中華民國第56屆中小學科學展覽會
作品說明書

高級中等學校組　數學科

050412

連續三角形的延伸圖形問題

學校名稱：國立花蓮高級中學

作者：	指導老師：
高二 張華恩	黃俊豪
高二 吳尚澂	姜姿戎
高二 葉承恩	

關鍵詞：連續三角形、延伸三角形、愛可爾斯定理

摘要

當兩個三角形的三個對應頂點的連線共點時，這兩個三角形的對應邊延伸出來的三交點會共線，這是笛沙格定理。若是對應頂點的連線不共點的情況，那麼延伸出來的三交點便不會共線，而是形成一個三角形。

本篇研究探討「對應頂點連線不共點」的「連續相似三角形」，根據愛可爾斯定理，可以方便的利用點對稱作出其他相似三角形。經過畫圖發現這些連續的相似三角形，相鄰兩兩一組作「延伸三角形」，這些延伸三角形會互相相似，而這樣的性質可以推廣到任意兩兩一組的情況。接著將連續相似三角形的性質再推廣，讓對應頂點不必共線，而是對應頂點距離比相等，仍然具有延伸三角形相似的性質。另外也發現了一些關於延伸三角形頂點的共曲線性質。

壹、研究動機

在 2011 年台灣國際科展優勝作品專輯中，看到了一份作品，西姆松「圓」的研究，這篇研究改變西姆松定理的定義，將圓上點移到圓外，並研究這種情形下的「西姆松圓」性質。這種改變定理中條件的做法，啟發了我們對於笛沙格定理以及愛可爾斯定理圖形的靈感。

一開始想探討兩個三角形「對應頂點連線不共點」情況下的「笛沙格三角形」，卻發現似乎沒有簡單漂亮的性質，之後偶然在「幾何明珠」一書中看到了愛可爾斯定理，它的圖形和笛沙格定理有些相似，便將愛可爾斯定理中的正三角形對應邊延伸，赫然發現以「對應邊延伸線交點」為三頂點的三角形會與其他相同方法所作的三角形相似，便開始了後續的研究。

貳、研究目的

一、證明一組連續相似三角形的所有延伸三角形都會相似。

二、證明相似的三角形對應頂點不必共線，也可做出相似的延伸三角形。

三、證明連續相似三角形中，相鄰延伸三角形對應頂點共拋物線。

四、證明從延伸三角形對應點，向拋物線做垂足，垂足兩兩等距。

五、證明延伸三角形頂點所在的拋物線可對應無限多條始線。

參、研究設備及器材

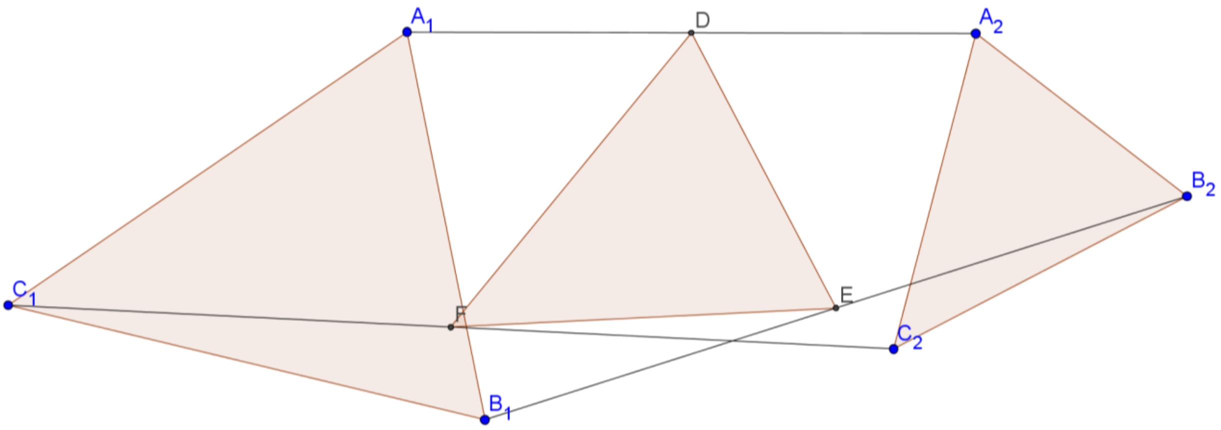
紙、筆、電腦、繪圖軟體 Geogebra

肆、研究過程或方法

一、名詞定義與先備知識

(一) 愛可爾斯定理

若$\triangle A_1B_1C_1$相似於$\triangle A_2B_2C_2$，則線段$\overline{A_1A_2}$、$\overline{B_1B_2}$、$\overline{C_1C_2}$的中點構成的三角形也相似於$\triangle A_1B_1C_1$與$\triangle A_2B_2C_2$。



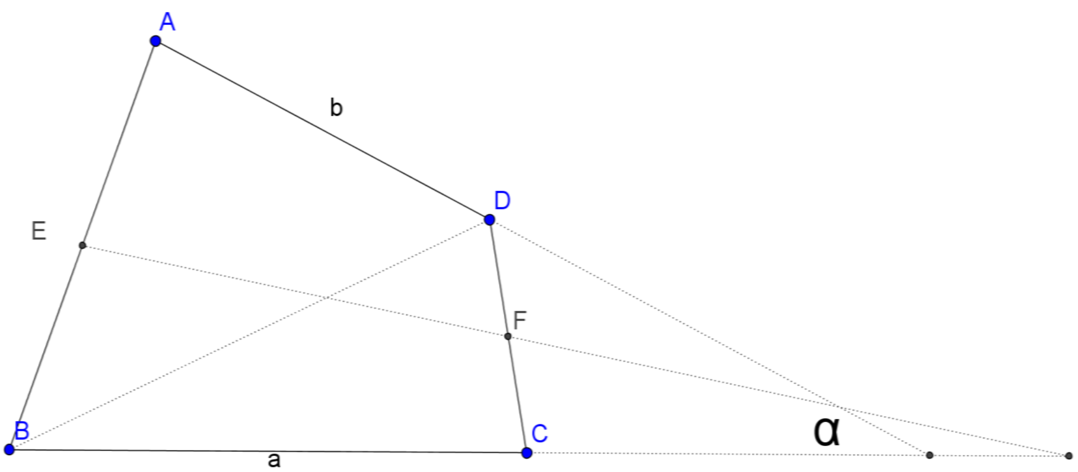
(二) 阿波羅尼奧斯定理(四邊形的推廣)

若 E、F 為四邊形ABCD 的$\overline{AB}$、$\overline{CD}$邊上的點

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{EB}}=\frac{\overline{DF}}{\overline{FC}}=\frac{m}{n}\text{，}AD=b\text{，}BC=a$$

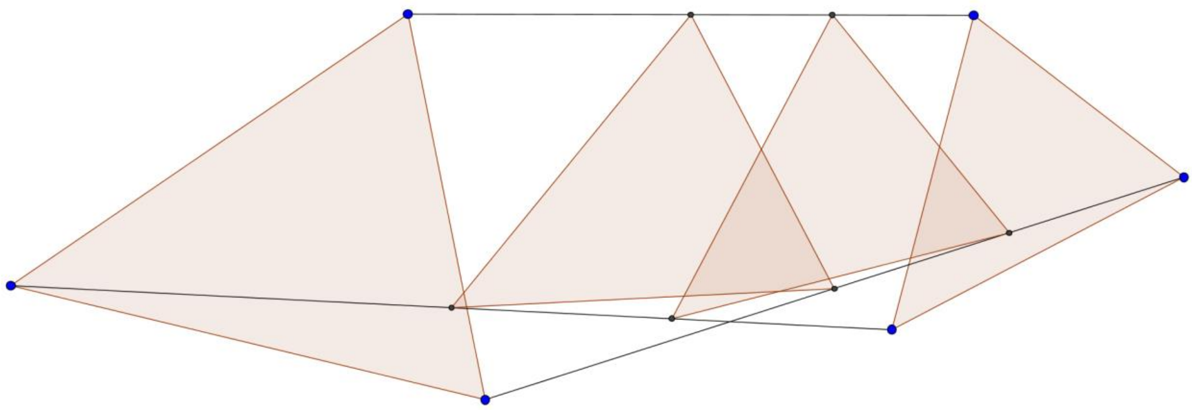
$$\text{則}(m+n)^2\overline{EF}^2=(am)^2+(bn)^2+2am\times bn\times\cos\alpha$$

因此知道 EF 線段的長度僅跟 a、b、α以及 E、F 兩點在線段上的位置有關。可以用此定理推出(一)愛可爾斯定理中，△DEF 三邊長比與其他兩個三角形相等。(下圖對應到愛可爾斯定理，a、b 分別為對應邊長，m=n 時即為取對應點中點，而α為對應邊夾角)



