

# 中華民國第 56 屆中小學科學展覽會 作品說明書

---

高級中等學校組 數學科

050414

擇你所愛，愛你所擇-柏拉圖問題之研究探討

學校名稱：新北市私立康橋高級中學

作者：  高二 楊皓丞  高二 張碩文  高二 李心怡	指導老師：  陳妙如  許曜瀚
---	-----------------------------

關鍵詞：柏拉圖問題、級數、極限

## 摘要

我們數學課學習到有關機率的課程時，老師再次的提到了經典的柏拉圖問題，我們對這個問題中的數學原理更感到好奇，經過文獻探討與一連串深入的研究、討論和證明後，我們找到原題目的解、此問題的延伸狀況和一般式的解。在此研究中，我們嚴謹地證明通式，使用程式模擬數據來驗證其可行性，並成功連結生活上的實際應用。正因為柏拉圖問題與現實生活有強烈的連結，具有趣味性和可探討性，我們才能解決更多有關選擇的問題，並將這些結果廣泛地應用於生活之中。

## 壹、研究動機

有一次國文課老師在介紹蘇格拉底的時候，講到了一個蘇格拉底跟柏拉圖的故事。當時我們就已經覺得這個故事很有趣且頗富哲理。後來，當我們學到機率後，對這個問題中隱含的數學原理感到好奇。經過文獻探討後，我們找到此問題的原題目的解。但我們並不滿足，所以我們繼續研究此問題的變形。最後我們開始了這次科展的研究與探討。

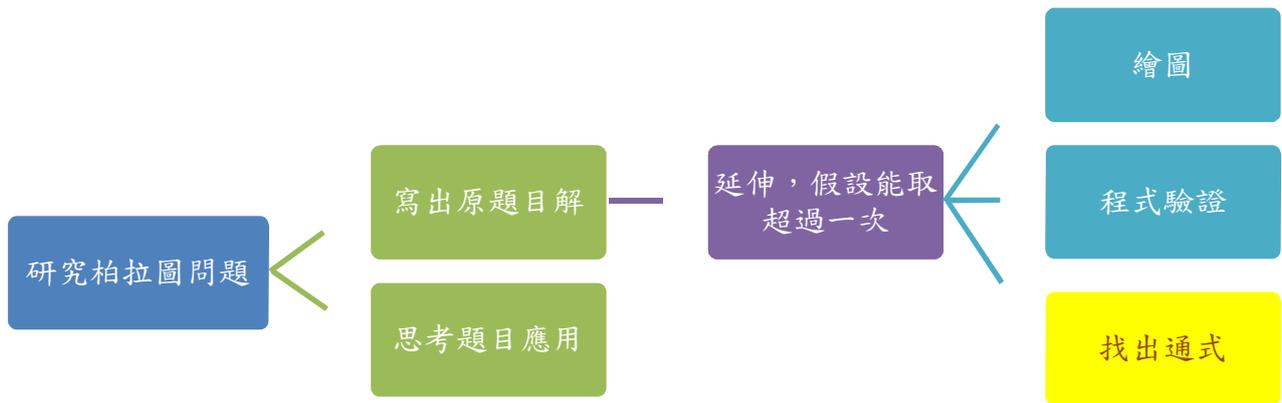
## 貳、研究目的

- 一、了解並探討柏拉圖問題的解。
- 二、討論柏拉圖問題的兩種延伸。
- 三、找到柏拉圖問題的通式。
- 四、將柏拉圖問題應用在生活上。

## 參、研究設備及器材

- 一、Desmos 函數圖形計算機 ([desmos.com/calculator](https://www.desmos.com/calculator))  
用來寫繪製給定的函數
- 二、紙筆  
用來推導公式及證明
- 三、c++程式  
撰寫程式來模擬數據，藉此驗證我們推導的公式

## 肆、研究過程與方法



### 一、柏拉圖問題

#### (一) 柏拉圖拾穗的故事

蘇格拉底和柏拉圖是有名的古希臘哲人，且蘇格拉底是柏拉圖的老師。有趣的是，蘇格拉底從不直接回答學生們的問題，而是以反問或實際行動讓學生們自己領悟答案。有一天柏拉圖向蘇格拉底請教什麼是愛情，蘇格拉底便請柏拉圖從稻田小徑中的一端走到另一端。路上會有許多稻穗，他請柏拉圖拾起最好的一株走出來。不過，拾取一株後，就要直接走出去，不能再拾取任何其他株了；也不能往回走去拾取之前看到的稻穗。柏拉圖走進稻田，路上看到許多好的稻穗，但他覺得之後還會有更好的，因此一直沒有拾取。不知不覺的，他已經過了稻田，手上卻沒有任何稻穗。蘇格拉底早已在另一端等他，並告訴他：「這就是愛情。」

這個問題深富哲學意義，但其中其實蘊含數學於其中。若以蘇格拉底的規則，柏拉圖想要有最大機率拾取最好的稻穗，策略應為何呢？因為目標是最好的稻穗，因此柏拉圖一定只會在遇到目前為止最好的稻穗時拾取。此狀況可能會在許多不同位置遇到，那應該在何時拾取呢？這就是我們本次科展要探討的主題。

#### (二) 數學化柏拉圖問題

令稻田中總共有 $n$ 株稻穗，且每株稻穗有一個隨機的相應值以代表這株稻穗有多好。若要以最大機率拾到最好的稻穗，正確的取法應為「前幾株稻穗只觀察而不拾取，之後只要一看看到更好的稻穗就將它拾取並走到盡頭」。

我們令只觀察不拾取的稻穗為前 $k$ 株，且此策略下拾到最好的稻穗的機率為 $P$ 。則我們的目的是找到使 $P$ 得到最大值的 $k$ ，以及此時的 $P$ 。

## 二、研究過程

### (一) 原題目的解

定義位於第  $i$  個位置的稻穗其值為  $x_i$ ，稻穗中的最大值為  $x_{\max}$ 、第 1 株到第  $i$  株稻穗中的最大值為  $x_{1st}$ 、次大值為  $x_{2nd}$  …依此類推。 $\text{pos}(x)$  為值  $x$  的稻穗所在的位置、事件  $A(i)$  為「取到第  $i$  株稻穗」、策略  $S(k)$  為「前  $k$  株稻穗只觀察而不拾取，之後看到更好的稻穗就將其拾取並走到盡頭」、意即  $P$  為「策略  $S(k)$  下取到最大值的機率」、 $P_{\max}$  為  $P$  的最大值，列式如下：

$$\begin{aligned}
 P &= \sum_{i=1}^n \text{Prob}(x_i = x_{\max} \cap A(i)) \\
 &= \sum_{i=1}^n \text{Prob}(x_i = x_{\max}) \times \text{Prob}(A(i) | x_i = x_{\max}) \\
 &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \times \text{Prob}(A(i) | x_i = x_{\max}) \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{i=k+1}^n \text{Prob}(A(i) | x_i = x_{\max}) \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{i=k+1}^n \text{Prob}(\text{pos}(x_{2nd}) \leq k) \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{i=k+1}^n \frac{k}{i-1} \\
 &= \frac{k}{n} \sum_{i=k}^{n-1} \frac{1}{i}
 \end{aligned}$$

此處，因我們前  $k$  株稻穗只觀察不取，故拾取到前  $k$  株稻穗的機率為 0  
 若第 1 株到第  $i$  株稻穗中的次大值出現在前  $k$  株稻穗，且第  $i$  株是最大值，才能成功拾取到第  $i$  株為最大值

