中華民國第 56 屆中小學科學展覽會
作品說明書

高級中等學校組　數學科

佳作

050409

Dragon Curve

學校名稱：國立臺南女子高級中學

作者：	指導老師：
高二 李斯立 高二 陳信如	洪士薰

關鍵詞：Dragon Curve、環繞數、旋轉字串

摘要

所謂的 Dragon Curve 即是在座標平面上從原點畫一線段，以此線段的另一端點為支點轉動一個角度後，再以新圖形的另一端點為支點，轉動相同角度，重複多次所得到的圖形。

我們以環繞係數概念為基礎，推導出能計算 Dragon Curve 上每個節點的公式，經探討所有平面上 Dragon Curve，發現只有 60°、90°、120°、240°、270°、300° 的 Dragon Curve 具研究價值。其中，60° 和 300° 等價，90° 和 270° 等價，120° 和 240° 等價，三組性質各異。我們主要探討 60°、300° 和 120°、240° 兩組，其中又以 120°、240° 為重。

為了探討 Dragon Curve 的行進狀況，我們引進一種新的位移向量數列。由此我們發現 60° 和 300° 的 Dragon Curve 將會緩慢繞過平面上所有三角形網格，並通過每個格子點無數次。而 120° 和 240° 的 Dragon Curve 不會通過平面上每個格子點，同時也不會有通過同一個點兩次的情形發生。

壹、研究動機

老師給我一篇關於 θ 為 90^o 的 Dragon Curve 的文章，裡面提到它的各種性質、規律及如何用一個公式算出 Dragon Curve 上各個節點的座標位置，我覺得很有趣，查閱了一些資料後，將 θ 改成其他角度來和最原始的 Dragon Curve 做比較。

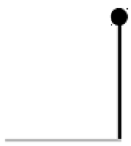
貳、研究目的

一. 找出除了 θ=90^o 以外，還有哪些角度能形成有意義的 Dragon Curve。
二. 找出可以計算 θ=120^o 的 Dragon Curve 上每個節點座標的公式。
三. 證明 θ=120^o 的 Dragon Curve 每到第 2^k 個節點時，接下來的方向必會向左轉。
四、證明 θ=120^o 的 Dragon Curve 在平面上是否會相交，不論是自穿或互穿。

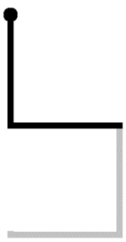
參、文獻探討

從文獻[1]中看到，Dragon Curve，從複數平面的原點出發，連接線段 0、1，再以 1 為中心將原來圖形 G_1(包含頂點及線段)順時針旋轉 90^o，所得圖形為原來圖形加上 1 與 1+*i* 的連線段(包含頂點)G_2，再依此再以 i 為中心，將 G_1 順時針旋轉 90^o，加上 G_2，得圖形 G_3，依此操作所的圖形 $G=\bigcup G_n$ 即為 Dragon Curve。

圖一



圖二



圖三

Dragon Curve 是在座標上從原點畫一線段，並以線段的另一端點為支點，將線段順時針轉一個固定角度 θ，重複執行多次的圖形。(見圖一二三)

一、定義:

(1) 0 稱為 Dragon Curve 中的第 0 個節點，座標以 $d(0)$ 表示。
(2) G 的圖形中 0 開始，沿 dragon curve 連至第 n 個頂點，稱為 Dragon Curve 中的第 n 個節點表示其座標為 $d(n)$。

性質 0-1：

(1) $d(0)=0, d(1)=1, d(2)=1+i$
(2) $d(2^k)=(1+i)^k,\ k\geq 0$
(3) 若正整數 k_1 滿足 $2^{k_1-1}<n<2^{k_1}$，令 $n_1=2^{k_1}-n$，則 $d(n)=(1+i)^{k_1}-i\cdot d(n_1)$

二、環繞係數

為了計算 $d(n)$ ，我先討論非負整數的環繞係數。

環繞係數定義:
任一正整數 n 都存在一組非負整數 $k_1, k_2, \cdots, k_m$ ，其中 $k_1 > k_2 > \cdots > k_m$ ，使得 $n = 2^{k_1} + (-1)2^{k_2} + \cdots + (-1)^{m-1}2^{k_m}$, 則係數組 $k_1, k_2, \cdots, k_m$ 稱為 n 的環繞係數。

而 $k_1, k_2, \cdots, k_m$ 為 n 的一組環繞係數。事實上，每一個正整數 n 恰有兩種環繞表示，其環繞係數必為下列情形之一：

(1) $k_1, k_2, \cdots, k_m$ ，其中 $k_1 > k_2 > \cdots > k_m$ 且 $k_{m-1} > k_m + 1$ 。

(2) $k_1, k_2, \cdots, k_m + 1, k_m$ ，其中 $k_1 > k_2 > \cdots > k_m$ 且 $k_{m-1} - k_m = 1$ 。

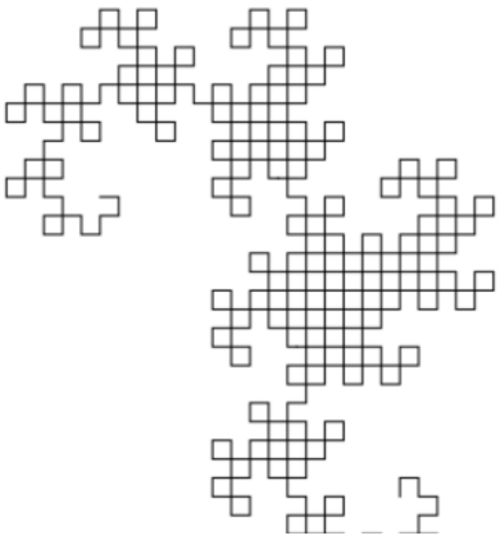
性質 0-2：

(1) 設 $k_1, k_2, \cdots, k_m$ 為 n 的一組環繞係數，則

$$d(n) = (1+i)^{k_1} + (-i)(1+i)^{k_2} + \cdots + (-i)^{m-1}(1+i)^{k_m}$$

(2) 若 $k_1, k_2, \cdots, k_m$ $k_1, k_2, \cdots, k_m, k_m + 1$ 皆為 n 的環繞係數，則

$$(1+i)^{k_1} + (-i)(1+i)^{k_2} + \cdots + (-i)^{m-1}(1+i)^{k_m}$$
$$= (1+i)^{k_1} + (-i)(1+i)^{k_2} + \cdots + (-i)^{m-1}(1+i)^{k_m} + (-i)^m(1+i)^{k_m+1}$$



三、 1 ,i, -1, -i 環繞數表示：

定義：整數 a,b，若 $a + bi = (1+i)^{k_1} + (-i)(1+i)^{k_2} + \cdots + (-i)^{m-1}(1+i)^{k_m}$ ，其中 $k_1 > k_2 > \cdots > k_m$ ，考慮最後一項 $(-i)^{m-1}(1+i)^{k_m}$ ， $(-i)^{m-1}$ 的值若為 1 ,i, -1, -i，分別稱為整複數 $a + bi$ 的 1 ,i, -1, -i 環繞數表示。

例如：1 有 4 種環繞數表示

$$1 = -i(1+i)^2 - (1+i) + i = -i(1+i)^2 - 1 = (1+i) - i$$

引理 0-1：

(1) 整複數$a+bi$可被$1+i$ 整除的充要條件為a,b有相同的奇偶性。

(2) 每一個整複數$a+bi$都恰有一個$1,i,-1,-i$環繞數表示。

證明：由數學歸納法

(1) $|z|^2=a^2+b^2=1$時，因為$1=-i(1+i)^2-(1+i)+i=-i(1+i)^2-1=(1+i)-i$ ，所以 i 也沒問題。

(2) 假設整複數$|z_0|^2<K$ ，符合定理，考慮$|z|^2=K$

若$1+i$整除$z=a+bi$ ，則$z_0=\dfrac{z}{1+i}$, $|z_0|^2<K$ ，也是整複數，因為$z=(1+i)z_0$ 所以z 也符合定理。

若$1+i$不能整除$z=a+bi$ ，由 Lemma 3 知$z\pm1,\ z\pm i$ 可被$1+i$整除，以$z-1$為例

$z-1$有一個i-表示，因此z有一個1-表示。

同理考慮$z+1,\ z\pm i$可得z的$i,-1,-i$-表示。

Dragon Curve G 可以 0 為中心，分別旋轉$0°,90°,180°,270°$得 4 個不同的 Dragon Curve $G,iG,-G,-iG$

四、自穿及互穿

定理：每一個整複數$a+bi$都恰被 Dragon Curve 通過兩次，其中可能是同一曲線兩次，或者是不同$G,iG,-G,-iG$ Dragon Curve 中某 2 條各一次。

證明：由引理 0-1，對於任意整複數$z=a+bi$ ，z有$1,i,-1,-i$-四種表示，所以必存在n使得$d(n)=z$ 。但由性質 0-2 知道每個$d(n)$有兩種不同的$1,i,-1,-i$-表示，因此整複數$a+bi$恰被 Dragon Curve 通過 4/2=2 次。

