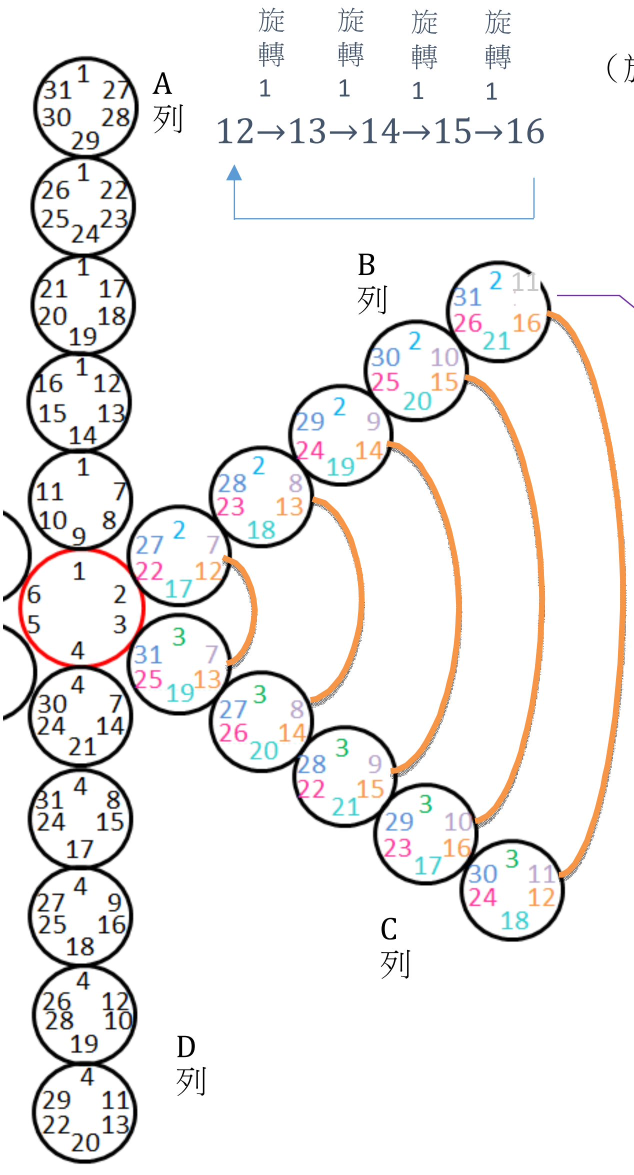
B2 選取 A 列各張牌的第 2 個數字 8.13.18.23.28。



圖四-6：

以此類推，

完成牌組。



圖五：n=6 說明製造圖

（旋轉量乃相較於 B 列（原始列）之相對位移）

表一：n= 6的旋轉量

旋轉量	牌的圖案(以不同數字代表不同圖案)				
	3	3	3	3	3
0	7	8	9	10	11
1	13	14	15	16	12
2	19	20	21	17	18
3	25	26	22	23	24
4	31	27	28	29	30

D 列用旋轉法，以下用表格說明。

表二：調整之後的旋轉量

旋轉量	D1	D2	D3	D4	D5
	4	4	4	4	4
0	7	8	9	10	11
2	14	15	16	12	13
4	21	17	18	19	20
6⇆1	23	24	25	26	22
8⇆3	30	31	27	28	29

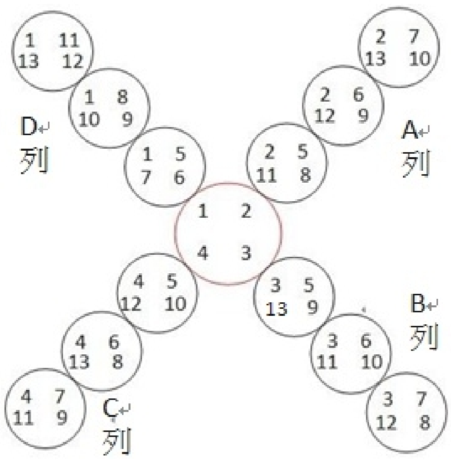
以此類推，完成六列牌。

（因為此時 n = 6，所以 5 個圖案為一循環，故旋轉量≥6者可視為該數−5t（t∈N））

由上述的作圖方式可以發現每張牌上的圖案數（即 n）跟旋轉量有密切的關係，此旋轉量關係分別跟環狀圖的列數及一張牌上的圖案數（n）有相似的變化。

先製作 n=k 和 n=k+1（k≥3∧k∈Z）的環狀圖，可以發現當 n 增加 1 時所製作出來的環狀圖會增加一列卡牌每張牌上也多了一個圖案。

先從增加的新圖案來看，新圖案會照先前規則(即 n=k 時)的方式旋轉，由此可見單張牌的旋轉量會照規律繼續增加；新增列（即 N 列）的旋轉量是根據前 k−1 列來增加。



圖六：n=4 的示意圖

旋轉即是將每排牌列中的圖案進行編碼，並依照大小進行分組，以形成數列，再將圖案先後順序調換，使圖案錯開。由於 n−1 為合數，所以當旋轉量超過 n−1 時，會導致相同的旋轉量重複出現，以致於無法填滿所有的分支。在 n−1 為質數時，將每個旋轉量轉換後為 0 ～n−1，其中每個數都跟 n−1 互質，所以旋轉量必定錯開，其各排牌列中各數列的旋轉量會有規律的排序。

當 n−1 為質數時，C 列的旋轉量轉換後為 1，2，…，n−3，n−2(跟 n−1 互質) 和不旋轉，所以各組不會有重複，其餘列旋轉量轉換後亦不會重複，故可用旋轉法製作出卡牌，並且所有牌不會重複，但僅限 n−1 為質數時，因為任兩列轉換後不能重複。

新增圖案數的旋轉量和新增列的旋轉量具有相同的規律，可由下表整理歸納得知。

表三：旋轉量示意圖

N=5 N=6 N=7 N=8 N=n

列	B	C	D	E	F	G	H	…	N
與基礎排相同的圖案	2	3	4	5	6	7	8	…	n
相較於原始列的旋轉量	0	0	0	0	0	0	0	…	0
	0	1	2	3	4	5	6	…	(n−2)
	0	2	4	6	8	10	12	…	2(n−2)
	0	3	6	9	12	15	18	…	3(n−2)
	0	4	8	12	16	20	24	…	4(n−2)
	0	5	10	15	20	25	30	…	5(n−2)
	0	6	12	18	24	30	36	…	6(n−2)
	…	…	…	…	…	…	…	…	…
	0	(n−2)	2(n−2)	3(n−2)	4(n−2)	5(n−2)	6(n−2)	…	n(n−2)

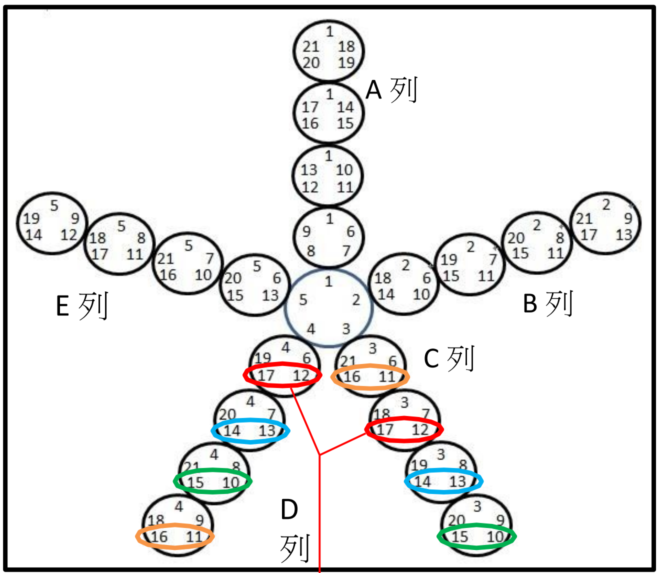
（四）錯置法(t=2，k=1)

（n 的限制：n≥3∧n∈Z∧n−1 為合數）

以一張牌上共有 5 個圖案（n=5），任兩張牌共有 1 種圖案相同為例：

C1	C2	C3	C4
3	3	3	3
6	7	8	9
11	12	13	10
16	17	14	15
21	18	19	20

D1	D2	D3	D4
4	4	4	4
6	7	8	9
12	13	10	11
17	14	15	16
19	20	21	18



圖七：n=5 旋轉出錯圖

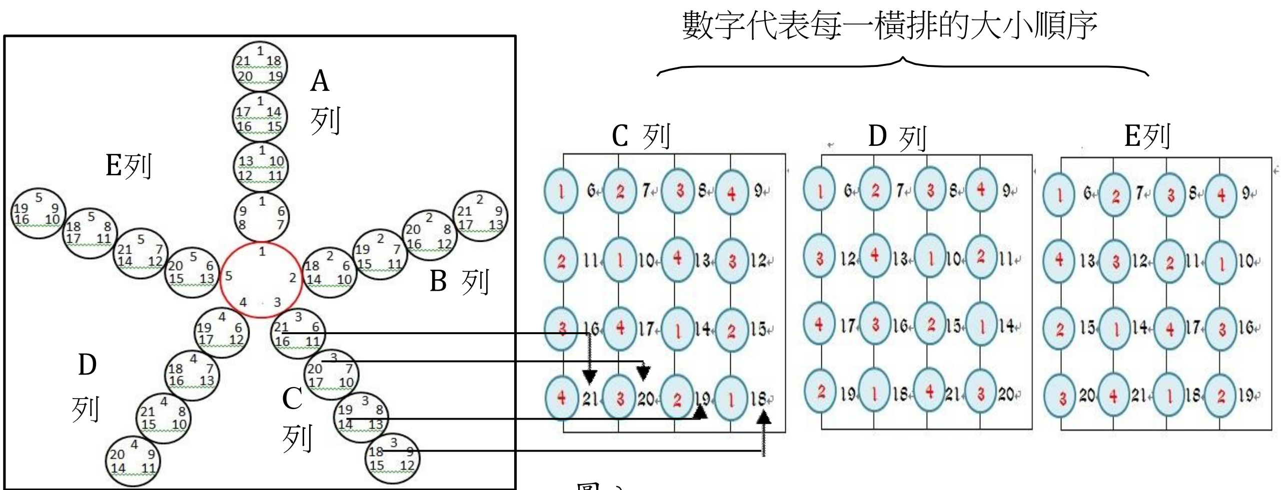
我們用旋轉法探討，發現 n−1 不是質數時會遇到重複的問題，因此將旋轉量錯開重組牌組。

以與基礎牌相同的數字 4 來說，旋轉量調整後為{0，2，0，2}，旋轉量會重複，與 B 列的旋轉量相等，所產生的數字會重複，故旋轉量不可相等。因此我們將 C 列及 D 列的旋轉量錯開，如圖七所示。