因為所求的  $k$  不會是個定值，而是隨著  $n$  的取值而改變。因此我們想知道最大機率發生時， $n$  與  $k$  的比例，為方便計算，我們令  $t$  為  $k$  與  $n$  的比值，即  $\frac{k}{n}$  (此比例會是定值)。然後，我們將  $n$  趨近無限(也就是  $k$  也跟著趨近無限，即  $k=nt$ )，以便求  $t$  的最佳值。

$$\begin{aligned}
 P &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k}{n} \sum_{i=k}^{n-1} \frac{1}{i} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} t \sum_{i=k}^{n-1} \frac{1}{i} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} t \left( \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} \dots + \frac{1}{n-1} \right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} t \int_k^{n-1} \frac{1}{x} dx \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} t (\ln(n-1) - \ln k) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} t \left( \ln \frac{n-1}{k} \right) \\
 &= t \ln \frac{1}{t} \\
 &= -t \ln t
 \end{aligned}$$

因此我們得到簡化後的式子：

$$P = -t \ln t$$

將此式一次微分後得到

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} P &= \frac{d}{dt}(-t \ln t) \\ &= -(\ln t + 1) \end{aligned}$$

將此式二次微分後得到

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} P &= \frac{d}{dt}(-(\ln t + 1)) \\ &= -\frac{1}{t} \end{aligned}$$

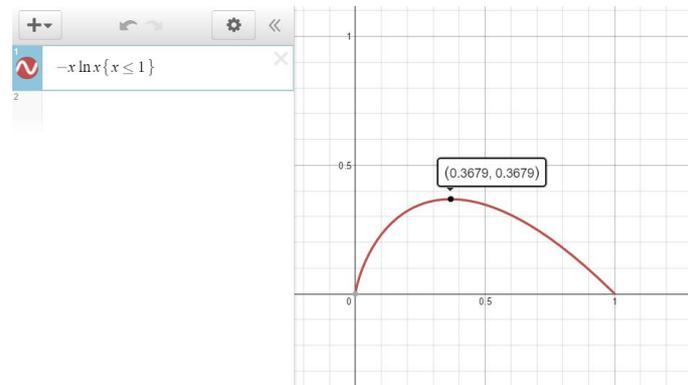
由上面式子，我們可以知道函數  $P$  的斜率單調遞減，因此函數  $P$  在斜率為 0 時，可以取到唯一最大值。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} P &= 0 \\ \rightarrow -(\ln t + 1) &= 0 \\ \rightarrow t &= e^{-1} \approx 0.368 \\ \rightarrow P_{\max} &= -e^{-1} \ln e^{-1} \\ &= e^{-1} \approx 0.368 \end{aligned}$$

我們計算出當  $t = e^{-1}$  時，成功取到最大值稻穗的機率會達到最大值  $e^{-1}$ ，也就是 36.8%。舉例來說，當  $n = 8$  時，應該要取  $k = 8 \times e^{-1} \approx 3$ 。那麼，如果  $n \times t$  不接近任何整數呢？我們舉個例，當  $n = 10$  時，最佳的  $k$  應該為  $10 \times e^{-1} \approx 3.68$ 。此時我們可以找出接近 3.68 的兩個整數 3 和 4，並將他們代回機率函數來選比較高的那個。此例中  $k = 3$  時  $P = -0.3 \ln 0.3 \approx 0.361$ ； $k = 4$  時  $P = 0.4 \ln 0.4 \approx 0.366$ 。因此選擇取  $k = 4$  較好。

在這個部分，我們成功地計算出最佳的  $t = \frac{k}{n} = e^{-1}$  這個通式，算出任意總稻穗數的最佳  $k$  值。

下圖為  $P$  的函數圖形，本研究中使用的函數繪圖機為 Desmos 函數圖形計算機 (desmos.com/calculator)，可繪製出任意給定函數的圖形。



(圖 1)  $P$  的函數圖形

我們可以從  $P$  的函數圖形中看出此函數在斜率為 0 時有最大值 0.3679，與我們求出的解相符合。

(二) 柏拉圖問題的第一個延伸—複數機會柏拉圖問題

原柏拉圖問題的討論，只適用在當下只能選擇一株稻穗的情況下，所做出的選擇。

那麼，我們想知道有沒有辦法推廣柏拉圖問題到挑選過程中可以取不只一株稻穗的狀況。

於是，我們決定開始探討「複數機會柏拉圖問題」。意即，找出在過程中可以取  $a$  株稻穗的狀況下，最佳的  $k$  及成功取到最大值的機率  $P$ 。定義  $P_{a^{th}}$  為「使用策略  $S(k)$  時，第  $a$  次機會拾取的稻穗是最大值的機率」、 $P_a$  為「過程中可以取  $a$  株稻穗的狀況下使用策略  $S(k)$  時，其中一次拾取的稻穗是最大值的機率」、 $P_{a \max}$  為  $P_a$  的最大值、事件  $A(t, i)$  為「第  $t$  次取到第  $i$  株稻穗」。

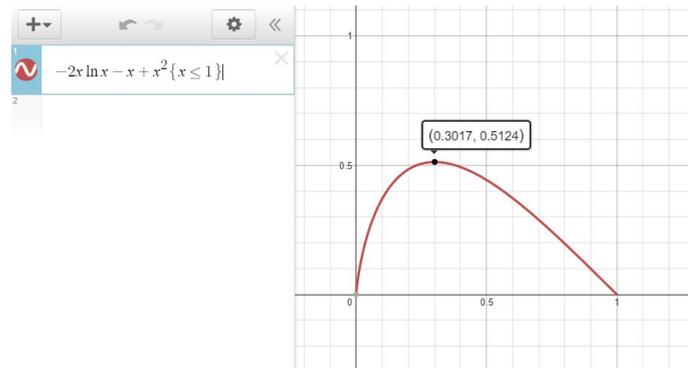
在推廣到  $a$  株稻穗的通式前，我們先來討論  $a = 2$  的情況，即過程中可以取 2 株稻穗。

$$\begin{aligned}
 P_2 &= P_{1^{st}} + P_{2^{nd}} \\
 &= P_{1^{st}} + \sum_{i=1}^n \text{Prob}(x_i = x_{\max} \cap A(2, i)) \\
 &= P_{1^{st}} + \sum_{i=1}^n \text{Prob}(x_i = x_{\max}) \times \text{Prob}(A(2, i) | x_i = x_{\max}) \\
 &= P_{1^{st}} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \times \text{Prob}(A(2, i) | x_i = x_{\max}) \\
 &= P_{1^{st}} + \frac{1}{n} \sum_{i=k+2}^n \text{Prob}(A(2, i) | x_i = x_{\max}) \\
 &= P_{1^{st}} + \frac{1}{n} \sum_{i=k+2}^n \text{Prob}(i-1 \geq \text{pos}(x_{2^{nd}}) > k \cap k \geq \text{pos}(x_{3^{rd}})) \\
 &= P_{1^{st}} + \frac{1}{n} \sum_{i=k+2}^n \text{Prob}(i-1 \geq \text{pos}(x_{2^{nd}}) > k) \times \text{Prob}(k \geq \text{pos}(x_{3^{rd}}) | i-1 \geq \text{pos}(x_{2^{nd}}) > k) \\
 &= P_{1^{st}} + \frac{1}{n} \sum_{i=k+2}^n \left(1 - \frac{k}{i-1}\right) \times \frac{k}{i-2} \\
 &= P_{1^{st}} + \left(\frac{1}{n} \sum_{i=k+2}^n \frac{k}{i-2}\right) - \left(\frac{1}{n} \sum_{i=k+2}^n \frac{k^2}{(i-1)(i-2)}\right) \\
 &= P_{1^{st}} + \left(\frac{k}{n} \sum_{i=k+2}^n \frac{1}{i-2}\right) - \left(\frac{k^2}{n} \sum_{i=k+2}^n \frac{1}{(i-1)(i-2)}\right) \\
 &= P_{1^{st}} + \left(\frac{k}{n} \sum_{i=k}^{n-2} \frac{1}{i}\right) - \frac{k^2}{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{n-1}\right)
 \end{aligned}$$