考慮z的 1,-1-表示，即

$$z=\alpha\left[(1+i)^{k_1}+(-i)(1+i)^{k_2}+\cdots+(-i)^{m-1}(1+i)^{k_m}\right]$$

$$=\beta\left[(1+i)^{l_1}+(-i)(1+i)^{l_2}+\cdots+(-i)^{p-1}(1+i)^{l_p}\right]$$, 其中$\alpha,\beta\in\{\pm1,\pm i\}$

(1)若$\alpha\neq\beta$,則z在不同的 Dragon Curve 上

(2)若$\alpha=\beta$ ，因為$(-i)^{m-1},(-i)^{p-1}$分別為$1,-1$, 所以m,p有相同的奇偶，則

$n_1=2^{k_1}+(-1)2^{k_2}+\cdots+(-1)^{m-1}2^{k_m}$, $n_2=2^{l_1}+(-1)2^{l_2}+\cdots+(-1)^{p-1}2^{l_p}$

由性質 0-2, $n_1\neq n_2$ ，故在同一 Dragon Curve 上的不同節點。

肆、研究過程或方法

一、α-Dragon Curve 的定義

從文獻[1]中定義的 Dragon Curve，從環繞係數計算節點的觀點出發，可得
$d(n)=(1+i)^{k_1}+(-i)(1+i)^{k_2}+\cdots+(-i)^{m-1}(1+i)^{k_m}$

(1)若將$-i$改為α，其中$\alpha\neq 1$且是$x^N=1$的根，N 是某一正整數。即把每次旋轉的角度由順時針旋轉$90°$改變為每次旋轉角度θ，$\theta=Arg(\alpha)$。

(2) $(1+i)^{k_i}$ 調整成a_{k_1}，其中$\langle a_k\rangle_{k=1}$是一正數數列，$a_1=1$。

對於正整數n，給定的正數數列$\langle a_k\rangle$，定義$\alpha-$dragon curve 為連接結點 $D_\alpha(n)$、$D_\alpha(n+1)$, n為非負整數，所構成的圖形。 其中 $D_\alpha(n)=a_{k_1}+\alpha\cdot a_{k_2}+\cdots+\alpha^{m-1}\cdot a_{k_m}$，其中$k_1,k_2,\cdots,k_m$為$n$的一組環繞係數。

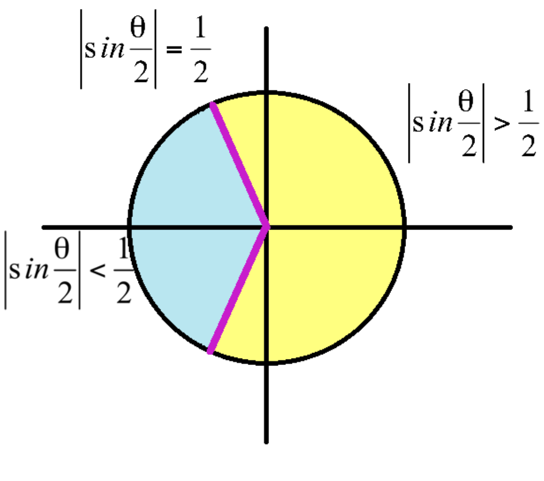
由性質 0-2，每一正整數 *n* 的環繞係數有 2 組其分別對應的節點計算也應相同，因此

$$a_{k_1}+\alpha\cdot a_{k_2}+\cdots+\alpha^{m-1}\cdot a_{k_m}$$
$$=a_{k_1}+\alpha\cdot a_{k_2}+\cdots+\alpha^{m-1}\cdot a_{k_m+1}+\alpha^m\cdot a_{k_m}$$

其中，$k_1,k_2,\cdots,k_m$是 *n* 的環繞係數，且$k_1>k_2>\cdots>k_m$，$k_{m-1}>k_m+1$。
故，$\alpha^{m-1}\cdot a_{k_m}=\alpha^{m-1}\cdot a_{k_m+1}+\alpha^m\cdot a_{k_m}$，化簡可得$a_{k_m}=a_{k_m+1}+\alpha\cdot a_{k_m}\Rightarrow a_{k_m+1}=(1-\alpha)a_{k_m}$
所以，$\langle a_k\rangle_{k=1}$必為首項 1, 公比$1-\alpha$的等比數列。
故我們定義$\alpha-$dragon curve：
複數∝，｜α｜＝1，連接結點$D_\alpha(n)$、$D_\alpha(n+1)$, n為非負整數，所構成的圖形。而
$D_\alpha(n)=z_0^{k_1}+\alpha\cdot z_0^{k_2}+\cdots+\alpha^{m-1}\cdot z_0^{k_m}$，其中$k_1,k_2,\cdots,k_m$為$n$的一組環繞係數，$z_0=1-\alpha$。

二、dragon curve 的分類

令$\alpha=e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$，$z_0=1-\alpha=(1-\cos\theta)-i\sin\theta$。
則$|1-\alpha|=\sqrt{(1-\cos\theta)^2+\sin^2\theta}=\sqrt{1+(\cos^2\theta+\sin^2\theta)-2\cos^2\theta}=\sqrt{2-2\cos\theta}=2\sin\frac{\theta}{2}$



$1-\alpha=(1-\cos\theta)-$

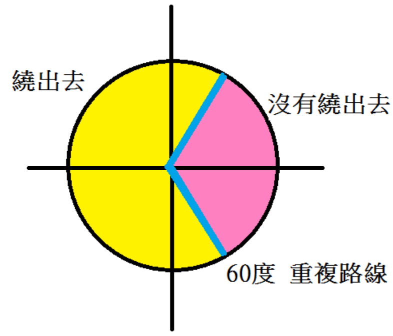
$=2\sin\frac{\theta}{2}\Big(\cos$

我們分別依(1) $\theta = 60^o$ or 120^o； (2) $-60° < \theta < 60°$ ； (3) $60° < \theta < 300°$ 的情形來區分 Dragon curve 為第 I、II、III 類。

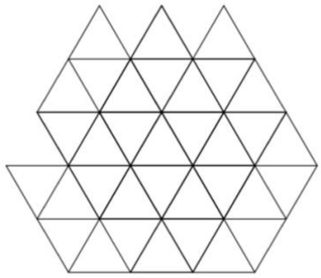
定義：若複數α ，$|\alpha| = 1$，且$\theta = Arg(\alpha)$ ，則若θ 分別為下列情形

(1) $\theta = 60^o$ or 120^o ；(2) $-60° < \theta < 60°$; (3) $60° < \theta < 300°$

稱 Dragon Curve 為第 I、II、III 類α–Dragon Curve，討論如下:

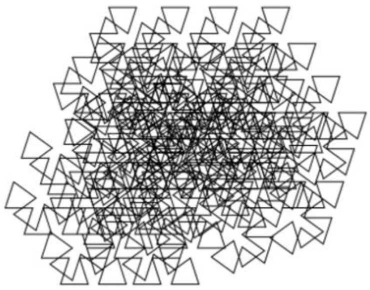


(1) $\left|\sin\frac{\theta}{2}\right| = \frac{1}{2}$ 則θ=$60^o or -60^o$ ，此時$|1-\alpha| = 1$, α–Dragon Curve 會緩慢地繞過每一個三角形網格點，(圖四為2^9內的圖形)



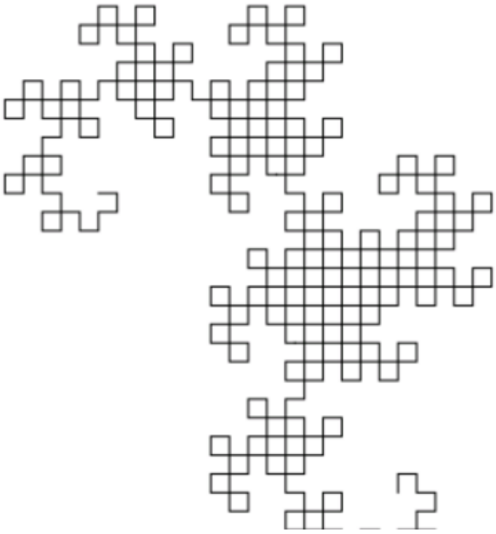
圖四

(2) $\left|\sin\frac{\theta}{2}\right| < \frac{1}{2} \Rightarrow |1-\alpha| < 1$ 則$-60° < \theta < 60°$ ，此時α–Dragon Curve 會以固定角度向內纏繞(見圖五)



圖五

(3) $\left|sin\frac{\theta}{2}\right| > \frac{1}{2} \Rightarrow |1-\alpha| > 1$ 則$60° < \theta < 300°$ ，此時α–Dragon Curve 會以固定角度向外繞，也是我們要討論的 Dragon Curve 類型(見圖六)