(三) 連續相似三角形

多個相似且對應頂點共線的三角形，稱為一組連續相似三角形。

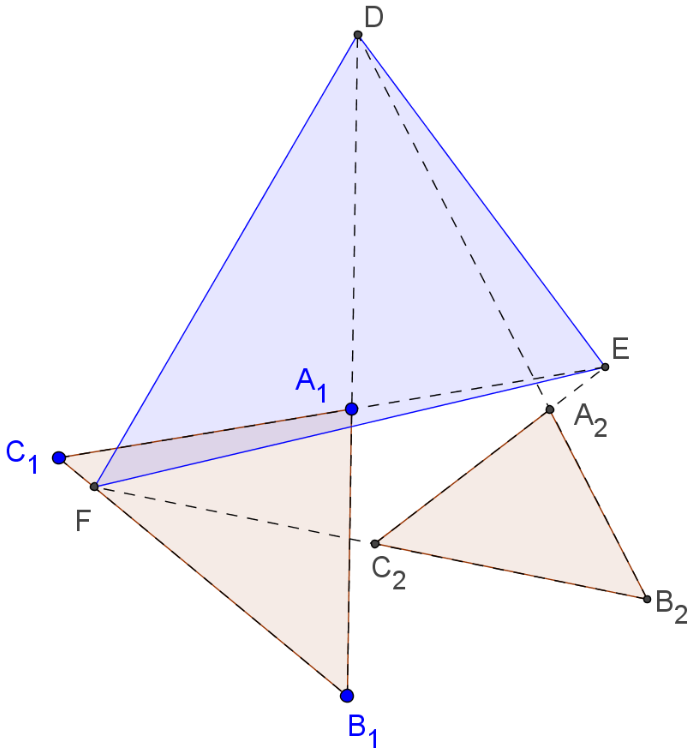


(四) 始線

連續相似三角形中，對應頂點所在的三條線，稱為始線。

(五) 延伸三角形

兩個相似的三角形中，三組對應邊延伸線交點為頂點構成的三角形。



二、性質發現與證明

(一)連續相似三角形中，任挑三個三角形兩兩作延伸三角形，延伸三角形互相相似。

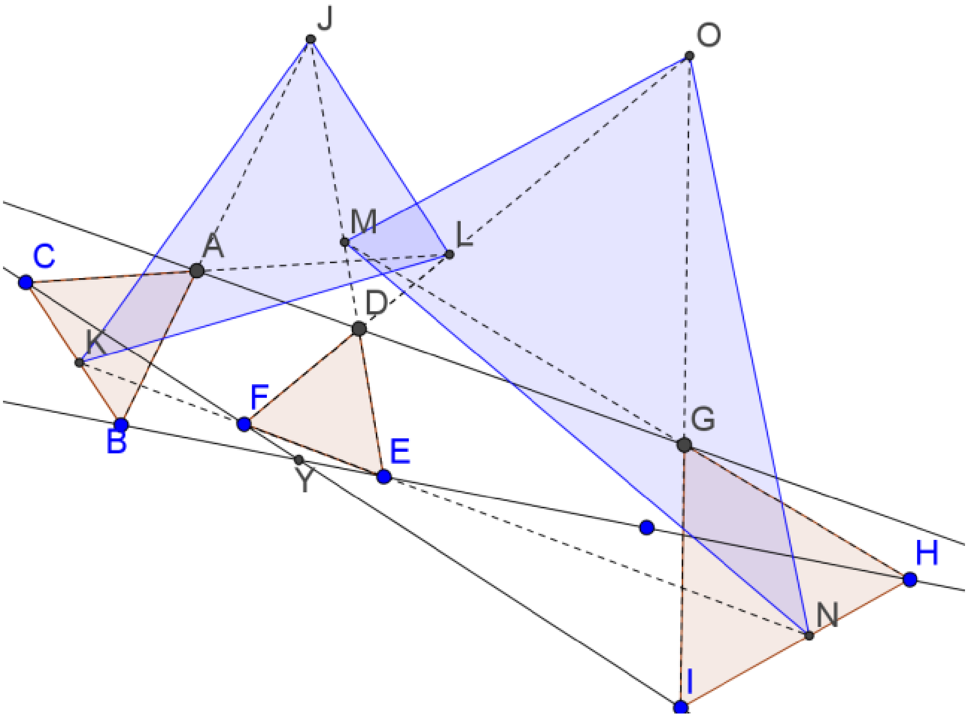
1. 敘述

下圖中，$\triangle$ ABC、$\triangle$ DEF、$\triangle$ GHI為連續相似三角形。

(1) 在$\triangle$ ABC與$\triangle$ DEF中，延長$\overline{AB}$、$\overline{DE}$交於 J 點，$\overline{BC}$、$\overline{EF}$交於 K 點，$\overline{AC}$、$\overline{DF}$交於 L 點

(2) 在$\triangle$ DEF與$\triangle$ GHI中，延長$\overline{DE}$、$\overline{GH}$交於 M 點，$\overline{EF}$、$\overline{HI}$交於 N 點，$\overline{DF}$、$\overline{GI}$交於 O 點

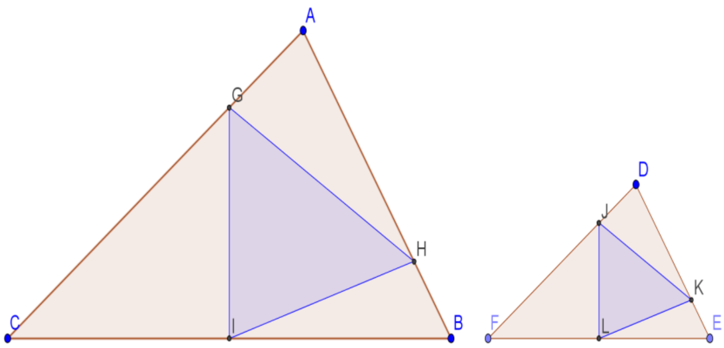
$\triangle$ JKL $\backsim\triangle$ MNO



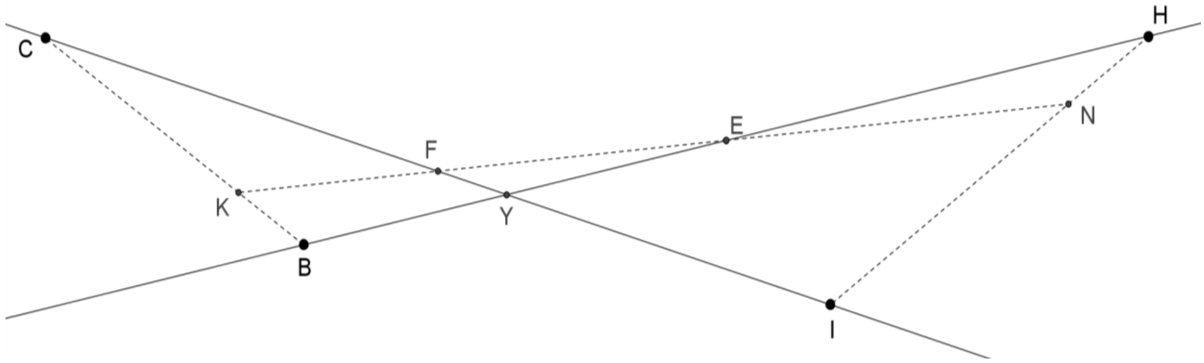
2. 證明

這裡證明的原理，首先要知道：若在兩個相似的三角形三邊上各取一點，使每一組對應邊上取的點到兩對應點距離比相同，則三邊上的點構成的三角形相似。

若$\overline{AG}:\overline{GC}=\overline{DJ}:\overline{JF}$，$\overline{AH}:\overline{HB}=\overline{DK}:\overline{KE}$，$\overline{CI}:\overline{IB}=\overline{FL}:\overline{LE}$，則$\triangle$ GHI $\sim\triangle$ JKL



(1) 先看$\triangle$ CYB 與 $\triangle$ HYI



根據孟氏定理

$$\frac{\overline{\mathrm{EY}}}{\overline{\mathrm{EB}}}\times\frac{\overline{\mathrm{BK}}}{\overline{\mathrm{KC}}}\times\frac{\overline{\mathrm{CF}}}{\overline{\mathrm{FY}}}=1\rightarrow\frac{\overline{\mathrm{BK}}}{\overline{\mathrm{KC}}}=\frac{\overline{\mathrm{FY}}}{\overline{\mathrm{CF}}}\times\frac{\overline{\mathrm{EB}}}{\overline{\mathrm{EY}}}$$

$$\frac{\overline{\mathrm{FY}}}{\overline{\mathrm{FI}}}\times\frac{\overline{\mathrm{IN}}}{\overline{\mathrm{NH}}}\times\frac{\overline{\mathrm{HE}}}{\overline{\mathrm{EY}}}=1\rightarrow\frac{\overline{\mathrm{NH}}}{\overline{\mathrm{IN}}}=\frac{\overline{\mathrm{FY}}}{\overline{\mathrm{FI}}}\times\frac{\overline{\mathrm{HE}}}{\overline{\mathrm{EY}}}$$

又 $\because \overline{\mathrm{CF}}:\overline{\mathrm{FI}}=\overline{\mathrm{BE}}:\overline{EH}$(依照連續三角形規則)

