中華民國第56屆中小學科學展覽會
作品說明書

高級中等學校組　數學科

第一名

050411

多方塊的塗色問題

學校名稱：臺北市立建國高級中學

作者：	指導老師：
高二 余竑勳	曾俊雄

關鍵詞：多方塊

得獎感言

開始研究這個題目其實並不是一年兩年的事，而是從國二就開始了。然而國三和高一投稿國際科展皆在書面審就被刷掉，之後也因為有其它事情需要做就暫時先把既有的成果放在一邊，待他日有那個閒情逸致時再繼續研究。

在高一下到高二上的某個時間，班上的所有人都為了高二下的成果發表會找合作教授，找實驗室做實驗，進行研究。雖然身為數學組，省去了找實驗室的麻煩，但看到同學們那麼努力也難免有些壓力。於是我決定把塵封已久的這個題目拿出來作為我的成發主題。在我慢慢回想之前到底做了什麼的時候，我忽然發現之前得出的某個結論所使用的構造竟然是完全錯誤的，而我竟然在之前的兩年之中完全沒有發現。被這嚇到的我，馬上著手開始將整個研究的後半段大翻修;而在閒置的這段時間內,我使用文字表達數學理念的語法也成熟了許多，以往需要花長篇大論打下一個繞口令才能解釋的東西，現在看起來好像也沒有很難敘述得清楚。在翻修的過程中，我也不斷地改進以往得出的（錯誤的）結果。誰能想到呢？兩年前和兩年後的我看著同樣的題目，竟然能有如此不同的想法，讓整件作品都脫胎換骨了。

在寒假時，我的作品樣貌大致抵定，餘下的只剩把說明書以及海報整理出來。然而對於不擅長文書處理的我，在把這兩個東西搞定之後，精神已經瀕臨崩潰了。在校內審時還需要自己手動裁切，而且裁切後，貼上展板後，講個十分鐘，這些紙就沒有用處了。參加北市賽的時候因為小小的格式不符，印出的一式四份、每份近三十頁的說明書被退回也是讓我心力交瘁。過了北市書面審後佈展，雖然直接使用大圖輸出的海報，不用再自行裁剪了，不過黏貼完後隔天來到展場，發現海報脫落了。好險有同學先跟我說讓我備好膠帶，不然後果真的不堪設想。總之，說明書和海報真的耗費了我不少的心力。

到了全國科展的會場，在評審的空餘時間，還有最後一天的公開展覽時間，我能將所有人辛苦的心血一覽無遺真的感到非常的開心以及榮幸。開心，因為能看到近２０個有趣的題目陳列在我面前；榮幸，因為有這個機會和各作品的作者一同欣賞他們的成果，以及數學的美。雖然公開展覽的時候規定每件作品前都要有作者留守，而自己又是獨自參展的，所以沒什麼時間和其它作者交流（頂多跟認識的人聊聊天還有討論），但看著某些展板就會真正地讓我感受到，自己現在正與來自台灣各地的高手過招。

最後，我想要感謝所有曾協助過我的老師、家人以及同學，少了您們之中的任何一個，都會使我的作品不如現在完美。

摘　　要

在本篇研究報告中，主要討論一個關於多方塊的問題：給定一個多方塊，試找出 n 的最小值使得在無限大的棋盤上，可以塗上 n 種顏色並且使多方塊沿格線無論如何放置，都不會蓋到重複的顏色。一開始先以 V 形三方塊的情況開始討論，之後將單方塊至五方塊的所有情況都有系統地討論完畢。

為了給出顏色數的估計，考慮同時適用於所有 k 方塊的情況。也就是說，要找到一個塗上 n 種顏色的無限棋盤使得無論任一個被選定的多方塊怎麼被放置在棋盤上，都不會覆蓋到相同顏色的格子。本篇研究成功地給出了此問題的精確解。

除了上面一種估計之外，本篇研究也考慮了矩形多方塊的顏色數，並試圖以之給出所有多方塊所需的顏色數之上下界。

壹、 研究動機

有一天，在書上看到了這個題目：

在無限大的棋盤上，塗上 n 種顏色使得 V 形三方塊沿格線無論如何放置在棋盤上，都不會蓋到重複之顏色，問 n 的最小值為何？

$n = 4$ 是滿足條件的，其構造法如下：(圖形中我們用數字 1、2、3、4 代表四種不同的顏色。)

1	2	1	2	1	2	1	2
3	4	3	4	3	4	3	4
1	2	1	2	1	2	1	2
3	4	3	4	3	4	3	4
1	2	1	2	1	2	1	2
3	4	3	4	3	4	3	4
1	2	1	2	1	2	1	2
3	4	3	4	3	4	3	4

接著要證明 $n = 3$ 無法滿足條件。如果 $n = 3$ 時，那麼下表格中的 x 便無法塗上三種顏色中的其中一種，否則會蓋到重複之顏色，故 $n > 3$，又前面給出 $n = 4$ 的上界，所以 n 的最小值為 4。

1	x
2	3

不過看完上面的問題後，我便開始思考：如果不是 V 形三方塊，而是其它種三方塊，甚至是四方塊、五方塊，或者廣泛的 k 方塊，那麼 n 的最小值又是什麼呢？

原本以為此類問題不難解決，一經深入探究，發現事實並非如此。有些情況雖然可以找到上界，但是要證明不能再少(即下界)則非常困難；有些情況連上界都非常難找到。

於是我便開始對這個題目進行研究。

貳、 研究目的

一、對於單方塊到五方塊的種類進行分析；

二、探討各種多方塊塗顏色之構造法並求出 n 的最小值；

三、證明求出的 n 即為最小值；

四、研究是否有方法對所有多方塊所需的顏色進行估計。

參、 研究設備與器材

一、紙

二、筆

三、電腦

肆、 研究過程或方法

一、先將單方塊到五方塊的所有種類列出；

二、求出對於單方塊到四方塊的所有種類之 n 的最小值：

（一）、 構造出單方塊到四方塊的所有種類之塗色的方法；

（二）、 證明求出的值即為 n 的最小值；

三、再求出對於五方塊的所有種類之 n 的最小值：

（一）、 構造出五方塊的所有種類之塗色的方法；

（二）、 證明求出的值即為 n 的最小值；

四、同時使用所有 k 方塊，並以之估計 k 方塊所需顏色數；

五、推廣至矩形多方塊，並以之估計多方塊所需顏色數。

伍、 研究結果

一、單方塊到五方塊之結果

為了方便起見，先定義：

定義 1　*令多方塊 P 所需的顏色最小值為 $c(P)$。*

先證明兩個引理。這些引理在以後經常會應用到：

引理 1　*對於 k 方塊 P 而言，$c(P) \geq k$。*

證明　否則無論 k 方塊如何放置，必至少覆蓋某一種顏色兩次以上。

引理 2　*若多方塊 P 可以完全覆蓋多方塊 Q，那麼 $c(P) \geq c(Q)$.*

證明　由 $c(P)$ 的定義，可以知道可以在平面上塗上 $c(P)$ 種顏色使得不管怎麼在平面上放多方塊 P，都不會蓋到相同的格子。而在這

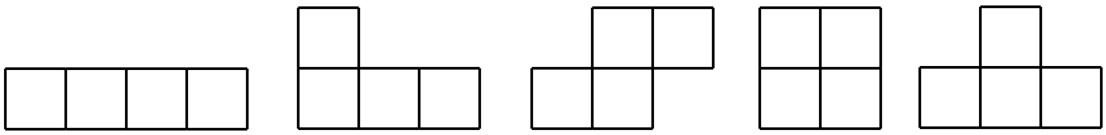
種塗色法下，假設可以用 Q 蓋住兩個相同的顏色。那麼因為 P 可以完整覆蓋 Q，而且此時 Q 蓋住兩個相同的顏色，所以 P 也可以蓋住兩個相同的顏色，矛盾。因此存在一種 $c(P)$種顏色的塗法使得不管怎麼放置 Q，都不會蓋到相同的顏色。由 c 的最小性得到 $c(P) \geq c(Q)$. 得證。