圖六

在第 Ⅲ 類 $\alpha-$ dragon curve，而其節點位在平面上正三角形網格時，因為

$$D_\alpha(2^k)=(1-\alpha)^k=\left[2\sin\frac{\theta}{2}\right]^k\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}-90°\right)+i\sin\left(\frac{\theta}{2}-90°\right)\right)^k$$

故 $\frac{\theta}{2}-90°\equiv 60°\times m \pmod{360°} \Rightarrow \theta\equiv 180°+120°\times m \pmod{360°}$

又 $\theta=120°$ 可以看成將 $\theta=240°$ 時，Dragon Curve 由順時針旋轉 120° 改成為逆時針旋轉 120°，考慮以 $\theta=240°$ ($\theta=120°$ 類似)，此時，$\alpha=\cos 240°+i\sin 240°=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}i}{2}$

為了跟[1]中的 Dragon Curve 有所區別，我們把 $\alpha=\omega=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$ 的情形稱為 $\omega-$ Dragon Curve。

三、$\alpha-Dragon\ Curve$的性質

針對 α-Dragon Curve，有下列的性質

性質 1：

1. $\mathrm{D}_\alpha(0)=0, \mathrm{D}_\alpha(1)=1, \mathrm{D}_\alpha(2)=z_0$
2. $D_\alpha(2^k)={z_0}^k,\ k\geq 0$
3. 若正整數 k_1 滿足 $2^{k_1-1}<n<2^{k_1}$，令 $n_1=2^{k_1}-n$，則 $D_\alpha(n)={z_0}^{k_1}+\alpha\cdot D_\alpha(n_1)$

証明：

$$\begin{aligned}D_\alpha(n)&=D_\alpha(2^{k_1}-(2^{k_1}-n))\\&=D_\alpha(2^{k_1}-n_1)\\&=D_\alpha(2^{k_1})-(-\alpha)D_\alpha(n_1)\\&={z_o}^{k_1}+\alpha D_\alpha(n_1)\end{aligned}$$

性質 2：

(1)正整數 m， $m<2^k$ ，則 $D_\alpha\left(2^k+m\right)=z_0^{k+1}+\alpha D_\alpha\left(2^k-m\right)$

(2) 若正整數 $a>b$ ，則 $D_\alpha(2^a-2^b)=z_0{}^a+\alpha z_0{}^b$, $D_\alpha(2^a+2^b)=z_0{}^a+\alpha^2 z_0{}^b$

(3) 若正整數列滿足 $a_i>a_{i+1}+1$ ，則

$D_\alpha(2^{a_1}+2^{a_2}+\cdots+2^{a_m})=z_0{}^{a_1}+\alpha^2 z_0{}^{a_2}+\cdots+\alpha^{2(m-1)}z_0{}^{a_m}$

(4) 若 a 為正整數，則 $D_\alpha(2^{a+k}+2^{a+k-1}+\cdots+2^a)=z_0{}^{a+k+1}+\alpha\cdot z_0{}^a$

證明：

(1) $D_\alpha\left(2^k+m\right)=D_\alpha\left(2^{k+1}-\left(2^k-m\right)\right)=D_\alpha\left(2^{k+1}\right)+\alpha D_\alpha\left(2^k-m\right)$

$$=z_0^{k+1}+\alpha D_\alpha\left(2^k-m\right)$$

(2)由性質 1(3)可知$D_\alpha(2^a-2^b)=z_0^a+\alpha D_\alpha(2^b)=z_0^a+\alpha\left(z_0^b\right)$

再由性質 2(1)知，$D_\alpha(2^a+2^b)=z_0^{a+1}+\alpha D_\alpha(2^a-2^b)=z_0^a+\alpha^2 z_0^b$

(3) 依數學歸納法，由性質 2(1)知$D_\alpha(2^{a_1}+2^{a_2})=z_0^{a_1}+\alpha^2 z_0^{a_2}$ ，

假設$D_\alpha(2^{a_2}+\cdots+2^{a_m})=z_0^{a_2}+\cdots+\alpha^{2(m-1)}z_0^{a_m}$ ，由性質 2(1)知

$D_\alpha(2^{a_1}+\cdots+2^{a_m})=z_0^{a_1+1}+\alpha D_\alpha(2^{a_1}-(2^{a_2}+\cdots+2^{a_m}))$，再由性質 1(3)知

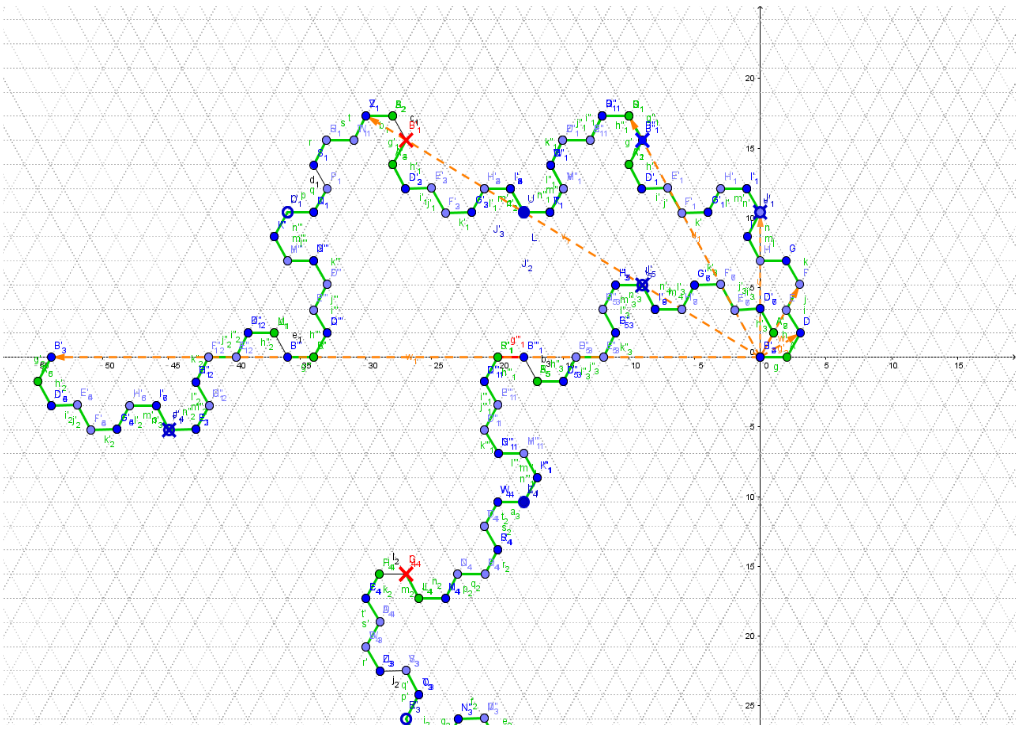
$$D_\alpha\left(2^{a_1}-(2^{a_2}+\cdots+2^{a_m})\right)=z_0^{a_1}+\alpha D_\alpha(2^{a_1}+\cdots+2^{a_m})$$

$=z_0^{a_1+1}+\alpha\left(z_0^{a_1}+\alpha D_\alpha(2^{a_1}+\cdots+2^{a_m})\right)$，即可推知

$=(z_0+\alpha)z_0^{a_1}+\alpha^2(z_0^{a_2}+\cdots+\alpha^{2(m-1)}z_0^{a_m})$ ，得證

(4)因為$2^{a+k}+\cdots+2^a=2^{a+k+1}-2^a$，所以

$$D_\alpha(2^{a+k}+\cdots+2^a)=D_\alpha(2^{a+k+1}-2^a)=z_0^{a+k+1}+\alpha z_0^a$$



四、網格

從座標系統下手，由於座標上的每一格都必須是一樣的大小、形狀，且能完全鋪滿一個平面，因此這樣的座標格的內角 φ 要符合以下兩個條件:

(1) 是 360º 的因數
這樣才能完全鋪滿平面，符合此項目的有 1、2、3、4、5、6、8、9、10、12、15、18、20、24、30、36、40、45、60、72、90、120、180、360 度

(2) 是某正多邊形(n 邊形)的內角
$$\varphi = \frac{180^o(n-2)}{n}$$

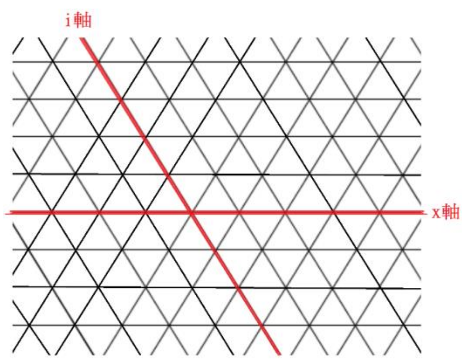
(3) 符合上述討論(3)的條件
故，$\dfrac{360}{\frac{180(n-2)}{n}}$ 為一整數，即 n-2 是 4 的因數，因此 n=3,4,6

符合這三點的有 $n=3,\ \varphi=60^o;\ n=4,\ \varphi=90^o;\ n=6,\ \varphi=120^o$ ，其中文獻的是 90º，所以我們做 120º。