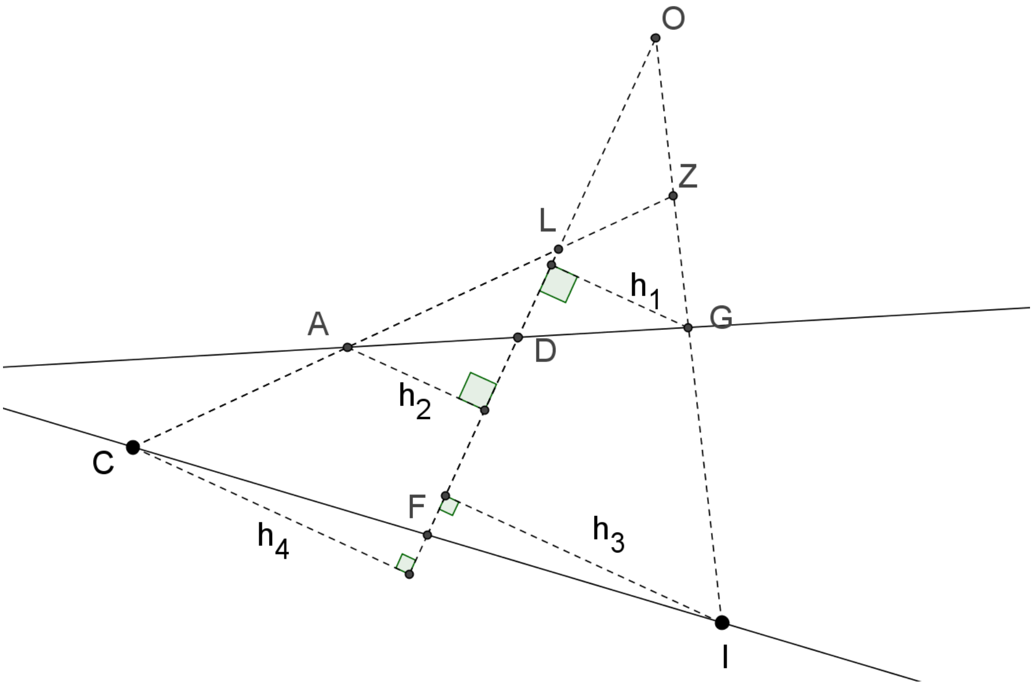
$\therefore \overline{\mathrm{BK}}:\overline{\mathrm{KC}}=\overline{\mathrm{HN}}:\overline{\mathrm{NI}}$

故

$$\frac{\overline{\mathrm{BK}}}{\overline{\mathrm{KC}}}=\frac{\overline{\mathrm{FY}}}{\overline{\mathrm{CF}}}\times\frac{\overline{\mathrm{EB}}}{\overline{\mathrm{EY}}}=\frac{\overline{\mathrm{FY}}}{\overline{\mathrm{FI}}}\times\frac{\overline{\mathrm{HE}}}{\overline{\mathrm{EY}}}=\frac{\overline{\mathrm{NH}}}{\overline{\mathrm{IN}}}$$

得$\overline{\mathrm{BK}}:\overline{\mathrm{KC}}=\overline{\mathrm{NH}}:\overline{\mathrm{IN}}$

(2) 再看△ LCF、 △ OFI



由 G、A、I、C 四點向$\overleftrightarrow{DF}$做垂線，分別為h_1、h_2、h_3、h_4

$$\frac{\overline{LA}}{\overline{LC}}=\frac{h_2}{h_4}，\frac{\overline{OG}}{\overline{OI}}=\frac{h_1}{h_3}$$

$$又\because \overline{AD}:\overline{DG}=\overline{CF}:\overline{FI}$$

$$\frac{h_1}{h_3}=\frac{h_2}{h_4}\rightarrow\frac{\overline{LA}}{\overline{LC}}=\frac{\overline{OG}}{\overline{OI}}$$

$$\overline{LA}:\overline{LC}=\overline{OG}:\overline{OI}$$

(3) 由(1)或(2)同理可證得

$$\overline{JA}:\overline{JB}=\overline{MG}:\overline{MH}$$

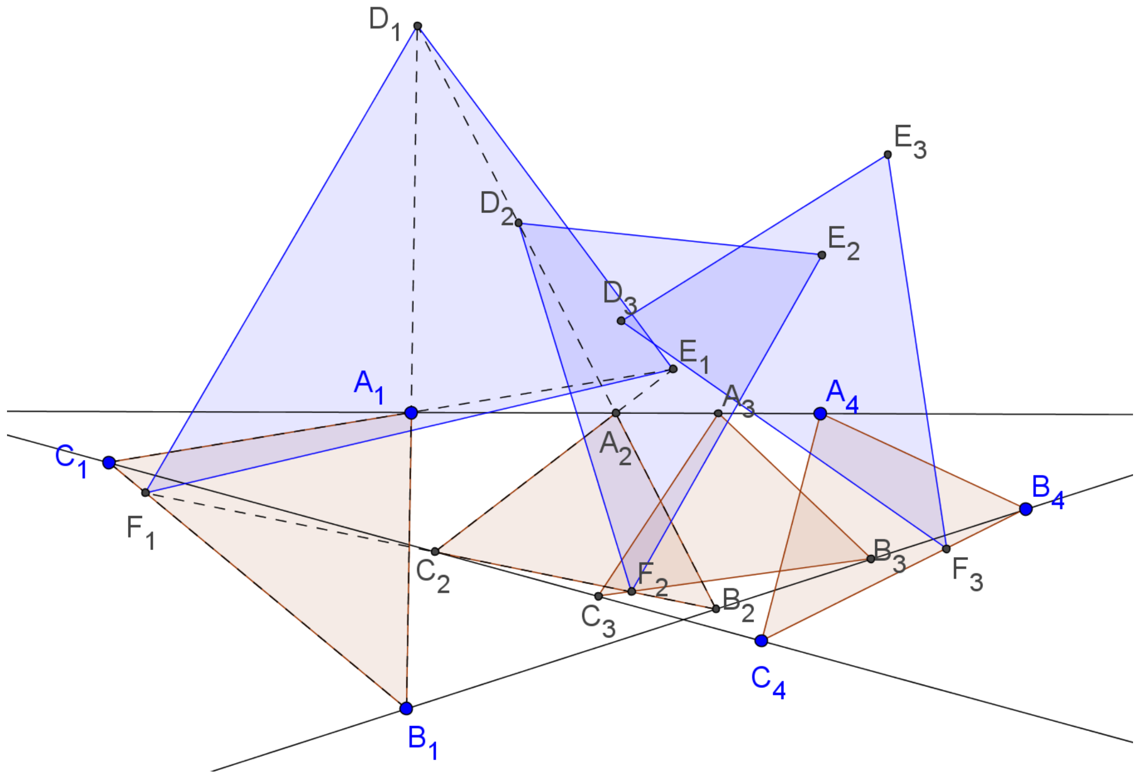
(4) 由上述所證線段的比例關係，我們可以推出 J、K、L 三點在△ABC 三邊上的位置對於 M、N、O 三點在△GHI 三邊上的位置，是相同的，且△ABC ∽△GHI。

故△JKL ∽△MNO

得證

3. 推廣

上面的證明推出了 ： 一組連續相似三角形中，任取三個三角形，兩兩一組作延伸三角形，這些延伸三角形互相相似。利用這點可以推出 ： 一組連續相似三角形中，所有的延伸三角形都互相相似。



(1) 由之前的證明可知 ：

$\triangle A_1B_1C_1$與$\triangle A_2B_2C_2$所作延伸三角形相似於$\triangle A_2B_2C_2$與$\triangle A_3B_3C_3$所作延伸三角形

即為$\triangle D_1E_1F_1 \sim \triangle D_2E_2F_2$

(2) 同理可得$\triangle D_2E_2F_2 \sim \triangle D_3E_3F_3$

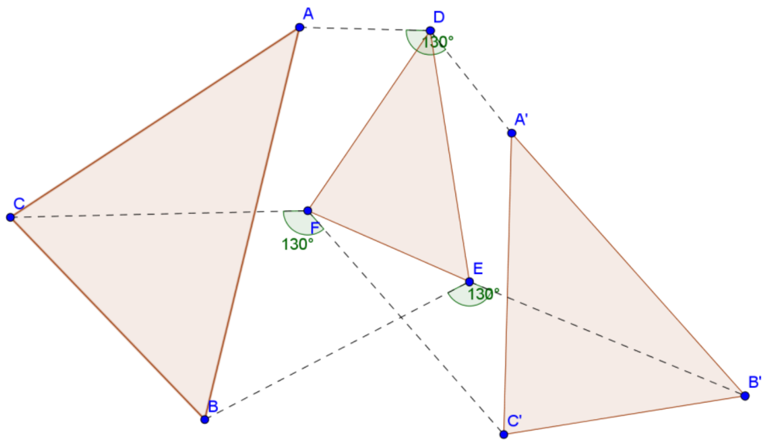
(3) 可推出 ： 一組連續相似三角形中，任取兩個三角形作延伸三角形，此三角形相似於另一個任取兩三角形所作延伸三角形。

(4) 小結論 ： 若一組三角形可視為「連續相似三角形」，則延伸三角形必相似。(後面推廣會用到)