（一）、單方塊、雙方塊與三方塊

我們可以由引理 1 知道單方塊所需的顏色數最小值為 1，雙方塊所需的顏色數最小值為 2。對於 I 形三方塊也可以很容易地知道顏色數最小為 3，而 V 形三方塊的情況已在前面解決，其所需顏色數最小值為 4。

（二）、四方塊

四方塊共有 5 個品種，分別為 I 形、L 形、N 形、O 形、T 形，如下圖所示：



由引理 1 可以知道 I 形四方塊的顏色數最小為 4，塗色法如圖一。(圖形中我們用數字 1、2、3、4 分別代表四種不同的顏色。) N 形和 O 形的顏色數最小也為 4，塗色法如圖二。

1	4	3	2	1	4	3	2
2	1	4	3	2	1	4	3
3	2	1	4	3	2	1	4
4	3	2	1	4	3	2	1
1	4	3	2	1	4	3	2
2	1	4	3	2	1	4	3
3	2	1	4	3	2	1	4
4	3	2	1	4	3	2	1

圖一

1	2	1	2	1	2	1	2
3	4	3	4	3	4	3	4
1	2	1	2	1	2	1	2
3	4	3	4	3	4	3	4
1	2	1	2	1	2	1	2
3	4	3	4	3	4	3	4
1	2	1	2	1	2	1	2
3	4	3	4	3	4	3	4

圖二

對於 T 形四方塊，若 $c(\mathrm{T}_4)$ 為 4，不妨假設其塗色法如下左圖。將 T 形四方塊放置如下左圖，可知 x 處必塗上顏色 4，但以下右圖方式放置時，它會覆蓋顏色 4 兩次，故至少要為 5 種顏色。

	1	
x	2	3
	4	

	1	
x	2	3
	4	

而使用 5 種顏色的其中一種塗色法如圖三所示。

5	3	4	1	2	5	3	4
4	1	2	5	3	4	1	2
2	5	3	4	1	2	5	3
3	4	1	2	5	3	4	1
1	2	5	3	4	1	2	5
5	3	4	1	2	5	3	4
4	1	2	5	3	4	1	2
2	5	3	4	1	2	5	3

圖三

對於 L 形四方塊，若 $c(\mathrm{L}_4)$ 為 7，因為 L 形四方塊可以同時覆蓋任何兩個小方格，所以圖四的各個小方格內的顏色都不得重複。……………………………………………………………………結果(I)

1	4	
2	5	7
3	6	

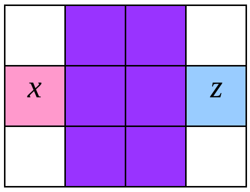
圖四

在圖五中，利用結果(I)兩次，可以得知圖五 x 處所塗的顏色必須與 y 處所塗的顏色相同。(由(I)知紅色/藍色+紫色區塊顏色不重複，又總共只用 7 種顏色，故 x 和 y 同顏色)

		y
x		

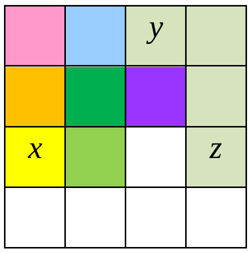
圖五

同理，利用結果(I)兩次，可以得知下圖 x 處所塗的顏色必須與 z 處所塗的顏色相同。



(由(I)知紅色/藍色+紫色區塊顏色不重複，又總共只用 7 種顏色，故 x 和 z 同顏色)

所以 x, y 和 x, z 的顏色相同，也就是說 y 處所塗的顏色必須與 z 處所塗的顏色相同，但此時 y 與 z 二個小方格可同時被 L 形四方塊覆蓋，矛盾。故 $c(\mathrm{L}_4) = 7$ 不合，得 $c(\mathrm{L}_4) > 7$ 。



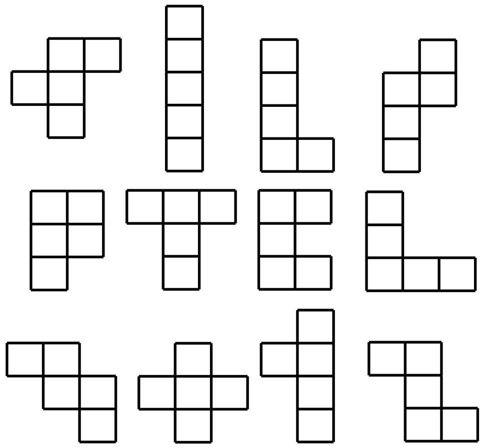
而用如圖六的塗色法可得到 $c(\mathrm{L}_4) = 8$ 符合所求的一種方法。

1	2	5	6	1	2	5	6
3	4	7	8	3	4	7	8
5	6	1	2	5	6	1	2
7	8	3	4	7	8	3	4
1	2	5	6	1	2	5	6
3	4	7	8	3	4	7	8
5	6	1	2	5	6	1	2
7	8	3	4	7	8	3	4

圖六

（三）、 五方塊

五方塊共有 12 個品種，如圖七所示：



圖七

由左至右，由上而下分別命名為：

F、I、L、N、

P、T、U、V、

W、X、Y、Z 形五方塊。

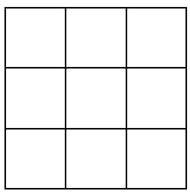
接者，以 I, X, F, L, N, P, T, U, Y, V, Z, W 五方塊的順序逐一討論。

由引理得知 I 形五方塊的 n 值最小為 5，塗色方法與圖一相似。

而 X 形五方塊 n 值最小為 5，塗色方法與圖三相同。

F、L、N、P、T、U、Y 形五方塊因為其內部都包含有一個 L 形四方塊，所以由引理 2 知至少要用 8 種顏色。又圖六給出了一種使用 8 種顏色的塗色方法，所以所需顏色數的最小值為 8。

對於 V 與 Z 形五方塊，因為他們可以同時覆蓋圖八的任何兩個小方格，所以圖八的各個小方格內的顏色都不得重複。



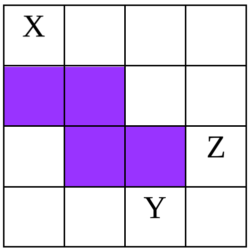
圖八

從而至少要用 9 種顏色。又圖九給出了一種使用 9 種顏色的塗色方法，故所需顏色數的最小值為 9。

1	2	3	1	2	3	1	2	3	1
4	5	6	4	5	6	4	5	6	4
7	8	9	7	8	9	7	8	9	7
1	2	3	1	2	3	1	2	3	1
4	5	6	4	5	6	4	5	6	4
7	8	9	7	8	9	7	8	9	7
1	2	3	1	2	3	1	2	3	1
4	5	6	4	5	6	4	5	6	4

圖九

對於 W 形五方塊，若 n=5，則圖十一中 X 和紫色區塊中的顏色都不同，又 Y 和紫色區塊中的顏色也都不同，所以 X 和 Y 的顏色相同。同理 X 和 Z 的顏色相同，故 Y 和 Z 的顏色相同，但它們可以被 W 形五方塊同時覆蓋，矛盾。



