中華民國第56屆中小學科學展覽會
作品說明書

高級中等學校組　數學科

佳作

050415

任意凸四邊形上或形內一點到四頂點距離和的最大值

學校名稱：國立竹南高級中學

作者：	指導老師：
高二 陳冠綸 高二 魏資碩	李政豐

關鍵詞：任意四邊形、最大值、橢圓法

摘要
我們嘗試以初等數學綜合幾何的方法,以 Geogebra 為輔助工具,參考台灣師大陳昭地教授最近發表在科學教育月刊的文章,運用橢圓上一點到兩焦點距離和為定長的性質,找到任意凸四邊形邊上或形內一點到四頂點距離和最大值的方法,並提出證明.

壹、研究動機
很多同學都知道任意凸四邊形上或形內一點到四頂點距離和的最小值是兩條對角線長的和,發生最小值的點就是兩對角線的交點,這只要用到三角不等式,就能夠輕易的證明出來,但是任意凸四邊形上或形內一點到四頂點距離和的最大值,卻在網路上找不到基礎的證法.這是一個有趣的問題,也是一個眾所周知且通俗的問題,絕大部分的學生對這樣的問題都不陌生,在資訊科技發達的今天,很容易用動態模擬找出它的答案.但是要如何證明它,卻不是一件簡單的工作,何況很少相關的文獻可以參考.老師在班級數學課有教 Geogebra,於是引起同學學習研究的興趣,經由老師介紹陳昭地教授的文章當參考,然後各自分頭努力作動態模擬,最後得到一個可以讓同學信服的成果.

貳、研究目的
這是一個通俗的問題,人人皆能認識問題的要求是什麼,但是證明的方法卻不是那麼簡單,基於研究數學的立場,愈是困難的問題,愈是我們需要挑戰的目標:找尋新的手法與技巧是我們努力的方向(否則早被人證明出來),綜合幾何仍是重要的工具,橢圓法是一個新的解析幾何技巧,求證過程的演算法則也相當重要.這些都是在求證過程中,經由半年慢慢累積的經驗,絕非一蹴可及.對我們幾位學生而言,這是一個研究數學的重要歷程.

參、研究設備及器材
動態模擬軟體 Geogebra,班級電腦,自己的筆記型電腦.

肆、研究過程或方法
同學們研讀三篇老師提供的文章：(如參考文獻)
「三角形三個極小值的探討」,「三角形的三個最大值定理的迴響」,「等腰梯形與平行四邊形的邊上或形內一點到四頂點距離和的最大值」.
其中有兩篇文章「三角形的三個最大值定理的迴響」,以及「等腰梯形與平行四邊形的邊上或形內一點到四頂點距離和的最大值」,已經證明最大值的存在性,這個最大值也就是所謂到四頂點距離和的最小上界(least upper bound).且在這些圖形中 P 點到各頂點距離和有最大值時,P 點的位置都發生在這些圖形中的某些頂點.
其中主要用到的手法有兩種:平行線法與橢圓法.其中有用到橢圓上一點到兩焦點的距離和為定長之性質,但是橢圓的性質,學生要到高二下才會學到,如果我們想要進一步推廣到不等腰梯形,理論上能沿用等腰梯形的方法加以改進,只是困難度或許較高.
我們希望能先以初等數學的技巧來證明,讓中學生也能了解.於是再度引用綜合幾何的改進技術,得到平行四邊形、梯形與任意三角形的情形,不需要用到橢圓法,也可用更為簡單的初等數學方法,證出它的結論.
這個綜合幾何的技巧,用到與橢圓法相似的性質,但不需要出現橢圓圖形,就可以利用綜合幾何

將它證明出來,包含不等腰梯形在內都可以.

我們先證明了四個引理當作工具,再證明了下列五個主要定理：

(1) ΔABC中,已知$\overline{AB} \geq \overline{BC} \geq \overline{AC}$, P 是三角形內部一點,則 P 到三頂點的距離和的最小上界為: 兩較長邊之和$\overline{AB} + \overline{BC}$. (如圖(7))

(2) 平行四邊形 $ABCD$, $\angle \mathrm{A} < 90^\circ$,P 為形內任一點 ,則 P 到四頂點的距離和的最小上界是:長對角線加半周長的和. (如圖(8))

(3) 梯形 $ABCD$,下底大於上底$\overline{AB} > \overline{CD}$,左腰不小於右腰$\overline{AD} \geq \overline{BC}$,其內部一點 P 到四頂點的距離和的最小上界為:(大底邊+長對角線+長腰)三者的和.

(如圖(9)(10)(11))

(4)任意凸四邊形 ABCD，P 是凸四邊形 ABCD 內部或邊界上任一點，以 C,D 為焦點且過 P 的橢圓稱為 CDP 橢圓，以 A,B 為焦點且過 P 的橢圓稱為 ABP 橢圓，當 P 點在凸四邊形 ABCD 內部或邊界上移動時，則 CDP 橢圓與 ABP 橢圓(均為黑色圓)，兩橢圓與$\overline{\mathrm{AD}}$、$\overline{\mathrm{BC}}$兩邊至少有一邊是交在兩個點。如圖(15)(16)(17)

(5)任意凸四邊形 ABCD，四邊長已知，對角線$\overline{\mathrm{AC}}$,$\overline{\mathrm{BD}}$也已知，設 P 是凸四邊形 ABCD 內部或邊界上任一點，令 DIA 代表頂點 A 所連接的三個線段長的和(含兩個邊及一條對角線)，當 P 點在凸四邊形 ABCD 內部或邊界上移動時，則 P 到四頂點的最大距離和$\overline{\mathrm{PA}} + \overline{\mathrm{PB}} + \overline{\mathrm{PC}} + \overline{\mathrm{PD}}$為 DIA,DIB,DIC,DID 四個中的最大值.

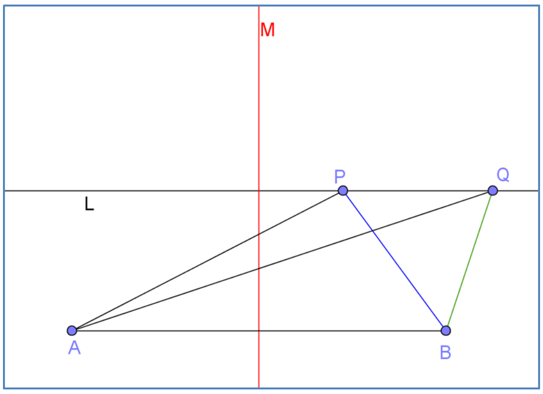
參考圖(24)(25)(26)

這都是中學生能看懂的方法,也一步一步的逼近了我們想要達成的目標:任意凸四邊形內部或邊上一點到四頂點距離和的最大值要如何求得?要如何證明?

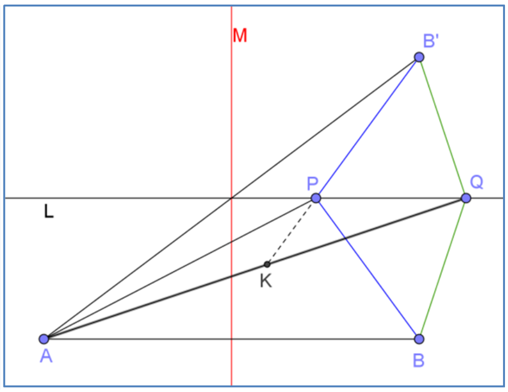
相信這是很基本且老少咸宜的有趣情境,中學生及許多國高中數學老師都曾經想到過,但卻很難下手的問題.我們經過了一段時間的努力,以 Geogebra 為工具,探索了各種不同的四邊形,逐步觀察、實驗、作圖與計算,似乎得到了一點線索,也掌握了初步探究的方向,而有一些具體的成果.我們一直努力的方向就是利用基礎數學的手法搭配橢圓法,以站在國高中學生觀點的角度,將這個網路上似乎還找不到基本證法的問題,能自然的呈現在學生的面前,這就是我們努力的目標.

在證明「平行四邊形、梯形與三角形內一點到四頂點距離和的最小上界」之前,我們打算先證明四個引理當作輔助工具.其中第一個引理,是以初等綜合幾何來證明.

引理(1) 如圖(1)所示,直線 M 是線段$\overline{AB}$的中垂線,直線 L 平行於$\overline{AB}$. 如果點 P,Q 為 L 上的兩點,且 P 與 M 的距離小於 Q 與 M 的距離,則$\overline{QA} + \overline{QB} > \overline{PA} + \overline{PB}$.



圖(1)



圖(2)

證明:

1.如果點 P,Q 為 L 上且在 M 同側的兩點

如圖(2)所示,作點 B 關於 L 直線的對稱點 B’ ,連$\overline{PB'}$,$\overline{QB'}$,$\overline{AB'}$則

$\overline{QB} = \overline{QB'}$,$\overline{PB} = \overline{PB'}$, 連直線$\overleftrightarrow{B'P}$交$\overline{AQ}$於 K , 再連接$\overline{PK}$, 則

$$\overline{QA} + \overline{QB} = \overline{AK} + \overline{KQ} + \overline{QB'} > \overline{AK} + \overline{B'K} = \overline{AK} + \overline{PK} + \overline{PB'} > \overline{PA} + \overline{PB}$$

(用兩次三角不等式)

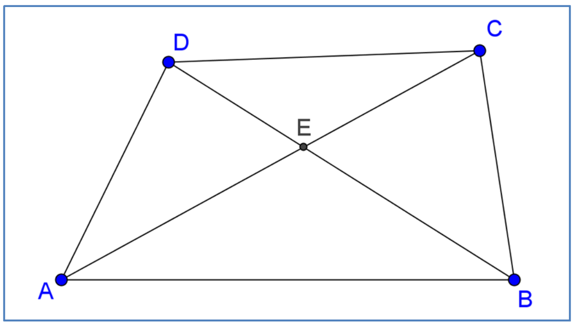
2.如果點 P,Q 為 L 上且在 M 異側的兩點,可以找 P 關於中垂線 M 的對稱點 P’ ,

使得 P’ ,Q 為 L 上且在 M 同側,則$\overline{P'A} + \overline{P'B} = \overline{PA} + \overline{PB}$,同理可證.

於是不論 P,Q 是在 M 的同側或異側,只要 P 與 M 的距離小於 Q 與 M 的距離,且 P,Q 同在$\overline{AB}$的平行線 L 上,則$\overline{QA} + \overline{QB} > \overline{PA} + \overline{PB}$恆成立.

引理(2) 任意凸四邊形 ABCD.其對角線長的和大於任意兩對邊長的和,亦即:

$\overline{AC} + \overline{BD} > \overline{AD} + \overline{BC}$且$\overline{AC} + \overline{BD} > \overline{AB} + \overline{CD}$.