表四：n= 5的旋轉量

基礎牌相同的數字	2	3	4	5
旋轉量	0 0 0 0	0 1 2 3	0 2 4⇆0→移 3 6⇆2→移 1	0 3 6⇆2→移 1 9⇆1→移 2

但是將旋轉量錯開之後的牌組仍然違反哆寶規則(任兩張牌只能有一種圖案相同)，於是我們重新製圖，觀察旋轉量的影響。首先 A 列及 B 列維持旋轉法製作方式，之後將剩下牌列中的數字編碼大小錯置(如圖七所示)，最後將數字填入，製作成環狀圖，即可完成與旋轉法規格相同的牌組



圖八

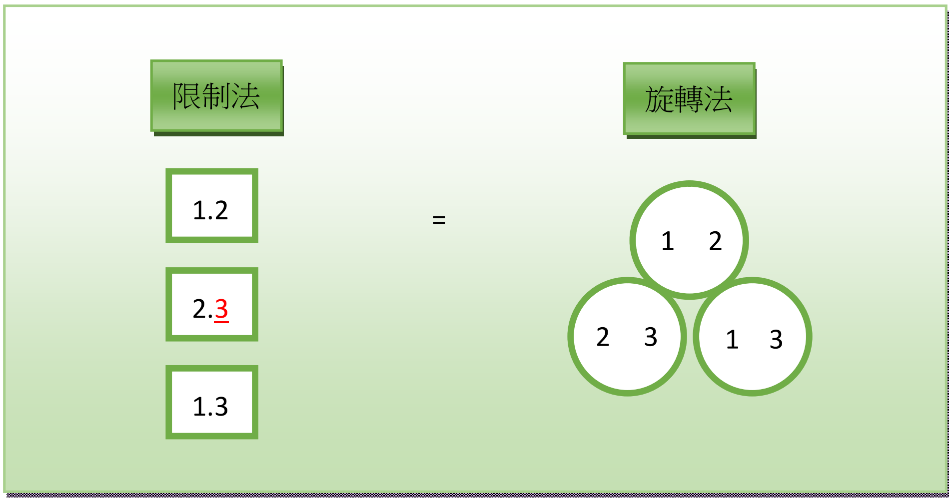
：n=5 的示意圖

為了比較各種方法的差異，我們選定一種比較規則:讓總牌數 m 盡量大、總圖案數 p 盡量小。使用此種比較方式是為了使遊戲的卡牌介面更加簡單且不失本來的遊玩樂趣。總排數盡量大是因為可以有更多的遊戲卡牌，總圖案數 p 盡量小則是因為要減少使用的圖案，避免圖案浪費（避免一個圖案只被用到幾次）我們在下表列出由各方式所產生的 $p-m$ 的最小值，以方便觀察。

	無限法(p4)	限制法(p5)	旋轉法(p10)	錯置法(p11)
$p-m$	$mn-2m+1$	$(n-2)(n+1)\div 2$	0	0

表五：$p-m$ 的 min

當 $n=2$時，其值為 0，與旋轉法所製造的牌組相同。



圖九：n=2 結構相同示意圖

二、改變設計規則與探討變數之間的關係

（一） 改變設計規則:任兩張牌有兩個以上的圖案重複（$t=2$，$k\geq 2$）

原本哆寶這個遊戲是任兩張牌有 1 個圖案相同（我們將它定義為$k=1$），之後我們開始探討$k\geq 2$時，旋轉法的製作方式。其中列數$=n-k+1$。

在$t=2$ 、k為變數的情形下，可分為兩種情況，第一種為$n-k=$質數，在此情況下可以使用旋轉法進行製牌。首先先製造出基礎牌，然後依序製造出$n-k+1$開頭，再將第一列每張牌上的 $n-k$個空格依序填滿，最後依照旋轉法的製圖方式將剩下的空格填滿（即寫出旋轉量後填入每個圖案）。

1. k=2(n−k 是質數時的例子)

旋轉量↓

在此情況下，旋轉 6 格=旋轉 1 格，其他旋轉格數大於位置數時，也以此規則修正，故以下省略原旋轉量。

（1）n = 7

表六：n=7 的旋轉量

0	8	9	10	11	12
0	13	14	15	16	17
0	18	19	20	21	22
0	23	24	25	26	27
0	28	29	30	31	32

1,3

0	8	9	10	11	12
1	14	15	16	17	13
2	20	21	22	18	19
3	26	27	23	24	25
4	32	28	29	30	31

1,4

0	8	9	10	11	12
3	16	17	13	14	15
1	19	20	21	22	18
4	27	23	24	25	26
2	30	31	32	28	29

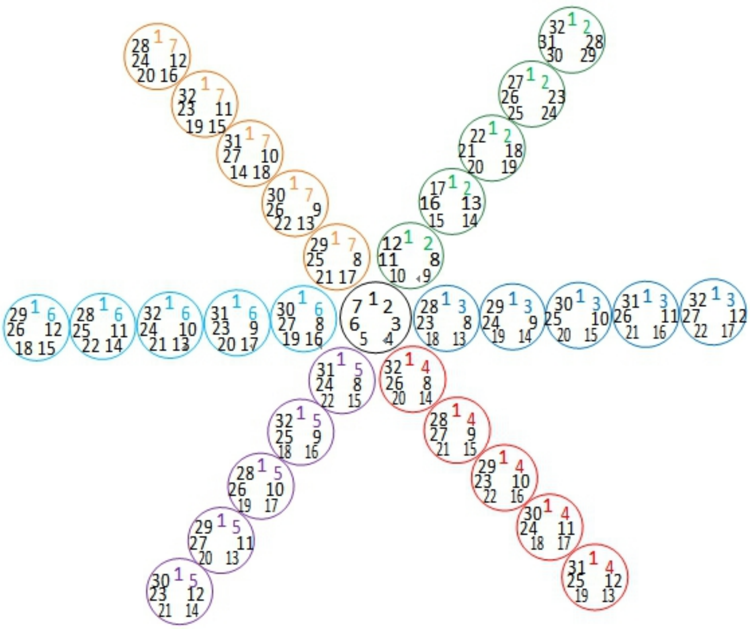
1,5

0	8	9	10	11	12
2	15	16	17	13	14
4	22	18	19	20	21
1	24	25	26	27	23
3	31	32	28	29	30

1,6

1,7

0	8	9	10	11	12
4	17	13	14	15	16
3	21	22	18	19	20
2	25	26	27	23	24
1	29	30	31	32	28



圖十：n=7 的示意圖

（2）n=6(n−k 是合數時的例子)

1,3

0	7	8	9	10
0	11	12	13	14
0	15	16	17	18
0	19	20	21	22

1,4

旋轉量	0	7	8	9	10
	1	12	13	14	11
	2	17	18	15	16
	3	22	19	20	21

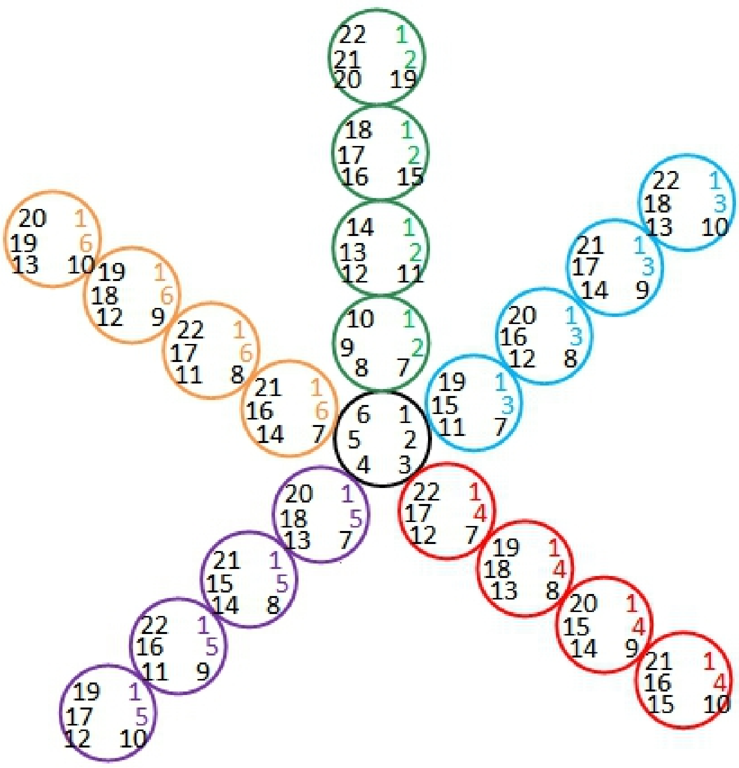
1,5

0	7	8	9	10
2	13	14	11	12
0→移 3	18	15	16	17
2→移 1	20	21	22	19

1,6

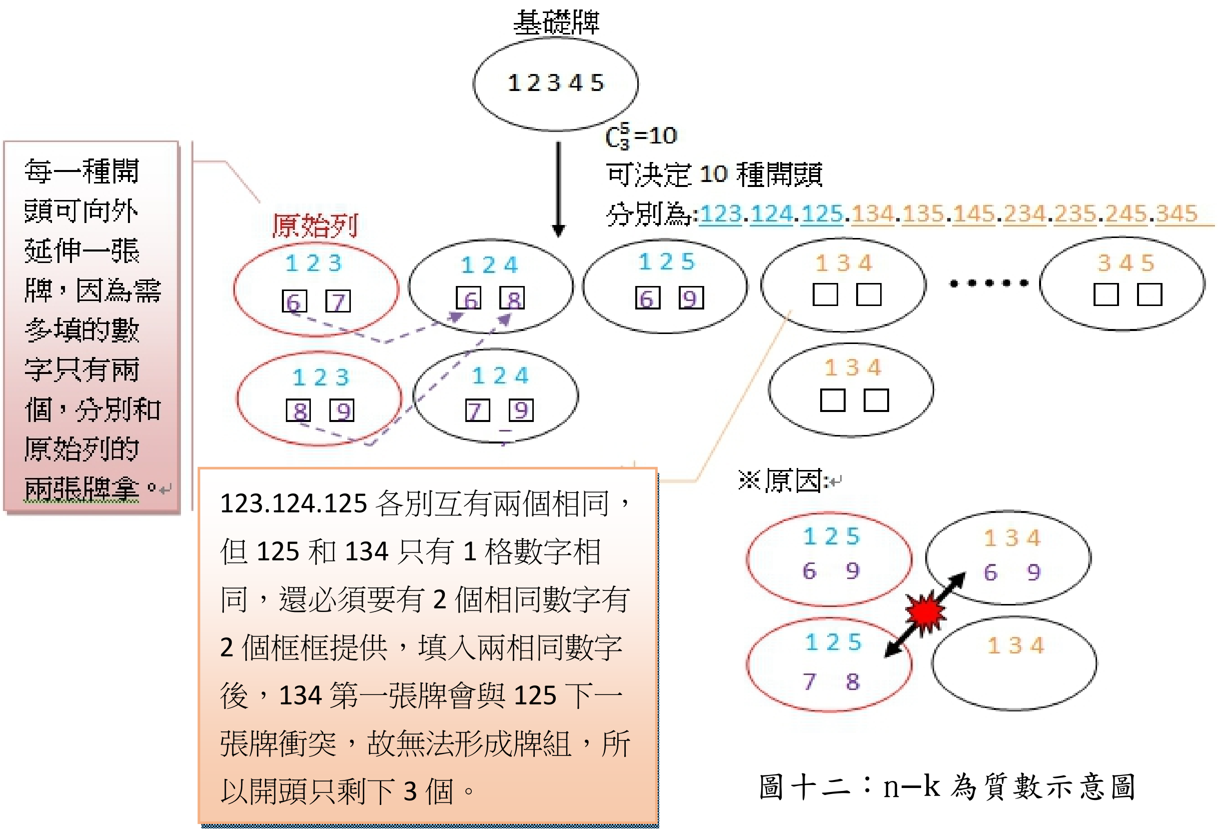
0	7	8	9	10
3	14	11	12	13
2→移 1	16	17	18	15
1→移 2	21	22	19	20