圖十

故 $c(W_5) > 5$。又 $c(W_5) = 6$ 時，用圖十一的塗色方法可得到符合所求的塗法，故 $c(W_5) = 6$。(這裡 W_5 代表 W 形五方塊)

1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
3	4	3	4	3	4	3	4	3	4
5	6	5	6	5	6	5	6	5	6
1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
3	4	3	4	3	4	3	4	3	4
5	6	5	6	5	6	5	6	5	6
1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
3	4	3	4	3	4	3	4	3	4

圖十一

二、同時適用於所有 k 方塊的結果

由前面的討論可以看出，對於一個 k 方塊 P，要求出其 $c(P)$的準確值並不容易。所以接著將目標轉為大略估計 $c(P)$的大小。為此，考慮同時使用所有 k 方塊時(亦即，將任意一個 k 方塊放在平面上時，都不會蓋到重複的顏色)所需顏色數。定義：

<u>定義 2</u>　同時使用所有 k 方塊時所需的最少顏色數為 c_k

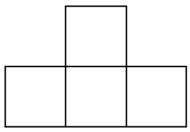
那麼由和引理 2 類似的想法，可以得到

<u>引理 3</u>　$c(P) \leq c_k$.

（一）、計算 c_1 至 c_5 的值

易見 $c_1 = 1, c_2 = 2$. 這是因為單方塊和雙方塊都只有一個品種，所以用上所有單/雙方塊相當於只用一種多方塊。

接著討論 c_3 的值。將 I 形和 V 形三方塊重疊如圖十一結合引理 3 即可得知$c_3 \geq c(T_4) = 5$。又如圖三的塗色法即可符合所求，得到 $c_3 = 5$.



圖十二

接著討論 c_4 的值。因為 $c(L_4) = 8$, 所以由引理 3 知 $c_4 \geq c(L_4) = 8$. 而圖六中的塗色法只用了 8 種顏色而且滿足條件，故 $c_4 = 8$. 注意到圖六的塗法也可以改成如圖十三的塗法。

2	3	4	5	6	7	1	5
5	6	7	1	8	2	3	4
1	8	2	3	4	5	6	7
3	4	5	6	7	1	8	2
6	7	1	8	2	3	4	5
8	2	3	4	5	6	7	1
1	5	6	7	1	8	2	3
3	4	8	2	3	4	5	6

圖十三

最後討論 c_5 的值。由圖十四的塗色方法即可符合所求，故知 13 種顏色可以達成題目的要求。又在圖十四的每一區塊中，各格所塗的顏色必互不相同，故至少需要用 13 種顏色，從而所需顏色數的最小值為 13。

8	9	1	10	11	12	2	3	4	13	10	11
12	2	3	4	13	5	6	7	8	9	1	13
5	6	7	8	9	1	10	11	12	2	3	4
1	10	11	12	2	3	4	13	5	6	7	8
3	4	13	5	6	7	8	9	1	10	11	12
7	8	9	1	10	11	12	2	3	4	13	5
11	12	2	3	4	13	5	6	7	8	9	1
13	5	6	7	8	9	1	10	11	12	2	3
9	1	10	11	12	2	3	4	13	5	6	7
2	3	4	13	5	6	7	8	9	1	10	11
6	7	8	9	1	10	11	12	2	3	4	13
10	11	12	2	3	4	13	5	6	7	8	9

圖十四

（二）、計算 c_k

而觀察圖十三和圖十四，兩者之間有一些共通點。兩者皆是以一種圖形無限複製後拼滿整個平面，在相對應的位置塗上相同顏色。因此為了方便起見，以後若以顏色分區塊，且無特別說明，即認定是在相對應的位置上塗上相同顏色。

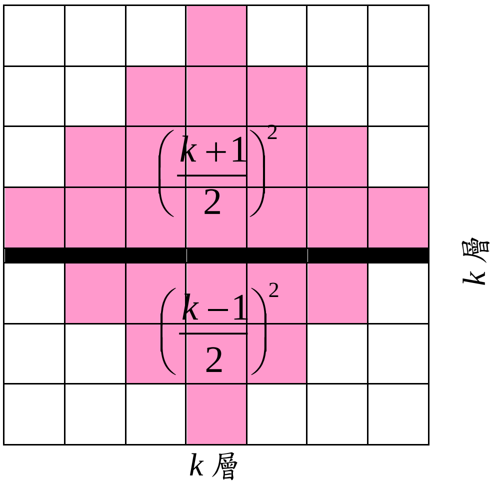
而且此階梯狀的圖形最上層與最下層皆為 1 個小方格，中間層的小方格數最多，且每層的小方格數都成等差數列，它們的公差為 2(圖十三最中間層例外)。所以可以猜測所有 k 方塊的最佳塗色都是這種形式的。

而事實上，這是對的。以下依照 k 的奇、偶數情況分別討論。

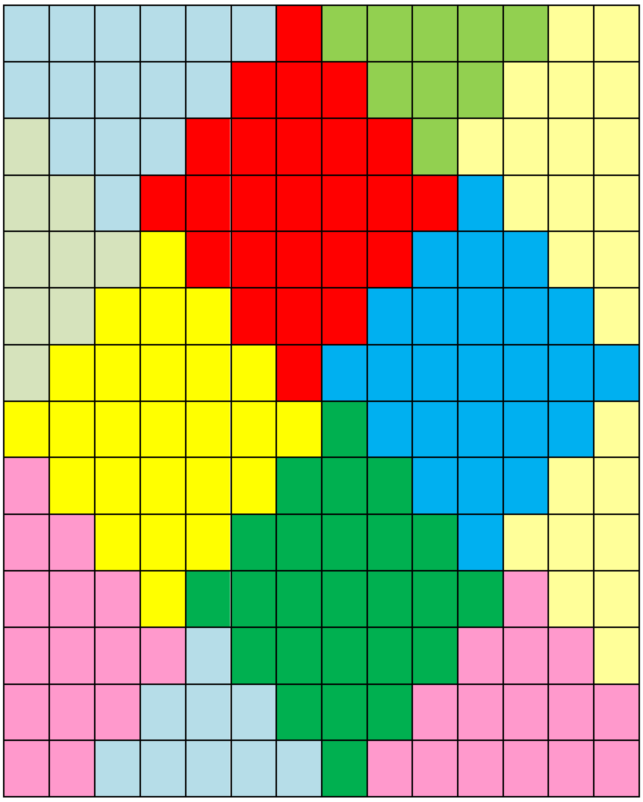
1. 若 k 為奇數，觀察圖十五發現下圖十五形狀內任兩格 x 軸座標差與 y 軸座標差之和皆小於 k，故必能用其中一種 k 方塊覆蓋。而圖中的格子數為

$$(1+3+5+\cdots+k)+[1+3+5+\cdots+(k-2)]=\left(\frac{k+1}{2}\right)^2+\left(\frac{k-1}{2}\right)^2=\frac{k^2+1}{2}$$

故 $c_k \geq \dfrac{k^2+1}{2}$.