圖(3)

證明:如圖(3)所示

$\overline{AC}+\overline{BD} = \overline{AE}+\overline{EC}+\overline{BE}+\overline{ED} = \left(\overline{AE}+\overline{BE}\right)+\left(\overline{EC}+\overline{ED}\right) > \overline{AB}+\overline{CD}$

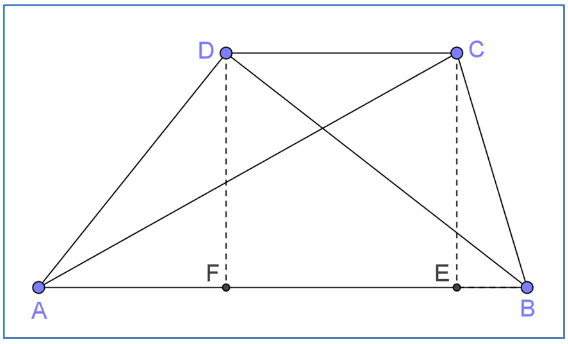
$\overline{AC}+\overline{BD} > \overline{AD}+\overline{BC}$同理可證

引理(3)如圖(4)、(5)所示,梯形 ABCD.下底$\overline{AB}>$上底$\overline{CD}$, 左腰$\overline{AD}>$右腰$\overline{BC}$,
則對角線$\overline{AC} > \overline{BD}$

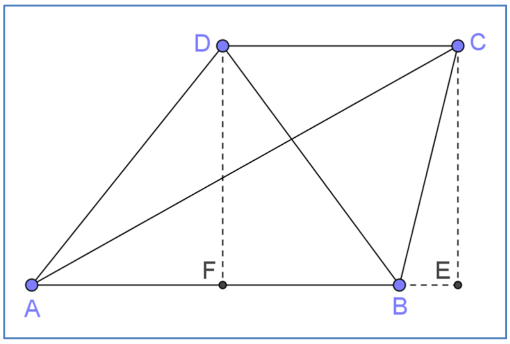
證明:由 D,C 分別向$\overleftrightarrow{AB}$做垂線,垂足為 F,E 則滿足上述條件的梯形有兩種,

(1) $\angle B < 90^{\circ}$, 如圖(4)所示

(2) $\angle B \geq 90^{\circ}$, 如圖(5)所示



圖(4)



圖(5)

(1)當 $\angle B < 90^{\circ}$, 如圖(4) $\overline{AC}^2 = \overline{AE}^2+\overline{CE}^2 = (\overline{AF}+\overline{FE})^2+\overline{CE}^2$

$\overline{BD}^2 = \overline{FB}^2+\overline{DF}^2 = (\overline{BE}+\overline{FE})^2+\overline{DF}^2$

但是$\overline{CE} = \overline{DF}$

在直角三角形ΔAFD與ΔBEC中,斜邊$\overline{AD} > \overline{BC}$,高相同,故$\overline{AF} > \overline{BE}$

因此$\overline{AC}^2 > \overline{BD}^2$, 亦即$\overline{AC} > \overline{BD}$

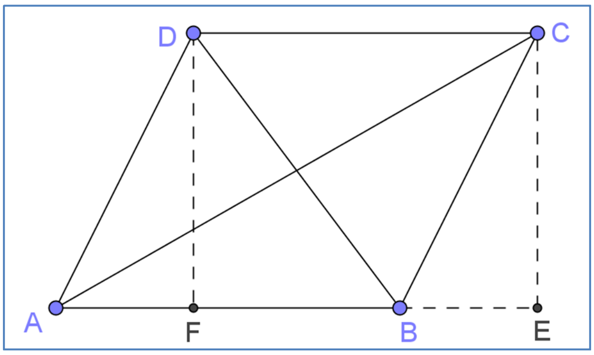
(2) $\angle B \geq 90^{\circ}$, 如圖(5) $\overline{AC}^2 = \overline{AE}^2+\overline{CE}^2 = (\overline{AF}+\overline{FB}+\overline{BE})^2+\overline{CE}^2$

$\overline{BD}^2 = \overline{FB}^2+\overline{DF}^2$

但是$\overline{CE} = \overline{DF}$,且當$\angle B = 90^{\circ}$時$\overline{BE}$=0

因此$\overline{AC}^2 > \overline{BD}^2$, 亦即$\overline{AC} > \overline{BD}$

引理(4)如圖(6)所示, 平行四邊形 ABCD.$\angle A < 90^{\circ}$,則對角線$\overline{AC} > \overline{BD}$



圖(6)

證明: 由 D,C 分別向$\overleftrightarrow{AB}$做垂足為 F,E

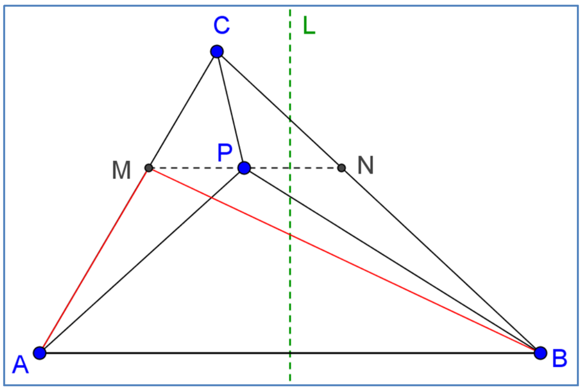
$$\overline{AC}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{CE}^2 = (\overline{AF} + \overline{FB} + \overline{BE})^2 + \overline{CE}^2$$

$$\overline{BD}^2 = \overline{FB}^2 + \overline{DF}^2$$

但是$\overline{CE} = \overline{DF}$, $\overline{AE} > \overline{FB}$

因此$\overline{AC}^2 > \overline{BD}^2$, 亦即$\overline{AC} > \overline{BD}$

定理(1)ΔABC中,已知$\overline{AB} \geq \overline{BC} \geq \overline{AC}$, P 是三角形內部一點,則
$\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} < \overline{AB} + \overline{BC}$ (即兩較長邊之和)



圖(7)

證明:如圖(7)所示,

作線段$\overline{AB}$的中垂線 L

並過 P 作$\overline{AB}$的平行線交$\overline{AC}$於 M,交$\overline{BC}$於 N

已知$\overline{BC} \geq \overline{AC}$,在線段$\overline{MN}$上的所有點中,$M$點是距離$\overline{AB}$中垂線 L 最遠的點

由引理(1)$\overline{PA} + \overline{PB} < \overline{MA} + \overline{MB}$.........⑨

ΔCMN中,P 是$\overline{MN}$上一點,由平行線截等比率線段定理$\overline{MC} \leq \overline{NC}$,

故$\overline{PC} < \overline{NC}$.........⑩

由⑨+⑩$\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} < \overline{MA} + \overline{MB} + \overline{NC}$

由平行線截等比率線段定理$\overline{MA} \leq \overline{NB}$

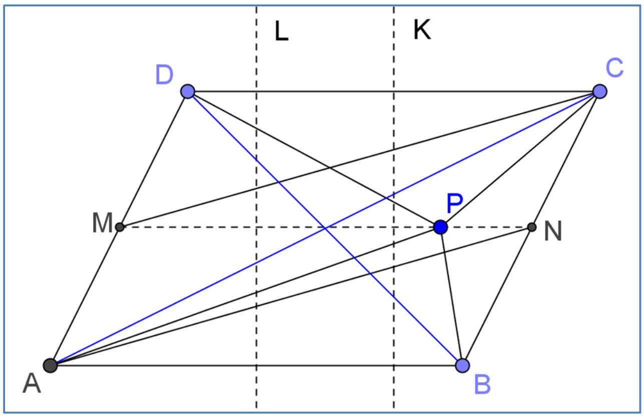
ΔABC中,$\overline{AB} \geq \overline{BC} \geq \overline{AC}$, M是$\overline{AC}$上一點,則$\overline{MB} < \overline{AB}$

故$\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} < \overline{MA} + \overline{MB} + \overline{NC} < \overline{NB} + \overline{AB} + \overline{NC} = \overline{AB} + \overline{BC}$得證.

且當 P 到三頂點的距離和$\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}$為最小上界時,P 在 B 點.

定理(2) 平行四邊形 ABCD,$\angle A < 90^{\circ}$,P 為形內任一點 ,則 P 到四頂點的距離和 $\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}+\overline{PD}$的最小上界是$\overline{AB}+\overline{AC}+\overline{AD}$,亦即為長對角線加半周長的和.

證明: 由引理(4),$\angle A < 90^{\circ}$,可知對角線$\overline{AC}>\overline{BD}$



圖(8)

如圖(8)所示,直線 L 是$\overline{AB}$線段的中垂線,直線 K 是$\overline{CD}$線段的中垂線,過 P 作$\overline{AB}$的平行線交$\overline{AD}$於 M, 交$\overline{BC}$於 N.

在線段$\overline{MN}$中 N 是距離$\overline{AB}$線段的中垂線 L 最遠的點,故

由引理(1) $\overline{PA}+\overline{PB}<\overline{NA}+\overline{NB}$…….①

在線段$\overline{MN}$中 M 是距離$\overline{CD}$線段的中垂線 K 最遠的點,故

由引理(1) $\overline{PC}+\overline{PD}<\overline{MC}+\overline{MD}$…….②

①+②$\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}+\overline{PD}<\overline{NA}+\overline{NB}+\overline{MC}+\overline{MD}$

由引理(2) $\overline{MC}+\overline{NA}<\overline{AC}+\overline{MN}$

且$\overline{NB}+\overline{MD}=\overline{AD}$

又$\overline{MN}=\overline{AB}$

故$\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}+\overline{PD}<\overline{AB}+\overline{AC}+\overline{AD}$(即為長對角線加半周長的和).

且當 P 到四頂點的距離和$\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}+\overline{PD}$為最小上界時,P 在 A 或 C 點.

任意梯形 ABCD,都可經由左右翻轉,上下翻轉,使得它們的下底$\overline{AB}>$上底$\overline{CD}$,左腰$\overline{AD}\geq$右腰$\overline{BC}$,且依形狀可以分成三類:

(1)等腰梯形,如圖(9)

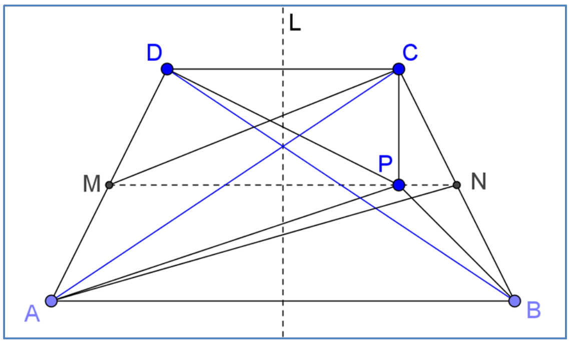
(2)左腰$\overline{AD}\geq$右腰$\overline{BC}$,$\angle A < 90^{\circ}$,$\angle B < 90^{\circ}$的非等腰梯形,如圖(10)

(3)左腰$\overline{AD}\geq$右腰$\overline{BC}$,$\angle A < 90^{\circ}$,$\angle B \geq 90^{\circ}$的非等腰梯形,如圖(11)

定理(3) 梯形 ABCD,下底大於上底$\overline{AB}>\overline{CD}$,左腰不小於右腰$\overline{AD}\geq\overline{BC}$,其內部一點 P 到四頂點的距離和$\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}+\overline{PD}$的最小上界為$\overline{AB}+\overline{AC}+\overline{AD}$亦即為(大底邊+長對角線+長腰)的和.

證明: 我們想將梯形分三類來加以證明

(1)等腰梯形:如圖(9).P 為等腰梯形 ABCD 內部一點,L 是$\overline{AB}$與$\overline{CD}$的中垂線,過 P 作$\overline{AB}$的平行線交$\overline{AD}$於 M, 交$\overline{BC}$於 N.



圖(9)

在線段$\overline{MN}$中 N(或 M)是距離$\overline{AB}$線段的中垂線 L 最遠的點,故

由引理(1) $\overline{PA}+\overline{PB}<\overline{NA}+\overline{NB}$…….③

在線段$\overline{MN}$中 M(或 N)是距離$\overline{CD}$線段的中垂線 L 最遠的點,故

由引理(1) $\overline{PC}+\overline{PD}<\overline{MC}+\overline{MD}$…….④

③+④$\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}+\overline{PD}<\overline{NA}+\overline{NB}+\overline{MC}+\overline{MD}$

由引理(2) $\overline{MC}+\overline{NA}<\overline{AC}+\overline{MN}$

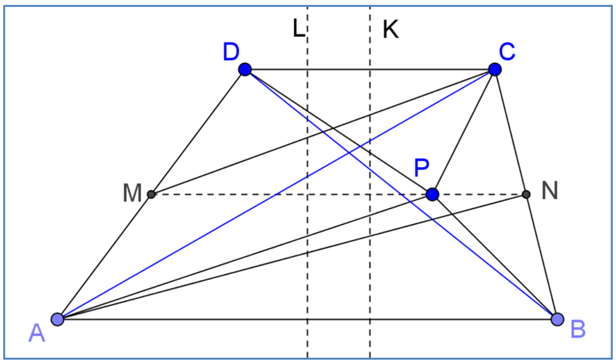
且$\overline{NB}+\overline{MD}=\overline{AD}$

又$\overline{MN}<\overline{AB}$

故$\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}+\overline{PD}<\overline{AB}+\overline{AC}+\overline{AD}$即為(大底邊+對角線+腰)的和.

且當 P 到四頂點的距離和$\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}+\overline{PD}$為最小上界時,P 在 A 或 B 點.