表七 ：n=6 的旋轉量



圖十一：n=6 的示意圖

2. k = 3(n−k 是質數時的例子)



圖十二：n−k 為質數示意圖

(1)當 n=5 時，藉由圖十二可從 123、124、125 中各延伸出兩張牌，並旋轉出剩下的兩個圖案。

旋轉量↓

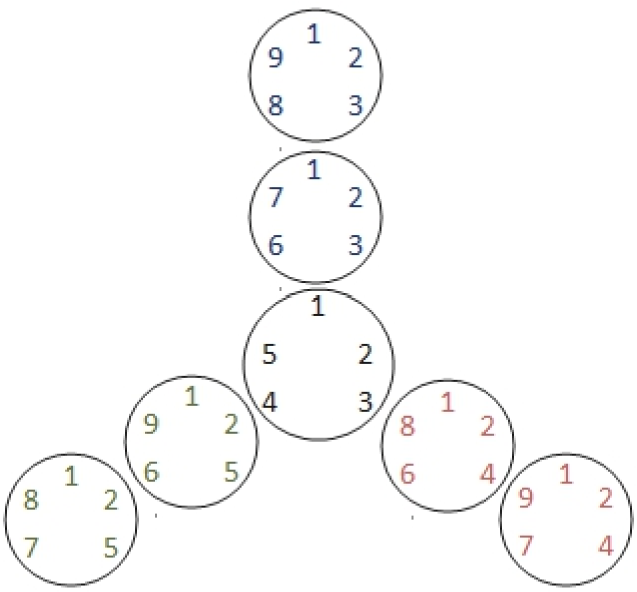
表八：n= 5的旋轉量

0	6	7
0	8	9

1 ,2 ,4

0	6	7
1	9	8

1, 2, 5



圖十三：n=5 的示意圖

（2）當 n=7 時(n−k 是合數時的例子)

表九：n=7 的旋轉量

0	8	9	10	11
0	12	13	14	15
0	16	17	18	19
0	20	21	22	23

1,2,4

0	8	9	10	11
1	13	14	15	12
2	18	19	16	17
3	23	20	21	22

1,2,5

0	8	9	10	11
2	14	15	12	13
0→移 3	19	16	17	18
2→移 1	21	22	23	20

1,2,6

1,2,7

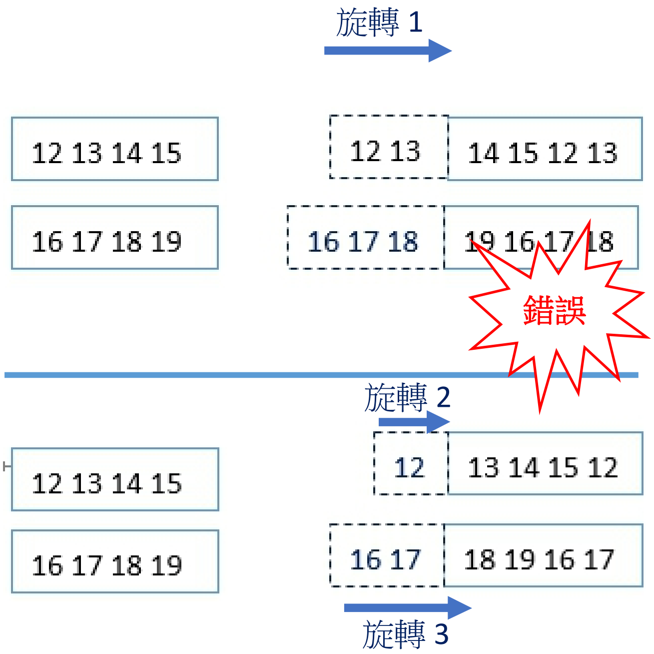
0	8	9	10	11
3	15	12	13	14
2→移 1	17	18	19	16
1→移 2	22	23	20	21

↑
旋
轉
量

我們發現，就算將旋轉量交錯排列，當上列和下列旋轉差相同時，製造出的牌組仍然有錯。如圖十五所示。

旋轉 1

圖十四：n=7 的示意圖



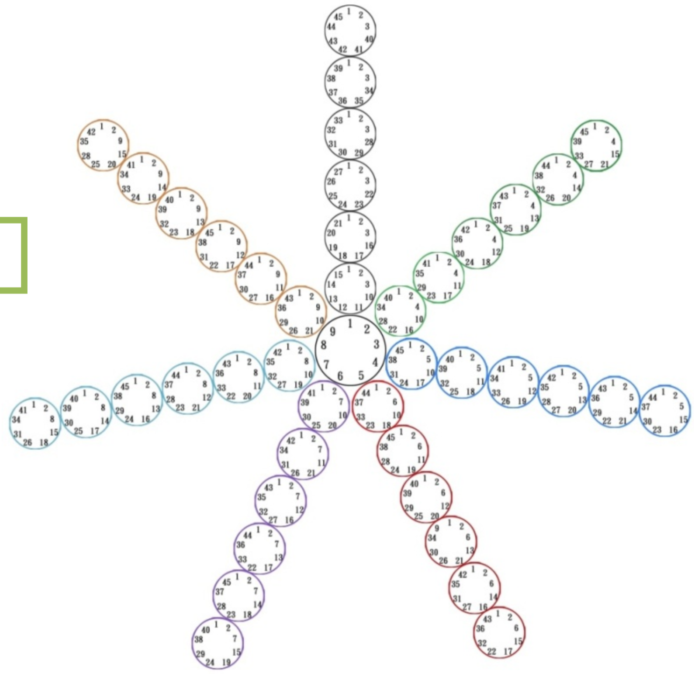
圖十五：旋轉錯誤解釋圖

（3）當 n=9，k= 3時(n−k 是合數時的例子)

表十：n= 9的旋轉量

0	10	11	12	13	14	15
0	16	17	18	19	20	21
0	22	23	24	25	26	27
0	28	29	30	31	32	33
0	34	35	36	37	38	39
0	40	41	42	43	44	45

1,2,4



圖十六：n=9 的示意圖

0	10	11	12	13	14	15
1	17	18	19	20	21	16
2	24	25	26	27	22	23
3	31	32	33	28	29	30
4	38	39	34	35	36	37
5	45	40	41	42	43	44

1,2,5

0	10	11	12	13	14	15
4→移 3	19	20	21	16	17	18
2→移 5	27	22	23	24	25	26
0→移 4	32	33	28	29	30	31
4→移 1	35	36	37	38	39	34
2	42	43	44	45	40	41

1,2,8

0	10	11	12	13	14	15
2	18	19	20	21	16	17
4→移 1	23	24	25	26	27	22
0→移 5	33	28	29	30	31	32
2→移 3	37	38	39	34	35	36
4	44	45	40	41	42	43

1,2,6

1,2,9

0	10	11	12	13	14	15
5	21	16	17	18	19	20
4	26	27	22	23	24	25
3→移 1	29	30	31	32	33	28
2	36	37	38	39	34	35
1→移 3	43	44	45	40	41	42

0	10	11	12	13	14	15
3→移 4	20	21	16	17	18	19
0→移 3	25	26	27	22	23	24
3→移 2	30	31	32	33	28	29
0→移 5	39	34	35	36	37	38
3→移 1	41	42	43	44	45	40

1,2,7

用旋轉法將$n-1$推廣至$n-k$後一樣會有質合數限制，其理由也是餘數問題，當 $n-k$ 為質數時，C 列的旋轉量為 1，2，…，n−k−2，n−k−1 都跟 $n-k$互質和不旋轉，所以各組不會有重複，另外 D 列旋轉量 也 都跟 $n-k$互質，同理 E、F、G、…N 亦同故可用旋轉法製作出卡牌，並且所有牌不會重複，但僅限 n−k 為質數，因為首列 C 列旋轉值不能重複。

當我們使用此種造牌方式（類推旋轉法），發現$n-k$為合數時無法以環狀製牌。$n-k=$合數時，扣完 k 個圖案後會剩下$n-k$個空格，需額外畫出$n-k-1$條分支（先扣 A 列及 B 列），$n-k$個圖案照規定排列會不足$n-k$種，即 1.2 的差值同義於 2.3 的差值同義於 3.4 的差值這種情況，由於$n-k$為合數，所以旋轉量差值必與總格數不互質，造成相同的旋轉量重複出現，故剩下的總數量不足以填滿$n-k-1$條分支。

以$n=7$、$k=3$為例，扣完 3 個圖案後只剩下 4 個空格，但需要額外畫出三條分支（先扣 A 列及 B 列），排列方式只剩下 0123、0213 兩種，不足以分配給剩下的 C、D、E 三列。旋轉量 0123；0246：0⇆0、2⇆2、4⇆0→移 3、6⇆2→移 1；0369：0⇆0、3⇆3、 6⇆2→移 1、9⇆1→移 2。

（二）探討變數之間的關係：探討 m、p、n 的關係

表十一 ：固定 p、n 求出 m

p \ n	2	3	4	5	6	7	8	9
2	×	×	×	×	×	×	×	×
3	3	×	×	×	×	×	×	×
4	3	×	×	×	×	×	×	×
5	4	2	×	×	×	×	×	×
6	5	4	×	×	×	×	×	×
7	6	7	2	×	×	×	×	×
8	7	7	2	×	×	×	×	×
9	8	4	2	2	×	×	×	×
10	9	4	3	2	×	×	×	×
11	10	5	3	2	2	×	×	×
12	11	5	3	2	2	×	×	×
13	12	6	13	3	2	2	×	×
14	13	6	13	3	2	2	×	×
15	14	7	13	3	2	2	2	×