為了方便計算，我們令  $t$  為  $k$  與  $n$  比值，即  $\frac{k}{n}$ 。然後將  $n$  趨近無限，以便求  $t$  的最佳值。

$$\begin{aligned}
 P_2 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( P_{1st} + \left( \frac{k}{n} \sum_{i=k}^{n-2} \frac{1}{i} \right) - \frac{k^2}{n} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{n-1} \right) \right) \\
 &= -t \ln t - t \ln t - t + t^2 \\
 &= -2t \ln t - t + t^2
 \end{aligned}$$

同樣的，在二次微分後可看出函數  $P_2$  的斜率單調遞減，代表函數  $P_2$  在斜率為 0 時，可取到唯一最大值。



(圖 2)  $P_2$  的函數圖形

$$\frac{d}{dt} P_2 = 0$$

$$\rightarrow -2 \ln t + 2t - 3 = 0$$

$$\rightarrow 2 \ln t = 2t - 3$$

$$\rightarrow t \approx 0.302$$

此處可用作圖大略找出  $t$  的值，或是以電腦計算機繪出  $P_2$  的函數圖形並直接求取  $t$  的值。再將  $t$  代回  $P_2$  可得到  $P_{2\max} \approx 0.512$ 。

為了找出通式，我們決定討論  $a = 3$  的狀況。

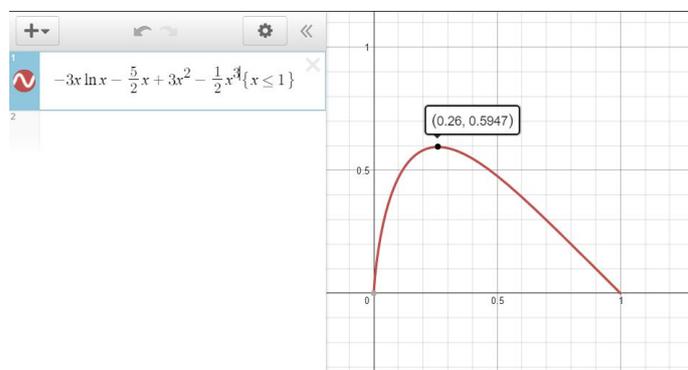
$$P_3 = P_{1st} + P_{2nd} + P_{3rd}$$

$$\begin{aligned} P_{3rd} &= \sum_{i=1}^n \text{Prob}(x_i = x_{\max} \cap A(3, i)) \\ &= \sum_{i=1}^n \text{Prob}(x_i = x_{\max}) \times \text{Prob}(A(3, i) | x_i = x_{\max}) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=k+3}^n \text{Prob}(A(3, i) | x_i = x_{\max}) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=k+3}^n \text{Prob}(i-1 \geq \text{pos}(x_{2nd}) > k \cap i-1 \geq \text{pos}(x_{3rd}) > k \cap k \geq \text{pos}(x_{4th})) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=k+3}^n \left(1 - \frac{k}{i-1}\right) \times \left(1 - \frac{k}{i-2}\right) \times \frac{k}{i-3} \\ &= \left(\frac{1}{n} \sum_{i=k+3}^n \frac{k}{i-3}\right) - \left(\frac{1}{n} \sum_{i=k+3}^n \frac{k^2}{(i-1)(i-3)}\right) - \left(\frac{1}{n} \sum_{i=k+3}^n \frac{k^2}{(i-2)(i-3)}\right) + \left(\frac{1}{n} \sum_{i=k+3}^n \frac{k^3}{(i-1)(i-2)(i-3)}\right) \\ &= \left(\frac{k}{n} \sum_{i=k+3}^n \frac{1}{i-3}\right) - \left(\frac{k^2}{n} \sum_{i=k+3}^n \frac{1}{(i-1)(i-3)}\right) - \left(\frac{k^2}{n} \sum_{i=k+3}^n \frac{1}{(i-2)(i-3)}\right) + \left(\frac{k^3}{n} \sum_{i=k+3}^n \frac{1}{(i-1)(i-2)(i-3)}\right) \\ &= \left(\frac{k}{n} \sum_{i=k+3}^n \frac{1}{i-3}\right) - \frac{k^2}{2n} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k-1} - \frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1}\right) - \frac{k^2}{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{n-2}\right) + \frac{k^3}{2n} \left(\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(n-1)(n-2)}\right) \end{aligned}$$

為了方便計算，我們令  $t$  為  $k$  與  $n$  比值，即  $\frac{k}{n}$ 。然後將  $n$  趨近無限，以便求  $t$  的最佳值。

$$\begin{aligned} P_3 &= \lim_{n \rightarrow \infty} (P_2 + P_{3rd}) \\ &= (-2t \ln t - t + t^2) - t \ln t - 2(t - t^2) + \frac{1}{2}(t - t^3) \\ &= -3t \ln t - \frac{5}{2}t + 3t^2 - \frac{1}{2}t^3 \end{aligned}$$

根據同樣的方法可得到  $P_3$  的斜率單調遞減，因此會在斜率為 0 時取到最大值。用作圖或電腦繪圖機可求取斜率為 0 時， $t \approx 0.260$ ，代回機率函數得到  $P_{3\max} \approx 0.595$



(圖 3)  $P_3$  的函數圖形

(三) 尋找複數機會柏拉圖問題的通式

經過複數機會柏拉圖問題中  $a = 2$ 、 $a = 3$  的討論，我們決定觀察其中的規律並以數學方法試圖尋找通式。我們利用前面的方法列出了  $P_1 \sim P_5$  的機率函數，並列表討論係數之間的關係。

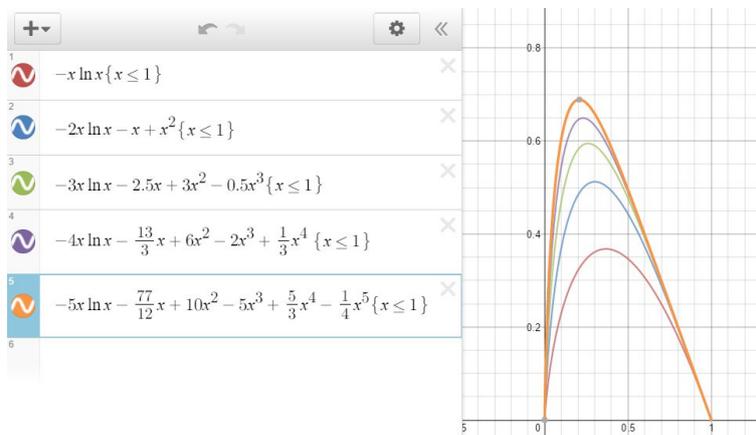
$$P_1 = -t \ln t$$

$$P_2 = -2t \ln t - (t - t^2)$$

$$P_3 = -3t \ln t - 3(t - t^2) + \frac{1}{2}(t - t^3)$$

$$P_4 = -4t \ln t - 6(t - t^2) + 2(t - t^3) - \frac{1}{3}(t - t^4)$$

$$P_5 = -5t \ln t - 10(t - t^2) + 5(t - t^3) - \frac{5}{3}(t - t^4) + \frac{1}{4}(t - t^5)$$