(2)左腰$\overline{AD}$ >右腰$\overline{BC}$,∠A < 90°,∠B < 90°的非等腰梯形,如圖(10),P 為內部一點,L 是$\overline{AB}$的中垂線,K 是$\overline{CD}$的中垂線,過 P 作$\overline{AB}$的平行線交$\overline{AD}$於 M, 交$\overline{BC}$於 N.



圖(10)

梯形 ABNM 中,由平行線截等比例線段定理,及$\overline{AD}>\overline{BC}$知$\overline{MA}>\overline{NB}$,在線段$\overline{MN}$中,$N$是距離$\overline{AB}$的中垂線 L 最遠的點,故

由引理(1) $\overline{PA}+\overline{PB}<\overline{NA}+\overline{NB}$…….⑤

梯形 MNCD 中$\overline{MD}>\overline{NC}$,在線段$\overline{MN}$中 M 是距離$\overline{CD}$的中垂線 K 最遠的點,故

由引理(1) $\overline{PC}+\overline{PD}<\overline{MC}+\overline{MD}$……⑥

⑤+⑥$\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}+\overline{PD}<\overline{NA}+\overline{NB}+\overline{MC}+\overline{MD}$

由引理(2) $\overline{MC}+\overline{NA}<\overline{AC}+\overline{MN}$

且$\overline{NB}+\overline{MD}<\overline{MA}+\overline{MD}=\overline{AD}$

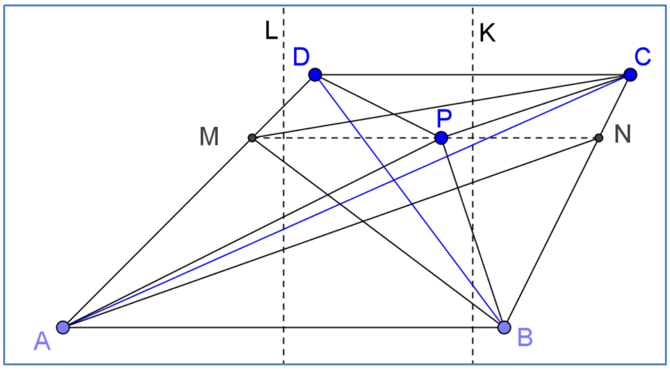
又$\overline{MN}<\overline{AB}$

故$\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}+\overline{PD}<\overline{AB}+\overline{AC}+\overline{AD}$即為(大底邊+長對角線+長腰)的和.

(由引理(3)可知$\overline{AC}>\overline{BD}$, $\overline{AC}$是長對角線,$\overline{AD}$是長腰)

且當 P 到四頂點的距離和$\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}+\overline{PD}$為最小上界時,P 在 A 點.

(3)左腰$\overline{AD}>$右腰$\overline{BC}$,$\angle A<90^{\circ}$,$\angle B\geq 90^{\circ}$的非等腰梯形,如圖(11),P 為內部一點,L 是$\overline{AB}$的中垂線,K 是$\overline{CD}$的中垂線,過 P 作$\overline{AB}$的平行線交$\overline{AD}$於 M,交$\overline{BC}$於 N.



圖(11)

梯形 ABNM 中,由平行線截等比例線段定理,及$\overline{AD}>\overline{BC}$知$\overline{MA}>\overline{NB}$,在線段$\overline{MN}$中,$N$是距離$\overline{AB}$的中垂線 L 最遠的點,故

由引理(1) $\overline{PA}+\overline{PB}<\overline{NA}+\overline{NB}$……⑦

梯形 $MNCD$ 中$\overline{MD}>\overline{NC}$,在線段$\overline{MN}$中 M是距離$\overline{CD}$的中垂線 K 最遠的點,故

由引理(1) $\overline{PC}+\overline{PD}<\overline{MC}+\overline{MD}$……⑧

⑦+⑧$\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}+\overline{PD}<\overline{NA}+\overline{NB}+\overline{MC}+\overline{MD}$

由引理(2) $\overline{MC}+\overline{NA}<\overline{AC}+\overline{MN}$

且$\overline{NB}+\overline{MD}<\overline{MA}+\overline{MD}=\overline{AD}$

又$\overline{MN}<\overline{AB}$

故$\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}+\overline{PD}<\overline{AB}+\overline{AC}+\overline{AD}$即為(大底邊+長對角線+長腰)的和.(由引理(3)可知 $\overline{AC}>\overline{BD}$, $\overline{AC}$是長對角線,$\overline{AD}$是長腰)

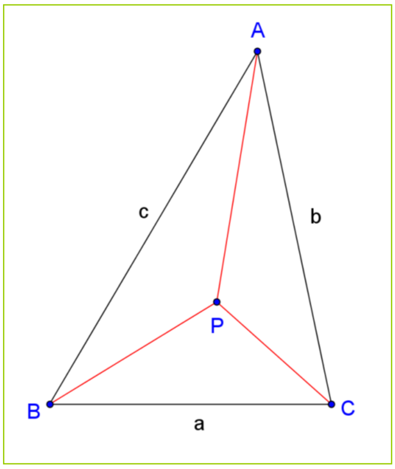
且當 P 到四頂點的距離和$\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}+\overline{PD}$為最小上界時,P 在 A 點.

引理(1)的綜合幾何的方法其實與橢圓法是相呼應的,亦即當 Q 點在以 A,B 為焦點,且過 P 的橢圓之外時,則有$\overline{QA}+\overline{QB}>\overline{PA}+\overline{PB}$的結果.我們再來觀察定理(1)的橢圓法證明,命名為定理(1-1):

定理(1-1)如圖(12),ΔABC,假設 $\overline{AB}\geq\overline{AC}\geq\overline{BC}$,亦即$c\geq b\geq a$,P 是三角形 ΔABC 的內部或邊界上

的任一點,則 $\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC} \le (c+b)$,當等號成立時,$P$ 在 A 點上。

證明:



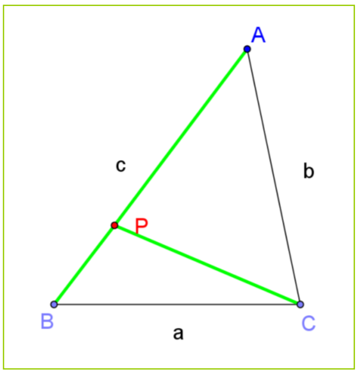
圖(12)

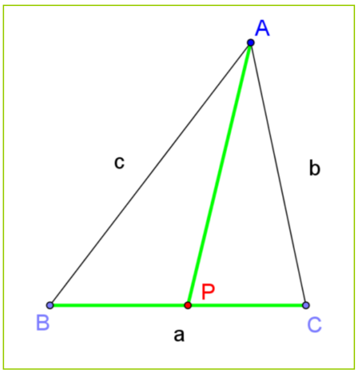
步驟 1、當 P 在 ΔABC 的邊上，設 $a \le b \le c$ ，

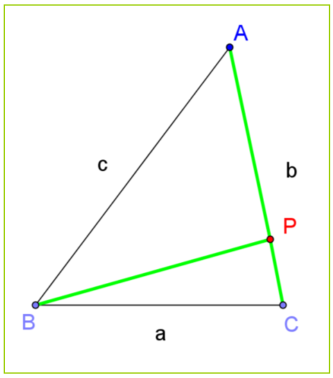
如圖(12-1)， $P \in \overline{AB}$ ， $\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}=c+\overline{PC} \le c+b$

如圖(12-2)， $P \in \overline{BC}$ ， $\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}=a+\overline{PA} \le c+a \le c+b$

如圖(12-3)， $P \in \overline{AC}$ ， $\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}=b+\overline{PB} \le c+b$

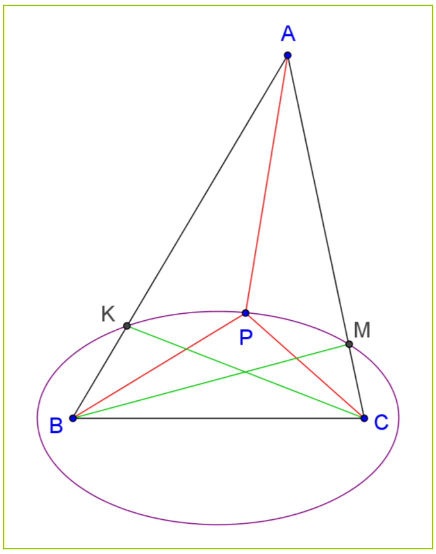






圖(12-1) 圖(12-2) 圖(12-3)

步驟 2、當 P 在 ΔABC 的內部；如圖(13)，做一個以 B、C 為焦點且通過 P 點的橢圓，交 $\overline{AB}$ 於 K，交 $\overline{AC}$ 於 M，KPM 弧是橢圓的一部分且是凹口向下的曲線，且 P 在 ΔAKM 的內部，由橢圓的性質：同個橢圓上任一點到兩焦點的距離和都相等， $\overline{PB}+\overline{PC}=\overline{MB}+\overline{MC}=\overline{KB}+\overline{KC}$ 。

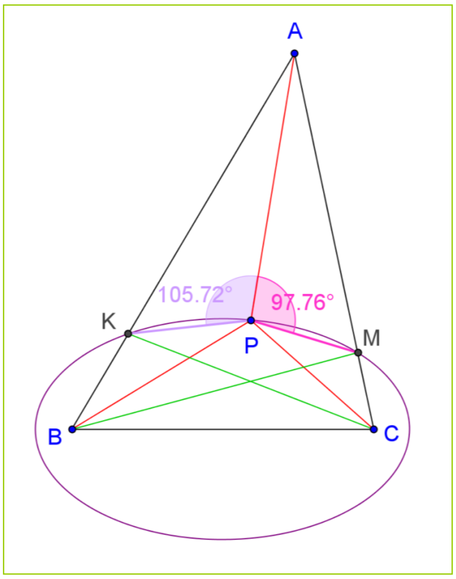


圖(13)

步驟 3、如圖(14)，$\angle APK + \angle APM + \angle KPM = 360^\circ$，因 $\angle KPM < 180^\circ$，則 $\angle APK + \angle APM > 180^\circ$。

因此 $\angle APK$ 與 $\angle APM$ 當中，至少有一個是鈍角(也可能兩個都是鈍角)。否則，若兩個都是銳角；

則 $\angle APK + \angle APM < 180^\circ$ 會與 $\angle KPM < 180^\circ$ 產生矛盾。



圖(14)

(1)若 $\angle APK$ 是鈍角，$\overline{KA} \ge \overline{PA}$，由橢圓的性質 $\overline{KB}+\overline{KC}=\overline{PB}+\overline{PC}$，

得 $\overline{KA}+\overline{KB}+\overline{KC} \ge \overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}$，即 $\overline{AB}+\overline{KC} \ge \overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}$。

ΔABC中 $\overline{AC} \ge \overline{BC}$，所以$\angle B > \angle A$，並由外角定理得$\angle B + \angle BCK = \angle AKC$，所以$\angle AKC > \angle B$，

$\angle AKC > \angle B \ge \angle A$，故 $\overline{AC} \ge \overline{KC}$，得到

$$\overline{AB}+\overline{AC} \ge \overline{AB}+\overline{KC} \ge \overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}$$ 。

(2)若 $\angle APM$ 是鈍角，$\overline{MA} \ge \overline{PA}$，由橢圓的性質 $\overline{MB}+\overline{MC}=\overline{PB}+\overline{PC}$，

得 $\overline{MA}+\overline{MB}+\overline{MC} \ge \overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}$，即 $\overline{AC}+\overline{MB} \ge \overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}$。

ΔABC中$\overline{AB} \ge \overline{BC}$，得$\angle C > \angle A$，並由外角定理得$\angle C + \angle CMB = \angle AMB$，所以$\angle AMB > \angle B$，$\angle AMB > \angle C \ge \angle A$，故 $\overline{AB} \ge \overline{MB}$，得到

$$\overline{AB}+\overline{AC} \ge \overline{AC}+\overline{MB} \ge \overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}。$$