圖十五

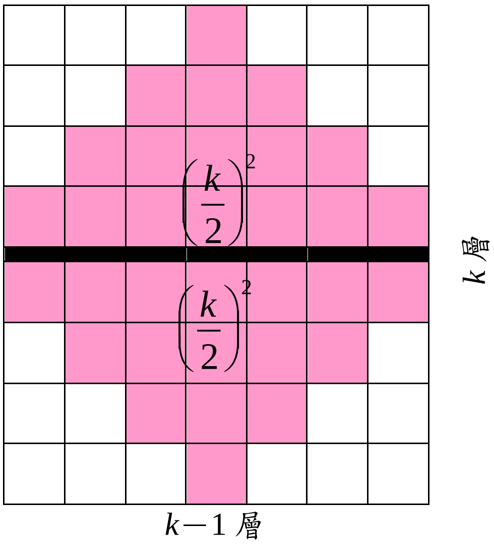


圖十六

又如圖十六，於每塊上位置相對應的兩格，其 x 軸座標差與 y 軸座標差之和大於等於 k，故至少須用$(k+1)$方塊才能同時

覆蓋同顏色的兩格，故$c_k \le \dfrac{k^2+1}{2}$，從而$c_k = \dfrac{k^2+1}{2}$。

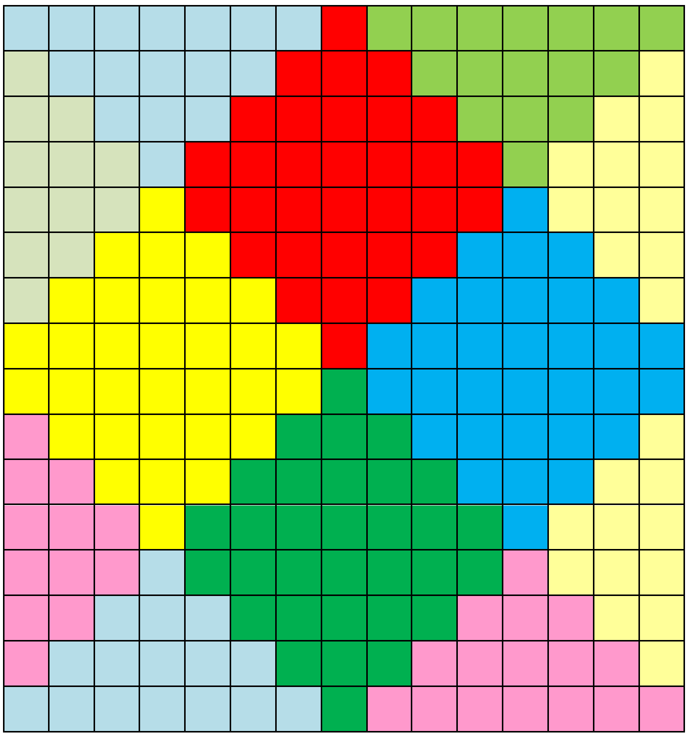
2. 若 k 為偶數，觀察圖十七：



圖十七

與 1. 同理，$c_k \ge (\dfrac{k}{2})^2 + (\dfrac{k}{2})^2 = \dfrac{k^2}{2}$。

又如圖十八，與 1. 同理，$c_k \le \dfrac{k^2}{2}$，故$c_k = \dfrac{k^2}{2}$。



圖十八

綜合上述，我們可以得到

定理 1 $c_k = \left\lfloor \dfrac{k^2+1}{2} \right\rfloor.$

推論 1 *若 P 是一個 k 方塊，那麼*

$$c(P) \le \left\lfloor \frac{k^2+1}{2} \right\rfloor$$

三、矩形多方塊的推廣以及另一種估計

雖然推論 1 給出了一個上界，但是這上界並不是很好的。最大的問題在於，沒有任何一個 k 方塊可以達到上界。所以接著將策略改變為先計算一種特殊的多方塊的 c 值，再利用引理 2 給出所有多方塊的上界。而本篇研究所選的多方塊為矩形多方塊。方便起見，定義：

定義 3 $c_R(a, b)$*為 a 乘 b 的矩形多方塊的 c 值*

我們可以證明

定理 2 $c_R(a,b) \ge ab$ *，且 $c_R(a,b)=ab$ 若且唯若 $a|b$ 或 $b|a$*

證明 不妨設$a \le b$. 由引理 1 易知$c_R(a,b) \ge ab$.

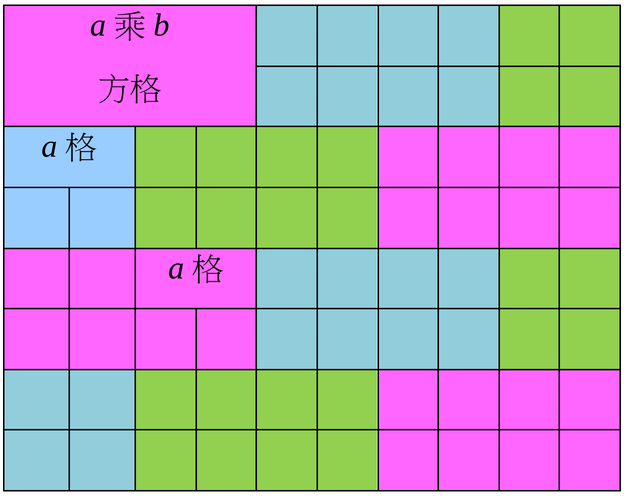
接著，先證充分性。使用反證法。如果 a 不整除 b 但 $c_R(a,b)=ab$ 那麼存在一種滿足條件而且顏色只有 ab 種的塗色方法。

考慮其中一種顏色 t.那麼因為 a 乘 b 的矩形多方塊有 ab 格，而且總共只有 ab 種顏色，故每一個 a 乘 b 的矩形都恰會覆蓋到一次 t.令$A_x = \{(x,i) | 0 \le i < a\}$, $B_x = \{(x,i) | 0 \le i < b\}$.如果 t 在 A_x 裡，那麼因為 $A_x \sim A_{x+b-1}$ 是 a 乘 b 矩形，所以其中恰有一個 t, 也就是說 $A_{x+1} \sim A_{x+b-1}$ 中沒有 t.又因為 $A_{x+1} \sim A_{x+b}$ 也是 a 乘 b 矩形，所以其中恰有一個 t，因此 A_{x+b} 中也有 t. 由此易知若 t 在 A_x 中，那麼 t 也在 A_{x+nb} 中. 同理,若 t 在 B_x 中，則 t 也在 B_{x+na} 中。由裴蜀定理知，存在正整數 m, n 使得 $am-bn=\gcd(a,b)$. 因為$a \le b$且 a 不整除 b,所以 $\gcd(a,b) < a$.

不妨設 t 在 A_0 和 B_0 中, 那麼 t 也在 A_{nb} 和 B_{na} 中。不妨設 X 在 A_{nb} 中,Y 在 B_{na} 中且 X 和 Y 的顏色都是 t. 那麼 X, Y 的 y 座標差是 $0 < |am-bn| < a$, 且 x 座標差 $< b$,因此 a 乘 b 的矩形可以同時

覆蓋 X, Y，矛盾。充分性得證。

再來證必要性。若 $a|b$，則圖十九每塊區域中任選兩格都可被同時覆蓋，又下圖給出的塗色方法符合要求，所以$c_R(a,b) \leq ab$. 結合$c_R(a,b) \geq ab$知 $c_R(a,b)=ab$. 得證。