(二) 將延伸三角形性質推廣到「相似三角形對應頂點不共線」

1. 敘述

前面證出了連續相似三角形中，所有的延伸三角形都相似，於是就想到，若是對應頂點不共線的情況呢？

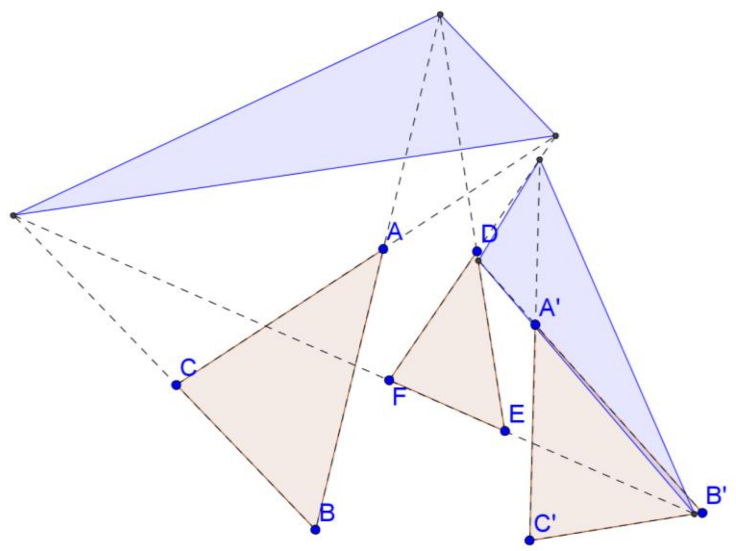


根據愛可爾斯定理，由兩個相似的三角形開始，可以利用對應頂點作點對稱，得到新的相似三角形，這個我們稱為連續相似三角形的作圖法。作點對稱，換句話說就是以某一個三角形的三頂點分別為參考點，將另一個相似三角形的三頂點分別旋轉 180 度，因此我們在這邊將「以頂點為參考點，將對應頂點旋轉 180 度」，改為同方向旋轉相同角度(右圖為逆時針轉 130 度)，發現所作三角形仍然與原本的三角形相似。經過畫圖發現這種情況下所作的延伸三角形仍然有互相相似的性質。

這部分的推廣有以下的證明：

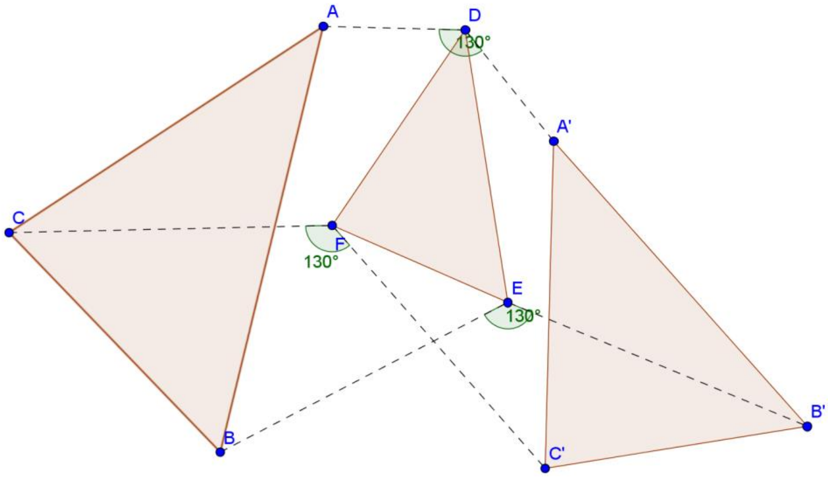
(1) 證明「以頂點為參考點，將對應頂點同向旋轉相同角度」得到的新的三點構成的三角形仍然相似於原兩三角形。

(2) 證明此情況的延伸三角形仍有相似性質

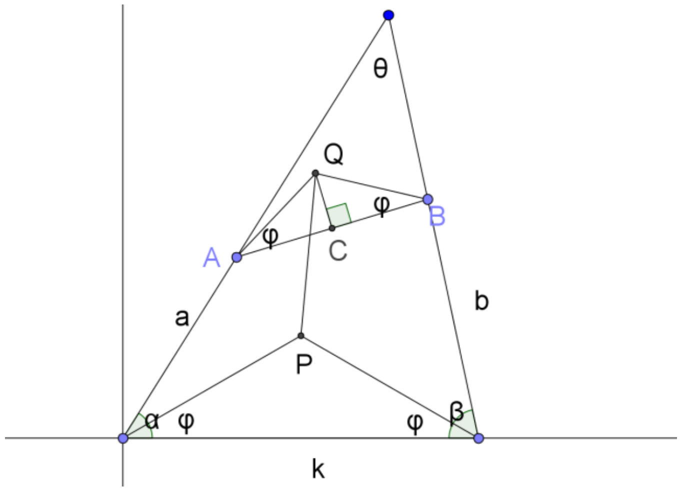


2. 「以頂點為參考點，將對應頂點同向旋轉相同角度」得到的新的三點構成的三角形仍然相似於原兩三角形。

如同愛可爾斯定理，「兩相似三角形的對應頂點中點，也構成相似三角形」這句話等價於「兩相似三角形，以其中一個三角形三頂點為參考點，作另一個三角形三頂點對稱點，以對稱點構成的三角形也是相似三角形」；



「設△ABC~△DEF，證明△A′B′C′也相似」，這句話亦等價於「設△ABC~△A′B′C′，證明△DEF也相似」，為了方便證明，這裡證明「設△ABC~△A′B′C′，則△DEF~△ABC與△A′B′C′」



(1) 取出對應邊局部圖，並座標化

設對應邊長為 a、b

對應邊延伸線夾角為θ

對應點旋轉角為$180° - 2\varphi$

$A = (a\cos\alpha, a\sin\alpha)$

$B = (k - b\cos\beta, b\sin\beta)$

$C = \left(\frac{k + a\cos\alpha - b\cos\beta}{2}, \frac{a\sin\alpha + b\sin\beta}{2}\right), \overrightarrow{AC} = \left(\frac{k - a\cos\alpha - b\cos\beta}{2}, \frac{-a\sin\alpha + b\sin\beta}{2}\right)$

$\overrightarrow{CQ} = \left(\frac{a\sin\alpha - b\sin\beta}{2}\tan\varphi, \frac{k - a\cos\alpha - b\cos\beta}{2}\tan\varphi\right)$

Q

$= \left(\frac{(k + a\cos\alpha - b\cos\beta) + (a\sin\alpha - b\sin\beta)\tan\varphi}{2}, \frac{(a\sin\alpha + b\sin\beta) + (k - a\cos\alpha - b\cos\beta)\tan\varphi}{2}\right)$

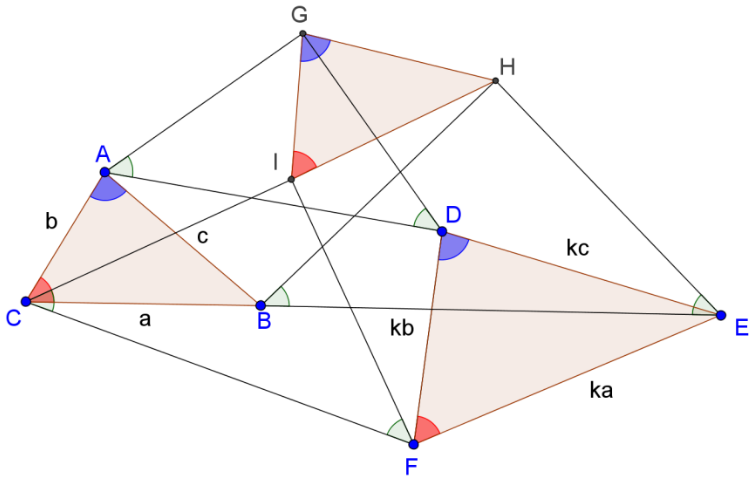
$\overrightarrow{PQ} =$

$$\left(\frac{(a\cos\alpha - b\cos\beta) + (a\sin\alpha - b\sin\beta)\tan\varphi}{2}, \frac{(a\sin\alpha + b\sin\beta) - (a\cos\alpha + b\cos\beta)\tan\varphi}{2}\right)$$

$$得\overline{PQ}長度 = \frac{\sqrt{(a^2+b^2+2ab\cos\theta)+\tan^2\varphi\,(a^2+b^2-2ab\cos\theta)-4ab\tan\varphi\sin\theta}}{2}$$

從這裡我們知道線段 PQ 的長度僅受a、b、θ、φ 控制。

(2)



$\because \triangle ABC \sim \triangle DEF$(同向相似)

$\therefore \overleftrightarrow{AC}$與$\overleftrightarrow{DF}$的銳交角度數 $=$ $\overleftrightarrow{AB}$與$\overleftrightarrow{DE}$的銳交角度數 $=$ $\overleftrightarrow{BC}$與$\overleftrightarrow{EF}$的銳交角度數 $= \theta$