×：圖案數不足導致無法創造出兩張牌

橘標字體：可創造出牌但無法用到所有圖案。

m ：框框裡的數字為總牌數 m。

為探討其關係式，我們將列設為 n，行設為 p，格子內表示張數 m，並以無限法探討。因為兩張牌的圖案數各為 n，第二張牌和第一張牌有 k 個相同，所以總圖案數至少為$2n-k$。故製造兩張牌所需要的總圖案數$p \geq 2n-k$，可用此先將右上半邊不可形成牌組的組合刪除。

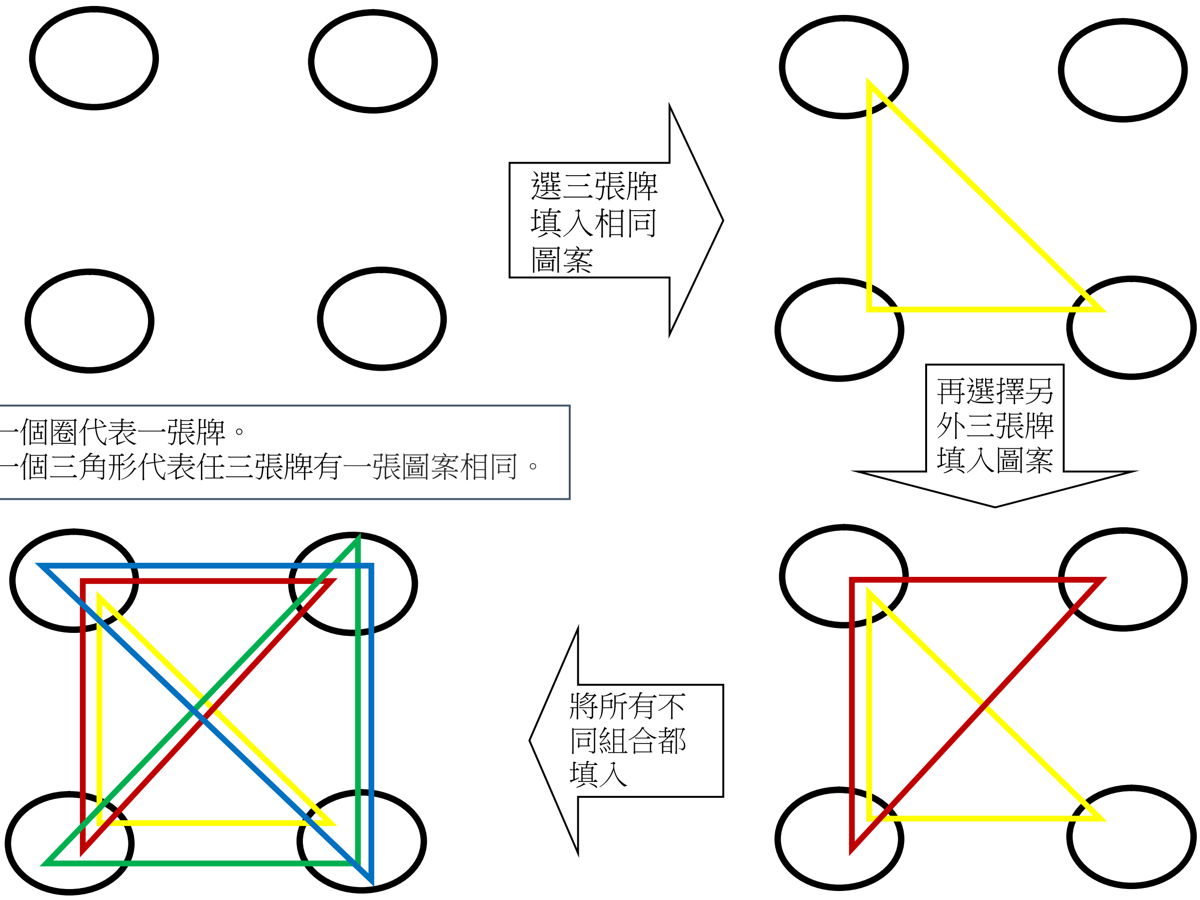
經由觀察發現，隨著 n 的增加，三角形出現的次數也跟著上升，從無三角形、每隔 1 個圖案出現一個三角形 、每隔一個圖案出現兩個三角形……。

(由於已固定 p、n 後才求出 m 所以可能會出現無法使用所有已定圖案 p 的情況。)

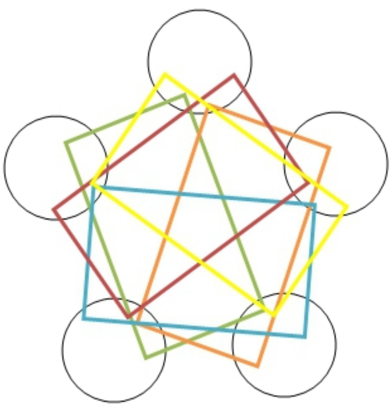
（三）改變設計規則：多張牌之間同時只有一個圖案重複（$t \geq 3$，$k = 1$）

任三張牌有一張圖案相同，在此我們使用多邊形製圖法，此種牌組的製作方式要先決定總牌數。因為任三張牌要有一個圖案相同，首先任取三張牌填入相同的圖案，然後取不同組合的三張牌，再填入另一種圖案，把每種組合都選過一次並填上圖案，最後的牌組即符合規則。

多邊形製圖法：為了討論任 t 張牌在 $t \geq 3$時的情況，我們決定先假設 m 再來討論 t，最後發現其通式為總圖案數$p = C_t^m$。這個方式的原理是先製造一個 m 邊形（即有 m 個點），再一次選取 t 個點構成一個 t 邊形，最後計算各種不同位置形狀的 t 邊形總數 ，會發現就是從 m 個點中任一選取 t 個點（任三點必不共線，必可圍成多邊形），即可得通式為 $p=C_t^m$。



圖十七：多邊形製圖法的製作方式解釋圖



圖十八 ：多邊形製圖法示意圖
一個長方形代表任四張牌有一張圖案相同。一個圈代表一張牌。

由此法的完成牌組可以推得每張牌上的圖案數 n 的通式，選定一張牌，先看此牌上的其中一個圖案，會與$m-1$張牌中的$t-1$ 張牌構成 t 邊形，所以可以造出C_{t-1}^{m-1}個相異 t 邊形，每個 t 邊形都代表此圖案上的一種圖案，故可得 $n = C_{t-1}^{m-1}$。

另外重複圖案數 k 的通式推導，則改成一次選定兩張牌，先看這兩張牌的相同圖案，會與$m-2$張牌中的$t-2$ 牌構成 t 邊形，所以可以造出C_{t-2}^{m-2}個相異多邊形，每個 t 邊形都代表一種共同圖案，故可得關係式 $k= C_{t-2}^{m-2}$。

三、建立區組設計與哆寶的連結，並據此擴充牌組設計法

（一）文獻中區組設計(Block Design)的一些定義與定理

下述的 3 個定義與 2 個定理，節錄自 Stinson, Douglas 所著之 Combinatorial Designs Constructions and Analysis。我們發現區組設計與哆寶的牌組設計可以建立連結：

Definition1：A design is a pair (X, A) such that the following properties are satisfied:

(1) X is a set of elements called points, and

(2) A is a collection (i.e., multiset of nonempty subsets of X called blocks.)

Definition2：Let m, r and k be positive integers such that $m > r \geq 2$. A (m, r, k)-balanced incomplete block design (which we abbreviate to (m, r, k)-BIBD) is a design (X, A) such that the following properties are satisfied:

(1)$|X| = m$

(2)each block contains exactly r points, and

(3)every pair of distinct points is contained in excactly k blocks.

Defintion3：Let (X, A) be a design where $X = \{x_1, x_2, x_3, ..., x_m\}$ and $A = \{A_1, A_2, A_3, ..., A_p\}$. The incidence matrix of (X, A) is the $m \times p$ 0-1 matrix $M^T_{m\times p} = (m_{i,j})$ defined by

$$m_{i,j} = \begin{cases} 1 & if\ x_i \in A_j \\ 0 & if\ x_i \notin A_j \end{cases}$$

The incidence matrix, $M^T_{m\times p}$, of a (m, p, n, r, k)-BIBD satisfies the following properties:

(1) every column of $M^T_{m\times p}$ contains exactly r "1"s ;

(2) every row of $M^T_{m\times p}$ contains exactly n "1"s ;

(3) two distinct rows of $M^T_{m\times p}$ both contains "1"s in exactly k columns.

Theorem1：Let $M^T_{m\times p}$ be a $m \times p$ 0-1 matrix and let $m > r \geq 2$.Then $M^T_{m\times p}$ is the incidence matrix of a (m, p, n, r, k)-BIBD if and only if $M^T_{m\times p} M_{p\times m} = kJ_{m\times m} + (r-k)I_{m\times m}$ and $u_{1\times m} M^T_{m\times p} = ku_{1\times p}$, where $I_{m\times m}$ is the $m\times m$ identity matrix, and $J_{m\times m}$ is an $m\times m$ matrix in which every entry is a "1".

Theorem2：Suppose that (X, A) is a (m, p, n, r, k)-BIBD, and let (Y, B) be the dual design of (X, A).Then the following properties hold:

(1)every block in B has size n,

(2)every point in Y occurs in exactly r blocks in B, and

(3)any two distinct blocks $B_i, B_j \in B$ intersect in exactly k points.