圖十九

然而對於不滿足 $a|b$ *或* $b|a$ 的 a, b，計算 $c_R(a,b)$是困難的。以下舉 $a = 2, b = 5$ 為例。

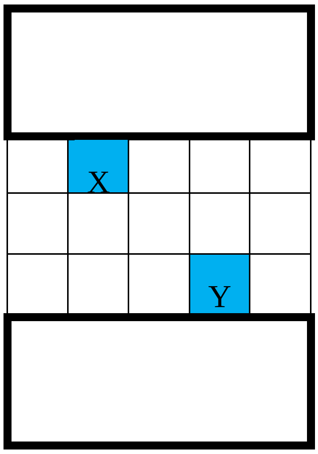
定理 3 $c_R(2,5) = 12$

證明 由定理 2 知 $c_R(2,5) > 10$。又由引理 2 以及定理 2 知，$c_R(2,5) \leq c_R(2,6) = 12$. 因此 $c_R(2,5) = 11, 12$. 接著證明 11 是不行的。

假設存在 11 種顏色的塗法，不妨將這 11 種顏色由 1 至 11 編號。因為只有 11 種顏色，所以如果顏色 p 不在 2 乘 5 的矩形當中，那麼任何其它 $q \neq p$ 的顏色 q, q 都會在該 2 乘 5 的矩形當中。由此，我們可以得到幾件事實。

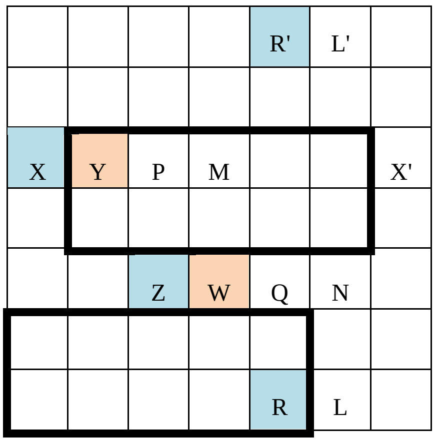
Claim 1. 如圖二十，如果 X 和 Y 的顏色都是 p, 那圖中所示的兩個矩形內都沒有 p

證明 可以證明不論是矩形裡面的哪個格子，都可以和 X 或 Y 其中之一同時被 2 乘 5 的矩形多方塊覆蓋。故得證。



圖二十

<u>Claim 2.</u> 如圖二十一，若 X 和 Z 的顏色相同，Y 和 W 的顏色相同，那麼 P 和 Q 的顏色也相同，R 和 R'的顏色也和 X 和 Z 一樣。



圖二十一

<u>證明</u> 設 X 和 Z 的顏色是 p, Y 和 W 的顏色是 q, P 的顏色是 r. 由 Claim 1 知下方的 2 乘 5 矩形中沒有顏色 q, 故其中必有顏色 p 的格子。然而矩形中除了 R 之外的每格都可以同時和 X 或 Z 被 2 乘 5 的矩形覆蓋，因此顏色為 p 的格子只能是 R. 同理可證 R'的顏色是 p. 由 Claim 1 知上方的 2 乘 5 矩形中沒有顏色 p, 故其包含了除了 p 以外的所有顏色。而上方的矩形中除了 Y, P 之外，都能和 Q 同時被 2 乘 5 的矩形覆蓋，因此 Q 的顏色只能是 p, q, r 其中之一。然而 Q 可以同

時和 Z, W 被 2 乘 5 的矩形覆蓋，因此 Q 的顏色不能是 *p*, *q* 之一，也就是說 Q 的顏色是 *r*, 證畢。

<u>Claim 3.</u> 在圖二十一中，X 和 Z，以及 Y 和 W 的顏色不能同時相同。

<u>證明</u> 若不然，設 X 和 Z 的顏色相同，Y 和 W 顏色相同，由 Claim 2.知 P 和 Q 同色，R, R'的顏色和 X, Z 相同。又因為 Y 和 W 顏色相同，P 和 Q 顏色相同，所以由 Claim 2.知 M 和 N 顏色相同且 L, L'的顏色和 Y, W 相同。又因為 R 和 Z 顏色相同，L 和 W 顏色相同，所以由 Claim 2.知 X'的顏色和 L, R 的顏色相同，也就是和 X 相同。如此重複利用 Claim 2.即可得到如圖的六循環塗色(其中同樣的數字代表同種顏色)。

A'	B'	C'	D'	E'					
1	2	3	4	5	6	1	2	3	4
A	B	C	D	E					
5	6	1	2	3	4	5	6	1	2
U					V				

圖二十二

因為總共只有 11 種顏色，所以第一、三、五行中的顏色只有第 7 種至第 11 種共五種顏色供選擇。然而任取一個 2 乘 5 的矩形，其內的 10 個顏色都不相同。因為這矩形與第一、三、五行重疊的部分恰有五格且也只有五種顏色可填，所以其中必有第 7 至 11 種的顏色各出現一次。圖二十二中粗框框起的矩形為其中一例。因此可知第一、三、五行中的顏色是五循環的。不妨假設 U 的顏色是 7，那麼由五循環知 V 的顏色也是 7。而 A, B, C, D, E 中必有其中一者的顏色是 7，然而 A, B 可同時與 U 被 2 乘 5 的矩形覆蓋，E 可同

時與 V 被 2 乘 5 的矩形覆蓋，所以是顏色 7 的格子只能是 C, D 其中一者。然而 A', B'可與 U 同時被覆蓋，C', D', C, D 可被同時覆蓋，E'可與 V 同時被覆蓋，所以 A', B', C', D', E'任一者的顏色都不能是 7，矛盾。Claim 3.得證。

回到定理 3. 如果可以用 11 種顏色塗色，因為顏色之間的對稱性，不妨設圖二十三中的矩形內的顏色分別是 1 到 10，如圖。

		Y	T	S	
1	2	3	4	5	
6	7	8	9	10	W
		X	Z		

易知 X 的顏色只能是 1, 5, 11 其中之一，且 Y 的顏色只能是 6, 10, 11 其中之一。又 X, Y 不能同時是 11，所以不妨設 X 的顏色不是 11，所以可以不妨設 X 是 1。接著，逐一討論各個格子顏色的可能性。

Z 的顏色：由 Claim 3.知 Z 的顏色不能是 2，又易知不能是 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 之一(不然可以用 2 乘 5 的矩形覆蓋同個顏色兩次，而且 X 的顏色是 11)，所以 Z 只能是 11.

Y 的顏色：易知 Y 的顏色不能是 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9 之一。然而 Y 可和 Z 同時被覆蓋，所以也不能是 11。因此 Y 只能是 6 或 10。然而，如果 Y 的顏色是 6，那麼由 Claim 3.知 T 不能是 7，且易知 T 不能是 1, 2, 3, 4, 5, 8, 9, 10. 再由 T 可和 Y, Z 同時被覆蓋知 T 也不是 6, 11. 如此一來，T 就沒有顏色可塗了，矛盾。因此 Y 的顏色不是 6，也就是說只能是 10.

W 的顏色：易知 W 的顏色不能是 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10 之一，又

W 和 X, Z 可被同時覆蓋，所以 W 也不能是 1, 11，因此 W 是 6.

T 的顏色：易知不可能是 2, 3, 4, 5, 8, 9, 10 之一，又 T 和 X, Z 可被同時覆蓋，所以不可能是 1, 11 之一。再結合 Claim 3.知 T 不能是 6(因為 Y 的顏色是 10, W 的顏色是 6)，所以 T只能是 7.