上述情形中， $n=4,\ \varphi=90^o$ 即為文獻[1]中的 Dragon Curve，在接下來的討論中，為了說明的清楚對於 $n=3,\ \varphi=60^o;\ n=6,\ \varphi=120^o$ 的情形，我們考慮以正三角形或正六邊形平舖平面的網格，又因為正六邊形的網格是正三角形的子集合，所以我們接下來討論正三角形鋪滿平面的網格。

性質：複數平面上以單位長正三角形鋪滿整個平面α，其中有一邊平行 x 軸，且有一三角形頂點在 0，此平面上所有正三角形的頂點正好是所有的複數平面上的點 $a+b\alpha$ ，其中 a,b 為整數，$\alpha=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ 。

証明：
顯然 0 是網格上一點，沿著網格線移動 1 格，複數坐標將由 z 變成$z+1$, $z-1, z+\alpha, z-\alpha, z+\alpha+1, z-\alpha-1$，因此每一個網格點必可表示成$a+b\alpha$的形式。
另一方面，若$a+b\alpha$是網格點坐標，則$\pm1+a+b\alpha, \pm\alpha+a+b\alpha$, 也是，因些所有網格坐標正好就$a+b\alpha$



圖八

五、旋轉字串及位移向量數列

沿著ω − Dragon Curve的節點移動，從 $D_\alpha(0) \to D_\alpha(1)$ ，向右旋轉到 $D_\alpha(1) \to D_\alpha(2)$ ，接著再向左旋轉到 $D_\alpha(2) \to D_\alpha(3)$ ，精確地說：

從 $D_\alpha(n) \to D_\alpha(n+1)$ ，到 $D_\alpha(n+1) \to D_\alpha(n+2)$ 可列式

$D_\alpha(n+1) - D_\alpha(n) = a + bi$ ， $D_\alpha(n+2) - D_\alpha(n+1) = c + di$ ，其中 a,b,c,d 為實數。

若行列式 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ 的值為正為左轉; 否則即為右轉

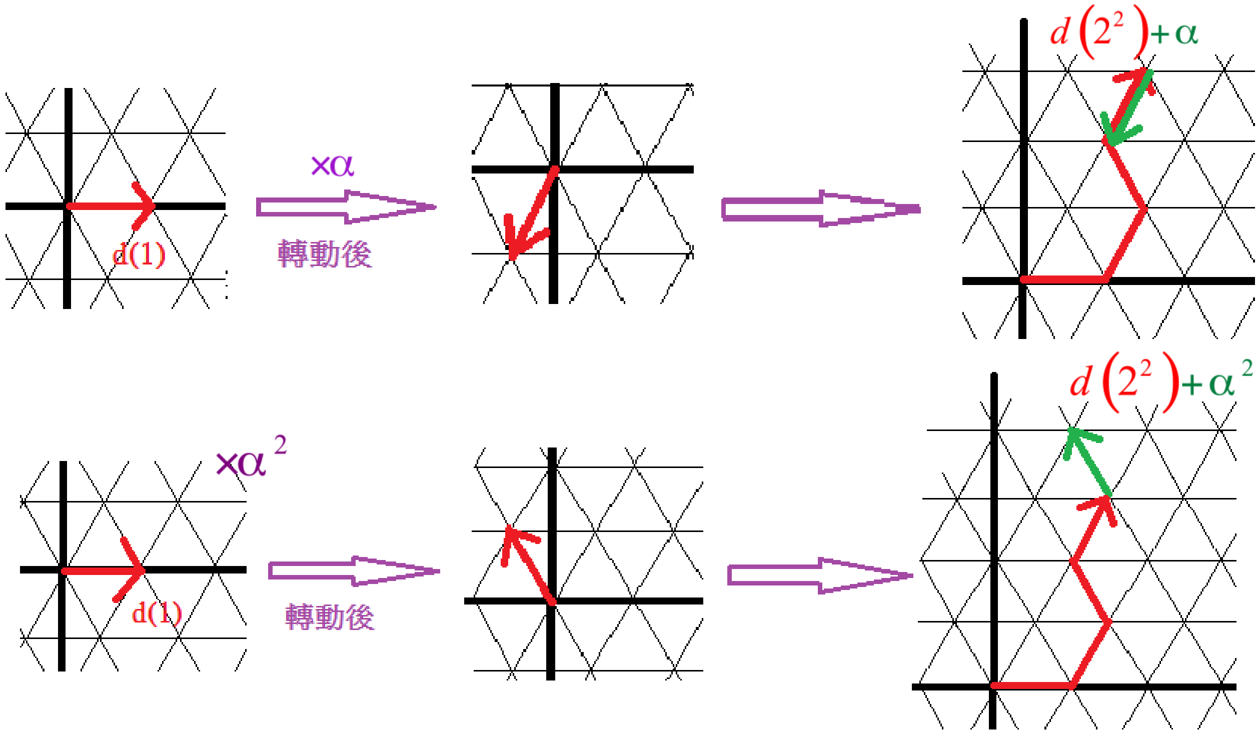
觀察ω − Dragon Curve每一個轉角，向右轉記為為 R，向左為記為 L

則可得規律如下:

LL R ***L***L R R***L***LL R R L R R***L***LL R L L R RR L L R R L R R***L***LL R L L R R L LL R R L R RR L L R L L R RR L L R R L R R***L*** ……

紅字為 $D_\alpha\left(2^k\right)$的旋轉

定義：Dragon Curve 及ω − Dragon Curve在每一個節點處，向右轉記為 R，向左為記為 L，並依序記下 L，R 所得字串，稱為Dragon Curve 及 ω − Dragon Curve的旋轉字串。



引理 1.

Dragon Curve 及ω − Dragon Curve旋轉字串中，k 為非負整數

(1)第 2^k 的字元必為 L。

(2)第 $2^k - m$的字元若為 L，則第 $2^k + m$ 的字元為 R; 若第 $2^k - m$的字元為 R，則第 $2^k + m$ 的字元為 L。

証明:

(1) 觀察可發現每一個節點 $D_\alpha(2^{k-1})$ 處，從 $D_\alpha(2^k-1)\to D_\alpha(2^k)$，到 $D_\alpha(2^k)\to D_\alpha(2^k+1)$，皆為左轉，由性質 2(2)，可知

$D_\alpha(2^a-1)=z_0{}^a+\alpha,\ D_\alpha(2^a+1)=z_0{}^a+\alpha^2$

因此 $D_\alpha(2^k)-D_\alpha(2^k-1)=-\alpha,\ D_\alpha(2^k+1)-D_\alpha(2^k)=\alpha^2$

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix} > 0$$

可以推知，$D_\alpha(2^{k-1})$ 處，應為 L。

(2) 由性質 2(1) 正整數 m，$m<2^k$，則 $D_\alpha(2^k+m)=z_0{}^k+\alpha D_\alpha(2^k-m)$

$$D_\alpha(2^k+m)-D_\alpha(2^k+m-1)=\alpha\left(D_\alpha(2^k-m)-D_\alpha(2^k-m+1)\right)$$

$$D_\alpha(2^k+m+1)-D_\alpha(2^k+m)=\alpha\left(D_\alpha(2^k-m-1)-D_\alpha(2^k-m)\right)$$

若 $D_\alpha\left(2^k-m\right)-D_\alpha\left(2^k-m-1\right)=a+bi$，$D_\alpha\left(2^k-m+1\right)-D_\alpha\left(2^k-m\right)=c+di$

則 $D_\alpha\left(2^k+m\right)-D_\alpha\left(2^k+m-1\right)=\left(c+di\right)\cdot\left(-\alpha\right)=A+Bi$

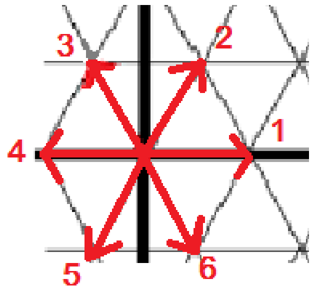
$D_\alpha\left(2^k+m+1\right)-D_\alpha\left(2^k+m\right)=\left(a+bi\right)\cdot\left(-\alpha\right)=C+Di$

所以，$\begin{vmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \mathrm{C} & \mathrm{D} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

從幾何解釋上來看，引理 1 可以如下描述：

$D_\alpha\left(2^k\right)$都是 L，而以 $D_\alpha\left(2^k\right)$為對稱點，從 $D_\alpha\left(1\right)$直到 $D_\alpha\left(2^{k+1}\right)$為止，其 R 和 L 皆對稱。又 Dragon Curve 在 $D_\alpha\left(2^k\right)$點順時針轉動 120º 度，Dragon Curve 轉動後，前進的方向其實是以端點為出發點，循原來路線向原點前進，並轉動 120º。因此，其 R、L 組成會恰好與原路線相反，形成以 $D_\alpha\left(2^k\right)$為中心，前後兩邊 R、L 對稱的現象。

現在將每次 $D_\alpha(n)\to D_\alpha(n+1)$ 的位移向量分成 1~6，如下圖



$D_\alpha(0)\to D_\alpha(1)$ 的位移向量為 1，$D_\alpha(1)\to D_\alpha(2)$ 的位移向量為 2，$D_\alpha(2)\to D_\alpha(3)$ 的位移向量為 3，$D_\alpha(3)\to D_\alpha(4)$ 的位移向量為 2，依此類推...