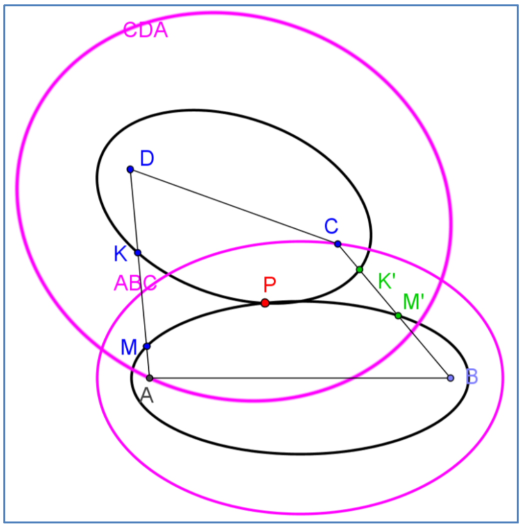
綜合步驟 1,2,3 知 $\overline{AB}+\overline{AC} \ge \overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}$ 成立。

當等號成立時，P 在 A 點上，此時 $\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}$ 有最大值 $\overline{AB}+\overline{AC}$，且 $P=A=M=K$。

定理(4)：如下圖(15)(16)(17)，任意凸四邊形 ABCD，P 是凸四邊形 ABCD 內部或邊界上任一點，以 C,D 為焦點且過 P 的橢圓稱為 CDP 橢圓，以 A,B 為焦點且過 P 的橢圓稱為 ABP 橢圓，當 P 點在凸四邊形 ABCD 內部或邊界上移動時，則 CDP 橢圓與 ABP 橢圓(均為黑色圓)，兩橢圓與$\overline{AD}$、$\overline{BC}$兩邊至少有一邊是交在兩個點。

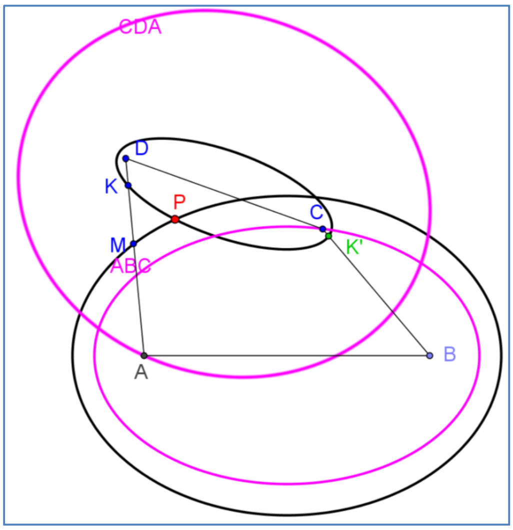
舉例：

如圖(15) 過 P 的兩橢圓，CDP 橢圓與 ABP 橢圓與$\overline{AD}$交在兩個點 K,M，與$\overline{BC}$交在兩個點 K’,M’。



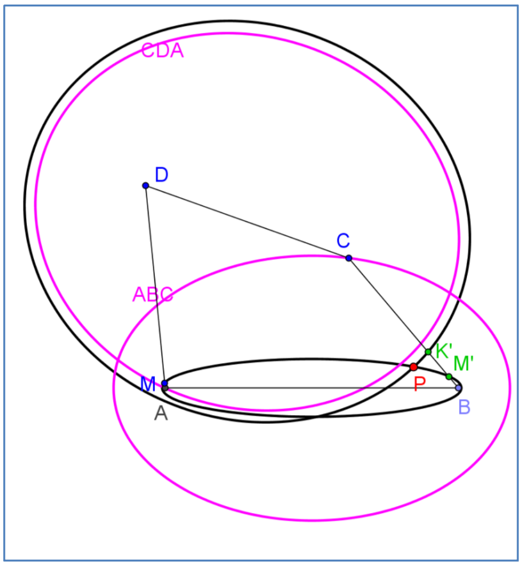
圖(15)

如圖(16) 過 P 的兩橢圓，CDP 橢圓與 ABP 橢圓與$\overline{AD}$交在兩點 K,M，與$\overline{BC}$只交在 K’一個點。



圖(16)

如圖(17) 過 P 的兩橢圓，CDP 橢圓與 ABP 橢圓與$\overline{\mathrm{AD}}$交在一點 M，與$\overline{\mathrm{BC}}$交在兩個點 K’ ,M’ 。



圖(17)

解說：我們先作以下的假設

(1)任意凸四邊形 ABCD 的形狀一旦決定(例如已知四邊及任意一條對角線，或圓內接四邊形，或是已知四邊及任意一個內角，….等等)，我們可選擇最大邊當下邊$\overline{\mathrm{AB}}$，且$\overline{\mathrm{AB}}$在水平線上。

(2)可假設左邊$\overline{\mathrm{AD}}$大於或等於右邊$\overline{\mathrm{BC}}$,如果不是,可讓它左右翻轉使得$\overline{\mathrm{AD}} \geq \overline{\mathrm{BC}}$

(3) P 是凸四邊形 ABCD 內部或四邊上任一點，作以 C,D 為焦點且過 P 的橢圓稱為 CDP 橢圓(黑色)，以及 A,B 為焦點且過 P 的橢圓稱為 ABP 橢圓(黑色)

(4)以 A,B 為兩焦點，若$\left(\overline{DA}+\overline{DB}\right) > (\overline{\mathrm{CA}}+\overline{\mathrm{CB}})$，則以 A,B 為焦點作定長和較小的過 C 點的 ABC 橢圓(桃紅色)，此時 D 點在 ABC 橢圓的外部(若是情況相反時，C,D 可顛倒過來)

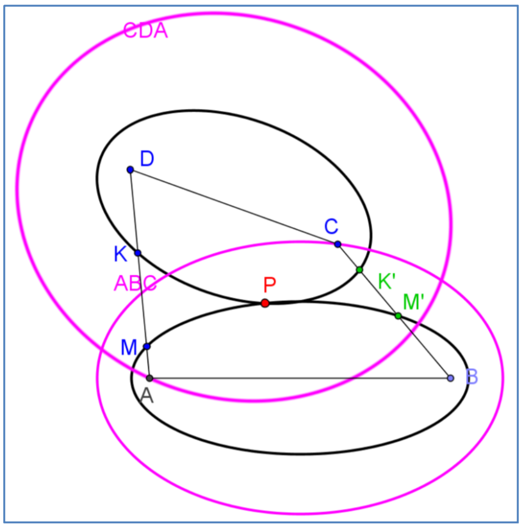
(5)以 C,D 為兩焦點，若$\left(\overline{BC}+\overline{BD}\right) > (\overline{\mathrm{AC}}+\overline{\mathrm{AD}})$，則以 C,D 為焦點作定長和較小的過 A 點的 CDA 橢圓(桃紅色)，此時 B 點在 CDA 橢圓的外部(若是情況相反時，A,B 可顛倒過來)

(6)$\overline{\mathrm{AB}}$是所決定的凸四邊形 ABCD 的最大邊，因此上邊$\overline{\mathrm{CD}}$小於或等於下邊$\overline{\mathrm{AB}}$

如此凸四邊形 ABCD 的形狀，就符合我們想要研究:內部或四邊上任一點 P，到凸四邊形 ABCD

四頂點的最大距離和的簡約條件。

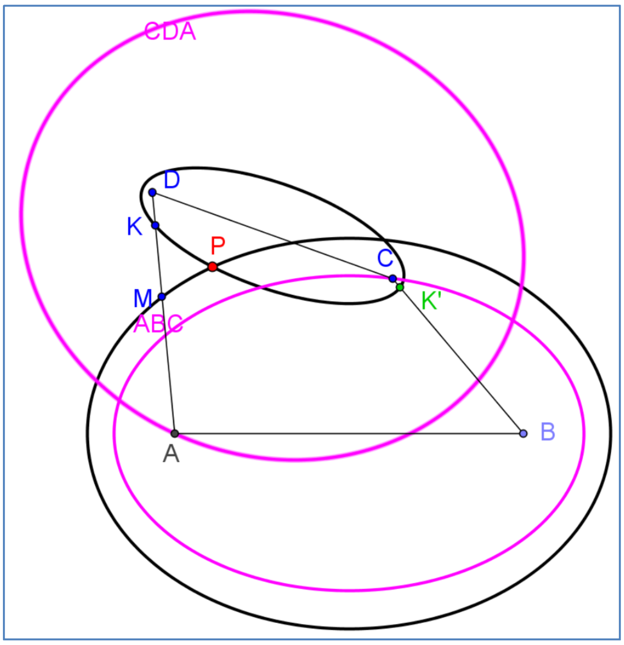
第一種凸四邊形 ABCD 的類型$\angle A \geq 90^{\circ}, \angle B \leq 90^{\circ}$：有圖(15) 圖(16) 圖(17)等 3 種情況
情況 1.如圖(15)：



圖(15)

P 點在凸四邊形 ABCD，CDA 橢圓，ABC 橢圓三者的內部。因為 CDP 橢圓包在 CDA 橢圓裡面，而 B 點在 CDA 橢圓的外部，故 CDP 橢圓會與$\overline{AD}$交在 K，與$\overline{BC}$交在 K’，在 CDP 橢圓中 K,P,K’ 分別與兩焦點 C,D 的定長和(也就是橢圓的長軸長 2*a*)是相同的。因為 ABP 橢圓包在 ABC 橢圓裡面，而 D 點在 ABC 橢圓的外部，故 ABP 橢圓會與$\overline{AD}$交在 M，與$\overline{BC}$交在 M’，在 ABP 橢圓中 M,P,M’ 分別與兩焦點 A,B 的定長和(橢圓的長軸長 2*a*)是相同的。此時過 P 的兩橢圓，CDP 橢圓與 ABP 橢圓與$\overline{AD}$交在兩個點 K,M，與$\overline{BC}$交在兩個點 K’,M’。

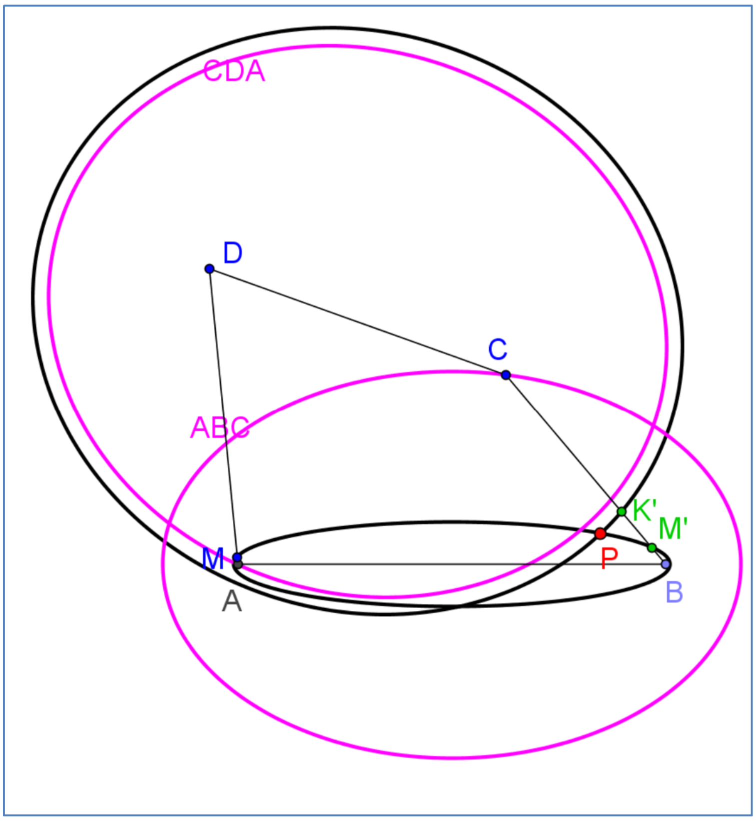
情況 2. 如圖(16)：



圖(16)