S 的顏色：易知 S 的顏色不可能是 1, 2, 3, 4, 5, 9, 10, 又 S 可跟 T, Z 同時被覆蓋,所以 S 的顏色也不能是 11, 7 之一。因為 T 的顏色是 7，所以由 Claim 3.知 S 的顏色不能是 8. 如此一來，S 的顏色只能是 6，然而 S 可和 W 同時被覆蓋，矛盾。

綜合上述，11 種色是不能達成條件的。因此$c_R(2,5) > 11$, 也就是說$c_R(2,5) = 12$. 得證。

從上面的討論可以看出,要決定一個矩形多方塊所需的顏色數需要經過非常繁雜的討論。為此，觀察前面各個塗色法，可以發現塗色的方法都是「有規律」的。將這種「規律」作如下的定義：

定義 4 *稱一種塗色法為「規律的」若且唯若存在兩個線性獨立的向量$\overrightarrow{v_1} = (a,b), \overrightarrow{v_2} = (c,d)(a,b,c,d \in \mathbb{Z})$使得任兩格 A, B 顏色相同的充要條件為$\exists p,q \in \mathbb{Z}\ \mathrm{s.t.} \overrightarrow{AB} = p\overrightarrow{v_1} + q\overrightarrow{v_2}$, 且稱這種塗色法為由$\overrightarrow{v_1}$和$\overrightarrow{v_2}$生成的塗色法。*

可以驗證前面所給出的塗色法都是規律的。以圖九為例，圖九中的塗色法是由(3,0)和(0,3)生成的塗色法，所以是規律的。再舉圖十四為例,圖十四中的塗色法是由(3,4)和(−4,3)生成的塗色法，所以也是規律的。

雖然仍不知道是否所有最佳的塗色法都是規律的，但由前面的經驗告訴我們，規律的塗色法通常可以達到最佳，所以定義：

定義 5 *$c'_R(a,b)$為使用規律的塗色法時，a 乘 b 的矩形所需最少的顏色法。*

由定義易知

推論 2 $c'_R(a,b) \geq c_R(a,b)$

由「規律」的定義，每個規律的塗色法都是由兩個線性獨立的整向量所決定的。然而，單看兩個向量的值無法輕易地判斷所生成的塗色法所需的顏色。因此需要如下的引理以幫忙計算：

引理 4 *兩個線性獨立的整向量 $\overrightarrow{v_1}=(a,b),\overrightarrow{v_2}=(c,d)(a,b,c,d\in\mathbb{Z})$ 所生成的塗色法所需的顏色數為$|ad-bc|$.*

證明 因為兩個向量線性獨立，所以 a 和 c 不全是零。因此可以取 $r=\gcd(a,c)$和$a'r=a, c'r=c$. 考慮所有座標滿足

$$0\leq x<|r|,0\leq y<|a'd-bc'|$$

的格子(x,y) $(x,y\in\mathbb{Z})$, 下面將證明這些格子的顏色互不相同，且平面上的任何一個格子之顏色都跟這些格子中的其中一個相同。如此一來，這些格子便不重複地涵蓋了所有的顏色，也就是說平面上的顏色共有$|r||a'd-bc'|=|ad-bc|$種。

先證不重複。若不然，設其中有相異的格子 A,B 的顏色相同。假設$(u,v)=\overrightarrow{AB}$, 易見

$$0\leq|u|<|r|,0\leq|v|<|a'd-bc'|$$

因為 A,B 的顏色相同，所以由定義知存在$p,q\in\mathbb{Z}$使得 $\overrightarrow{AB}=p\overrightarrow{v_1}+q\overrightarrow{v_2}$, 因此$u=pa+qc$. 結合$r=\gcd(a,c)$知$r|u$, 然而$0\leq|u|<|r|$, 所以只能$u=0$. 由此推得$pa+qc=0$, 消去 r 得到$pa'+qc'=0$. 因為a'和c'互質，所以解得$p=-kc'$且$q=ka'$, 其中 k 是整數。由此得到

$$v=pb+qd=k(a'd-bc')$$

由$0\leq|v|<|a'd-bc'|$知$v=0$, 和 A,B 相異矛盾。故其中沒

有相異的兩個格子塗有相同的顏色。

接著只要證明平面上的每個格子都跟一開始選定的格子其中之一的顏色相同。首先，由裴蜀定理知存在整數對(x,y)滿足$ax+cy=r$.對於平面上任何一個格子(s,t)，由餘數定理知存在整數q_1,r_1使得$0\le r_1<r$且$s=rq_1+r_1$. 再由餘數定理知存在整數q_2,r_2使得$0\le r_2<|a'd-bc'|$且

$$(t-q_1xb-q_1yd)=(a'd-bc')q_2+r_2$$

因此$(s,t)-(r_1,r_2)=(q_1x-q_2c')\overrightarrow{v_1}+(q_1y+q_2a')\overrightarrow{v_2}$，由定義知$(s,t)$和$(r_1,r_2)$的顏色相同結合$0\le r_1<r$和$0\le r_2<|a'd-bc'|$即得證。

知道如何用給定的兩向量計算他們生成出的塗色法所需的顏色數後，接著便可直接構造塗色法以求$c'_R(a,b)$的上界。

定理 4 *若 k,r 是正整數且$r<a$，那麼*

$$c'_R(a,ka+r)\le\min((k+1)a^2,(ka+2r)a)$$

證明 首先，先證明$c'_R(a,ka+r)\le(k+1)a^2$.

考慮(a,a)和 $((k+1)a,0)$所生成的塗色法。若有相同顏色的兩格 A,B 可以同時被a乘$ka+r$的矩形覆蓋，設$\overrightarrow{AB}=(u,v)$，那麼可以得到$|u|<a,|v|<ka+r$或$|u|<ka+r,|v|<a$，且由生成的定義知存在整數 p,q 滿足：

$$(u,v)=p(a,a)+q((k+1)a,0)$$

若$|u|<a,|v|<ka+r$，那麼由$u=pa+q(k+1)a$知$u|a$，結合$|u|<a$知$u=0$，因此$k+1|p$. 再由$v=pa$知$(k+1)a|v$，故$v=0$，不合。

若$|u|<ka+r,|v|<a$，那麼由$v=pa$知$v=0$，所以$p=0$. 因此$u=pa+q(k+1)a=q(k+1)a$，結合$|u|<ka+r$知$u=0$，不合。

綜合上述，不可能存在兩個相異但顏色相同的格子可同時被覆蓋。因此(a,a)和 $((k+1)a,0)$所生成的塗色法滿足條件。由引理 4 知此塗色法共有$(k+1)a^2$種顏色，故

$$c'_R(a, ka+r) \le (k+1)a^2$$

再來證明$c'_R(a, ka+r) \le (ka+2r)a.$

考慮(a,a)和$(ka+r, -r)$ 所生成的塗色法。若有相同顏色的兩格 A, B 可以同時被a乘$ka+r$的矩形覆蓋，設$\overrightarrow{AB} = (u, v)$, 那麼可以得到$|u| < a, |v| < ka+r$或$|u| < ka+r, |v| < a$, 且由生成的定義知存在整數 p, q 滿足：

$$(u, v) = p(a,a) + q(ka+r, -r)$$

若$|u| < a, |v| < ka+r$, 由餘式定理，可以取$qr = aq_1 + r_1$, 其中q_1和r_1是整數且$0 \le r_1 < a$. 所以$u = (p+kq+q_1)a + r_1$. 由$|u| < a$知$p = -kq - q_1$或$-kq - q_1 - 1$. 因此$v = pa - qr$ $= -kqa + r_1 - 2qr$或$-(kq+1)a + r_1 - 2qr$, 也就是說

$$-(kq+1)a + r_1 - 2qr \le v \le -kqa + r_1 - 2qr$$

然而，若$q \ge 2$, 那麼$v \le -kqa + r_1 - 2qr < -(2k-1)a - 4r$ 和$v > -(ka+r)$矛盾。

若$q \le -2$, 那麼$v \ge -(kq+1)a + r_1 - 2qr \ge (2k-1)a + 4r$ 和$v < ka+r$矛盾。

故$q = -1,0,1.$ 然而若$q = 0$, 那麼$u = pa$, 所以$p = 0$, 不合。若$q = 1$, 那麼$r_1 = r$, 所以$v \le -kqa + r_1 - 2qr = -(ka+r)$ 和$v > -(ka+r)$矛盾。最後，若$q = -1$, 那麼$r_1 = a - r$, 所以$v \ge -(kq+1)a + r_1 - 2qr = ka + r$, 和$v > -(ka+r)$矛盾。故這種情況不可能發生。