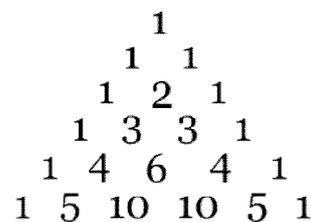


(圖 4)  $P_1 \sim P_5$  的函數圖形

我們將係數列成下列表格，觀察並找尋其規律。我們經過觀察後發現係數的增量和  $a$  的關係與巴斯卡三角形有關。

(表 1) 項次與係數增量之關係表

係數	$t \ln t$	增量	$t - t^2$	增量	$t - t^3$	增量	$t - t^4$	增量	$t - t^5$	增量
$a = 1$	-1	-1								
$a = 2$	-2	-1	-1	-1						
$a = 3$	-3	-1	-3	-2	1/2	1/2				
$a = 4$	-4	-1	-6	-3	2	3/2	-1/3	-1/3		
$a = 5$	-5	-1	-10	-4	5	6/2	-5/3	-4/3	1/4	1/4



(圖 5) 巴斯卡三角形

當  $a = 3$  時，各項增量分別為  $-C_0^2$ 、 $-C_1^2$ 、 $\frac{1}{2}C_2^2$ 。

當  $a = 4$  時，各項增量分別為  $-C_0^3$ 、 $-C_1^3$ 、 $\frac{1}{2}C_2^3$ 、 $-\frac{1}{3}C_3^3$ 。

當  $a = 5$  時，各項增量分別為  $-C_0^4$ 、 $-C_1^4$ 、 $\frac{1}{2}C_2^4$ 、 $-\frac{1}{3}C_3^4$ 、 $\frac{1}{4}C_4^4$ 。

因此我們可以推測：

當  $a = 6$  時，各項增量分別為  $-C_0^5$ 、 $-C_1^5$ 、 $\frac{1}{2}C_2^5$ 、 $-\frac{1}{3}C_3^5$ 、 $\frac{1}{4}C_4^5$ 、 $-\frac{1}{5}C_5^5$ 。

所以，當  $a = \alpha$  時， $P_\alpha$  中  $t \ln t$  的係數為  $-\sum_{i=0}^{\alpha-1} C_0^i = -C_1^\alpha = -\alpha$ ； $t-t^2$  的係數為  $-\sum_{i=1}^{\alpha-1} C_1^i = -C_2^\alpha$ ；

$t-t^3$  的係數為  $\frac{1}{2} \sum_{i=2}^{\alpha-1} C_2^i = \frac{1}{2} C_3^\alpha$ ； $t-t^4$  的係數為  $-\frac{1}{3} \sum_{i=3}^{\alpha-1} C_3^i = -\frac{1}{3} C_4^\alpha \dots$  依此類推。

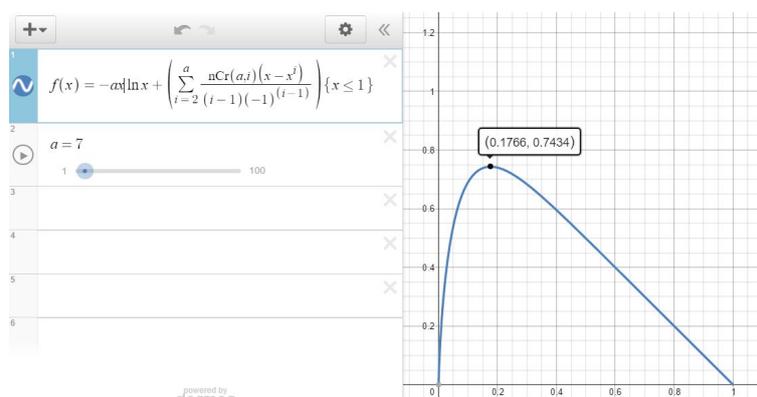
最後我們整理出通式：

$$P_\alpha = -\alpha t \ln t + \sum_{i=2}^{\alpha} \frac{C_i^\alpha (t-t^i)}{(i-1)(-1)^{i-1}}$$

舉個例來說，想要知道共有 80 株稻穗且有七次的機會可以取稻穗時，應該取  $k$  值為何，以及此時取得最佳稻穗的機率，就先以通式列出機率函式

$$\begin{aligned} P_7 &= -7t \ln t - C_2^7(t-t^2) + \frac{1}{2}C_3^7(t-t^3) - \frac{1}{3}C_4^7(t-t^4) + \frac{1}{4}C_5^7(t-t^5) - \frac{1}{5}C_6^7(t-t^6) + \frac{1}{6}C_7^7(t-t^7) \\ &= -7t \ln t - \frac{223}{20}t + 21t^2 - \frac{35}{2}t^3 + \frac{35}{3}t^4 - \frac{21}{4}t^5 + \frac{7}{5}t^6 - \frac{1}{6}t^7 \end{aligned}$$

接著，用電腦繪圖機計算出函數取到最大值時  $t \approx 0.177$ ，代回機率函數得到  $P_{7\max} \approx 0.743$ 。再算出  $k = n \times t \approx 80 \times 0.177 = 14.16$ ，將最接近的整數 14 及 15 帶回機率函數，得到  $k = 14$  時取到最大值的機率最高。



(圖 6) 通式及  $P_7$  的函數圖形

(四) 複數機會柏拉圖問題-通式的證明

$$\begin{aligned}
 P_{\alpha}^{th} &= \sum_{i=1}^n \text{Prob}(x_i = x_{\max} \cap \text{第}\alpha\text{次取到第}i\text{株稻穗}) \\
 &= \sum_{i=1}^n \text{Prob}(x_i = x_{\max}) \times \text{Prob}(\text{第}\alpha\text{次取到第}i\text{株稻穗} \mid x_i = x_{\max}) \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{i=k+\alpha}^n \text{Prob}(\text{第}\alpha\text{次取到第}i\text{株稻穗} \mid x_i = x_{\max}) \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{i=k+\alpha}^n \left( \prod_{j=1}^{\alpha-1} 1 - \frac{k}{i-j} \right) \times \frac{k}{i-\alpha}
 \end{aligned}$$

我們可以由此看出，展開後分子為  $k^\beta$  的有  $C_{\beta-1}^{\alpha-1}$  項（這些項的正負號是相同的，在以下證明中不考慮正負）。若我們能證明這  $C_{\beta-1}^{\alpha-1}$  項在  $\beta > 1$ ，取  $n$  趨近無限時都等於  $(-1)^{\beta-1} \frac{1}{\beta-1} (t-t^\beta)$ ； $\beta = 1$ ，取  $n$  趨近無限時都等於  $-\ln t$ ，就能印證我們前面觀察到的係數增量關係，進而完成整個證明。

令展開後分子為  $k^\beta$  的項的集合為  $B(\beta)$ ，則  $|B(\beta)| = C_{\beta-1}^{\alpha-1}$ ， $B(\beta)$  中最小的一項為

$$\frac{k^\beta}{n} \sum_{i=k+\alpha}^n \left( \frac{1}{i-\alpha} \prod_{j=1}^{\beta-1} \frac{1}{i-j} \right), \text{ 最大的一項為 } \frac{k^\beta}{n} \sum_{i=k+\alpha}^n \left( \prod_{j=\alpha-\beta+1}^{\alpha} \frac{1}{i-j} \right).$$

可得到

$$\begin{aligned}
 &\forall x \in B(\beta) \left[ \frac{k^\beta}{n} \sum_{i=k+\alpha}^n \left( \prod_{j=1}^{\beta} \frac{1}{i-j} \right) \leq x \leq \frac{k^\beta}{n} \sum_{i=k+\alpha}^n \left( \prod_{j=\alpha-\beta+1}^{\alpha} \frac{1}{i-j} \right) \right] \\
 \rightarrow &\forall x \in B(\beta) \left[ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k^\beta}{n} \sum_{i=k+\alpha}^n \left( \prod_{j=1}^{\beta} \frac{1}{i-j} \right) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} x \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k^\beta}{n} \sum_{i=k+\alpha}^n \left( \prod_{j=\alpha-\beta+1}^{\alpha} \frac{1}{i-j} \right) \right] \\
 \rightarrow &\forall x \in B(\beta) \left[ \frac{1}{\beta-1} (t-t^\beta) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} x \leq \frac{1}{\beta-1} (t-t^\beta) \right] \\
 \rightarrow &\forall x \in B(\beta) \left[ \lim_{n \rightarrow \infty} x = \frac{1}{\beta-1} (t-t^\beta) \right]
 \end{aligned}$$