P 點在凸四邊形 ABCD，CDA 橢圓兩者的內部，但是卻在 ABC 橢圓的外部。因為 CDP 橢圓包含在 CDA 橢圓裡面，而 B 點在 CDA 橢圓的外部，故 CDP 橢圓會與$\overline{AD}$交在 K，與$\overline{BC}$交在 K'，在 CDP 橢圓中 K,P,K' 分別與兩焦點 C,D 的定長和(橢圓的長軸長 2*a*)是相同的。因為 ABP 橢圓包含了 ABC 橢圓，而 D 點在 ABP 橢圓的外部，故 ABP 橢圓會與$\overline{AD}$交在 M，而與$\overline{BC}$沒有交點，在 ABP 橢圓中 M,P 分別與兩焦點 A,B 的定長和(橢圓的長軸長 2*a*)是相同的。此時過 P 的兩橢圓，CDP 橢圓與 ABP 橢圓與$\overline{AD}$交在兩個點 K,M，與$\overline{BC}$交在一個點 K'。

情況 3. 如圖(17)：

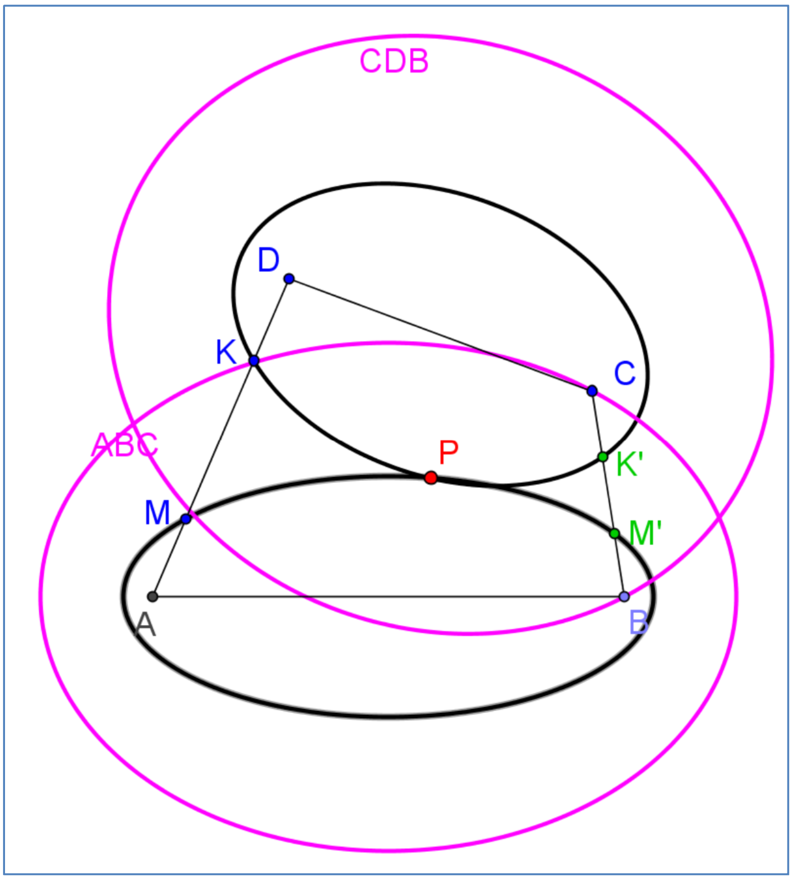


圖(17)

P 點在凸四邊形 ABCD，ABC 橢圓兩者的內部，但是卻在 CDA 橢圓的外部。因為 ABP 橢圓包在 ABC 橢圓裡面，而 D 點在 ABC 橢圓的外面，故 ABP 橢圓會與$\overline{AD}$交在 M，與$\overline{BC}$交在 M'，在 ABP 橢圓中 M,P,M' 分別與兩焦點 A,B 的定長和(橢圓的長軸長 2*a*)是相同的。又因為 CDP 橢圓包含了 CDA 橢圓，而 B 點在 CDP 橢圓的外部，故 CDP 橢圓會與$\overline{BC}$交在 K'，而與$\overline{AD}$沒有交點，此時過 P 的兩橢圓，CDP 橢圓與 ABP 橢圓與$\overline{AD}$交在一個點 M，與$\overline{BC}$交在二個點 M',K'。

第二種凸四邊形 ABCD 的類型$\angle A \leq 90^\circ, \angle B \leq 90^\circ$：有圖(18) 圖(19) 圖(20)等 3 種情況

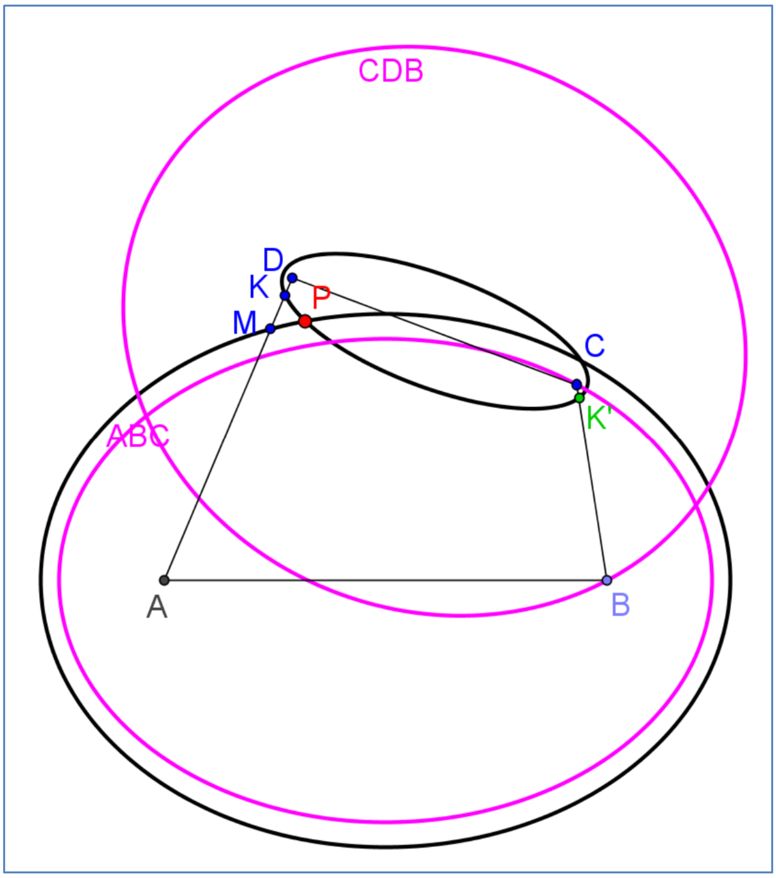
情況 4.如圖(18)：



圖(18)

P 點在凸四邊形 ABCD，CDB 橢圓，ABC 橢圓三者的內部(此時橢圓 CDB 的長軸長比橢圓 CDA 的長軸長小)。因為 CDP 橢圓包在 CDB 橢圓裡面，而 A 點在 CDB 橢圓的外部，故 CDP 橢圓會與$\overline{AD}$交在 K，與$\overline{BC}$交在 K’，在 CDP 橢圓中 K,P,K’分別與兩焦點 C,D 的定長和(橢圓的長軸長 2a)是相同的。又因為 ABP 橢圓包在 ABC 橢圓裡面，而 D 點在 ABC 橢圓的外部，故 ABP 橢圓會與$\overline{AD}$交在 M，與$\overline{BC}$交在 M’，在 ABP 橢圓中 M,P,M’分別與兩焦點 A,B 的定長和(橢圓的長軸長 2a)是相同的。此時過 P 的兩橢圓，CDP 橢圓與 ABP 橢圓與$\overline{AD}$交在兩個點 K,M，與$\overline{BC}$交在兩個點 K’,M’。

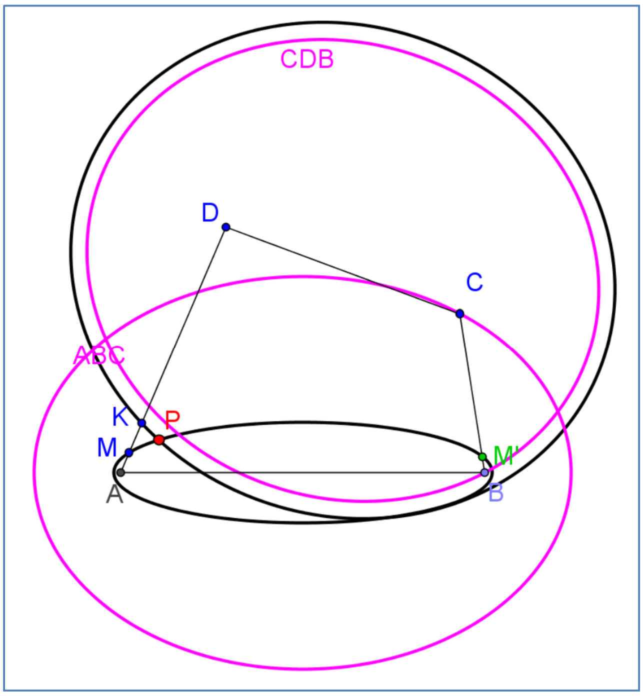
情況 5.如圖(19)：



圖(19)

P 點在凸四邊形 ABCD，CDB 橢圓兩者的內部，但是卻在 ABC 橢圓的外部。因為 CDP 橢圓包含在 CDB 橢圓裡面，而 A 點在 CDB 橢圓的外部，故 CDP 橢圓會與$\overline{AD}$交在 K，與$\overline{BC}$交在 K’，在 CDP 橢圓中 K,P,K’ 分別與兩焦點 C,D 的定長和(橢圓的長軸長 2a)是相同的。又因為 ABP 橢圓包含了 ABC 橢圓，而 D 點在 ABP 橢圓的外部，故 ABP 橢圓會與$\overline{AD}$交在 M，而與$\overline{BC}$沒有交點，在 ABP 橢圓中 M,P 分別與兩焦點 A,B 的定長和(橢圓的長軸長 2a)是相同的。此時過 P 的兩橢圓，CDP 橢圓與 ABP 橢圓與$\overline{AD}$交在兩個點 K,M，與$\overline{BC}$交在一個點 K’。

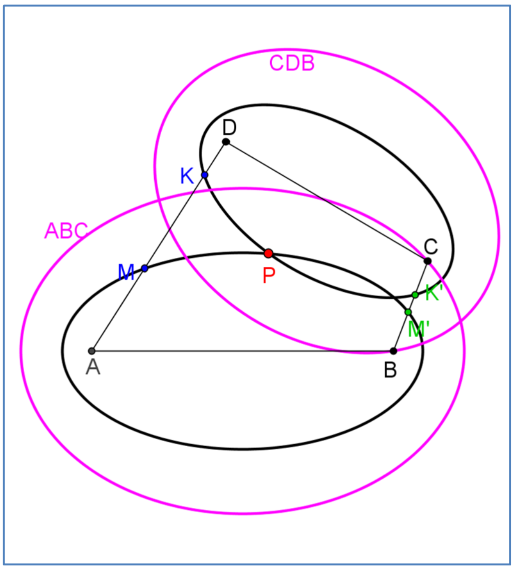
情況 6.如圖(20)：



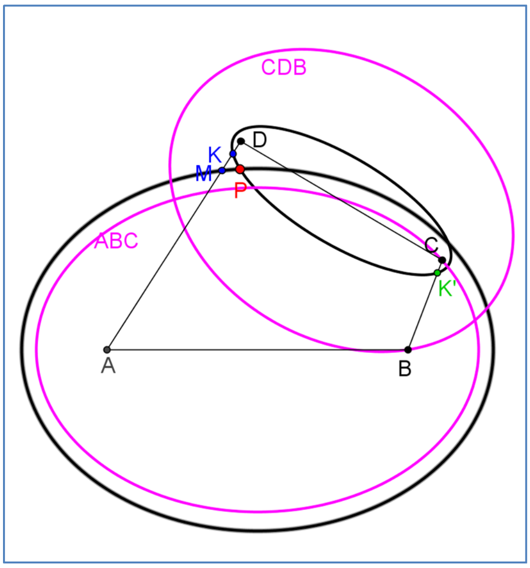
圖(20)