設$\triangle AGD$、$\triangle BHE$、$\triangle CIF$ 的底角角度為 φ

由第 17 頁的證明可知

$$\overline{GH} = \frac{\sqrt{(k^2c^2+c^2+2kc^2\cos\theta)+\tan^2\varphi\,(k^2c^2+b^2-2kc^2\cos\theta)-4kc^2\tan\varphi\sin\theta}}{2}$$

$$\overline{HI} = \frac{\sqrt{(k^2a^2+a^2+2ka^2\cos\theta)+\tan^2\varphi\,(k^2a^2+a^2-2ka^2\cos\theta)-4ka^2\tan\varphi\sin\theta}}{2}$$

$$\overline{IG} = \frac{\sqrt{(k^2b^2+b^2+2kb^2\cos\theta)+\tan^2\varphi\,(k^2b^2+b^2-2kb^2\cos\theta)-4kb^2\tan\varphi\sin\theta}}{2}$$

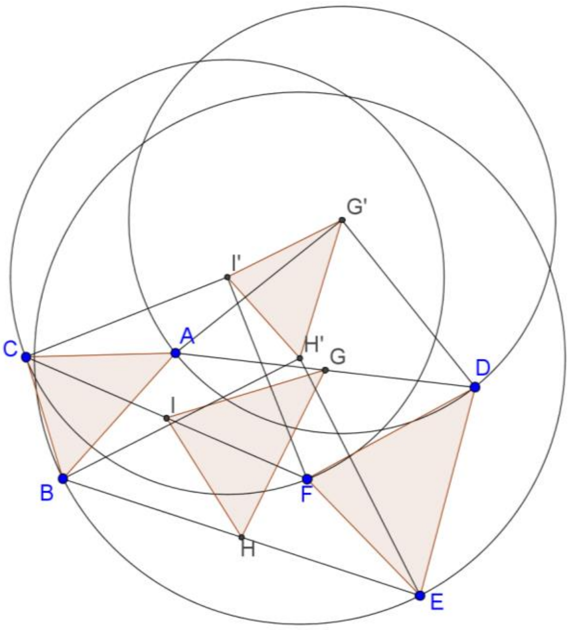
$$得\overline{HI}:\overline{IG}:\overline{GH} = a:b:c$$

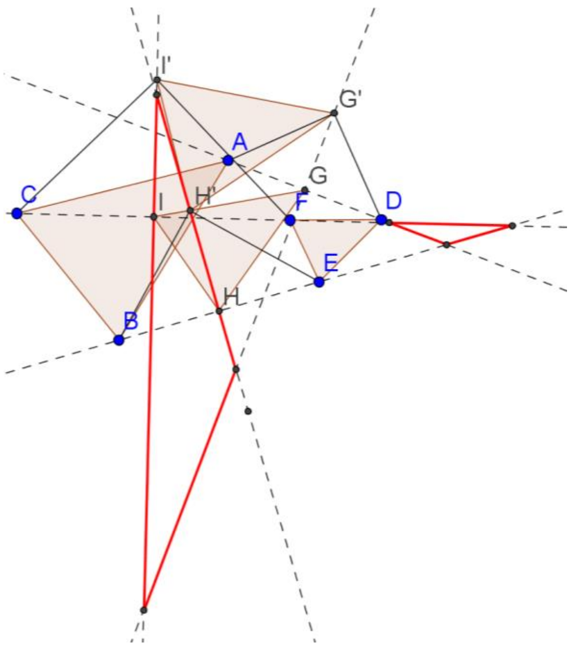
$$= \overline{BC}:\overline{CA}:\overline{AB} = \overline{EF}:\overline{FD}:\overline{DE}$$

故$\triangle ABC \sim \triangle DEF \sim \triangle GHI$

得證

3. 對應頂點距離比相等時，延伸三角形仍互相相似





上圖中，已知$\triangle ABC$、$\triangle DEF$、$\triangle GHI$的延伸三角形都相似，$\triangle G'H'I'$的三頂點G'、H'、I'分別為，以線段 AD、BE、CF 為底的相似等腰三角形的頂點。

(1) $\triangle G'H'I'$的三頂點G'、H'、I'向$\overline{AD}$、$\overline{BE}$、$\overline{CF}$作垂線，分別交 G、H、I 三點

$\overleftrightarrow{GG'}$、$\overleftrightarrow{HH'}$、$\overleftrightarrow{II'}$所圍成三角形相似於$\overleftrightarrow{AD}$、$\overleftrightarrow{BE}$、$\overleftrightarrow{CF}$所圍成三角形。

(2) 故經過旋轉縮放平移，可以將$\overleftrightarrow{GG'}$、$\overleftrightarrow{HH'}$、$\overleftrightarrow{II'}$以及$\overleftrightarrow{AD}$、$\overleftrightarrow{BE}$、$\overleftrightarrow{CF}$完全重合。

(3) $\triangle ABC$、$\triangle DEF$、$\triangle GHI$、$\triangle G'H'I'$可視為連續相似三角形。

(4) 故以$\triangle ABC$、$\triangle DEF$、$\triangle GHI$ 作的延伸三角形，會相似於以$\triangle GHI$、$\triangle G'H'I'$的延伸三角形。

(5) 同理可證以$\triangle ABC$、$\triangle G'H'I'$所作延伸三角形相似於以$\triangle DEF$、$\triangle G'H'I'$所作延伸三角形。

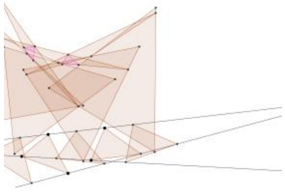
(6) $\triangle G'H'I'$*與*$\triangle ABC$、$\triangle DEF$、$\triangle GHI$ 作的延伸三角形，相似於以$\triangle ABC$、$\triangle DEF$、$\triangle GHI$及其他的連續三角形，所作的延伸三角形，故只要對應頂點距離比例相等(不管經過幾次對應點對點旋轉，對應頂點構成圖形都相似，故對應頂點距離比相等)，作出的延伸三角形都會相似。

得證

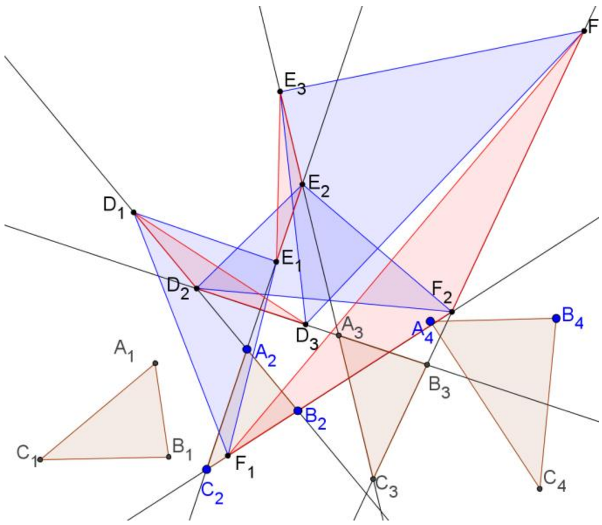
(三)延伸三角形的層層相似性質

1. 敘述

經過畫圖發現,以延伸三角形再作延伸三角形,所得三角形仍然互相相似。這部分我們證明了同一層的延伸三角形互相相似,另外還發現了延伸三角形會以三層一循環出現相似的三角形(如上圖,最底下的連續相似三角形,相似於第三層的粉色延伸三角形),不過這裡還未能證明這個性質。



2. 證明



(1) 若$\Delta A_1B_1C_1$、$\Delta A_2B_2C_2$、$\Delta A_3B_3C_3$、$\Delta A_4B_4C_4$為連續相似三角形,

則延伸三角形$\Delta D_1E_1F_1$、$\Delta D_2E_2F_2$、$\Delta D_3E_3F_3$互相相似。

(2) 平面上兩相似三角形的對應邊交角都相同,故

$$\angle D_1D_2D_3 = \angle E_1E_2E_3 = \angle F_1F_2F_3$$

(皆為$\Delta A_2B_2C_2$、$\Delta A_3B_3C_3$的對應邊交角)

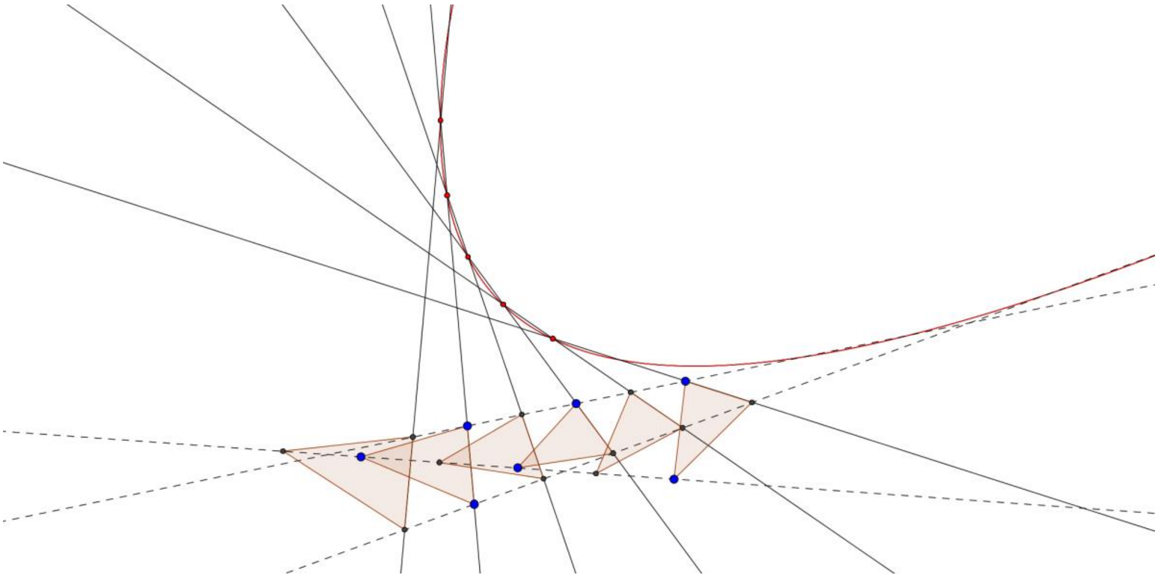
(3) 包含$\Delta D_1E_1F_1$、$\Delta D_2E_2F_2$的連續相似三角形與包含$\Delta D_2E_2F_2$、$\Delta D_3E_3F_3$的連續相似三角形中,其始線可以經由旋轉平移縮放完全重疊(對應始線夾角相等)。