定義：位移向量數列

ω − Dragon Curve位移向量方向順序為

1 2 3 2 3 4 3 2 3 4 5 4 3 4 3 2 ...，

其中紅色數字為 $D_\alpha\left(2^k\right)\to D_\alpha\left(2^k+1\right)$的位移向量。

稱此數列為ω − Dragon Curve的位移向量數列

觀察發現每個$D_\alpha\left(2^k\right)$位移向量編號都是 2。
而以$D_\alpha\left(2^k\right)$為對稱中心，從$D_\alpha(1)$到$D_\alpha\left(2^{k+1}\right)$為止，$D_\alpha\left(2^k\right)$到$D_\alpha\left(2^{k+1}\right)$的位移向量編號減 1 和$D_\alpha(1)$到$D_\alpha\left(2^k\right)$的方向編號對稱。事實上我們有底下系理。

系理 1：
設$< sf(n) >$為ω − Dragon Curve的位移向量數列 。則

(1) $sf(1) = 1, sf(2) = 2 < sf(n) >, sf(3) = 3$

(2) k 為正整數，且 k>1，則$sf\left(2^k\right) = 2, sf\left(2sf\left(2^k\right) = 2^k + 1\right) = 3, sf\left(2^k + 2\right) = 4$。

(3) k,i 為正整數，且 k>1，$i < 2^k$，則$sf\left(2^k - i\right) + 1 = sf\left(2^k + 1 + i\right)\ (mod\ 6)$

証明：

(1)

若將ω − Dragon Curve旋轉字串的 L 字元記作+1, 而 R 字元記作-1

即

$$\begin{array}{cccccccccccc} L & L & R & L & L & R & R & L & L & L & R & R\ \cdots \\ +1 & +1 & -1 & +1 & +1 & -1 & -1 & +1 & +1 & +1 & -1 & -1\ \cdots \end{array}$$

把第 2 列數列記為$< a_i >$

可得

旋轉字串	+1,	+1,	-1,	+1,	+1,	-1,	-1,	+1,	+1,	+1
位移向量數列	1	2	3	2	3	4	3	2	3	4	4

即 $sf(j) = 1 + \sum_{i=1}^{j-1} a_i$，故(1)直接計算可得。

(2) $D_\alpha\left(2^k - 1\right)$換算成座標則為$z_0{}^k + \alpha \cdot d(1) = z_0{}^k + \alpha$，所以$D_\alpha\left(2^k - 1\right)$到$D_\alpha\left(2^k\right)$的位移向量為 α，也就是 3 號方向(120º)。

由性質 2 可得

$D_\alpha\left(2^k\right)$為$z_0{}^k$，$D_\alpha\left(2^k + 1\right)$為$z_0{}^k + \alpha^2 \cdot d(1) = z_0{}^k + \alpha^2$，及

$D_\alpha\left(2^k + 2\right) = z_0{}^k + \alpha^2 z_0$

故得證。

(3) 由引理 1(2)得知$a_{2^k - i} = -a_{2^k + i}$，$a_{2^k} = 1$。另外，$sf(j) = 1 + \sum_{i=1}^{j} a_i$。

所以，$\sum_{i=1}^{2^{k-1}-1} a_i = -\sum_{i=2^k+1}^{2^{k-1}-1} a_i$，$\Rightarrow \sum_{i=1}^{2^k-1} a_i = 1$，故得 (2)。

$$sf(2^k) - sf(2^k - i) = \sum_{i=2^k-i}^{2^k-1} a_i = -\sum_{i=2^k+1}^{2^k+i} a_i$$

$$sf(2^k+i)-sf(2^k)=\sum_{i=2^k}^{2^k+i} a_i = 1+\sum_{i=2^k+1}^{2^k+i} a_i$$

故得 $sf(2^k+i)-sf(2^k)=1+sf(2^k-i)-sf(2^k)$ ，得證。

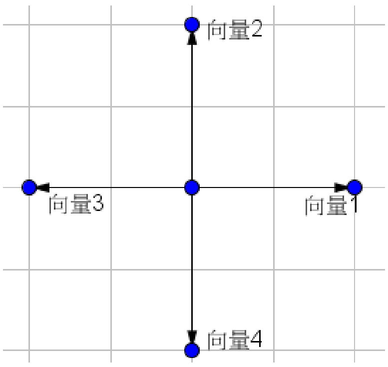
n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
sf(n)	1	2	3	2	3	4	3	2	3	4	5	4	3	4
n	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
sf(n)	3	2	3	4	5	4	5	6	5	5	3	4	5	4

因為 $v_i+v_{i+3}+v_{i+5}=0, v_i=v_{i-1}+v_{i+1}, i=1,2,3,4,5,6$

依位移向量表, 可以計算 $D_\alpha(1)=v_1$ ， $D_\alpha(2)=v_1+v_2$ ， $D_\alpha(3)=v_1+v_2+v_3=3v_2$ ，

$D_\alpha(3)=v_1+v_2+v_3+v_2=4v_2$ ，⋯。

系理 1(1)(2)(3)的結果延伸至其他$\alpha-$Dragon Curve的情形，仍是正確的。



系理 2：(根據上圖)

設$< sf(n) >$為 Dragon Curve 的位移向量數列 。則

(1) $sf(1)=1, sf(2)=2,\ sf(3)=3$

(2) k 為正整數，且 k>1，則$sf(2^k)=2, sf(2^k+1)=3, sf(2^k+2)=4$。

(3) k,i 為正整數，且 k>1， $i<2^k$ ，則$sf(2^k-i)+1=sf(2^k+1+i)\ (mod\ 4)$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
sf(n)	1	2	3	2	3	4	3	2	3	4	1	4	3	4
n	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
sf(n)	3	2	3	4	1	4	1	2	1	4	3	4	1	4

因為 $v_1=1,\ v_2=i,\ v_3=-1,\ v_4=-i$

依位移向量表, 可以計算 $d(1)=v_1$=1 ， $d(2)=v_1+v_2$=1+i ， $d(3)=v_1+v_2+v_3=i$ ，

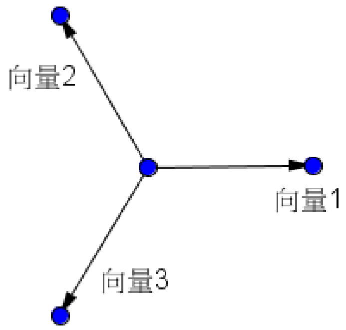
$d(4)=v_1+v_2+v_3+v_2=2i$ ，⋯。

從表格可以看到 n=8, 9, 10, 11, 對應的 sf(n)值為 2,3,4,1，而 $v_2+v_3+v_4+v_1=0$ ，意味著從 $d(7)$ 到 $d(11)$ 的總位移 $d(11)-d(7)=v_2+v_3+v_4+v_1=0$,由系理 2(3)可以知道 $d(25)-d(21)=d(11)-d(7)=0$

同理， $d(2^n-7)-d(2^n-11)=d(11)-d(7)=0$
另外，n=16, 17, 18, 19, 對應的 sf(n)值為 2,3,4,1，因此 $d(19)-d(15)=0$ ，因此 $d(2^n-15)-d(2^n-19)=0$ 。
進一步，若 $d(p)-d(q)=0,\ p>q$ ，則 $d(2^n-q)-d(2^n-p)=0$

由上述這些推論可以得到定理 1。

定理 1:
<d(n)>是 Dragon Curve 的節點所成的數列，$S\sqsubseteq Z^+\times Z^+$, $(7,11)$, $(15,19)\ \in S$,
且 S 滿足，若$(p,q)\in S$則$(2^n-p,\ 2^n-q\ )\in S$，n>4。下列性質成立：
若(p,q) ∈ S，則 d(p)=d(q)。即 Dragon Curve 在集合 S 自穿。



系理 3：(根據上圖)
$\alpha=e^{i(\frac{\pi}{3})}$, 設$<sf(n)>$為$\alpha-$Dragon Curve的位移向量數列 。則

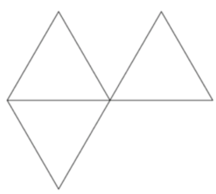
(1) $sf(1)=1, sf(2)=2,\ sf(3)=3$

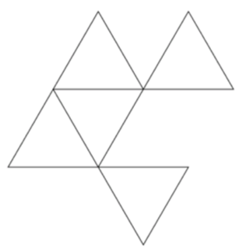
(2) k 為正整數，且 k>1，則$sf\left(2^k\right)=2, sf\left(2^k+1\right)=3, sf\left(2^k+2\right)=4$。