若$|u| < ka+r, |v| < a$, 由餘式定理，可以取$qr = aq_2 + r_2$, 其中q_2和r_2是整數且$0 \le r_2 < a$. 所以$v = (p-q_2)a - r_2$. 由$|v| < a$知$p = q_2$或$q_2 + 1$. 因此$u = pa + kqa + qr$ $= kqa - r_2 + 2qr$或$(kq+1)a - r_2 + 2qr$, 也就是說

$$kqa - r_2 + 2qr \le u \le (kq+1)a - r_2 + 2qr$$

然而，若$q \ge 2$, 那麼$u \ge kqa - r_2 + 2qr > (2k-1)a + 4r$, 和$u < ka+r$矛盾。

若$q \le -2$, 那麼$u \le (kq+1)a - r_2 + 2qr \le -(2k-1)a - 4r$ 和$u > -(ka+r)$矛盾。

故$q=-1,0,1$. 然而若$q=0$, 那麼$v=pa$, 所以$p=0$, 不合。若$q=1$, 那麼$r_2=r$, 所以$u\geq\ kqa-r_2+2qr=ka+r$, 和$u<ka+r$矛盾。最後，若$q=-1$, 那麼$r_1=a-r$, 所以$u\leq(kq+1)a-r_2+2qr=-(ka+r)$, 和$u>-(ka+r)$矛盾。故這種情況也不可能發生。

綜合上述，不可能存在兩個相異但顏色相同的格子可同時被覆蓋。因此(a,a)和 $(ka+r,-r)$所生成的塗色法滿足條件。由引理 4 知此塗色法共有$(ka+2r)a$種顏色，故

$$c'_R(a,ka+r)\leq(ka+2r)a$$

因此 $c'_R(a,ka+r)\leq(k+1)a^2$, $c'_R(a,ka+r)\leq(ka+2r)a$

結合便有 $c'_R(a,ka+r)\leq\min((k+1)a^2,(ka+2r)a)$,得證。

利用定理 4，我們可以得到比推論 1 還要更好的上界。

<u>定理 5</u> *對於任何一個 k 方塊 P 來說，*

$$c(P)\leq\frac{8}{25}(k+1)^2$$

<u>證明</u> 設 P 中，任兩格的 x 軸值相差最大為 w, y 軸值相差最大為 h, 那麼易證$w+h\leq k-1$(簡單數歸即可)。因為 P 中，任兩格的 x 軸值差不大於 w, y 軸值差不大於 h, 所以 P 可以被$(w+1)$乘上$(h+1)$的矩形完全覆蓋。由引理 2 和推論 2 知

$$c(P)\leq c_R(w+1,h+1)\leq c_R(w+1,k-w)\leq c'_R(w+1,k-w)$$

故

$$c(P)\leq\max_{a+b=k+1}c'_R(a,b)=\max_{\substack{a+b=k+1\\a\leq b}}c'_R(a,b)$$

因此只需證明：

$$\max_{\substack{a+b=k+1\\a\leq b}}c'_R(a,b)\leq\frac{8}{25}(k+1)^2$$

注意到右式跟a,b無關，所以只需證明對於所有滿足$a+b=k+1$和$a\leq b$的(a,b), 都會有：

$$c'_R(a,b)\leq\frac{8}{25}(k+1)^2$$

即可。設$b=(n+x)a$，其中 n 是正整數且 x 是小於 1 的非負實數。若$x<0.5$，那麼由定理 4 知

$c'_R(a,b)\le \min((n+1)a^2,(n+2x)a^2)=(n+2x)a^2$

.

考慮函數

$$f(t)=\frac{n+2t}{(n+1+t)^2}$$

對 f 取導得到

$$f'(t)=\frac{2(1-t)}{(n+1+t)^3}$$

所以 f 在[0,0.5)時遞增。因此$f(x)<f(0.5)$，也就是說

$$c'_R(a,b)\le (n+2x)a^2<\frac{((n+1+x)a)^2(n+1)}{(n+\frac{3}{2})^2}=\frac{n+1}{(n+\frac{3}{2})^2}(k+1)^2$$

(最後一個等號用到了$a+b=k+1$)

若$x\ge 0.5$，那麼由定理 4 知

$c'_R(a,b)\le \min((n+1)a^2,(n+2x)a^2)=(n+1)a^2$

但是$k+1=a+b=(n+1+x)a\ge (n+\frac{3}{2})a$，所以

$$c'_R(a,b)\le (n+1)a^2\le \frac{n+1}{(n+\frac{3}{2})^2}(k+1)^2$$

因此不論如何，都會有

$$c'_R(a,b)\le \frac{n+1}{(n+\frac{3}{2})^2}(k+1)^2$$

再考慮函數

$$g(t)=\frac{t+1}{(t+\frac{3}{2})^2}$$

對g取導得到

$$g'(t)=\frac{-4(2t+1)}{(2t+3)^3}$$

因此g在正實數遞減。又 n 是正整數，所以

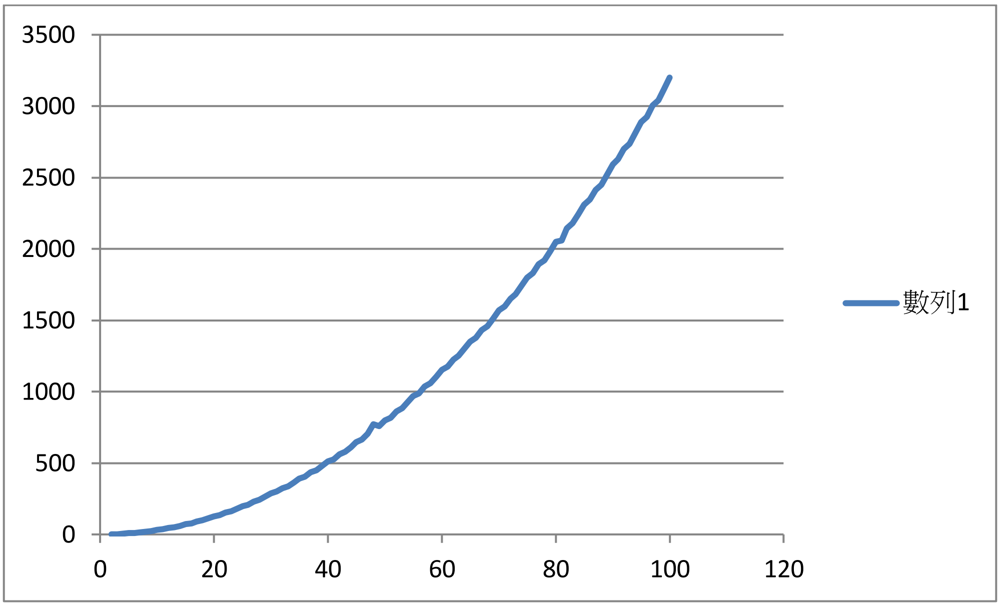
$$c'_R(a,b)\le g(n)(k+1)^2\le g(1)(k+1)^2=\frac{8}{25}(k+1)^2$$