(4) $\Delta D_1E_1F_1$、$\Delta D_2E_2F_2$、$\Delta D_3E_3F_3$可視為同一組連續相似三角形。

(5) 根據先前推導的「連續相似三角形中,延伸三角形必相似」得到$\Delta D_1E_1F_1$、$\Delta D_2E_2F_2$、$\Delta D_3E_3F_3$的延伸三角形相似。

(6) 同理可證下一層延伸三角形亦相似。

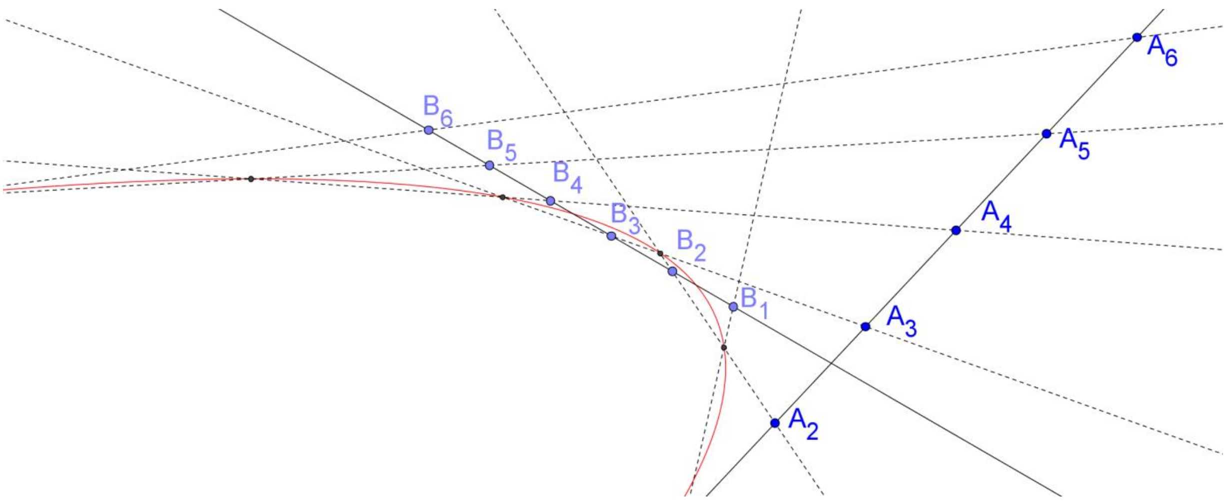
(四)相鄰延伸三角形的對應頂點共拋物線



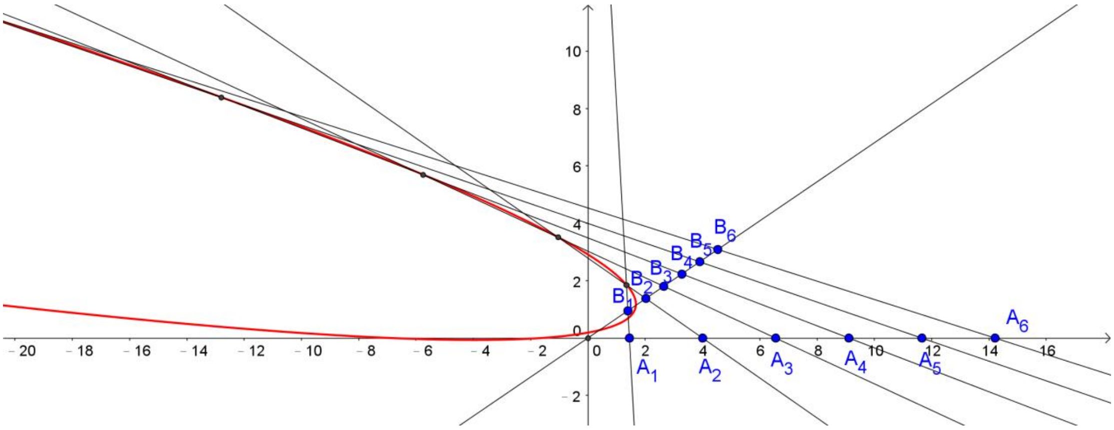
(上圖只取一組對應邊作延伸三角形對應點)

1. 敘述

在兩條直線上，分別取兩兩等距的若干個點，為A_1、A_2、 …A_n與B_1、B_2、 …B_n。對於每一個 n(n 為自然數)，$\overleftrightarrow{A_nB_n}$與$\overleftrightarrow{A_{n+1}B_{n+1}}$的交點都在同一條拋物線上。



2. 證明



為了方便證明，我們將兩線的交點放置在平面座標原點，並以其中一線為 X 軸，另外一線為 y=kx

(1) 設$\mathrm{A_n}$的座標為$(\mathrm{a_n}, 0)$，B_n的座標為$(b_n, b_n\mathrm{k})$

數列$\mathrm{a_n}$ 、b_n的公差分別為d 、r

(2) 解聯立:$\overleftrightarrow{A_nB_n}$與$\overleftrightarrow{A_{n+1}B_{n+1}}$的交點

$$\begin{cases} y = \dfrac{b_n k}{b_n - a_n}(x - a_n) \ldots\ldots(1) \\ y = \dfrac{b_{n+1} k}{b_{n+1} - a_{n+1}}(x - a_{n+1}) \ldots\ldots(2) \end{cases}$$

$$\frac{b_n k}{b_n - a_n}(x - a_n) \quad = \frac{b_{n+1} k}{b_{n+1} - a_{n+1}}(x - a_{n+1})$$

化簡可得

$$\mathrm{x} = \frac{a_n a_{n+1} r - b_n b_{n+1} d}{a_n b_{n+1} - a_{n+1} b_n}$$

$a_n b_{n+1} - a_{n+1} b_n$可化簡

$$a_n b_n + a_n r - a_n b_n - b_n d = a_n r - b_n d$$

$$= a_0 r + (n-1)rd - b_0 d - (\mathrm{n}-1)\mathrm{rd} = a_0 r - b_0 d$$

$$\mathrm{x} = \frac{a_n a_{n+1} r - b_n b_{n+1} d}{a_0 r - b_0 d} \ldots\ldots(3)$$

將$\mathrm{b_n}$ 、$\mathrm{b_{n+1}}$拆成$b_0 + nr$ 、$b_0 + (n+1)$的形式(不拆a_n ，後面化簡方便)

$$a_n a_{n+1} r - \left[n^2 dr^2 + ndr(2b_0 + r) + \left(d{b_o}^2 + drb_0\right)\right] = ra_0 x - db_0 x$$

$$\text{化簡解 n} = -\frac{2b_0 + r}{2r} \pm \frac{\sqrt{dr(dr^3 - 4r^2 a_0 x + 4drb_0 x + 4r^2 a_n a_{n+1})}}{2dr^2} \ldots\ldots(4)$$

式(3)帶入式(1)

$$\text{解得 y} = \frac{-b_n kd(r+b_n)}{a_0 r - b_0 d}$$

$$= \frac{-(kdrb_0 + kd{b_0}^2 + kdrb_0 n + kdr^2 n + kdrb_0 n + kdr^2 n^2)}{a_0 r - b_0 d} \ldots\ldots(5)$$

$$\text{化簡解 n} = -\frac{2b_0 + r}{2r} \pm \frac{\sqrt{kdr(kdr^3 - 4r^2 a_0 y + 4drb_0 y)}}{2kdr^2} \ldots\ldots(6)$$

式(4)=式(6)，解得 x、y 之關係

$$-\frac{2b_0 + r}{2r} \pm \frac{\sqrt{dr(dr^3 - 4r^2 a_0 x + 4drb_0 x + 4r^2 a_n a_{n+1})}}{2dr^2}$$

$$= -\frac{2b_0 + r}{2r} \pm \frac{\sqrt{kdr(kdr^3 - 4r^2 a_0 y + 4drb_0 y)}}{2kdr^2}$$