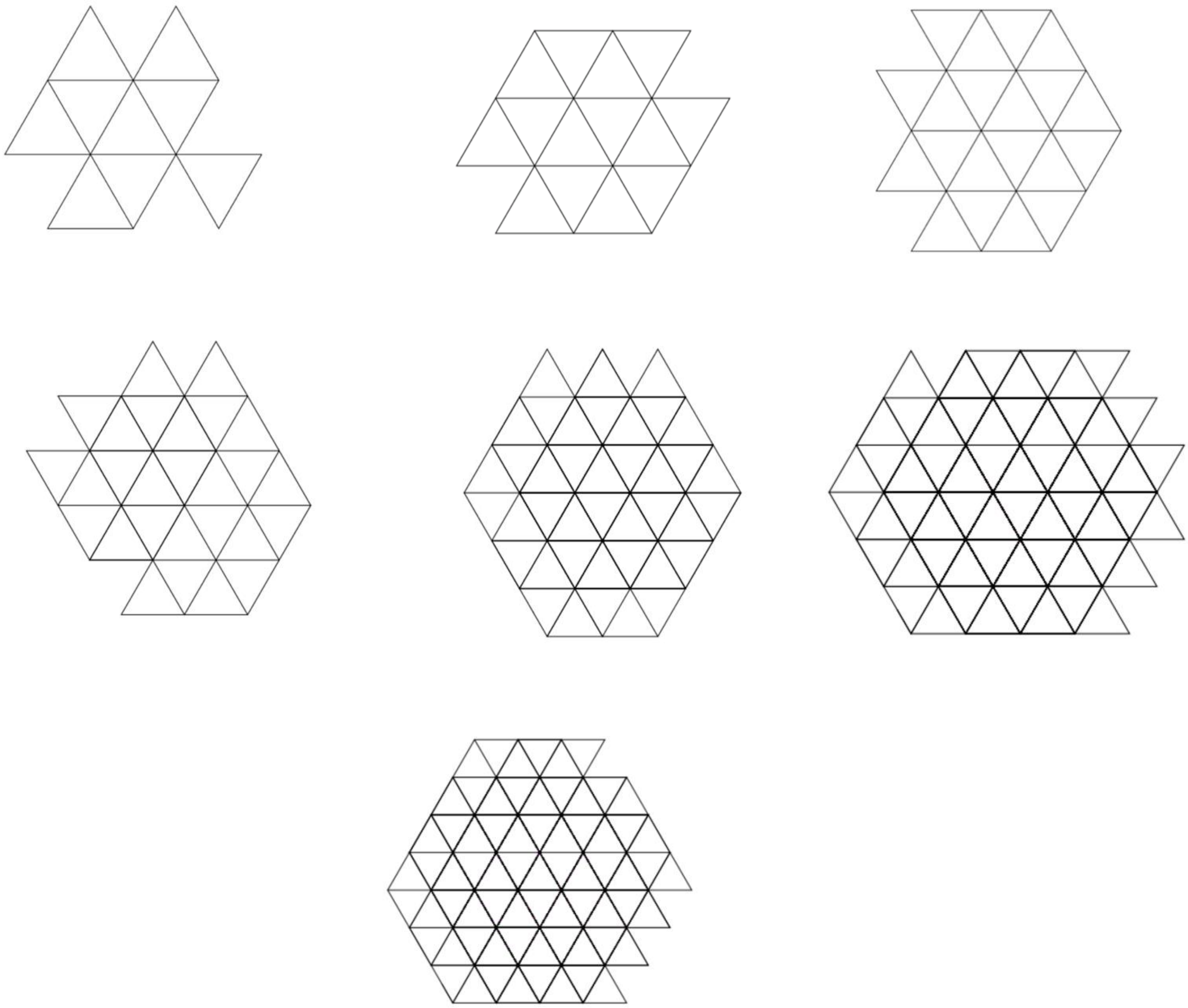
(3) k,i 為正整數，且 k>1， $i<2^k$ ，則$sf\left(2^k-i\right)+1=sf\left(2^k+1+i\right)\ (mod\ 3)$

根據位移向量數列 : 1, 2, 3, 2, 3, 1, 3, 2, 3, 1, 2, 1….
計算每一個節點對應的向量表示： $1\cdot v_1+0\cdot v_2$,$1\cdot v_1+1\cdot v_2$, $0\cdot v_1+0\cdot v_2$, $0\cdot v_1+1\cdot v_2$, $-1\cdot v_1+0\cdot v_2$, $0\cdot v_1+0\cdot v_2$, $-1\cdot v_1-1\cdot v_2$, $-1\cdot v_1+0\cdot v_2$,...

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
sf(n)	(1,0)	(1,1)	(0,0)	(0,1)	(-1,0)	(0,0)	(-1,-1)	(-1,0)	(-2,-1)	(-1,-1)	(-1,0)	(0,0)	(-1,-1)	(0,-1)
n	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
sf(n)	(-1,2)	(-1,-1)	(-2,-2)	(-1,-2)	(-1,-1)	(0,-1)	(0,0)	(-1,-1)	(-1,0)	(0,0)	(-1,-1)	(0,-1)	(0,0)	(1,0)







定理 2:α＝$\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$時，**α**-Dragon Curve 通過每一網格。

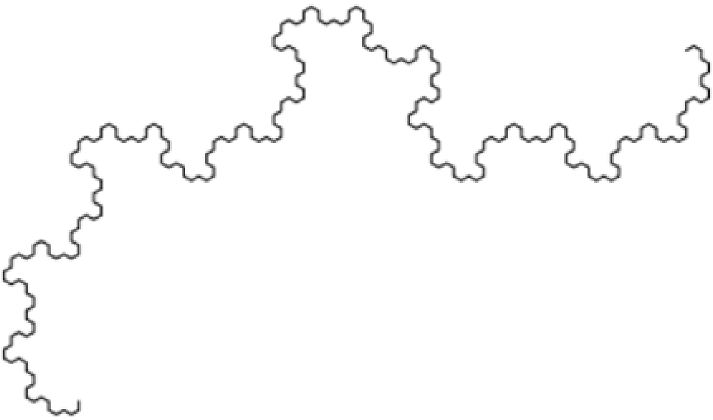
證明: $D_{\alpha}\left(2^{k}\right)=(\frac{1-\sqrt{3}i}{2})^{k}$，而由性質 2(1)知$D_{\alpha}\left(2^{k}+m\right)=(\frac{1+\sqrt{3}i}{2})^{k}$，

(1)在《$D_{\alpha}(n)$〉$,n=1,\dots,64$，存在 6 個竹節點$d_j, j=1,2,3,4,5,6$，位置在以 0 為心距離為 1 的正 6 邊形的各頂點。

(2) 設《$D_{\alpha}(n)$〉$,n=1,\dots,2^{6k-6}$，包含所有位置在以 0 為心距離為 k-1 的正 6 邊形內及邊界上的所有網格點，記為 S。分別以$(\frac{1+\sqrt{3}i}{2})^{k}$，k=1,2,3,4,5,6 為中心逆時針旋轉 60 度得集合S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6，所以，

《$D_{\alpha}(n)$〉$,n=1,\dots,2^{6k}$，包含所有位置在以 0 為心距離為 k 的正 6 邊形內及邊界上的所有網格點。

六、自穿互穿



引理 2：如果ω − Dragon Curve 的出現自穿的情形，則必存在兩條不同的ω − Dragon Curve 出現互穿的情形。。

証明：設 n_1 和 n_2 為滿足 $D_\alpha(n_1) = D_\alpha(n_2)$ 的最小正整數

其中，$D_\alpha(n_1) = z_0^{k_1} + \alpha z_0^{k_1} + \cdots\cdots + \alpha^{m-1} z_0^{k_m}$

$$D_\alpha(n_2) = z_0^{l_1} + \alpha z_0^{l_1} + \cdots\cdots + \alpha^{h-1} z_0^{l_h}$$

將 $D_\alpha(n)$ 皆分為 Head + Tail，則 $H_1 + T_1 = H_2 + T_2$，移項得 $H_1 - H_2 = T_2 - T_1$

依照 Head 的大小可分為以下十六類

z_0^x，$x=?$ 項目	k+2	k+1	k
H_1	1	1、0	1、0
H_2		1、0	1、0

又估計 T 的大小

$$|T| \le \left|z_0^{\,k-1} + \alpha z_0^{\,k-2} + \cdots\cdots + \alpha^{k-1} z_0^{\,0}\right| = \left|\frac{z_0^{\,k-1}\left(1-\dfrac{\alpha^{k}}{z_0}\right)}{1-\dfrac{\alpha}{z_0}}\right| = \left|\frac{z_0^{\,k}-\alpha^{k}}{z_0-\alpha}\right| < \frac{\left|z_0^{\,k}\right|}{\sqrt{7}}$$

則得 $H_1 - H_2 = T_2 - T_1 < T_2 + T_1 < \dfrac{2\left|z_0^{\,k}\right|}{\sqrt{7}}$