P 點在凸四邊形 ABCD，ABC 橢圓兩者的內部，但是卻在 CDB 橢圓的外部。因為 ABP 橢圓包在 ABC 橢圓裡面，而 D 點在 ABC 橢圓的外部，故 ABP 橢圓會與$\overline{AD}$交在 M，與$\overline{BC}$交在 M’，在 ABP 橢圓中 M,P,M’ 分別與兩焦點 A,B 的定長和(橢圓的長軸長 2*a*)是相同的。因為 CDP 橢圓包含了 CDB 橢圓，而 A 點在 CDP 橢圓的外部，故 CDP 橢圓會與$\overline{AD}$交在 K，而與$\overline{BC}$沒有交點，此時過 P 的兩橢圓，CDP 橢圓與 ABP 橢圓與$\overline{AD}$交在二個點 M,K，與$\overline{BC}$交在一個點 M’。

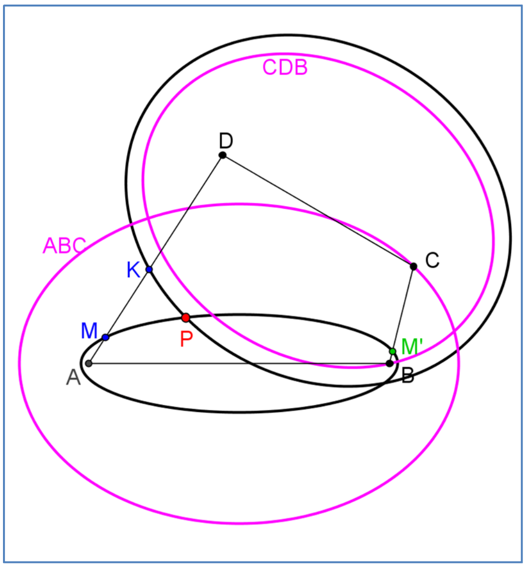
第三種凸四邊形 ABCD 的類型$\angle A \leq 90^{\circ}, \angle B \geq 90^{\circ}$：有圖(21)圖(22)圖(23)等 3 種情況



圖(21)



圖(22)



圖(23)

其解說與第二種凸四邊形 ABCD 的類型相同，不再另證，解說完畢。

定理(5)：如圖(24)，任意凸四邊形 ABCD，四邊長已知，對角線$\overline{AC}$,$\overline{BD}$也已知，設 P 是凸四邊形 ABCD 內部或邊界上任一點，令 DIA 代表頂點 A 所連接的三個線段長的和(含兩個邊及一條對角線)，當 P 點在凸四邊形 ABCD 內部或邊界上移動時，則 P 到四頂點的最大距離和$\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}+\overline{PD}$為 DIA,DIB,DIC,DID 四個中的最大值

解說:以 C,D 為焦點且過 P 的橢圓稱為 CDP 橢圓,以 A,B 為焦點且過 P 的橢圓稱為 ABP 橢圓。我們沿用定理(4)的假設：

(1)凸四邊形 ABCD 的最大邊當下邊$\overline{AB}$。

(2)左邊大於或等於右邊，即$\overline{AD} \geq \overline{BC}$，否則左右翻轉，使它滿足條件。

(3) 作 ABP 橢圓及 CDP 橢圓

(4)以 A,B 為兩焦點，做過 C 或 D 的長軸長較小的橢圓

(5)以 C,D 為兩焦點，做過 A 或 B 的長軸長較小的橢圓

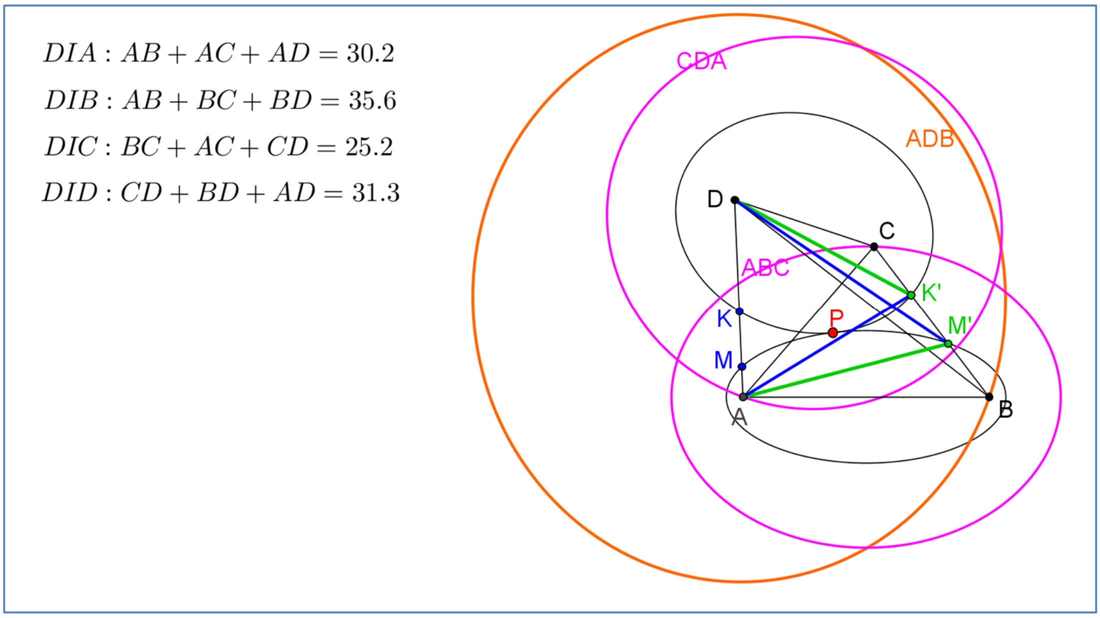
(6)上邊小於或等於下邊，$\overline{CD} \leq \overline{AB}$

由定理(4)的結論，左右兩邊至少有一邊會與 ABP 橢圓及 CDP 橢圓有兩個交點

第一種凸四邊形 ABCD 的類型$\angle A \geq 90^{\circ},\angle B \leq 90^{\circ}$：有圖(15),圖(16),圖(17)等 3 種情況,加上補助線成為圖(24)(25),圖(26),圖(27)等 3 種情況

(其中圖(24)(25)由圖(15)得來)

如圖(24)，依照下列步驟進行證明



圖(24)

步驟：

(1)分別衡量四個頂點所連接的三個線段和的最大值是 DIB

(2)當 P 在凸四邊形 ABCD，ABC 橢圓，CDA 橢圓三者內部的交集，左邊$\overline{AD}$，右邊$\overline{BC}$，與 ABP 橢圓及 CDP 橢圓都有兩個交點。

(3)若選擇右邊$\overline{BC}$，與 ABP 橢圓及 CDP 橢圓有兩個交點 K’ ,M’

(4)取左邊線段$\overline{AD}$的兩端點 A,D 為焦點，考慮過 B 或過 C，作較大長軸長的橢圓
(圖(24)是過 B 的 ADB 橢圓有較大的長軸長)

(5)連接線段$\overline{K'A}$，$\overline{K'D}$，$\overline{M'A}$，$\overline{M'D}$

(6)C 在 ADB 橢圓的內部，$\overline{BC}$包含在 ADB 橢圓的邊或內部，兩個交點 K’ ,M’ 都在 ADB 橢圓的邊或內部。

(7)$\overline{K'A} + \overline{K'D} \le \overline{BA} + \overline{BD}$

(8) $\overline{M'A} + \overline{M'D} \le \overline{BA} + \overline{BD}$

(9) 將(7)(8)相加$\overline{K'A} + \overline{M'D} + \overline{K'D} + \overline{M'A} \le 2(\overline{BA} + \overline{BD})$

(10)$\overline{K'D} + \overline{M'A} \le \overline{K'A} + \overline{M'D}$ (由引理(2))代入(9)

(11)$2(\overline{K'D} + \overline{M'A}) \le \overline{K'A} + \overline{M'D} + \overline{K'D} + \overline{M'A} \le 2(\overline{BA} + \overline{BD})$

(12)$\overline{K'D} + \overline{M'A} \le \overline{BA} + \overline{BD}$

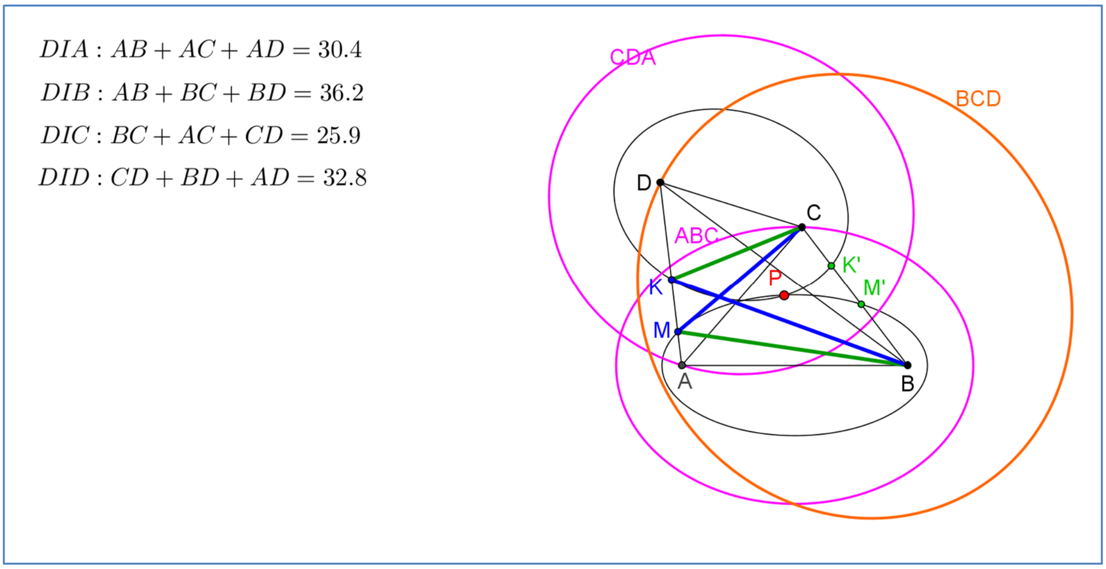
(13)$\overline{K'C} + \overline{M'B} < \overline{BC}$

(14)將(12)(13)相加$\overline{K'D}+\overline{K'C}+\overline{M'A}+\overline{M'B} \le \overline{BA}+\overline{BC}+\overline{BD}$

(15) 亦即$\overline{PD}+\overline{PC}+\overline{PA}+\overline{PB}=\overline{K'D}+\overline{K'C}+\overline{M'A}+\overline{M'B} \le \overline{BA}+\overline{BC}+\overline{BD}$=DIB

圖(24)解說完畢

如圖(25)，如果用到$\overline{AD}$與 ABP 橢圓及 CDP 橢圓有兩個交點 K,M，則依照下列步驟進行：



圖(25)

步驟：

(1)分別衡量四個頂點所連接的三個線段和的最大值是 DIB

(2)當 P 在凸四邊形 ABCD，ABC 橢圓，CDA 橢圓三者內部的交集，左邊$\overline{AD}$，右邊$\overline{BC}$，與 ABP 橢圓及 CDP 橢圓都有兩個交點。

(3)若選擇左邊$\overline{AD}$，與 ABP 橢圓及 CDP 橢圓有兩個交點 K,M

(4)取右邊線段$\overline{BC}$的兩端點 B,C 為焦點，考慮過 A 或過 D，作較大長軸長的橢圓(圖(25)是過 D 的 BCD 橢圓有較大的長軸長)

(5)連接線段$\overline{KB}$，$\overline{KC}$，$\overline{MB}$，$\overline{MC}$

(6)A 在 BCD 橢圓的內部，$\overline{AD}$包含在 BCD 橢圓的邊或內部，兩個交點 K,M 都在 BCD 橢圓的邊或內部。

(7)$\overline{KB}+\overline{KC} \le \overline{DB}+\overline{DC}$

(8) $\overline{MB}+\overline{MC} \le \overline{DB}+\overline{DC}$

(9) 將(7)(8)相加$\overline{KB}+\overline{KC}+\overline{MB}+\overline{MC} \le 2(\overline{DB}+\overline{DC})$

(10)$\overline{KC}+\overline{MB} \le \overline{KB}+\overline{MC}$ (由引理(2))代入(9)

(11)2($\overline{KC}+\overline{MB}$) $\le \overline{KB}+\overline{KC}+\overline{MB}+\overline{MC} \le 2(\overline{DB}+\overline{DC})$