考慮正負號後，即可以與上面觀察的結果對應。

至於  $\beta = 1$ ，也就是分子為  $k$  的就只會有  $\frac{1}{n} \sum_{i=k+\alpha}^n \frac{k}{i-\alpha}$  一項，而這項取極限後會得到  $-\ln t$ ，也與上面的觀察結果相符合。通式證畢。

(五) 柏拉圖問題的第二個延伸—複數目標柏拉圖問題

在原題目及第一個延伸的討論中，我們都執著在我們必須要取到最大值的機率函數。

那麼，如果我們不這麼執著，結果又會怎麼樣呢？也就是說，我們一樣只能拾取一株，但可以接受的稻穗不只最大的呢？我們決定開始探討「複數目標柏拉圖問題」-可接受前  $b$  大值的狀況下，最佳的  $k$  及成功的機率  $P$ 。定義  $P^{b^{th}}$  為「使用策略  $S(k)$  時，拾取到的稻穗是第  $b$  大值的機率」、 $P^b$  為「可接受前  $b$  大值的狀況下使用策略  $S(k)$  時，拾取到的稻穗是最大值的機率」、 $P^{b \max}$  為  $P^b$  的最大值、 $x_{r_2}$  為稻田中第二大的稻穗、 $x_{r_3}$  為稻田中第三大的稻穗，依此類推。

先討論  $b = 2$  的狀況：

$$\begin{aligned}
 P^2 &= P + P^{2^{nd}} \\
 P^{2^{nd}} &= \sum_{i=1}^n \text{Prob}(x_i = x_{r_2} \cap A(i)) \\
 &= \sum_{i=1}^n \text{Prob}(x_i = x_{r_2}) \times \text{Prob}(A(i) | x_i = x_{\max}) \\
 &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \times \text{Prob}(A(i) | x_i = x_{r_2}) \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{i=k+1}^n \text{Prob}(A(i) | x_i = x_{r_2}) \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{i=k+1}^n \text{Prob}(\text{pos}(x_{\max}) > i \cap \text{pos}(x_{2^{nd}}) \leq k) \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{i=k+1}^n \text{Prob}(\text{pos}(x_{\max}) > i) \times \text{Prob}(\text{pos}(x_{2^{nd}}) \leq k | \text{pos}(x_{\max}) > i) \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{i=k+1}^n \left(1 - \frac{i-1}{n-1}\right) \times \frac{k}{i-1} \\
 &= \frac{k}{n} \sum_{i=k+1}^n \frac{1}{i-1} - \frac{1}{n-1} \\
 &= \left(\frac{k}{n} \sum_{i=k+1}^n \frac{1}{i-1}\right) - \frac{k(n-k)}{n(n-1)} \\
 P^2 &= \left(\frac{2k}{n} \sum_{i=k+1}^n \frac{1}{i-1}\right) - \frac{k(n-k)}{n(n-1)}
 \end{aligned}$$

同樣令  $t = \frac{k}{n}$ ， $n$  趨近無限，可得到

$$\begin{aligned} P^2 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \left( \frac{2k}{n} \sum_{i=k+1}^n \frac{1}{i-1} \right) - \frac{k(n-k)}{n(n-1)} \right) \\ &= -2t \ln t - t(1-t) \\ &= -2t \ln t - t + t^2 \end{aligned}$$

我們發現  $P^2$  所推導出的函數跟  $P_2$  是一樣的，因此  $k$  的取值及  $P^{2\max}$  都跟複數機會柏拉圖

問題中  $a = 2$  的狀況時是一樣的。

再來討論  $b = 3$  的狀況：

$$P^3 = P + P^{2^{nd}} + P^{3^{rd}}$$

$$\begin{aligned} P^{3^{rd}} &= \sum_{i=1}^n \text{Prob}(x_i = x_{r_3} \cap A(i)) \\ &= \sum_{i=1}^n \text{Prob}(x_i = x_{r_3}) \times \text{Prob}(A(i) | x_i = x_{\max}) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \times \text{Prob}(A(i) | x_i = x_{r_3}) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=k+1}^n \text{Prob}(A(i) | x_i = x_{r_3}) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=k+1}^n \text{Prob}(\text{pos}(x_{\max}) > i \cap \text{pos}(x_{r_2}) > i \cap \text{pos}(x_{2^{nd}}) \leq k) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=k+1}^n \text{Prob}(\text{pos}(x_{\max}) > i \cap \text{pos}(x_{r_2}) > i) \times \text{Prob}(\text{pos}(x_{2^{nd}}) \leq k | \text{pos}(x_{\max}) > i \cap \text{pos}(x_{r_2}) > i) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=k+1}^n \left( 1 - \frac{i-1}{n-1} \right) \times \left( 1 - \frac{i-1}{n-2} \right) \times \frac{k}{i-1} \\ &= \frac{k}{n} \sum_{i=k+1}^n \left( \frac{1}{i-1} - \frac{1}{n-1} \right) \times \left( 1 - \frac{i-1}{n-2} \right) \\ &= \left( \frac{k}{n} \sum_{i=k+1}^n \frac{1}{i-1} \right) - \frac{k(n-k)}{n(n-1)} - \frac{k(n-k)}{n(n-2)} + \frac{k}{n} \sum_{i=k+1}^n \frac{i-1}{(n-1)(n-2)} \\ &= \left( \frac{k}{n} \sum_{i=k+1}^n \frac{1}{i-1} \right) - \frac{k(n-k)}{n(n-1)} - \frac{k(n-k)}{n(n-2)} + \frac{k(k+n-1)(n-k)}{2n(n-1)(n-2)} \\ P^3 &= \left( \frac{3k}{n} \sum_{i=k+1}^n \frac{1}{i-1} \right) - \frac{2k(n-k)}{n(n-1)} - \frac{k(n-k)}{n(n-2)} + \frac{k(k+n-1)(n-k)}{2n(n-1)(n-2)} \end{aligned}$$

同樣令  $t = \frac{k}{n}$ ， $n$  趨近無限，我們可得到

$$\begin{aligned}
 P^3 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{3k}{n} \sum_{i=k+1}^n \frac{1}{i-1} \right) - \frac{2k(n-k)}{n(n-1)} - \frac{k(n-k)}{n(n-2)} + \frac{k(k+n-1)(n-k)}{2n(n-1)(n-2)} \\
 &= -3t \ln t - 3t(1-t) + \frac{1}{2}t(t+1)(1-t) \\
 &= -3t \ln t - \frac{5}{2}t + 3t^2 - \frac{1}{2}t^3
 \end{aligned}$$

同樣的，我們發現  $P^3$  推導出的函數跟  $P_3$  是一樣的，因此  $k$  的取值及  $P^{3\max}$  都跟複數機會柏拉圖問題中  $a = 3$  的狀況時是一樣的。

在經過  $b = 2$ 、 $b = 3$  的推導，我們相信對於任何正整數  $c$ ，會有  $P^c = P_c$ ；如此一來，複數機會柏拉圖問題的通式就是複數目標柏拉圖問題的通式。至於詳細嚴謹的證明，需要用到連續正整數的  $k$  次方和，我們目前還在了解與學習。不過在下面我們會用大量資料分析的方式說明此假設的正確性。