化簡得到

$$\mathrm{x}(\mathrm{kr}a_0 - \mathrm{kd}b_0) - \mathrm{y}\left(\frac{(a_0 r - b_0 d)(d-r)}{r}\right) - \mathrm{ra}_0(a_0 + d) - \frac{kd^2(2b_0 + r)^2}{4r} - \frac{kd^2 r}{4}$$

$$+ \frac{kdr(2a_0 + d)(2b_0 + r)}{2r}$$

$$= -\frac{(2b_0 + r)\sqrt{kdr(kdr^3 - 4r^2 a_0 y + 4drb_0 y)}}{2r^2}$$

$$+ \frac{(2a_0 + d)\sqrt{kdr(kdr^3 - 4r^2 a_0 y + 4drb_0 y)}}{2r}$$

此為$\overleftrightarrow{\mathrm{A_n B_n}}$與$\overleftrightarrow{\mathrm{A_{n+1} B_{n+1}}}$的所有交點所在方程式

利用二次曲線判別式

$$\text{x 平方項係數為}(\mathrm{kr}a_0 - \mathrm{kd}b_0)^2 = A$$

$$\text{y 平方項係數為}\left(\frac{(a_0 r - b_0 d)(d-r)}{r}\right)^2 = \mathrm{C}$$

$$\text{xy 項係數為 } 2\left(\frac{k(a_0 r - b_0 d)^2(d-r)}{r}\right) = \mathrm{B}$$

$$B^2 - 4AC = 4\frac{k^2(a_0 r - b_0 d)^4(d-r)^2}{r^2} - 4(\mathrm{kr}a_0 - \mathrm{kd}b_0)^2\left(\frac{(a_0 r - b_0 d)(d-r)}{r}\right)^2 = 0$$

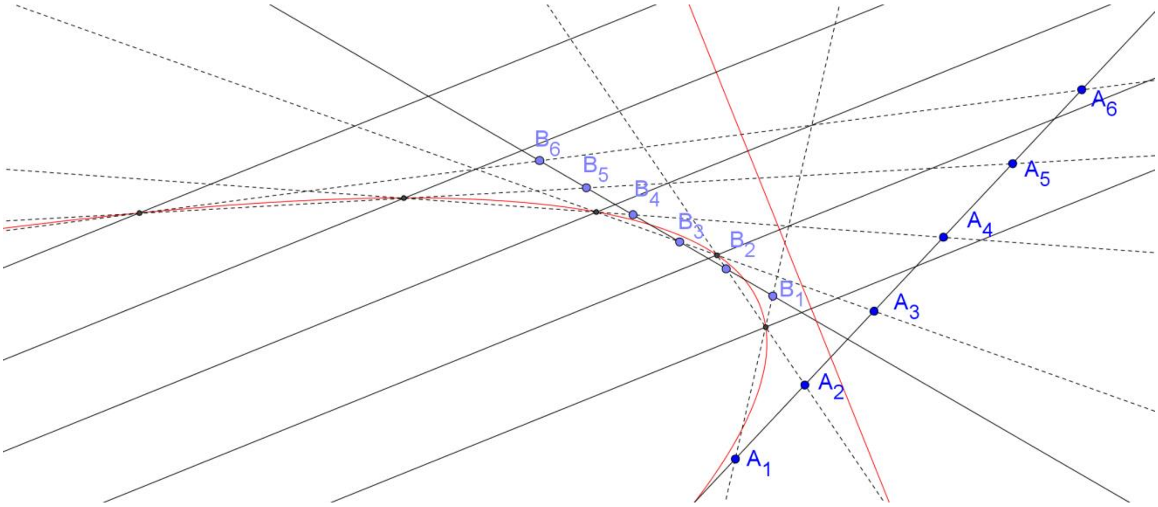
$\overleftrightarrow{\mathrm{A_n B_n}}$與$\overleftrightarrow{\mathrm{A_{n+1} B_{n+1}}}$的所有交點所在方程式為一拋物線

得證

(五)相鄰延伸三角形的對應頂點在拋物線上的投影等距

1. 敘述

上述$\overleftrightarrow{A_nB_n}$與$\overleftrightarrow{A_{n+1}B_{n+1}}$的交點，向此拋物線的準線作垂線，其垂足兩兩等距。



2. 證明

令θ 為拋物線與 x 軸所夾的銳角

$$\text{此拋物線為 } ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$$

由轉軸公式知$\cot 2\theta=\dfrac{a-c}{b}$，$\tan 2\theta=\dfrac{b}{a-c}$

解得$\tan\theta=\dfrac{-2(a-c)\pm\sqrt{4(a-c)^2+4b^2}}{2b}$，由於是拋物線 → $b^2=4ac$

故$\tan\theta\dfrac{-2(a-c)\pm\sqrt{4(a+c)^2}}{2b}=\dfrac{-(a-c)\pm(a+c)}{b}=\dfrac{-2a}{b}or\dfrac{2c}{b}$ ——①

已知

$a=k^2(ra_0-db_0)^2, b=\dfrac{-2k(ra_0-db_0)^2(r-d)}{r}, c=\left[\dfrac{(ra_0-db_0)(r-d)}{r}\right]^2$

$$\text{代入①則}\tan\theta=\frac{-kr}{d-r}or\frac{d-r}{kr}$$

過(x_n, y_n)與此拋物線的準線垂直的直線方程式為 $y - y_n = \tan\theta\,(x - x_n)$

點(x_{n+1}, y_{n+1})到 $y - y_n = \tan\theta\,(x - x_n)$的距離為:

$$D = \frac{|y_{n+1} - y_n - \tan\theta\,(x_{n+1} - x_n)|}{\sqrt{\tan^2\theta + 1}}$$

化簡分子

$y_{n+1} - y_n - \tan\theta\,(x_{n+1} - x_n)$

$$= -\frac{2b_{n+1}kdr}{ra_0 - db_0} - \left(-\frac{kr}{d-r}\right)\left(\frac{a_{n+1}rd - 2b_{n+1}dr}{ra_0 - db_0}\right)$$

$$= \frac{2kd^2rb_{n+1} - 2kdr^2b_{n+1} - 2kdr^2a_{n+1} + 2kdr^2b_{n+1}}{-(d-r)(ra_0 - db_0)}$$

$$= \frac{2kd^2r(b_0 + nr + r) - 2kdr^2(a_0 + nd + d)}{-(d-r)(ra_0 - db_0)}$$

$$= \frac{-2kdr(ra_0 - db_0)}{-(d-r)(ra_0 - db_0)}$$

$$= \frac{2kdr}{d-r}$$

知其為定值，且$\tan^2\theta + 1$為定值，故 D 為定值(不受 n 控制)。

另外，由於 $\tan\theta$ 有兩解:$\frac{-kr}{d-r}\, or\, \frac{d-r}{kr}$，這兩個正切值夾角為九十度，只有其中一個會是垂直準線的斜率

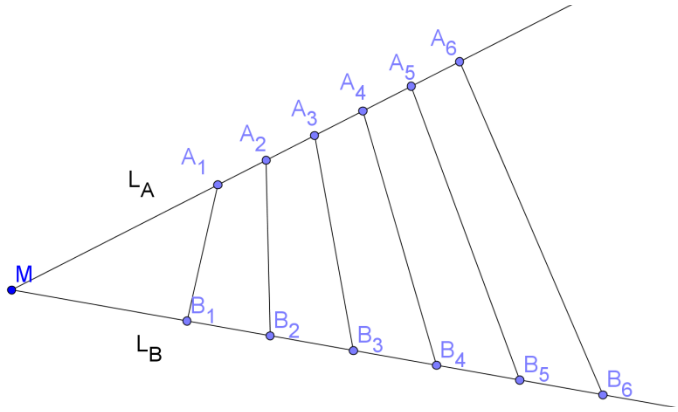
得證

(六)相鄰延伸三角形頂點所在的拋物線，可對應無限多條始線

1. 敘述:

若留下拋物線與線上$\overleftrightarrow{A_nB_n}$與$\overleftrightarrow{A_{n+1}B_{n+1}}$的交點，反過來找點$\mathrm{A_1}$、$\mathrm{A_2}$、 ...$\mathrm{A_n}$與$\mathrm{B_1}$、$\mathrm{B_2}$、...$\mathrm{B_n}$所在的始線，始線有無限多條。

2. 證明:



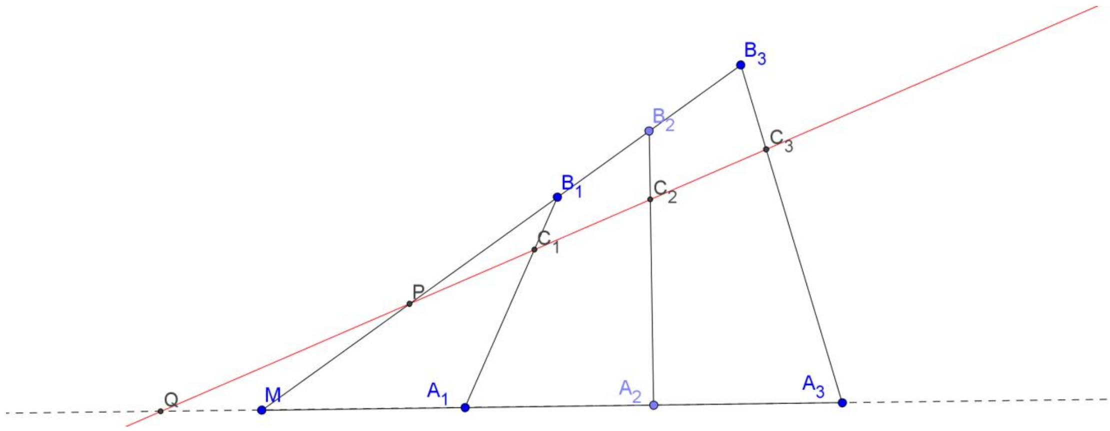
欲證:

在直線$\mathrm{L_A}$、$\mathrm{L_B}$之間有無限多條直線可為始線→即是有無限多條線被$\overline{\mathrm{A_1B_1}}$、$\overline{\mathrm{A_2B_2}}$、……分割為等距離的線段。

由阿波羅尼奧斯定理可知，若在$\overline{\mathrm{A_1B_1}}$、$\overline{\mathrm{A_2B_2}}$、 ... ... 上各取一點$\mathrm{C_1}$、$\mathrm{C_2}$ ... ...