1、 $H_1 = z_0^{\,k+2} \quad H_2 = 0$

$\left|H_1 - H_2\right| = 3\left|z_0^{\,k}\right| \le T_2 - T_1 \le T_2 + T_1 < \dfrac{2\left|z_0^{\,k}\right|}{\sqrt{7}}$ 矛盾

2、 $H_1 = z_0^{\,k+2} + \alpha z_0^{\,k} \quad H_2 = 0$

$\left|H_1 - H_2\right| = 2\left|z_0^{\,k}\right| \le T_2 - T_1 \le T_2 + T_1 < \dfrac{2\left|z_0^{\,k}\right|}{\sqrt{7}}$ 矛盾

3、 $H_1 = z_0^{\,k+2} + \alpha z_0^{\,k+1} \quad H_2 = 0$

$\left|H_1 - H_2\right| = \sqrt{3}\left|z_0^{\,k}\right| \le T_2 - T_1 \le T_2 + T_1 < \dfrac{2\left|z_0^{\,k}\right|}{\sqrt{7}}$ 矛盾

4、 $H_1 = z_0^{\,k+2} + \alpha z_0^{\,k+1} + \alpha^2 z_0^{\,k} \quad H_2 = 0$

$\left|H_1 - H_2\right| = 2\left|z_0^{\,k}\right| \le T_2 - T_1 \le T_2 + T_1 < \dfrac{2\left|z_0^{\,k}\right|}{\sqrt{7}}$ 矛盾

5、 $H_1 = z_0^{\,k+2} \quad H_2 = z_0^{\,k}$

$\left|H_1 - H_2\right| = \sqrt{7}\left|z_0^{\,k}\right| \le T_2 - T_1 \le T_2 + T_1 < \dfrac{2\left|z_0^{\,k}\right|}{\sqrt{7}}$ 矛盾

6、 $H_1 = z_0^{\,k+2} + \alpha z_0^{\,k} \quad H_2 = z_0^{\,k}$

$\left|H_1 - H_2\right| = \sqrt{3}\left|z_0^{\,k}\right| \le T_2 - T_1 \le T_2 + T_1 < \dfrac{2\left|z_0^{\,k}\right|}{\sqrt{7}}$ 矛盾

7、 $H_1 = z_0^{\,k+2} + \alpha z_0^{\,k+1} \quad H_2 = z_0^{\,k}$

$\left|H_1 - H_2\right| = \left|z_0^{\,k}\right| \le T_2 - T_1 \le T_2 + T_1 < \dfrac{2\left|z_0^{\,k}\right|}{\sqrt{7}}$ 矛盾

8、 $H_1 = z_0^{\,k+2} + \alpha z_0^{\,k+1} + \alpha^2 z_0^{\,k} \quad H_2 = z_0^{\,k}$

$\left|H_1 - H_2\right| = \sqrt{3}\left|z_0^{\,k}\right| \le T_2 - T_1 \le T_2 + T_1 < \dfrac{2\left|z_0^{\,k}\right|}{\sqrt{7}}$ 矛盾

9、 $H_1 = z_0^{\,k+2} \quad H_2 = z_0^{\,k+1}$

$\left|H_1 - H_2\right| = \sqrt{3}\left|z_0^{\,k}\right| \le T_2 - T_1 \le T_2 + T_1 < \dfrac{2\left|z_0^{\,k}\right|}{\sqrt{7}}$ 矛盾

10、 $H_1 = {z_0}^{k+2} + \alpha {z_0}^k \quad H_2 = {z_0}^{k+1}$

$$|H_1 - H_2| = |{z_0}^k| \le T_2 - T_1 \le T_2 + T_1 < \frac{2|{z_0}^k|}{\sqrt{7}}$$ 矛盾

11、 $H_1 = {z_0}^{k+2} + \alpha {z_0}^{k+1} \quad H_2 = {z_0}^{k+1}$

$$|H_1 - H_2| = 0 \le T_2 - T_1 \le T_2 + T_1 < \frac{2|{z_0}^k|}{\sqrt{7}}$$ 成立

12、 $H_1 = {z_0}^{k+2} + \alpha {z_0}^{k+1} + \alpha^2 {z_0}^k \quad H_2 = {z_0}^{k+1}$

$$|H_1 - H_2| = |{z_0}^k| \le T_2 - T_1 \le T_2 + T_1 < \frac{2|{z_0}^k|}{\sqrt{7}}$$ 矛盾

13、 $H_1 = {z_0}^{k+2} \quad H_2 = {z_0}^{k+1} + \alpha {z_0}^k$

$$|H_1 - H_2| = \sqrt{10}|{z_0}^k| \le T_2 - T_1 \le T_2 + T_1 < \frac{2|{z_0}^k|}{\sqrt{7}}$$ 矛盾

14、 $H_1 = {z_0}^{k+2} + \alpha {z_0}^k \quad H_2 = {z_0}^{k+1} + \alpha {z_0}^k$

$$|H_1 - H_2| = \sqrt{3}|{z_0}^k| \le T_2 - T_1 \le T_2 + T_1 < \frac{2|{z_0}^k|}{\sqrt{7}}$$ 矛盾

15、 $H_1 = {z_0}^{k+2} + \alpha {z_0}^{k+1} \quad H_2 = {z_0}^{k+1} + \alpha {z_0}^k$

$$|H_1 - H_2| = |{z_0}^k| \le T_2 - T_1 \le T_2 + T_1 < \frac{2|{z_0}^k|}{\sqrt{7}}$$ 矛盾

16、 $H_1 = {z_0}^{k+2} + \alpha {z_0}^{k+1} + \alpha^2 {z_0}^k \quad H_2 = {z_0}^{k+1} + \alpha {z_0}^k$

$$|H_1 - H_2| = \sqrt{3}|{z_0}^k| \le T_2 - T_1 \le T_2 + T_1 < \frac{2|{z_0}^k|}{\sqrt{7}}$$ 矛盾

由引理 2 及定理 3 可以得到下列結果：

定理 4：$\omega = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ ，$\omega -$ Dragon Curve 的任何兩個不同節點必不相同，即不會出現自穿的情形。

伍、結果

為了研究一般性的各種能的 Dragon Curve，我們以從[1]中得到的環繞係數出發, 捨棄畫圖的方式，而以代數的方式去計算各個節點。從這一觀點，我們定義了更具一般性的 α – Dragon Curve。

定義α – Dragon Curve：
連接結點 $D_\alpha(n)$ 、 $D_\alpha(n+1)$, n 為非負整數，所構成的圖形。而
$D_\alpha(n) = z_0{}^{k_1} + \alpha \cdot z_0{}^{k_2} + \cdots + \alpha^{m-1} \cdot z_0{}^{k_m}$ 其中 $k_1, k_2, \cdots, k_m$ 為 n 的一組環繞係數， $z_0 = 1-\alpha$ 。
根據 α 的值，我們將 α – Dragon Curve 分成 3 類。

定義：若複數 α ， $|\alpha| = 1$ ，且 $\theta = Arg(\alpha)$ ，則若 θ 分別為下列情形
(1) $\theta = 60°$ or -60°;
(2) $-60° < \theta < 60°$;
(3) $60° < \theta < 300°$
稱 Dragon Curve 為第 I、II、III 類 α – Dragon Curve

其中第 1 類的 α – Dragon Curve，的所有節點構成平面上有限個三角形網格。
第 2 類的 α – Dragon Curve，的節點終將收斂到原點。
唯有第 3 類，的節點會有規律地分佈在三角形或正方形網格點上。分析後知道只有 $\alpha = i, -i, \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ ，4 種 α – Dragon Curve，其中 $\alpha = -i$ 是[1]中介紹的，而 $\alpha = i$ 是反向的，本質上與原來[1]中介紹的無異。$\alpha = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ 與 $\alpha = \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ 也是反向的。

2.Dragon Curve 可以用位移向量的編號來表示
定義：位移向量數列
Dragon Curve 位移向量方向順序為
1 2 3 2 3 4 3 2 3 4 5 4 3 4 3 2 …，
其中紅色數字為 $D_\alpha(2^k) \to D_\alpha(2^k+1)$ 的位移向量。
稱此數列為 Dragon Curve 的位移向量數列

3.
定理 1:
<d(n)>是Dragon Curve所成的數列，$S \sqsubseteq Z^+ \times Z^+$, $(7,11) \in S$,
且 S 滿足，若 $(p,q) \in S$ 則 $(2^n+1-p,\ 2^n+1-q\ ) \in S$，n>4。下列性質成立：
若(p,q) $\in S$，則 d(p)=d(q)。即 Dragon Curve 在集合 S 自穿。

定理 2:$\alpha = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}$ 時，α – Dragon Curve 通過每一網格。

定理 3:兩條不同的ω –Dragon Curve 不會出現互穿的情形。

定理 4:ω –Dragon Curve 的任何兩個不同節點必不相同，不會出現自穿的情形。

陸、討論

(一)、根據節點公式$D_\alpha(n) = z_0^{k_1} + \alpha \cdot z_0^{k_2} + \cdots + \alpha^{m-1} \cdot z_0^{k_m}$