## (六) 程式的驗證

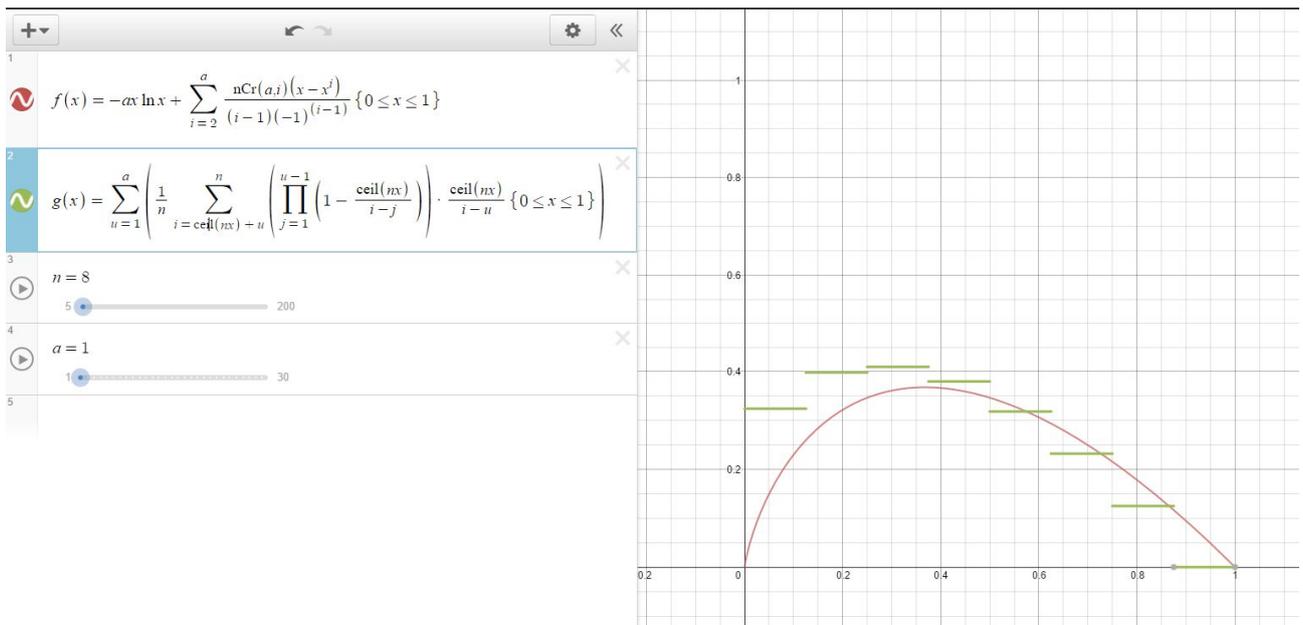
我們以程式來模擬柏拉圖問題的拾取過程。首先，在隨機的範圍下隨機的產生個相異的  $n$  數。決定  $k$  值和機會數後，實際模擬並統計在 100000 次中，有幾次成功取到最大值，及取到最大值的比率。

### 1、原題目的程式驗證

當  $n = 8$  時，應該要在  $k = 3$  時機率得到最大，以下是程式測試結果：

$k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$P$	0.123	0.326	0.398	0.413	0.381	0.318	0.233	0.125	0

此結果完全符合我們推導的公式  $P = \frac{k}{n} \sum_{i=k}^{n-1} \frac{1}{i}$ ，且描出來的機率函數形狀相似於  $P = -t \ln t$  的函數曲線，最大值也發生在  $k = 3$ ，其中機率略與估計出的 0.368 不同的原因是  $n$  太小了。



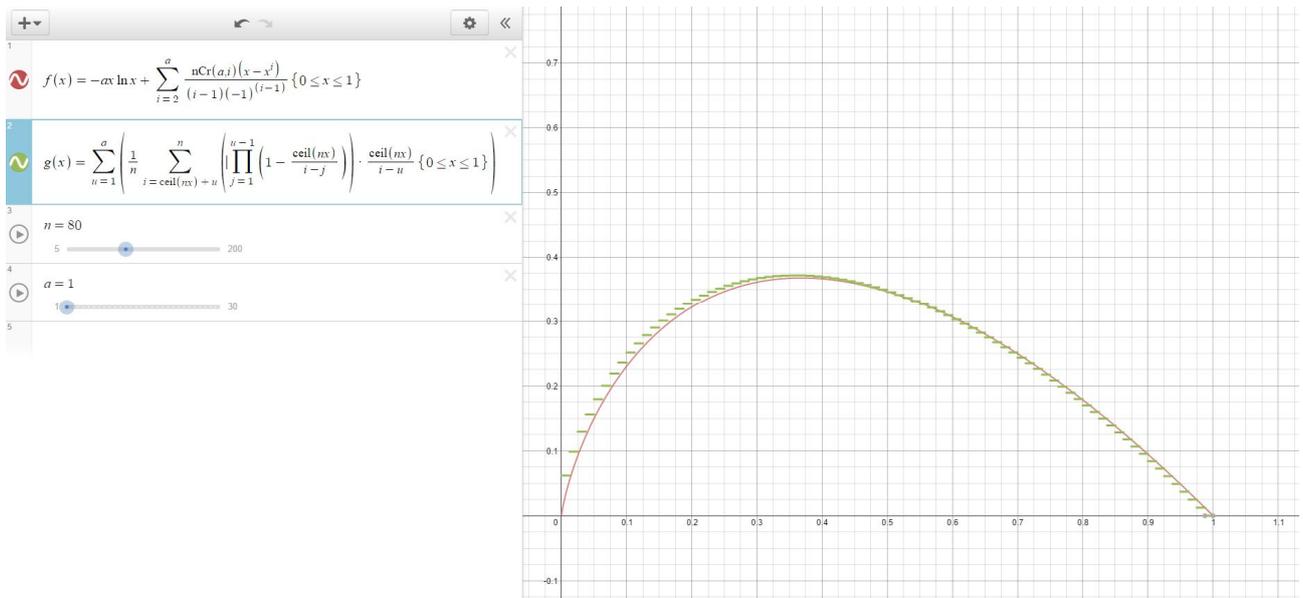
(圖 7)  $P = \frac{k}{n} \sum_{i=k}^{n-1} \frac{1}{i}$  和  $P = -t \ln t$  在  $n$  很小時的比較

當  $n = 80$  時，應該要在  $k = 29$  時機率得到最大，以下是程式測試結果：

$k$	...	27	28	29	30	31	32	33	...
$P$		0.382	0.382	0.383	0.383	0.382	0.380	0.380	

此結果完全符合我們推導的公式  $P = \frac{k}{n} \sum_{i=k}^{n-1} \frac{1}{i}$ ，且描出來的機率函數形狀相似於  $P = -t \ln t$

的函數曲線，最大值也發生在  $k = 29$ ，其中因為  $n$  變大了，機率略與估計出的 0.368 誤差已非常的微小。



(圖 8)  $P = \frac{k}{n} \sum_{i=k}^{n-1} \frac{1}{i}$  和  $P = -t \ln t$  在  $n$  較大時的比較

我們可以看到，我們的函數  $P = -t \ln t$  可以在  $n$  為任何值時找到  $k$  的最佳值，且複雜度不受  $n$  的影響，因為我們只需要嘗試最接近  $n \times t$  的兩個整數即可。至於實際取到的機率，我們的函數可以給出估計值(此估計值為下限，也就是實際機率會大於等於估計值)。