使$\overline{\mathrm{A_1C_1}}:\overline{\mathrm{C_1B_1}}=\overline{\mathrm{A_2C_2}}:\overline{\mathrm{C_2B_2}}=\cdots=\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{C}_n}:\overline{\mathrm{C}_n\mathrm{B}_n}$則$\overline{\mathrm{C_1C_2}}=\overline{\mathrm{C_2C_3}}=\cdots=\overline{\mathrm{C}_n\mathrm{C}_{n+1}}$(n 為大於一的正整數)

因此得知若所有符合上述條件的點都共線，則原命題得證，再改為另一個等價的敘述:若在$\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}$上取一點$\mathrm{C}_n$，在$\overline{\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_{n+1}}$上取一點$\mathrm{C}_{n+1}$，使得$\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{C}_n}:\overline{\mathrm{C}_n\mathrm{B}_n}=\overline{\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{C}_{n+1}}:\overline{\mathrm{C}_{n+1}\mathrm{B}_{n+1}}$，連$\overleftrightarrow{C_nC_{n+1}}$交$\overline{\mathrm{A}_{n+2}\mathrm{C}_{n+2}}$於$\mathrm{C}_{n+2}$，可使得$\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{C}_n}:\overline{\mathrm{C}_n\mathrm{B}_n}=\overline{\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{C}_{n+1}}:\overline{\mathrm{C}_{n+1}\mathrm{B}_{n+1}}=\overline{\mathrm{A}_{n+2}\mathrm{C}_{n+2}}:\overline{\mathrm{C}_{n+2}\mathrm{B}_{n+2}}$，則原命題得證。



設$\overline{A_1A_2} = \overline{A_2A_3} = a$，$\overline{B_1B_2} = \overline{B_2B_3} = b$

(1) 取$\overline{C_1B_1}:\overline{C_1A_1} = \overline{C_2B_2}:\overline{C_2A_2}$

(2) 由孟氏定理:

$$\frac{\overline{QM}}{\overline{QA_1}} \times \frac{\overline{A_1C_1}}{\overline{B_1C_1}} \times \frac{\overline{B_1P}}{\overline{MP}} = 1\_\_\_①$$
$$\frac{\overline{QM}}{\overline{QA_2}} \times \frac{\overline{A_2C_2}}{\overline{B_2C_2}} \times \frac{\overline{B_2P}}{\overline{MP}} = 1\_\_\_②$$

(3) 推出

$$\frac{\overline{B_1P}}{\overline{QA_1}} = \frac{\overline{B_2P}}{\overline{QA_2}} = \frac{\overline{B_1P} + b}{\overline{QA_1} + a}$$
$$\rightarrow \frac{\overline{B_1P}}{\overline{QA_1}} = \frac{b}{a}$$
$$\rightarrow \frac{\overline{B_3P}}{\overline{QA_3}} = \frac{b}{a}$$

(4) 孟氏定理

$$\frac{\overline{QM}}{\overline{QA_3}} \times \frac{\overline{A_3C_3}}{\overline{B_3C_3}} \times \frac{\overline{B_3P}}{\overline{MP}} = 1$$
$$\frac{\overline{QM}}{a} \times \frac{\overline{A_3C_3}}{\overline{B_3C_3}} \times \frac{b}{\overline{MP}} = 1$$

$$\rightarrow \frac{\overline{A_1C_1}}{\overline{B_1C_1}} = \frac{\overline{A_2C_2}}{\overline{B_2C_2}} = \frac{\overline{A_3C_3}}{\overline{B_3C_3}}$$
$$\overline{A_1C_1}:\overline{C_1B_1} = \overline{A_2C_2}:\overline{C_2B_2} = \overline{A_3C_3}:\overline{C_3B_3}$$

得證

伍、結論

一、連續相似三角形作的延伸三角形會互相相似。

二、愛可爾斯定理可推廣為:兩個同向相似的三角形，以其中一個三角形三頂點為參考點，將另一個三角形的三對應點向同方向旋轉同角度，所得新點構成之三角形仍然與原三角形相似。

三、連續相似三角形的延伸三角形具有同層相似性質，每一組延伸三角形互相相似。

四、平面上對應頂點距離長的比例相同的相似三角形，所作延伸三角形會互相相似。

五、連續相似三角形的相鄰延伸三角形，對應頂點共拋物線。

六、由結論五的拋物線上點，向其準線作垂線，垂足兩兩等距。

七、結論五中的拋物線對應的始線有無限多條。

陸、討論

一、若有相似的連續多邊形，是否仍擁有上面發現的性質?

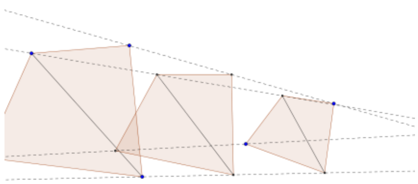
答案是有的，而這個推廣建立在:

1. 愛可爾斯定理在相似多邊形的推廣
2. 相似三角形對應頂點不共線時，類似愛可爾斯定理的性質(如結論五)也可推廣到多邊形

把相似的多邊形以相同的方式分割成多個相似的三角形，再分別用在對應點連線中取中點，可做出相似三角形，再拼成一個多邊形，也和原本的多邊形相似。

因此可做「連續多邊形」。

而我們所有的證明主要都是取「對應邊局部圖」來進行論證，故可知所有性質都可套用。



柒、參考資料及其他

幾何明珠 九章出版社（黃家禮，2000）

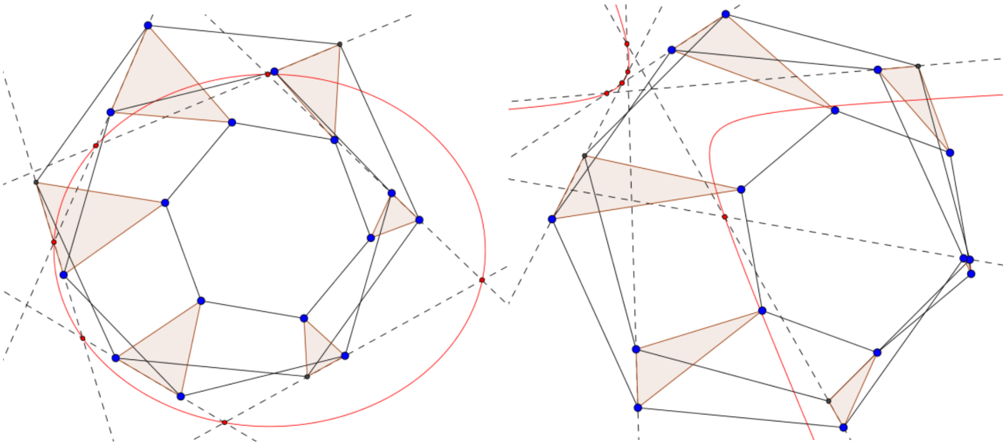
2011 年臺灣國際科學展覽 圓來如此-西姆松「圓」的研究(廖偉恩，2011)

黑狗的家 數學天地 一班課程 第五冊 2-2 旋轉

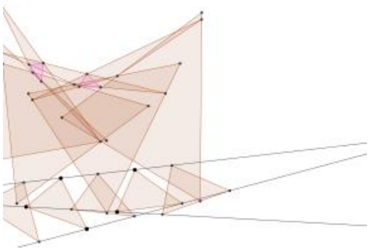
維基百科-圓錐曲線判別式

捌、未來展望

一、若有若干個相似三角形，他們的對應頂點形成一個正 n 邊形，所有相鄰的三角形對應邊延伸線的交點，會在同一條圓錐曲線上。未來我們打算完成它的證明，並尋找是否有以其他規律在平面上分布的相似三角形，所有對應邊延伸線的交點，會在其他圓錐曲線上。



二、前面證明出了以延伸三角形再做延伸三角形，所做的三角形依然互相相似。但是尚未完成三角形的形狀以三個為一循環出現的證明。



【評語】050412

本文討論兩相似三角形其延伸各邊之交點所形成之三角形的性質探討。大部分的結果基於以前已知的結果以及一些幾何上的觀察。關於拋物線的部分則用了解析幾何的方式給出了完整的證明。其中許多幾何證明若嘗試用向量幾何的手法也許會有幫助。