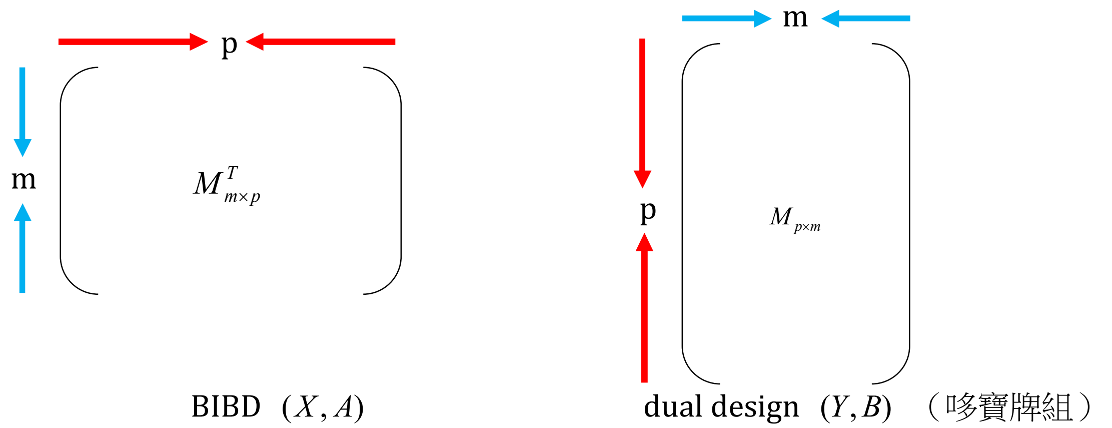
（二）區組設計(Block Design)與哆寶牌組之間的連結

對照 BIBD (X,A) 及其 dual design (Y,B) 的定義後，可以發現哆寶的定義包含在 Theorem2 中 dual design (Y,B) 的性質中，我們綜合 Theorem1 與 Theorem2 後，可以建立以下的情境連結：

表十二：定義與定理對照表

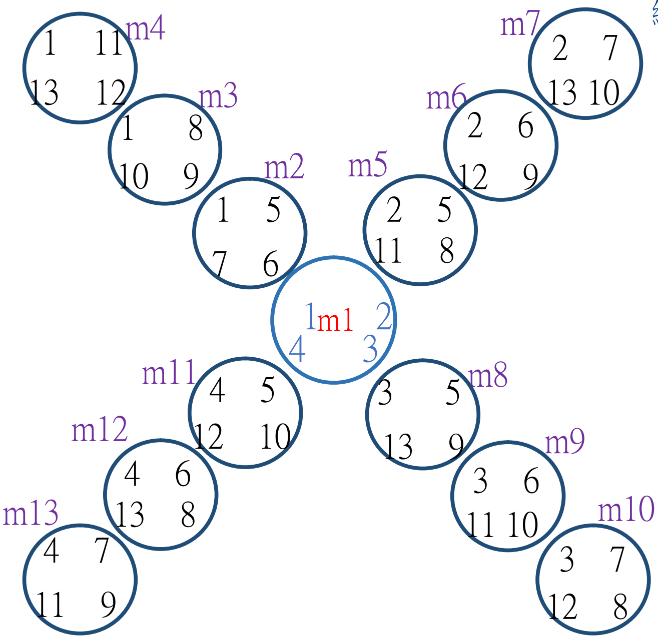
Block design 中的定義	BIBD (X,A) $M^T_{m\times p}$	dual design (Y,B) $M_{p\times m}$ (哆寶牌組)
牌組設計	所有圖案收集起來所組成的集合為 X 收集所有牌所組成的集合為 A	所有圖案收集起來所組成的集合為 Y 收集所有牌組成的集合為 B
$\lvert X\rvert = m$	總圖案數 m	牌組總張數 m
each block contains exactly r points	每張牌上都有 r 個圖案	每個圖案都出現 r 次 (不含無限法)
every row of $M^T_{m\times p}$ contains exactly n "1"s	整套遊戲中每個圖案各合計出現 n 次	每張牌上都有 n 個圖案
every pair of distinct points is contained in excactly k blocks	任一對相異圖案的組合都恰巧會在 k 張牌上出現	任兩張牌都恰好有 k 個圖案相同
$\lvert A\rvert = p$	牌組總張數 p	總圖案數 p
(p,m,r,n,k) -BIBD (X,A)	轉置前的牌組設計(不一定符合哆寶規則)	轉置後的牌組設計(符合哆寶規則)

BIBD (X,A) 與 dual design (Y,B) (哆寶牌組)具有互為轉置矩陣的關係。



圖十九：BIBD 與 dual design 的矩陣

根據上述定義，我們可以將一組 dual design (Y,B) 哆寶牌組轉成 incidence matrix $M_{p\times m}$，矩陣的列數即為總圖案數 p；矩陣的行數即為牌組總張數 m。



$$
\begin{array}{r|c}
 & \text{總牌數}(m)\ \ 1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \ 5\ \ 6\ \ 7\ \ 8\ \ 9\ \ 10\ \ 11\ \ 12\ \ 13 \\
\begin{matrix} 1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\\8\\9\\10\\11\\12\\ \text{總圖案數}(p)\ 13 \end{matrix} &
\begin{bmatrix}
1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&1&1&1&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0&1&1&1&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1\\
0&1&0&0&1&0&0&1&0&0&1&0&0\\
0&1&0&0&0&1&0&0&1&0&0&1&0\\
0&1&0&0&0&0&1&0&0&1&0&0&1\\
0&0&1&0&1&0&0&0&0&1&0&1&0\\
0&0&1&0&0&1&0&1&0&0&0&0&1\\
0&0&1&0&0&0&1&0&1&0&1&0&0\\
0&0&0&1&1&0&0&0&1&0&0&0&1\\
0&0&0&1&0&1&0&0&0&1&1&0&0\\
0&0&0&1&0&0&1&1&0&0&0&1&0
\end{bmatrix}_{13\times 13}
\end{array}
$$

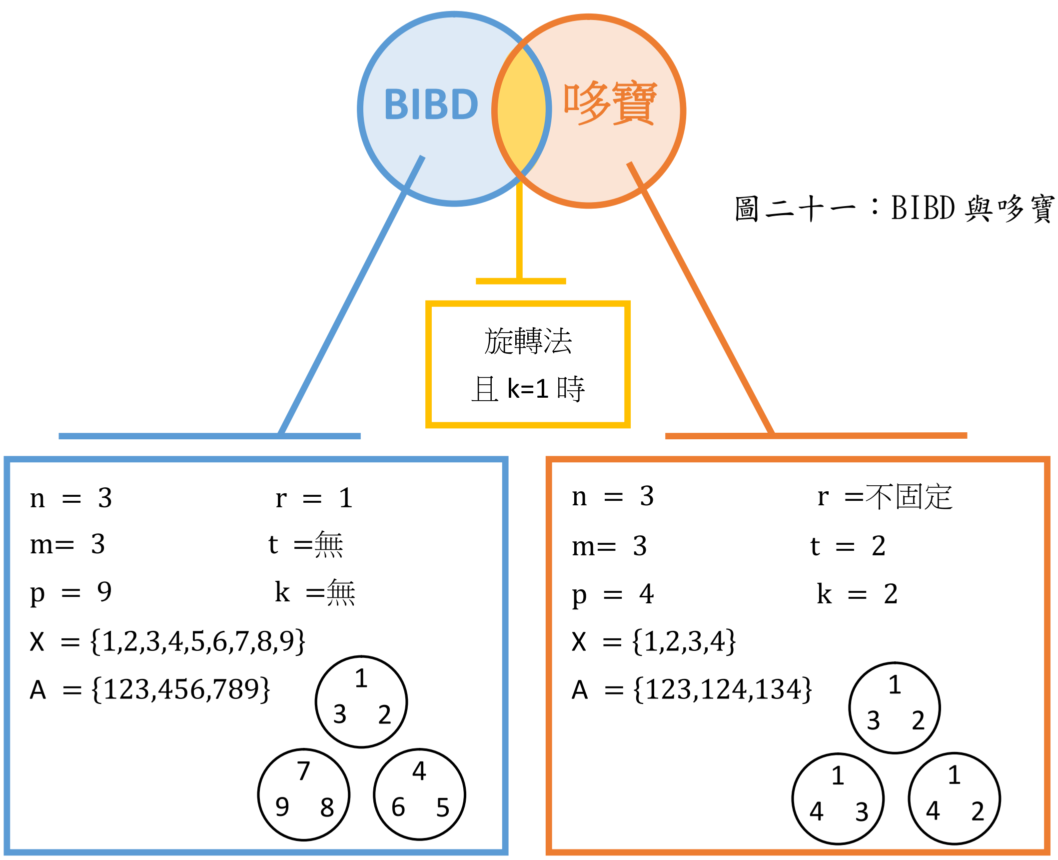
圖二十：n = 4，k = 1示意圖

以上圖二十為例，為觀察方便，我們將基礎牌訂為m_1、A1 為m_2、A2 為m_3、A3 為m_4、B1 為m_5……以此類推。因此我們可以將一組 dual design (Y,B)哆寶牌組轉成 incidence matrix $M_{p\times m}$，矩陣的列數即為總圖案數 p；矩陣的行數即為牌組總張數m。

（三）利用區組設計(Block Design)檢驗與建立哆寶牌組

1.旋轉法所製造出來的原版哆寶牌組既是 BIBD，它的 dual design 也是 BIBD

BIBD 與用各種方法所製造出來的哆寶牌組之間的文氏圖關係如下：



圖二十一：BIBD與哆寶牌組的文氏圖

2.利用 Theorem1 與 Theorem2 來檢驗旋轉法製造的牌組是否滿足哆寶的規則

根據 Theorem2，如果想要檢驗一組 dual design (Y,B) 符合哆寶規則，那麼它的 incidence matrix 轉置後必須是一組 BIBD；再根據 Theorem1，如果要檢驗一組 design 是一組 BIBD，則這組 design 的 incidence matrix $M^T_{m\times p}$ 必須滿足 $M^T_{m\times p}M_{p\times m}=kJ_{m\times m}+(r-k)I_{m\times m}$ 以及 $u_{1\times m}M_{m\times p}=ku_{1\times p}$ 兩個條件。

關於 $u_{1\times m}M^T_{m\times p}=ku_{1\times p}$，因為旋轉法的設計中必有 $r=n$，所以無論 $M^T_{m\times p}$ 與 $M_{p\times m}$ 每列與每行 1 的個數都相同，故此條件不須多做檢驗。

寫下旋轉法的 incidence matrix $M_{p\times m}$

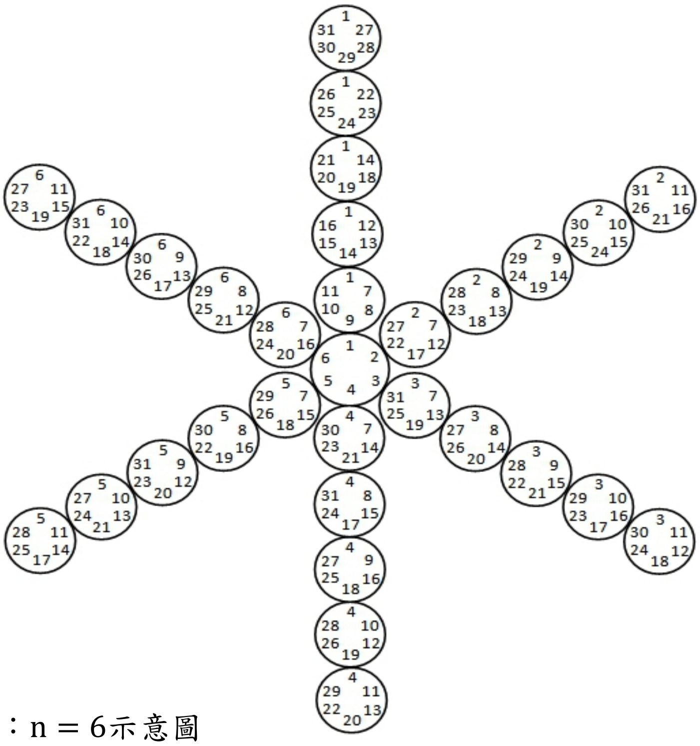
↓

用 Theorem1 檢驗 $M^T_{m\times p}$ 是 BIBD

↓

用 Theorem2 推出 $M_{p\times m}$ 是 BIBD

圖二十二：檢驗流程圖



圖二十三：n = 6示意圖

所以我們只要先寫下旋轉法產生的 incidence matrix $M_{p\times m}$，並轉置產生 $M^T_{m\times p}$，再計算得到 $M^T_{m\times p}M_{p\times m}=kJ_{m\times m}+(r-k)I_{m\times m}$ 就可以完成證明。