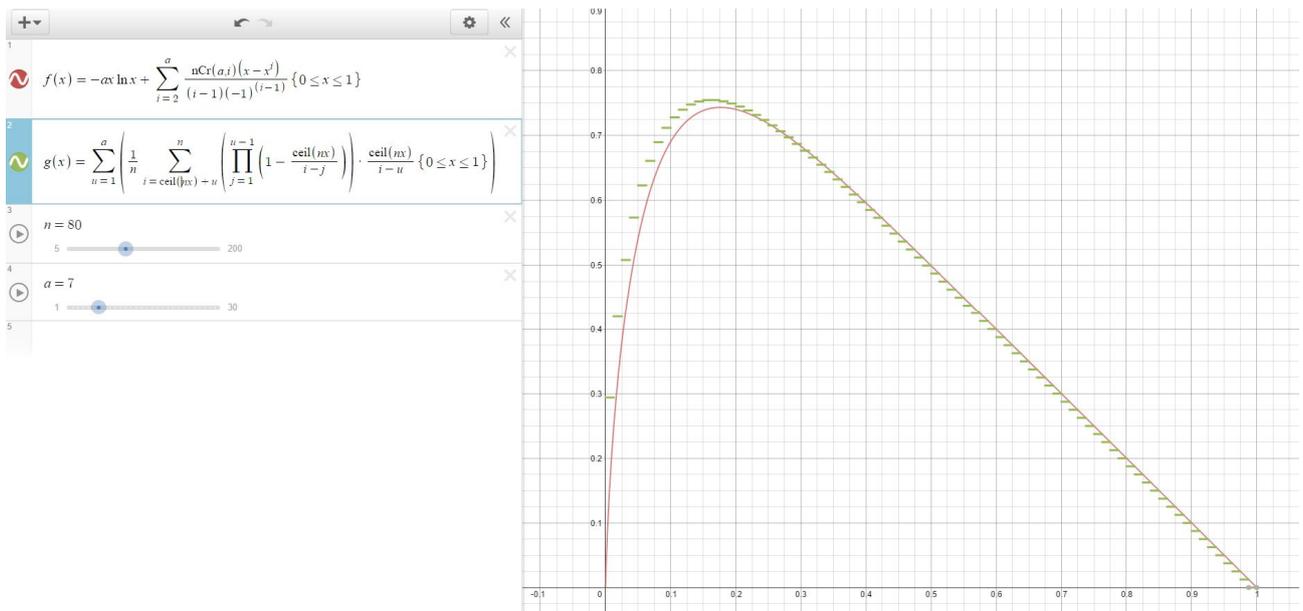
若要準確機率，在  $n$  很小時，可以代回  $P = \frac{k}{n} \sum_{i=k}^{n-1} \frac{1}{i}$  的函數求得；在  $n$  較大時，估計值可以直接當作實際機率使用就好。事實上，在  $n = 30$  時，估計值和實際機率就已經差不到 1 個百分點。

## 2、複數機會柏拉圖問題的程式驗證

當  $n = 80$  時， $a = 7$  時應該要在  $k = 14$  時機率得到最大，以下是程式測試結果：

$k$	...	11	12	13	14	15	16	17	...
$P$		0.755	0.760	0.760	0.761	0.760	0.756	0.752	

在測試次數極大的狀況下，此結果與我們推導出的公式還是符合的，誤差極小，可以確保我們推導出的公式的正確性。



(圖 9)複數機會柏拉圖問題中實際機率函數與通式函數的比較

### 3、複數目標柏拉圖問題的程式驗證

根據我們前面的猜測，當  $n = 80$  時， $b = 7$  時應該要在  $k = 14$  時機率得到最大，以下是程式測試結果：

$k$	...	11	12	13	14	15	16	17	...
$P$		0.752	0.757	0.758	0.761	0.759	0.756	0.752	

在測試次數極大的狀況下，跑出來的機率和複數機會柏拉圖問題中程式跑出來的結果誤差極小，我們認為這樣的數據，加上  $b = 2$ 、 $b = 3$  時都已證明函數相等於  $a = 2$ 、 $a = 3$  時，已足以說明恆有  $P^c = P_c$ 。

## (七) 柏拉圖問題的應用

在生活中，不乏柏拉圖問題可以應用之處，舉幾個例子如下：

1、秘書問題：公司要聘請秘書時，如果以之總求職人數，且必須要當下決定是否錄取，就可使用柏拉圖問題的解來處理。例如：有 100 名求職者的話，應該要取  $k = 100 \times 0.368 = 36.8$ ，取最接近的整數 37。前 37 位觀察其能力，但不錄取，後面一看到能力更強者就錄取，能有最大機率錄取最好的人。

2、適婚期問題：由於時間不可能倒退，因此若要決定是否要在某年齡時與某人結婚，可以用柏拉圖問題來討論。假如一個人適合結婚成家的年齡範圍為 20 至 40 歲，並且這段時間會遇到許許多多的交往對象，那我們應該在什麼時候結婚呢？取  $k = 20 \times 0.368 = 7.360$ ，因此應該在 27 歲後再挑選伴侶結婚。

3、商店街問題：時間不等人，假如一個人在逛一排有 100 個商品的商店街，但打烊時間迫在眉睫，時間只允許該人從入口走到出口一次，不能折返，且所有商品價錢相等。並且這個人身上帶的錢只夠買一樣商品，那他該如何選擇呢？取  $k = 100 \times 0.368 = 36.8$ ，因此應該在第 37 個商品之後開始選擇是否購買。如果這個人身上的錢可以購買超過一種商品，且他的目標是買到其中最好的商品，那就要套用複數機會柏拉圖問題的解。

4、若想要有 70% 的機率取到最大值，要怎麼知道需要幾次機會呢？我們用通式找出了以下幾個指標性的機率，以便參考與應用。

目標機率	30%	50%	70%	80%	90%
需要機會數	1	2	6	11	30

5、在 1~3 的應用中，如果我們並不要求要拿到最好的，只要是前 3 好(或前 5 好、前 10 好)就可以接受，那麼就可以使用複數目標柏拉圖問題的解。

## 伍、結論

### (一) 柏拉圖問題的解

經過推導，我們得知機率函數  $P = -t \ln t$ ，而最佳的  $t$  值為  $e^{-1} \approx 0.368$ ，此時取到最佳稻穗的機率  $P_{\max} = e^{-1} \approx 0.368$ 。簡單的選擇問題，如秘書及適婚問題，可以用這個方式算出。

### (二) 複數機會柏拉圖問題的解

此部分在討論柏拉圖問題中，當可以拾取超過一株稻穗時要如何處理。經過計算、觀察、與推導，我們終於找到複數機會柏拉圖問題的通式。

$$P_{\alpha} = -\alpha t \ln t + \sum_{i=2}^{\alpha} \frac{C_i^{\alpha} (t - t^i)}{(i-1)(-1)^{i-1}}$$