(12)$\overline{KC}+\overline{MB} \le \overline{DB}+\overline{DC}$

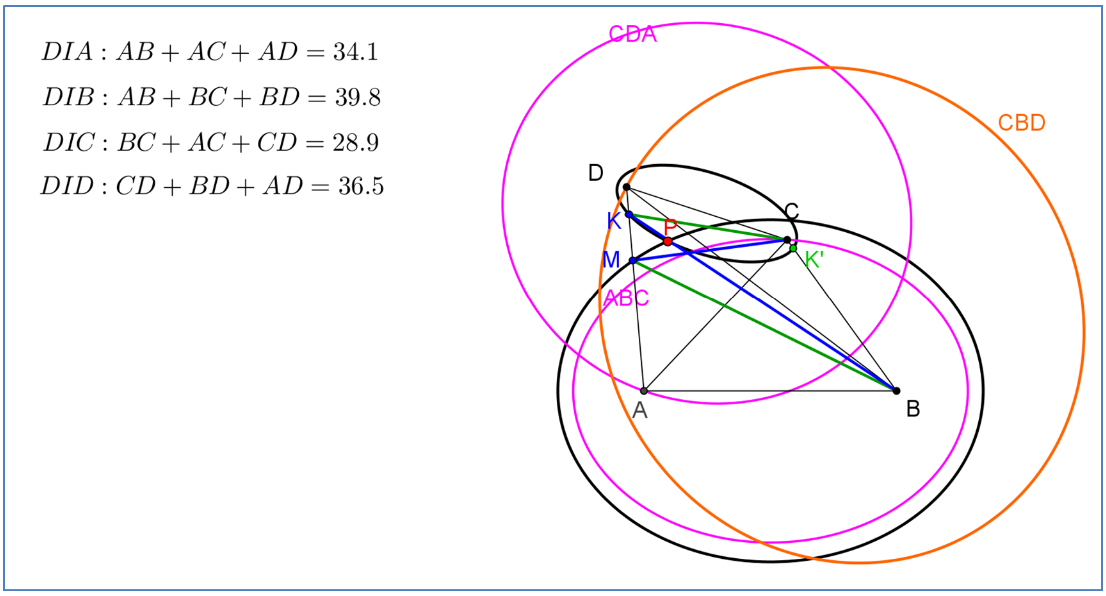
(13)$\overline{KD}+\overline{MA} < \overline{AD}$

(14)將(12)(13)相加$\overline{KC}+\overline{KD}+\overline{MA}+\overline{MB} \le \overline{AD}+\overline{DB}+\overline{DC}$

(15) 亦即$\overline{PC}+\overline{PD}+\overline{PA}+\overline{PB}=\overline{KC}+\overline{KD}+\overline{MA}+\overline{MB} \le \overline{AD}+\overline{DB}+\overline{DC}$=DID

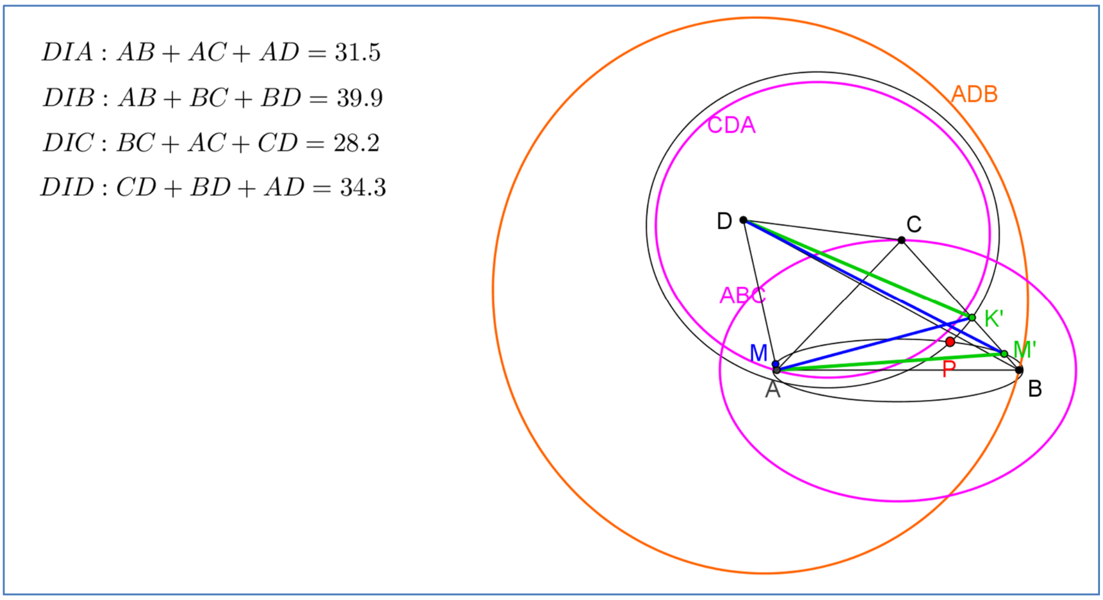
(16)但是已知 DID≤ DIB，故$\overline{PC}+\overline{PD}+\overline{PA}+\overline{PB} \le$ DIB

圖(25)解說完畢



圖(26)

圖(26)的解說與圖(25)相同

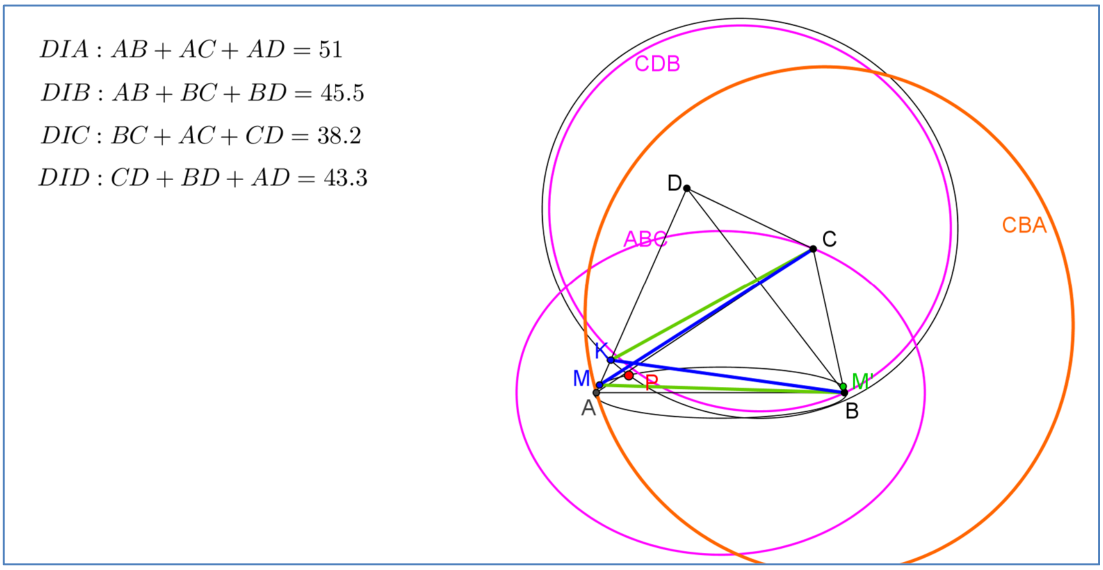


圖(27)

圖(27)的解說與圖(24)相同

第二種凸四邊形 ABCD 的類型$\angle A \leq 90^{\circ}, \angle B \leq 90^{\circ}$：有圖(18),圖(19),圖(20)等 3 種情況,加上補助線成為圖(28),圖(29),圖(30)等 3 種情況

如圖(28)，用到$\overline{AD}$與 ABP 橢圓及 CDP 橢圓有兩個交點 K,M，則依照下列步驟進行：



圖(28)

步驟：

(1)分別衡量四個頂點所連接的三個線段和的最大值是 DIA

(2)當 P 在凸四邊形 ABCD，ABC 橢圓兩者的內部，在 CDB 橢圓的外部。左邊$\overline{AD}$，與 ABP 橢圓及 CDP 橢圓有兩個交點，右邊$\overline{BC}$只有一個交點。

(3)選擇左邊$\overline{AD}$，與 ABP 橢圓及 CDP 橢圓有兩個交點 K,M

(4)取右邊線段$\overline{BC}$的兩端點 B,C 為焦點，考慮過 A 或過 D，作較大長軸長的橢圓(圖(28)是過 A 的 BCA 橢圓有較大的長軸長)

(5)連接線段$\overline{KB}$，$\overline{KC}$，$\overline{MB}$，$\overline{MC}$

(6)D 在 BCA 橢圓的內部，$\overline{AD}$包含在 BCA 橢圓的邊或內部，兩個交點 K,M 都在 BCA 橢圓的邊或內部。

(7)$\overline{KB}+\overline{KC}\le\overline{AB}+\overline{AC}$

(8) $\overline{MB}+\overline{MC}\le\overline{AB}+\overline{AC}$

(9) 將(7)(8)相加$\overline{KB}+\overline{KC}+\overline{MB}+\overline{MC}\le 2(\overline{AB}+\overline{AC})$

(10)$\overline{KC}+\overline{MB}\le\overline{KB}+\overline{MC}$ (由引理(2))代入(9)

(11)2($\overline{KC}+\overline{MB}$) $\le\overline{KB}+\overline{KC}+\overline{MB}+\overline{MC}\le 2(\overline{AB}+\overline{AC})$

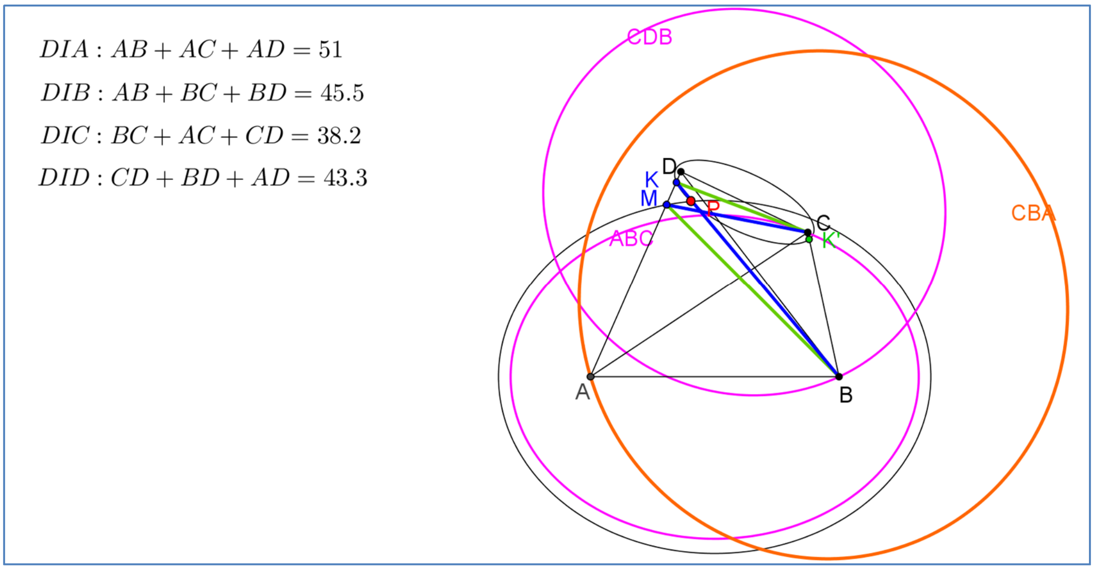
(12)$\overline{KC}+\overline{MB}\le\overline{AB}+\overline{AC}$

(13)$\overline{KD}+\overline{MA}<\overline{AD}$

(14)將(12)(13)相加$\overline{KC}+\overline{KD}+\overline{MA}+\overline{MB}\le\overline{AD}+\overline{AB}+\overline{AC}$