以下我們透過的 $n=6$ 例子來驗證旋轉法製造的牌組必有 $M^T_{m\times p}M_{p\times m}=kJ_{m\times m}+(r-k)I_{m\times m}$：首先把 $n=6$ 的示意圖轉成 incidence matrix $M_{31\times 31}$。

並且可以將 $M_{31\times 31}$ 與 $M^T_{31\times 31}$ 中的切成許多區塊予以命名：

$$J=\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\end{bmatrix}_{5\times 5}\quad I=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}_{5\times 5}\quad O=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}_{5\times 5}$$

$$A=\begin{bmatrix}0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\end{bmatrix}_{5\times 5}\quad A^2=\begin{bmatrix}0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\end{bmatrix}_{5\times 5}\quad A^3=\begin{bmatrix}0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\end{bmatrix}_{5\times 5}\quad A^4=\begin{bmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0\end{bmatrix}_{5\times 5}\quad A^5=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}_{5\times 5}=I$$

$$(A^1)^T=A^4\quad (A^2)^T=A^3\quad (A^3)^T=A^2\quad (A^4)^T=A^1$$

$$R_1=\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}_{5\times5}\quad R_2=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\1&1&1&1&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}_{5\times5}\quad R_3=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\1&1&1&1&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}_{5\times5}\quad R_4=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\1&1&1&1&1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}_{5\times5}\quad R_5=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\1&1&1&1&1\end{bmatrix}_{5\times5}$$

$$R_1^T=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\1&0&0&0&0\\1&0&0&0&0\\1&0&0&0&0\\1&0&0&0&0\end{bmatrix}_{5\times5}\quad R_2^T=\begin{bmatrix}0&1&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&1&0&0&0\end{bmatrix}_{5\times5}\quad R_3^T=\begin{bmatrix}0&0&1&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&1&0&0\end{bmatrix}_{5\times5}\quad R_4^T=\begin{bmatrix}0&0&0&1&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&1&0\end{bmatrix}_{5\times5}\quad R_5^T=\begin{bmatrix}0&0&0&0&1\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}_{5\times5}$$

除了 $M_{31\times31}$ ，可以再寫出轉置後的 $M^T_{31\times31}$ ：

$M_{31\times31}$

1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0
0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0
0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0
0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0

$M_{31\times31}$ 的區塊表示

$$\begin{array}{c|cccccc}
1 & 1\,1\,1\,1\,1 & 0\,0\,0\,0\,0 & 0\,0\,0\,0\,0 & 0\,0\,0\,0\,0 & 0\,0\,0\,0\,0 & 0\,0\,0\,0\,0\\ \hline
\begin{smallmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{smallmatrix} & O & R_1 & R_2 & R_3 & R_4 & R_5\\
\begin{smallmatrix}0\\0\\0\\0\\0\end{smallmatrix} & R_1^T & I & I & I & I & I\\
\begin{smallmatrix}0\\0\\0\\0\\0\end{smallmatrix} & R_2^T & I & A^1 & A^2 & A^3 & A^4\\
\begin{smallmatrix}0\\0\\0\\0\\0\end{smallmatrix} & R_3^T & I & A^2 & A^4 & A^1 & A^3\\
\begin{smallmatrix}0\\0\\0\\0\\0\end{smallmatrix} & R_4^T & I & A^3 & A^1 & A^4 & A^2\\
\begin{smallmatrix}0\\0\\0\\0\\0\end{smallmatrix} & R_5^T & I & A^4 & A^3 & A^2 & A^1
\end{array}$$

$M^T_{31\times31}$

1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0
0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0
0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1
0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0
0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0
0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0

$M^T_{31\times31}$ 的區塊表示

$$\begin{array}{c|cccccc}
1 & 1\,1\,1\,1\,1 & 0\,0\,0\,0\,0 & 0\,0\,0\,0\,0 & 0\,0\,0\,0\,0 & 0\,0\,0\,0\,0 & 0\,0\,0\,0\,0\\ \hline
\begin{smallmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{smallmatrix} & O & R_1 & R_2 & R_3 & R_4 & R_5\\
\begin{smallmatrix}0\\0\\0\\0\\0\end{smallmatrix} & R_1^T & I & I & I & I & I\\
\begin{smallmatrix}0\\0\\0\\0\\0\end{smallmatrix} & R_2^T & I & A^4 & A^3 & A^2 & A^1\\
\begin{smallmatrix}0\\0\\0\\0\\0\end{smallmatrix} & R_3^T & I & A^3 & A^1 & A^4 & A^2\\
\begin{smallmatrix}0\\0\\0\\0\\0\end{smallmatrix} & R_4^T & I & A^2 & A^4 & A^1 & A^3\\
\begin{smallmatrix}0\\0\\0\\0\\0\end{smallmatrix} & R_5^T & I & A^1 & A^2 & A^3 & A^4
\end{array}$$

利用區塊化之後乘法也可以隨之區塊化，因此可以整理出$M_{31\times31}^{T}\cdot M_{31\times31}$

$$
=\begin{bmatrix}
O & R_1 & R_2 & R_3 & R_4 & R_5\\
R_1^{T} & I & I & I & I & I\\
R_2^{T} & I & A^4 & A^3 & A^2 & A^1\\
R_3^{T} & I & A^3 & A^1 & A^4 & A^2\\
R_4^{T} & I & A^2 & A^4 & A^1 & A^3\\
R_5^{T} & I & A^1 & A^2 & A^3 & A^4
\end{bmatrix}
\times
\begin{bmatrix}
O & R_1 & R_2 & R_3 & R_4 & R_5\\
R_1^{T} & I & I & I & I & I\\
R_2^{T} & I & A^1 & A^2 & A^3 & A^4\\
R_3^{T} & I & A^2 & A^4 & A^1 & A^3\\
R_4^{T} & I & A^3 & A^1 & A^4 & A^2\\
R_5^{T} & I & A^4 & A^3 & A^2 & A^1
\end{bmatrix}
$$

$$
=\begin{bmatrix}
(J+5I)_{5\times5} & J_{5\times5} & J_{5\times5} & J_{5\times5} & J_{5\times5} & J_{5\times5}\\
J_{5\times5} & (J+5I)_{5\times5} & J_{5\times5} & J_{5\times5} & J_{5\times5} & J_{5\times5}\\
J_{5\times5} & J_{5\times5} & (J+5I)_{5\times5} & J_{5\times5} & J_{5\times5} & J_{5\times5}\\
J_{5\times5} & J_{5\times5} & J_{5\times5} & (J+5I)_{5\times5} & J_{5\times5} & J_{5\times5}\\
J_{5\times5} & J_{5\times5} & J_{5\times5} & J_{5\times5} & (J+5I)_{5\times5} & J_{5\times5}\\
J_{5\times5} & J_{5\times5} & J_{5\times5} & J_{5\times5} & J_{5\times5} & (J+5I)_{5\times5}
\end{bmatrix}
=1\cdot J_{31\times31}+(6-1)I_{31\times31}
$$

是故 $k=1$ 、 $r=6$
(dual design 後的 $n=6$ ，即為 BIBD 時的 $r=6$)

根據 Theorem1，$M_{31\times31}^{T}$ 會是一組 BIBD，再根據 Theorem2 得到 $M_{31\times31}$ 滿足哆寶條件。

在證明的過程中發現，$M_{31\times31}$ 與 $M_{31\times31}^{T}$ 的右下方是 A 矩陣的次方循環，而且

$$\min\left\{k\in\mathbb{N}\middle|\left(A^1\right)^k=I\right\}=\min\left\{k\in\mathbb{N}\middle|\left(A^2\right)^k=I\right\}=\min\left\{k\in\mathbb{N}\middle|\left(A^3\right)^k=I\right\}=\min\left\{k\in\mathbb{N}\middle|\left(A^4\right)^k=I\right\}=5$$ 、

$A^5=I$ ，這個 5 即為將 $n=6$ 減去 1 後剩下 5，每個小區塊都是 5×5 的矩陣，且皆會 5 次方一個循環。

對於任意的 n 而言，若 $n-1$ 是質數的話，則有

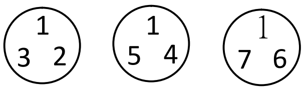
$\min\left\{k\in\mathbb{N}\middle|\left(A^1\right)^k=I\right\}=\ldots=\min\left\{k\in\mathbb{N}\middle|\left(A^{n-2}\right)^k=I\right\}$ 、 $A^{n-1}=I$ ，便能採用上述的小區塊想法，設計出哆寶牌組，也就是說我們驗證了旋轉法是可以對於任何 $n-1$ 是質數的牌組成立的。因此如果想要用旋轉法設計出一組 $n-1$ 是質數的哆寶牌組，就不需要利用環狀圖填數字，而是直接寫出 incidence matrix，各個區塊的結構都可以直接擴充，右下角的區塊則利用 A 的次方循環擴充。

對於$n-1$不是質數的牌組，$\min\left\{k\in\mathbb{N}\middle|\left(A^{1}\right)^{k}=I\right\},\ldots,\min\left\{k\in\mathbb{N}\middle|\left(A^{n-2}\right)^{k}=I\right\}$不會相同，此時 incidence matrix 的右下角無法形成一些具有循環的小區塊，於是$M_{m\times p}^{T}M_{p\times m}$就無法形成$kJ_{m\times m}+(r-k)I_{m\times m}$的形式，因此$M_{m\times p}^{T}$不是 BIBD，使得$M_{p\times m}$不能滿足哆寶規則，即旋轉法會製作失敗，產生一套牌組中出現兩張以上完全相同的牌。

3.矩陣乘法與哆寶的關係

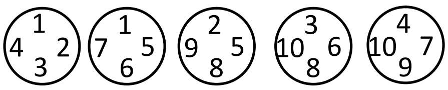
除了旋轉法以外，我們也嘗試檢查了無限法、限制法、錯置法，以下舉出一些例子：

(1)無限法的牌組例：(無限法的$M_{m\times p}^{T}$不是 BIBD)