由此通式可以找出當能拾取超過一次時的最佳  $t$  值與取到最佳稻穗的機率  $P_{\max}$ 。較複雜的選擇問題，如商店街問題，可以用這個方式算出。

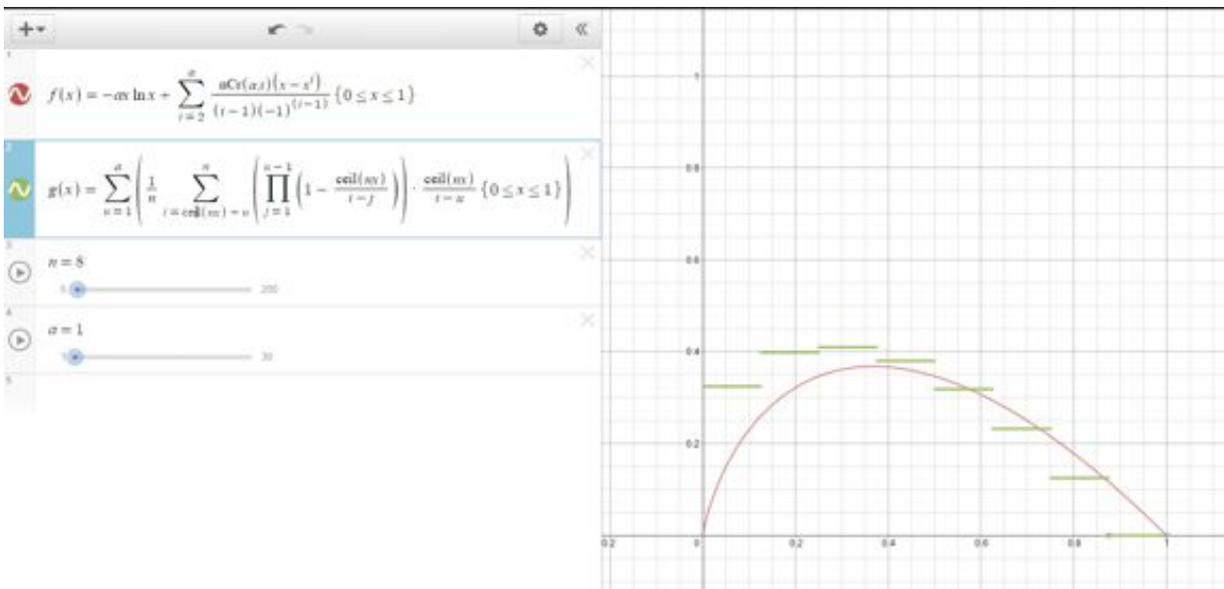
### (三) 複數目標柏拉圖問題的解

此部分在討論柏拉圖問題中，當可以接受不只最好的稻穗時要如何處理。 $b$  較小時我們證明會與複數機會柏拉圖問題得到相同函數，且在  $b$  較大時用大量的程式測試發現數據也是互相符合的。所以我們認為複數目標柏拉圖問題的通式就是複數機會柏拉圖問題的通式。

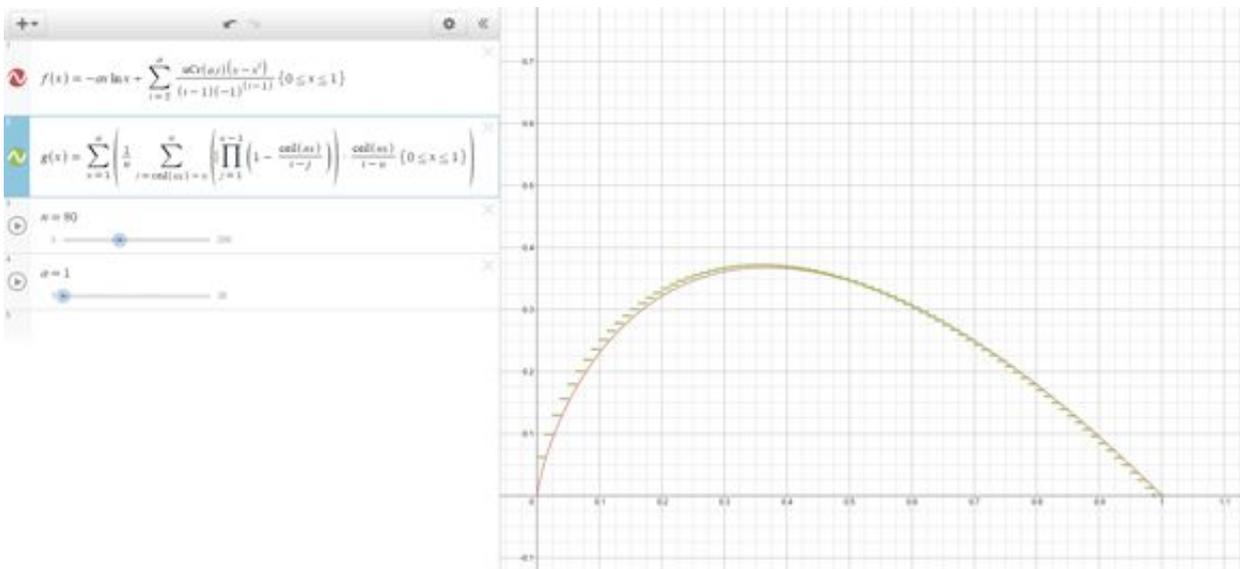
## 陸、討論及展望

我們在進行科展研究時，花了大量的時間搜尋並學習運用條件機率和微積分，整理出拾取多株稻穗取到最大稻穗之機率以及限制只取一株稻穗取到前幾好的稻穗的機率之通式。我們為驗證通式的正確性，運用程式模擬本策略下拾取稻穗的過程，發現程式結果與運算結果相符合，誤差相當小。

關於本次研究之機率較為特殊的是，無論在複數機會或複數目標下，我們取到最大值或是取到前幾好得機率和我們的總樣本數無關，所以不論總樣本數為多少我們的方法皆適用。從以下圖中，我們可以看到可知當總樣本數越大，我們得到的誤差反而越小。



(圖 7)



(圖 八)

關於複數機會與複數目標，我們還發現有趣的現象，複數機會和複數目標的機率在相同的  $k$  時，兩者機率相差不到 0.5%，由以下表格比對可知結果近乎相同。

**\* 複數機會**

當  $n = 80$ ， $a = 7$  時， $k = 14$  時機率會最大，以下是程式測試結果：

$k$	...	11	12	13	14	15	16	17	...
$P$		0.755	0.760	0.760	0.761	0.760	0.756	0.752	

**\* 複數目標**

當  $n = 80$ ， $a = 7$  時， $k = 14$  時機率會最大，以下是程式測試結果：

$k$	...	11	12	13	14	15	16	17	...
$P$		0.752	0.757	0.758	0.761	0.759	0.756	0.752	

由於柏拉圖問題之應用相當廣泛，因此我們投入大量時間與心力確認其值的正確性並且提高應用的廣度和深度，利用所學解決中途所遇到之困境，進而完成此次研究。

事實上，除了我們所討論的延伸（當可以拾取超過一株稻穗時要如何處理及可以接受不只最好的稻穗時要如何處理）外，還有許多延伸可以討論。

例如：

- 1、拾穗者可滿足於次好的稻穗（或第三，第四好...）、同時也有超過一次拾取機會。
- 2、稻田裡的稻穗數目未知。
- 3、拾穗者位置固定範圍內的稻穗皆可進行選取。

這些都是值得探討且我們會在未來努力解決的問題，也因為這個題目如此的具有趣味性和可探討性，我們才能解決更多有關選擇的問題，並將這些結果廣泛地應用於生活之中。

## 柒、參考資料

- (一) C. Adams、J. Hass、A. Thompson (2010)。微積分之屠龍寶刀。天下文化。
- (二) 許介彥。最好的時機。2015 年 12 月 1 號，取自 <http://beaver.ncnu.edu.tw/projects/emag/article/200602/%E6%9C%80%E5%A5%BD%E7%9A%84%E6%99%82%E6%A9%9F.pdf>
- (三) 台大數學系杜鵑花節師生籌備團隊 (2015)。淺談超越數與圓周率  $\pi$ 。

## 【評語】 050414

本問題是傳統「秘書問題」的推廣，考慮「複數機會」的柏拉圖問題，在 $\frac{k}{n}$ 為定值的假設下，機率大小被化成單變數函數，並證明有唯一的極大值。最後並用電腦模擬此策略和理論值相當接近。

本作品內容有趣，也相當有實用性，但建議作者應該強調清楚作品的假設條件。