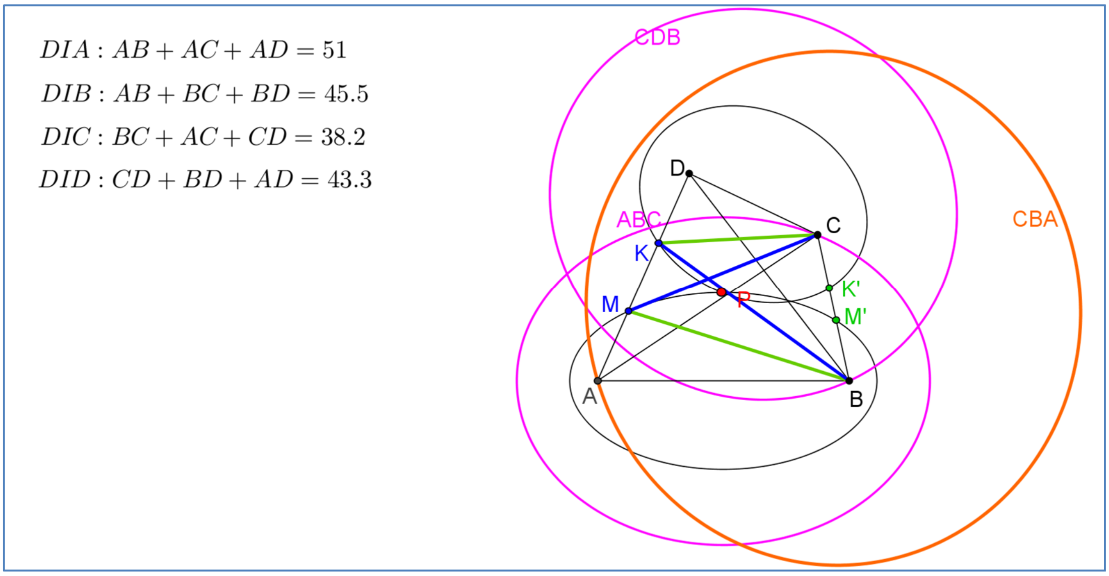
(15) 亦即$\overline{PC}+\overline{PD}+\overline{PA}+\overline{PB}=\overline{KC}+\overline{KD}+\overline{MA}+\overline{MB}\le\overline{AD}+\overline{AB}+\overline{AC}$=DIA

圖(28)解說完畢



圖(29)

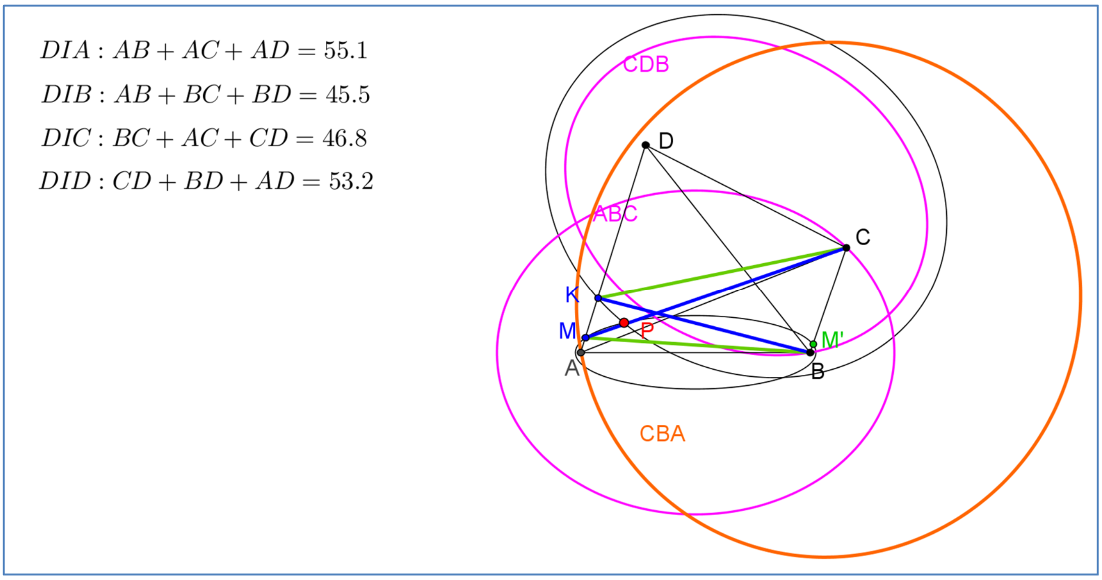
圖(29)的解說與圖(28)相同



圖(30)

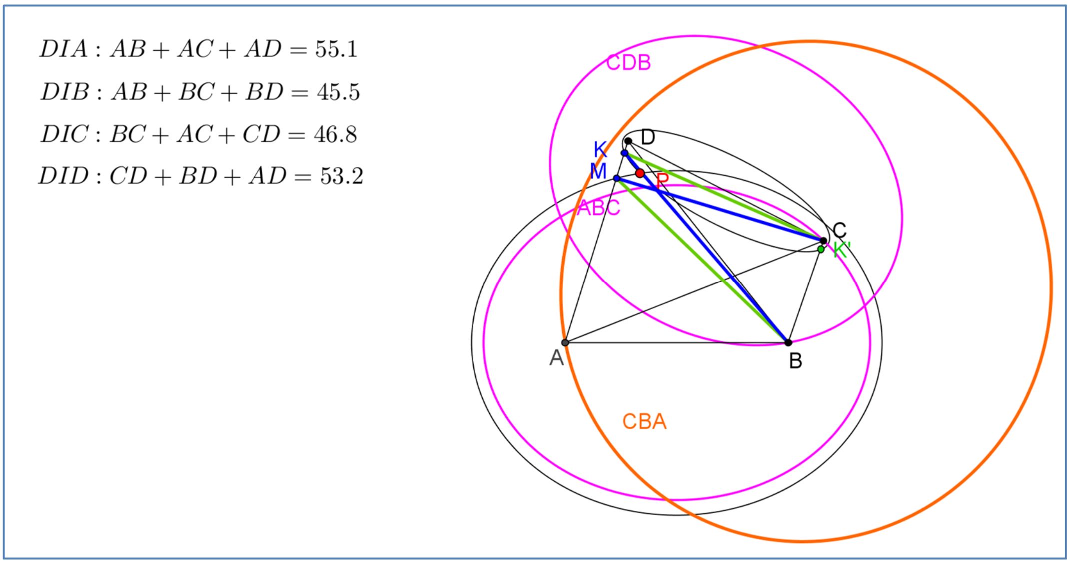
圖(30)的解說與圖(28)相同

第三種凸四邊形 ABCD 的類型$\angle A \leq 90^{\circ}, \angle B \geq 90^{\circ}$：有圖(21),圖(22),圖(23)等 3 種情況,加上補助線成為圖(31),圖(32),圖(33)等 3 種情況



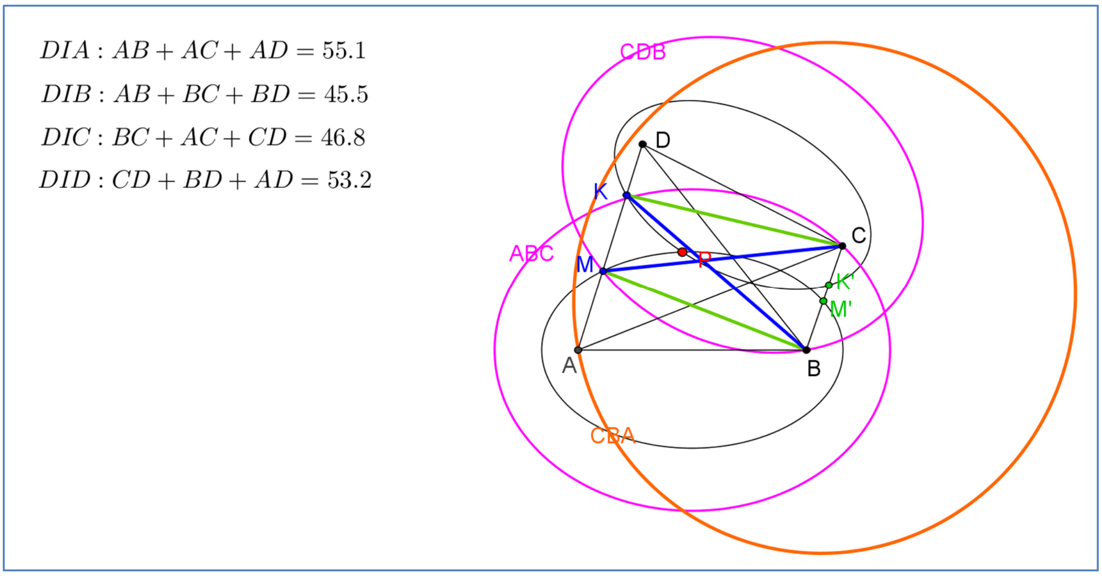
圖(31)

圖(31)的解說與圖(28)相同



圖(32)

圖(32)的解說與圖(28)相同



圖(33)

圖(33)的解說與圖(28)相同

我們解說完所有定理(5)的類型，歸納它證明的演算法則如下：

(1)找出 DIA,DIB,DIC,DID 四個中的最大值

(2)左右兩邊中找出有兩個交點(如 K,M)的一邊(如$\overline{AD}$)

(3)以兩交點邊的對邊(如$\overline{BC}$)兩端作為焦點，以兩交點邊的端點中定長和(長軸長)較大的來做橢圓(如 CBA 橢圓)

(4)則兩交點的邊(如$\overline{AD}$)，被包在定長和(長軸長)較大的橢圓內(如 CBA 橢圓)

(5)由橢圓的定長和與引理(2)，證明$\overline{KC}+\overline{MB}$小於或等於 CBA 橢圓的長軸長

(6)$\overline{PC}+\overline{PD}+\overline{PA}+\overline{PB}$小於或等於 DIA,DIB,DIC,DID 中的某一個

(7)DIA,DIB,DIC,DID 中的某一個小於或等於 DIA,DIB,DIC,DID 四個中的最大值

這個證明的法則對任意凸四邊形 ABCD 都適用

結語

這個研究困難在找尋任意凸四邊形的所有情況,需要順應各種情形按照上面的 7 個演算法則加以證明.

伍、研究結果

如上面所述的引理(1)(2)(3)(4)及定理(1)(2)(3)(4)(5)

陸、討論

我們比較擔心的是:有沒有漏掉一些凸四邊形的情形沒有找出來,縱然如此,但是我們仍然有信心將它的證明出來.

柒、結論

一個問題常有許多證明的方法,通常我們提出一個證法之後,會不斷思考它的證明過程,然後對先前的證法可能不甚滿意,於是改進的方法就誕生了,這是一個良性的互動,也是數學文明進步的原動力.過去的數學家(如:費瑪)沒有資訊科技的協助,卻能猜測出問題的結果(如:最大內角不超過 120 度的三角形的內部或邊上一點到三頂點距離和的最小值),這是很了不起的一件事,事隔四百多年之後的我們,有了很方便的資訊科技 Gsp,Geogebra.可以研究的幾何問題領域更為寬廣,證不出來的數學問題可以藉由動態模擬,可以藉助於計算工具,我們縱然沒有偉大數學家先見之明的智慧,卻能應用資訊科技把問題的結果估算出近似值.這是我們這一代人的幸運與福氣.

捌、參考文獻

李政豐、傅淑婷、陳昭地(2014).三角形三個極小值的探討.科學教育月刊 366 期(pp,11-23).臺北市:國立臺灣師範大學科學教育中心.

李政豐、朱啟台、陳昭地(2014).三角形的三個最大值定理的迴響.科學教育月刊 367 期(pp,24-34).臺北市:國立臺灣師範大學科學教育中心.

李政豐、陳昭地(2016).等腰梯形與平行四邊形的邊上或形內一點到四頂點距離和的最大值.科學教育月刊(被接受並安排刊登中).臺北市:國立臺灣師範大學科學教育中心.

【評語】050415

本作品探討凸四邊形上一點到各頂點距離和之極大值，首先本作品對於過往文獻有清楚以及誠實的呈現為第一個可喜之處。再者作者利用橢圓的方法得到很好的延伸，為另一可喜之處。若能夠對於四邊形的點於橢圓內外的討論有更清楚的呈現，以及對於極值發生於 DIA，...，DID 四種中的那一種有更多探討，會是相當優秀的作品。