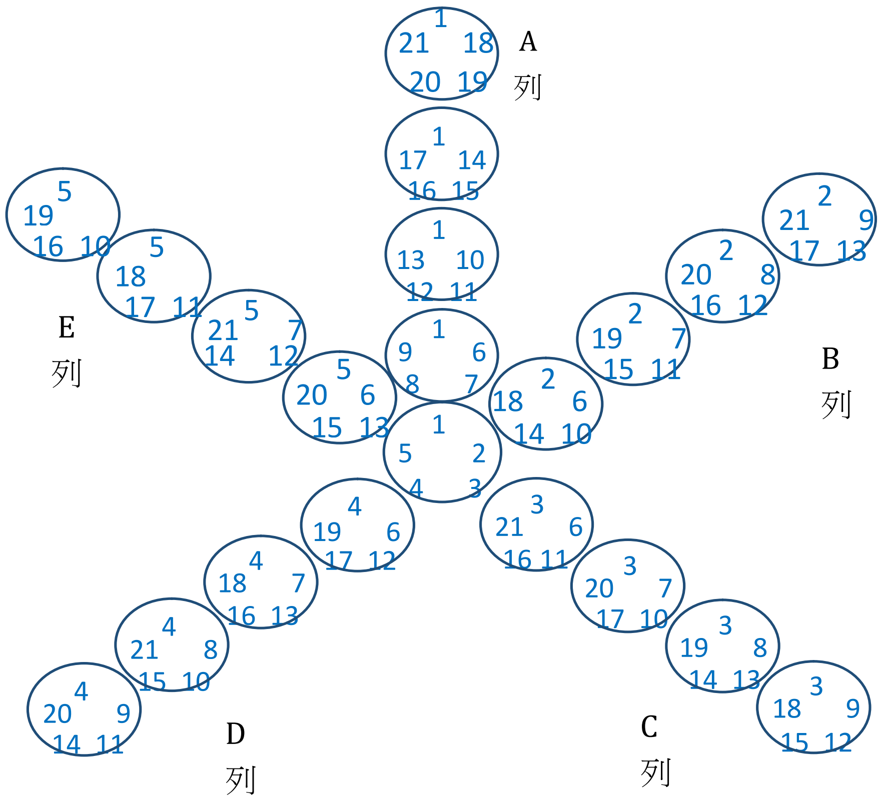
$$M_{3\times7}^{T}=\begin{bmatrix}1&1&1&0&0&0&0\\1&0&0&1&1&0&0\\1&0&0&0&0&1&1\end{bmatrix}_{3\times7}\quad M_{7\times3}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&0&0\\1&0&0\\0&1&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&1\end{bmatrix}_{7\times3}\quad M_{3\times7}^{T}\times M_{7\times3}=\begin{bmatrix}3&1&1\\1&3&1\\1&1&3\end{bmatrix}_{3\times3}$$

(2)限制法的牌組例：



$$M_{5\times10}^{T}=\begin{bmatrix}1&1&1&1&0&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&1&1&1&0&0&0\\0&1&0&0&1&0&0&1&1&0\\0&0&1&0&0&1&0&1&0&1\\0&0&0&1&0&0&1&0&1&1\end{bmatrix}_{5\times10}\quad M_{10\times5}=\begin{bmatrix}1&1&0&0&0\\1&0&1&0&0\\1&0&0&1&0\\1&0&0&0&1\\0&1&1&0&0\\0&1&0&1&0\\0&1&0&0&1\\0&0&1&1&0\\0&0&1&0&1\\0&0&0&1&1\end{bmatrix}_{10\times5}\quad M_{5\times10}^{T}\times M_{10\times5}=\begin{bmatrix}4&1&1&1&1\\1&4&1&1&1\\1&1&4&1&1\\1&1&1&4&1\\1&1&1&1&4\end{bmatrix}_{5\times5}$$

(3)錯置法的牌組例：



圖二十四：n = 5示意圖

$$M_{21\times 21}^{T}=\begin{bmatrix}
1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1\\
0&1&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0\\
0&1&0&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0\\
0&1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&1&0\\
0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&1\\
0&0&1&0&0&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1\\
0&0&1&0&0&0&1&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&0\\
0&0&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&1&0&0\\
0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&0&1&0&0&1&0&0&1&0&0&0\\
0&0&0&1&0&1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&1&0&0\\
0&0&0&1&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&0&1&0&1&0&0&0\\
0&0&0&1&0&0&0&1&0&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1\\
0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&1&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&1&0&1&0&0&0&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&1\\
0&0&0&0&1&0&0&1&0&0&1&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0\\
0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&0&0&0&0&0&1&0&0&1&0&0
\end{bmatrix}_{21\times 21}
\quad
M_{21\times 21}=\begin{bmatrix}
1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1\\
0&1&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0\\
0&1&0&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0\\
0&1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&1&0\\
0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&1\\
0&0&1&0&0&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1\\
0&0&1&0&0&0&1&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&0\\
0&0&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&1&0&0\\
0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&0&1&0&0&1&0&0&1&0&0&0\\
0&0&0&1&0&1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&1&0&0\\
0&0&0&1&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&0&1&0&1&0&0&0\\
0&0&0&1&0&0&0&1&0&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1\\
0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&1&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&1&0&1&0&0&0&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&1\\
0&0&0&0&1&0&0&1&0&0&1&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0\\
0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&0&0&0&0&0&1&0&0&1&0&0
\end{bmatrix}_{21\times 21}$$

同樣具有 $M_{21\times 21}^{T}\times M_{21\times 21}=1\cdot J_{21\times 21}+(5-1)I_{21\times 21}$

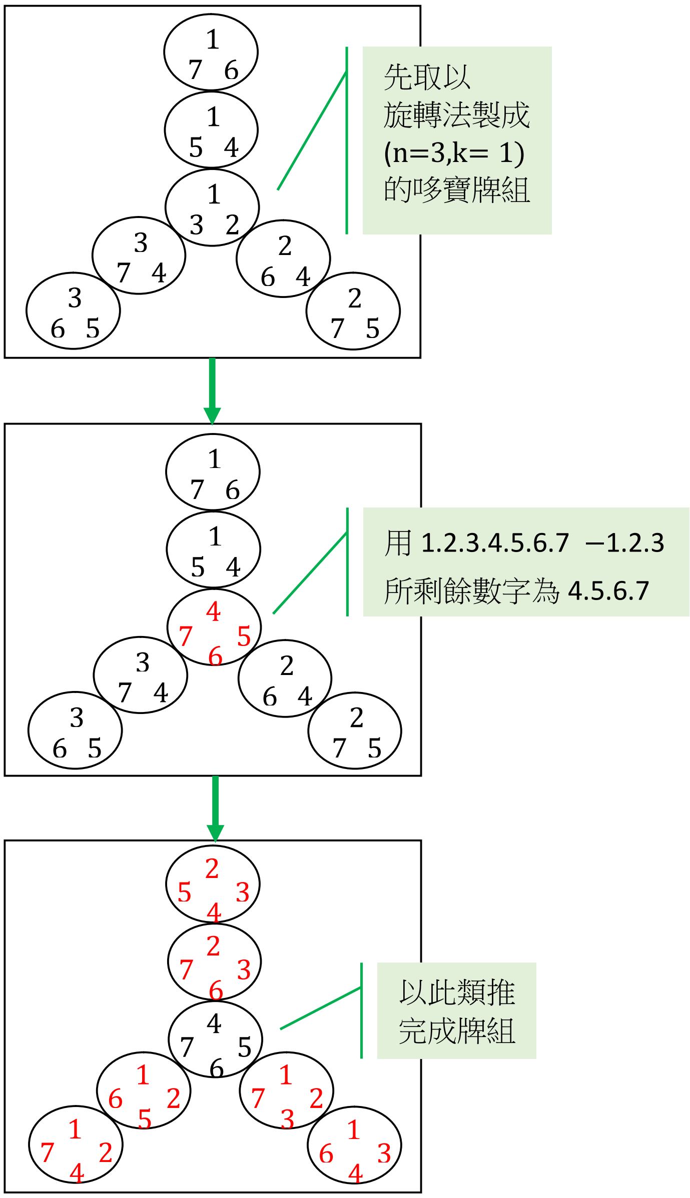
我們從牌組轉置後與轉置前相乘的行為發現：

<1>乘完後的矩陣，主對角線上的每個位置，$M_{m\times p}^{T}M_{p\times m}$ 在做的就是去比對「每張牌與本身有多少個圖案相同」，於是必定為 n；

<2>乘完後的矩陣，主對角線以外的每個位置，$M_{m\times p}^{T}M_{p\times m}$ 在做的就是去比對「每張牌與本身以外的牌，各有多少個圖案相同」，於是必定為 1。

（四）補集法

1.補集法的操作與變數的關係



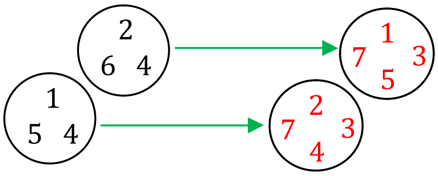
在將哆寶牌組轉換成矩陣後，我們有了一個新的想法：既然矩陣上只有 1 和 0(即特定圖案是否出現)，我們可以將 incidence matrix M 的 0、1 互換，便能得到一個新的矩陣 M'。以下面矩陣為例，可以觀察到任兩張牌都會有 2 個相同的圖案。我們將這樣的牌組設計法稱為「補集法」，我們可以說補集法是建立在已有的牌組設計上，多衍伸出的一種對偶設計。

$$M=\begin{bmatrix} 1&1&1&0&0&0&0\\ 1&0&0&1&1&0&0\\ 1&0&0&0&0&1&1\\ 0&1&0&1&0&1&0\\ 0&1&0&0&1&0&1\\ 0&0&1&1&0&0&1\\ 0&0&1&0&1&1&0 \end{bmatrix} \longrightarrow M'=\begin{bmatrix} 0&0&0&1&1&1&1\\ 0&1&1&0&0&1&1\\ 0&1&1&1&1&0&0\\ 1&0&1&0&1&0&1\\ 1&0&1&1&0&1&0\\ 1&1&0&0&1&1&0\\ 1&1&0&1&0&0&1 \end{bmatrix}$$

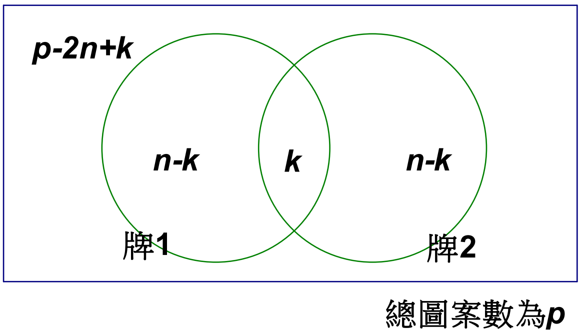
設原本的牌組設計法 M 中，變數為總牌數 m 張，每張牌上都有 n 個相異圖案，整副遊戲共有 p 種相異圖案，任 2 張牌恰有 k 種圖案相同；