定理 5 證畢。

雖然定理 5 的上界的次數和推論 1 相同，但是首項係數改進了很多。值得一提的是，雖然定理 5 將

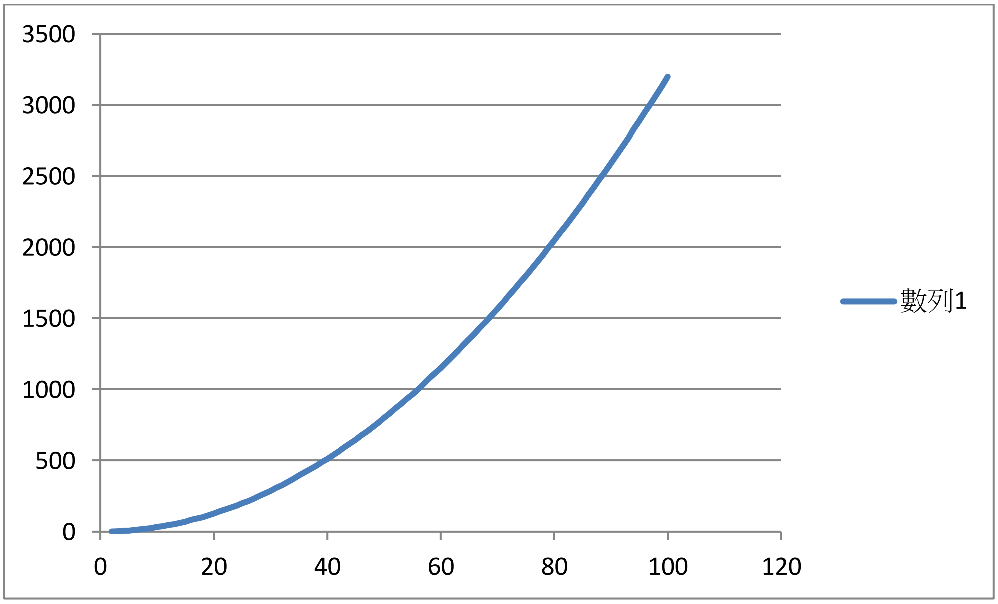
$$\max_{\substack{a+b=k+1 \\ a\le b}} c'_R(a,b)$$

放縮成$\frac{8}{25}(k+1)^2$，但是兩者其實是非常相近的。下面是兩者分別對 k 作圖的圖以及重疊後的圖，可見兩者幾乎是一樣的。



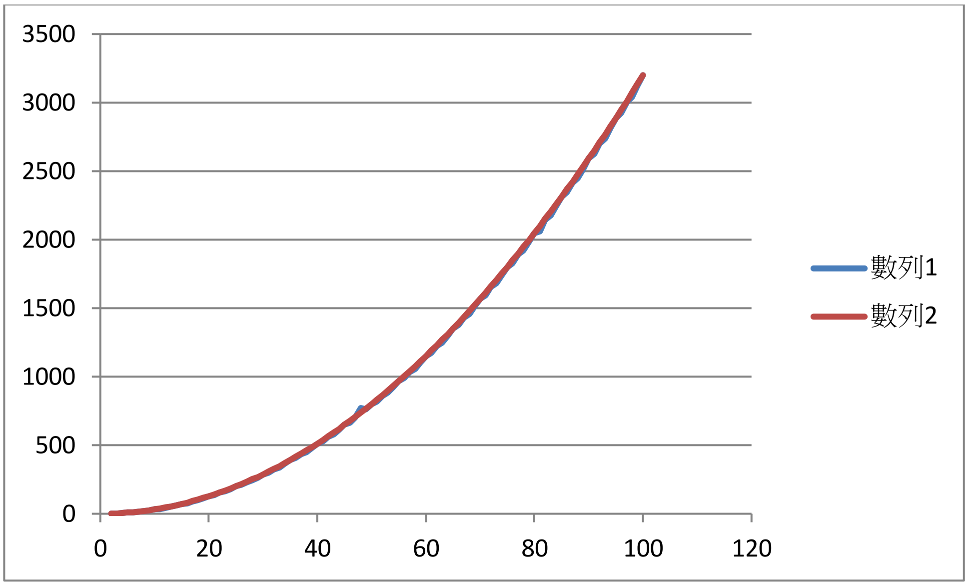
$\max_{\substack{a+b=k+1 \\ a\le b}} c'_R(a,b)$ 對k作圖

圖二十三



$\frac{8}{25}(k+1)^2$對k作圖

圖二十四



圖二十五

陸、討論

一、$c_R(a,b)$和$c'_R(a,b)$之間的關係

前面已經證明$c_R(a,ka)=ka^2=c'_R(a,ka)$且$c_R(2,5)=12=c'_R(2,5)$. 事實上還可以證明$c_R(a,a+1)=a(a+2)=c'_R(a,a+1)$和$c_R(a,2a-1)=2a^2=c'_R(a,a+1)$. 然而$c_R(a,ka)$是否一定等於$c'_R(a,ka)$? 目前尚未找到反例，也仍未證明出來。

二、$c'_R(a,b)$和$\min((k+1)a^2,(ka+2r)a)$之間的關係

定理 4 表明了$c'_R(a,b)\le \min((k+1)a^2,(ka+2r)a)$, 但是根據程式運行的結果，在$\mathrm{ka}+\mathrm{r}\le 100$時等號都會成立，可見這個上界是非常緊的，所以推得的定理 5 比推論 1 還要精確許多。至於定理 4 中的等號是否恆成立仍是未解決的問題。

柒、 結論

一、一到五方塊所需的顏色數如下表格所示：

	所需顏色數
單方塊	1
二方塊	2
I 形三方塊	3
V 形三方塊、I、O 形四方塊	4
T 形四方塊、I、X 形五方塊	5
W 形五方塊	6
L 形四方塊、F、L、N、P、T、U、Y 形五方塊	8
V、Z 形五方塊	9

二、$c_k = \left\lfloor \frac{k^2+1}{2} \right\rfloor$;

三、$ab \le c_R(a,b)$. 等號成立在$a|b$或$b|a$時；

四、如果$0 < r < a$，那麼

$$c_R(a, ka+r) \le c'_R(a, ka+r) \le \min((k+1)a^2, (ka+2r)a)$$

五、如果 P 是一個 k 方塊，那麼

$$c(P) \le \frac{8}{25}(k+1)^2$$

捌、 參考文獻及其它

一、Martin Gardner, Martin Gardner's Mathematical Games, Cdr edition, USA, Mathematical Association of America, 2005

二、Solomon W. Golomb, Polyominoes--Puzzles, Patterns, Problems, and Packings, 2nd edition , USA, Princeton University Press, 1996

三、孫文先，《多方塊----多方塊的數學問題、拼圖謎題與遊戲》，第一版，臺北市，九章出版社，2002 年

四、孫文先，《九章數學俱樂部講義，塗色法──數學證明的一把利劍》，第一版，臺北市，財團法人臺北市九章數學教育基金會，2010 年

【評語】050411

本件作品推廣原先 V 型蓋到重複顏色的問題，到某些 R 方塊的塗色問題，作者利用巧思改進 $C_R(a,b)$的上界，是一個相當不錯的結果，作者在陳述作品內容條理分明，思路清晰，可知其數學程度有相當不錯的成熟度。