(1) $\alpha = -1$，則

$$D_\alpha(n) = (1-(-1))^{k_1} + (-1)\big(1-(-1)\big)^{k_2} + \cdots + (-1)^{m-1}\big(1-(-1)\big)^{k_m} = n$$

此時，Dragon Curve 的節點就是環繞數，Dragon Curve 在 x-軸上。

(2) $\alpha = e^{i\theta}, \theta = \frac{\pm\pi}{3}$

此時，α −Dragon Curve 為第 I 類為 Dragon Curve，其對應的旋轉字串及位移向量數列為

旋轉字串 +1, +1, -1, +1, +1, -1, -1, +1, +1, +1

位移向量數列 1 2 3 2 3 1 3 2 3 1 2

(3) $\alpha = e^{i\theta}, \theta = \frac{\pm\pi}{2}$，

此時，α −Dragon Curve 為[1]中的 Dragon Curve，其對應的旋轉字串及位移向量數列為

旋轉字串 +1, +1, -1, +1, +1, -1, -1, +1, +1, +1

位移向量數列 1 2 3 2 3 4 3 2 3 4 4

(4) $\alpha = e^{i\theta}, \theta = \frac{\pm 2\pi}{3}$

此時為ω −Dragon Curve，其對應的旋轉字串及位移向量數列為

旋轉字串 +1, +1, -1, +1, +1, -1, -1, +1, +1, +1

位移向量數列 1 2 3 2 3 4 3 2 3 4 4

(二)、雖然ω −Dragon Curve 與 Dragon Curve 同為第 3 類且節點都在網格上，但 Dragon Curve，會通過所有網格 a+bi，有些格點是同一條自穿，有一些點是互穿。而ω −Dragon Curve，則大不相同，它並不會通過每一個網格點$a + b\alpha$ ，而且似乎只通少部份的格點。再者 Dragon Curve 有自穿與互穿的情形發生；對於ω −Dragon Curve，則完全沒有。

(三)、利用位移向量數列$< sf(n) >$ ，是否可以表示成明顯公式，而且是否可以精確地用來描述，對於哪些整數 a,b 使得 a+bω 在ω −Dragon Curve 上。同樣是否可以利用位移向量數列來判斷哪些整數 a,b 使得 a+bi 是 Dragon Curve 上自穿的點，哪些是它穿的點。

柒、未來發展

探討 Dragon Curve 推展到 3 維的可能性。

捌、參考資料

[1]Dragon the Omnipresent, VladimirDubrovsky, Quantum, v6, no. 6, 1996

[2]http://archive.lib.msu.edu/crcmath/math/math/d/d408.htm

[3] Dragon Curve -- from Wolfram MathWorld
http://mathworld.wolfram.com/DragonCurve.html

[4]鋪地磚的奧秘
http://163.21.42.13/mathpath/%E7%AC%AC%E5%85%AB%E7%AB%99/7.htm

附錄

引理 2：

證明：考慮反証法。若$l_2 < k$，我們將証明置於附錄

(1) $2^{k-1} < n_1 < 2^k < n_2 < 2^{k+1}$

(2) $2^{k-1} < n_1 < 2^k < 2^{k+1} + 2^k < n_2 < 2^{k+2}$

(3) $2^{k-1} < n_1 < 2^k < 2^{k+2} < n_2$

(2) $z_0^k + \sum_{j=2}^{p} \alpha^{j-1} z_0^{k_j} = z_1 = z_2 = z_0^{k+1} + \sum_{j=2}^{q} \alpha^{j-1} z_0^{l_j}$

因此$\alpha z_0^k = \sum_{j=2}^{q} \alpha^{j-1} z_0^{l_j} - \sum_{j=2}^{p} \alpha^{j-1} z_0^{k_j}$

若$l_2 < k$，

$$\begin{cases} k_2 = k-1,\ k_3 = k-2 \\ k_2 = k-1,\ k_3 < k-2 \\ k_2 = k-2 \\ k_2 < k-2 \end{cases} \begin{cases} l_2 = k-1,\ l_3 = k-2 \\ l_2 = k-1,\ l_3 < k-2 \\ l_2 = k-2 \\ l_2 < k-2 \end{cases}$$

	$l_2 = k-1$, $l_3 = k-2$	$l_2 = k-1$, $l_3 < k-2$	$l_2 = k-2$	$l_2 < k-2$
$k_2 = k-1$, $k_3 = k-2$	$\lvert\alpha z_0^k\rvert = 3\lvert z_0^{k-2}\rvert$ $\lvert w_2 - w_2\rvert < \frac{2\lvert z_0^{k-2}\rvert}{\sqrt{3}-1}$	$\lvert z_0^k + \alpha z_0^{k-2} - \alpha^2 z_0^{k-3}\rvert > \sqrt{7}\lvert z_0^{k-3}\rvert$ $\lvert w_2 - w_2\rvert < \frac{2\lvert z_0^{k-3}\rvert}{\sqrt{3}-1}$	$\lvert z_0^k - \alpha z_0^{k-1}\rvert > 3\lvert z_0^{k-2}\rvert$ $\lvert w_2 - w_2\rvert < \frac{2\lvert z_0^{k-2}\rvert}{\sqrt{3}-1}$	$\lvert z_0^k + z_0^{k-1} + z_0^{k-2}\rvert > 3\lvert z_0^{k-2}\rvert$ $\lvert w_2 - w_2\rvert < \frac{2\lvert z_0^{k-2}\rvert}{\sqrt{3}-1}$
$k_2 = k-1$, $k_3 < k-2$	$\lvert\alpha z_0^k - \alpha^2 z_0^{k-2}\rvert > 3\lvert z_0^{k-2}\rvert$ $\lvert w_2 - w_2\rvert < \frac{2\lvert z_0^{k-2}\rvert}{\sqrt{3}-1}$	$\lvert\alpha z_0^k\rvert = 3\lvert z_0^{k-2}\rvert$ $\lvert w_2 - w_2\rvert < \frac{2\lvert z_0^{k-2}\rvert}{\sqrt{3}-1}$	$\lvert z_0^k + z_0^{k-1} - z_0^{k-2}\rvert > 3\lvert z_0^{k-2}\rvert$ $\lvert w_2 - w_2\rvert < \frac{2\lvert z_0^{k-2}\rvert}{\sqrt{3}-1}$	$\lvert z_0^k + z_0^{k-1}\rvert > 3\lvert z_0^{k-2}\rvert$
$k_2 = k-2$	$\lvert\alpha z_0^k - 2\alpha z_0^{k-1}\rvert > 3\lvert z_0^{k-2}\rvert$ $\lvert w_2 - w_2\rvert < \frac{2\lvert z_0^{k-2}\rvert}{\sqrt{3}-1}$	$\lvert z_0^k - \alpha z_0^{k-1} + z_0^{k-2}\rvert > 3\lvert z_0^{k-2}\rvert$ $\lvert w_2 - w_2\rvert < \frac{2\lvert z_0^{k-2}\rvert}{\sqrt{3}-1}$	$\lvert z_0^k\rvert = 3\lvert z_0^{k-2}\rvert$ $\lvert w_2 - w_2\rvert < \frac{2\lvert z_0^{k-2}\rvert}{\sqrt{3}-1}$	$\lvert z_0^k + z_0^{k-2}\rvert > 3\lvert z_0^{k-2}\rvert$ $\lvert w_2 - w_2\rvert < \frac{2\lvert z_0^{k-2}\rvert}{\sqrt{3}-1}$
$k_2 < k-2$	$\lvert -\alpha^2 z_0^{k-1} - \alpha^2 z_0^{k-2} - \rvert = \sqrt{7}\lvert z_0^{k-2}\rvert$ $\lvert w_2 - w_2\rvert < \frac{2\lvert z_0^{k-2}\rvert}{\sqrt{3}-1}$	$\lvert z_0^k - \alpha z_0^{k-1}\rvert > 3\lvert z_0^{k-2}\rvert$ $\lvert w_2 - w_2\rvert < \frac{2\lvert z_0^{k-2}\rvert}{\sqrt{3}-1}$	$\lvert z_0^k - z_0^{k-2}\rvert > \sqrt{7}\lvert z_0^{k-2}\rvert$ $\lvert w_2 - w_2\rvert < \frac{2\lvert z_0^{k-2}\rvert}{\sqrt{3}-1}$	$\lvert z_0^k\rvert = 3\lvert z_0^{k-2}\rvert$ $\lvert w_2 - w_2\rvert < \frac{2\lvert z_0^{k-2}\rvert}{\sqrt{3}-1}$

【評語】050409

本作品討論 Dragon Curve 的性質，關於轉動 90 度角是已知的結果，本作品將原本 90 度角時的現象成功地推廣至 60 度角及 120 度角的情形。整體的討論證明算是完整但是也許是受限於題材本身，內容之豐富度較有限是比較可惜之處。