設補集法得到的 M' 中，變數為總牌數 m' 張，每張牌上都有 n' 個相異圖案，整副遊戲共有 p' 種相異圖案，任 2 張牌恰有 k' 種圖案相同。

每張新牌都只是取舊牌上圖案的補集，所以 $m=m'$、 $p=p'$，新牌上的圖案數則為 $n'=p-n$ 。關於相同的圖案數，在上述的例子中則由 $k=1$ 變成了 $k'=2$ 。我們可以從新舊牌的比較來觀察，先從新牌組任取兩張牌，然後跟補集前的那兩張舊牌做比較，會發現：



兩張舊牌合計共出現 $n+n-k$(重疊) $=2n-k$ 個圖案，也就是有 $p-(2n-k)=p-2n+k$ 個圖案都沒有出現過，這時如果兩張舊牌都取補集合造出新牌，那麼這 $p-2n+k$ 個圖案就會同時出現新牌上，因此 $p'=p-2n+k$ 。



因此我們可以得到任 2 張牌時有相同圖案時的變數關係：

牌組 \ 變數	總張數	每張圖案數	總圖案數	相同圖案數
舊牌組	m	n	p	k
補集法新牌組	$m'=m$	$n'=p-n$	$p'=p$	$p'=p-2n+k$

而其實 0、1 互換得到的 incidence matrix $M'=J-M$ ，而且 $J^T=J$ ，因此：

$$
\begin{aligned}
&(M')^T\times M' \\
&=(J-M)^T(J-M) \\
&=(J-M^T)(J-M) \\
&=J^2-JM-M^TJ+M^TM \\
&=pJ-nJ-nJ+((n-k)I+kJ) \\
&=(n-k)I+(p-2n+k)J
\end{aligned}
$$

故可得到 $(M')^T\times M'$ 的形式應為一主對角線為 $p-n$ (每張牌上的圖案數)，其餘皆為 $p-2n+k$ (任兩張牌上的相同圖案數)的矩陣。

$$
M^T\times M=\begin{pmatrix} p-n & p-2n+k & \cdots & p-2n+k \\ p-2n+k & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & p-2n+k \\ p-2n+k & \cdots & p-2n+k & p-n \end{pmatrix}
$$

2.補集法對錯置法、旋轉法、限制法的推廣

有了研究目的一中的一些設計法，我們再針對這些既有的牌組使用補集法，造出新的牌組。

(1)由於無限法的總圖案數 p 還可以再因張數任意添加而變動，故先不予討論。

(2)在限制法中，若每張牌上都有 n 個圖案，任 2 張牌均有 1 個圖案相同，利用補集法再造出新牌組的相同圖案數會如何呢？

首先在研究目的一中我們得知，限制法的總圖案數 $p=\dfrac{n^2+n+1}{2}$，並且 $k=1$。補集法所得的新牌組每張牌上的圖案數 $n'=p-n$、相同圖案數 $k'=p-2n+k$，是故將其代入會得到：

$$n'=p-n=\frac{n(n+1)}{2}-n=\frac{n(n-1)}{2}$$

$$k'=p-2n+k=\frac{n(n+1)}{2}-2n+1=\frac{n^2-3n+2}{2}$$

但由於 $n(n-3)$ 必為偶數，所以 $n(n-3)+2$ 也必為偶數，代表大於等於 3 的 n 任意代入時，k' 都會有解，故我們能得到限制法可製作的牌組為：

限制法每張圖案數 n	3	4	5	6	7	8	⋯	n
限制法相同圖案數 k	1	1	1	1	1	1	⋯	1
補集法每張圖案數 n'	3	6	10	15	21	28		$\dfrac{n(n-1)}{2}$
補集法相同圖案數 k'	2	6	12	20	30	42	⋯	$\dfrac{n^2-3n+2}{2}$

(3)在錯置法中，總圖案數 $p=n^2-n+1$，並且 $k=1$。補集法所得的新牌組每張牌上的圖案數 $n'=p-n$、相同圖案數 $k'=p-2n+k$，是故將其代入會得到：

$$n'=p-n=\left(n^2-n+1\right)-n=\left(n-1\right)^2$$

$$k'=p-2n+k=\left(n^2-n+1\right)-2n+(1)=n^2-3n+2$$

故我們能得到錯置法可製作的牌組為：

錯置法每張圖案數 n	3	4	5	6	7	8	⋯	n
錯置法相同圖案數 k	1	1	1	1	1	1	⋯	1
補集法每張圖案數 n'	4	9	16	25	36	49		$\left(n-1\right)^2$
補集法相同圖案數 k'	2	6	12	20	30	42	⋯	n^2-3n+2

(4)進一步地，旋轉法的總圖案數一樣是 $p=n^2-n+1$，並且 $k=1$。補集法所得的新牌組一樣是每張牌上的圖案數 $n'=p-n$、相同圖案數 $k'=p-2n+k$。但是在造牌及擴充時需要 $n-1$ 是質數，此時的限制變得更多，不妨設 $n-1=A$ (其中 A 是一個質數)，將 $n=A+1$ 代回後得到

$$n' = (n-1)^2 = A^2$$

$$k' = n^2 - 3n + 2 = (A+1)^2 - 3(A+1) + 2 = A(A-1)$$

故我們能得到旋轉法可製作的牌組為：

質數 $n-1$	2	3	5	7	11	13	$\cdots$	A
旋轉法每張圖案數 n	3	4	6	8(哆寶)	12	14	$\cdots$	$A+1$
旋轉法相同圖案數 k	1	1	1	1	1	1	$\cdots$	1
補集法每張圖案數 n'	4	9	25	49	121	169	$\cdots$	A^2
補集法相同圖案數 k'	2	6	20	42	110	156	$\cdots$	$A(A-1)$

柒、研究結論

一、找出哆寶牌組設計法(任兩張牌有一個圖案相同)

牌組設計法（t=2，k=1）

（一）無限法： $p = m(n-1)+1$

由此法所製作出來的總牌數 m 沒有上限(即不受 n 限制)，但因任兩張牌的對應圖案皆相同，其餘圖案皆不會成為共有圖案，遊戲實用性會大幅度下降。

（二）限制法：$m = n+1$、$p = \frac{n(n+1)}{2}$

由此法製作出來的牌組不會有無限法的缺陷，但隨著 n 的增加，總圖案數（p）增加幅度與總牌數（m）的差會急遽拉大，以致於總圖案數（p）使用過多、總牌數（m）過少，使遊戲實用性大幅下降。

（三）旋轉法（原版哆寶），$n-1$ 為質數：$p = m = n(n-1)+1$

此法所製作出來的牌組是所有方法中最適合遊戲的，因為在 n 相同時相較於無限法牌組更能節省 p、m ，較限制法牌組來得多，是最節省 p 且可製造最多 m 的方法。

（四）錯置法，$n-1$ 為合數：$p = m = n(n-1)+1$

此法等於補足旋轉法的空缺，且具有跟旋轉法相同的特性，但其 n 的範圍正好可以與旋轉法互補，使用此法足以修正所有旋轉法無法完成的牌組。

比較所有方法其及結構差異

我們比較上述的方法並調整圖案，發現以不同創作方式會製造出不同的牌組。

首先我們將無限法排除，因為此牌組每張牌皆有第一個圖案，這是其他牌組都沒有的特性，由此可知無限法完全不同於其他方法。

旋轉法和錯置法是因為 n 的限制造成有二法，將二法合併即 n 無質、合數限制，故比較時將二法合併比較。

旋轉法+錯置法 vs 限制法

先從 p 的大小相同來求 n，求得 n 為 2 或 1，不符合旋轉法製作條件，n > 2 時兩者的 m 及 p 完全不同，且在 n 相同時限制法的 m 不可增加到與旋轉法相同(限制法 m 最大值為 $n+1$)，故這兩種牌組不相同。

二、改變設計規則、探討變數之間的關係

（一）改變設計規則:任兩張牌有兩個以上的圖案重複（$t=2$，$k\geq 2$）

我們發現$n-k$為質數時，可類推旋轉法的方式製作牌組，但$n-k$為合數時，則因圖案旋轉次序問題無法以錯置法調整出完整牌組。

（二）探討變數之間的關係:探討 m、p、n 的關係

以 p、n 兩變數來討論 m 時，發現其成牌組、不完整牌組、不可成牌組的出現情況有關聯。這個關聯會依照特定的次序出現（即上述研究中的遞增增加間隔），且在規定條件下作用，可以決定整個統計的未來發展趨勢。

（三）改變設計規則:多張牌之間同時只有一個圖案重複（$t\geq 3$）

為符合此特殊規則我們使用多邊形製圖法，並以排列組合推導出其關係式，最後得證關系式為 $p=C_t^m$ 且 $n=C_{t-1}^{m-1}$ 且 $k=C_{t-2}^{m-2}$。

三、建立區組設計與哆寶的連結，並據此擴充牌組設計法

（一）（二）引入區組設計理論後，可以將牌組的設計矩陣化，在區塊化 incidence matrix 後，利用 Theorem2，可以建立一套檢驗是否滿足哆寶牌組規則的方法，並且得到旋轉法對 $n-1$ 是質數時的牌組推廣，獲得一般化的製牌方式。

（三）在觀察 $M_{m\times p}^T M_{p\times m}=kJ_{m\times m}+(r-k)I_{m\times m}$ 中發現，incidence matrix 的轉置矩陣，與 incidence matrix 相乘，在做的就是去比對「每張牌與本身，或本身以外的牌，各有多少個圖案相同」。

（四）將 incidence matrix M 的 0、1 互換，便能得到一個新的矩陣 M'。我們將這樣的牌組設計法稱為「補集法」，補集法得到的新牌組與舊牌組變數關係為：

牌組 \ 變數	總張數	每張圖案數	總圖案數	相同圖案數
舊牌組	m	n	p	k
補集法新牌組	$m'=m$	$n'=p-n$	$p'=p$	$p'=p-2n+k$

同時有了研究目的一中的一些設計法，我們還能再對這些既有的牌組使用補集法，造出新的牌組。

捌、參考文獻

1.黃柏瑜等：金門安瀾國小(民 103)。神奇桌遊—哆寶。金門地區第五十四屆科展國小組數學科作品。

2.Stinson, Douglas R(2004)。Combinatorial Designs Constructions and Analysis。Springer。

【評語】050417

本作品從一個遊戲的問題出發，並探討了一些簡單的情況。為了探討更一般的情況，作者們利用實驗設計的結果，Balanced Incomlete Block design 及 dual design，去得到一些有趣的結論，為一有趣的數學科展作品。