中華民國第56屆中小學科學展覽會
作品說明書

高級中等學校組　數學科

最佳(鄉土)教材獎

050408

好一個「基因」— 十字型橢圓規的推廣研究

學校名稱：國立新竹高級中學

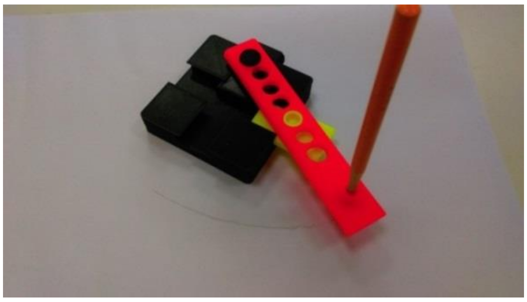
作者：	指導老師：
高二 彭盛皓	張世標

關鍵詞：橢圓規、線性變換、反演

摘要

本研究中討論了橢圓規的性質，從中提出「對**基因**進行**操作**」的觀念，而先將圖形推廣至其他它二次曲線乃至一般曲線，發現其操作模式都和線性變換有關。接著，將反演變換引進操作中，考察其性質。最後，基於上述研究心得，對一些特殊的基因(如常數基因、直線基因、二次曲線基因)及特殊的幾何操作，例如三角形的外心、重心、垂心、內心，甚至費馬點之軌跡加以考察，而發現軌跡除了二次曲線外，尚有一些有趣的曲線。最後，我們也發展出三條線以上的斜角橢圓規或曲線規，而能附帶地以之設計製造美妙的圖案。

壹、研究動機



我對幾何很感興趣。在自行研讀第四冊課程時，對橢圓的性質感到好奇，加上在網路和書籍看到用兩條垂直直線當框架來進行操作的十字型橢圓規，就希望對其有較深入的理解及推廣(例如，若當作框架的兩直線未必垂直)，於是便開啟我的研究。

貳、研究目的

一、探討十字橢圓規的原理，並推廣至兩線未必垂直的情況。
二、推廣十字橢圓規的原理至各種二次曲線 (橢圓、雙曲線、拋物線)。
三、使用基因觀念發展出對各式曲線進行操作之方式。
四、利用研討三系統，但並非使用線性變換，而用其餘方法變換(例如反演……)。
五、依據以上結果加以應用，(例如三角形的特殊點、費馬點…….)。
六、雙軸斜角之比例線段橢圓規討論。

參、研究設備與器材

一、GSP 幾何軟體

肆、研究過程與方法

一、<u>定義</u>：

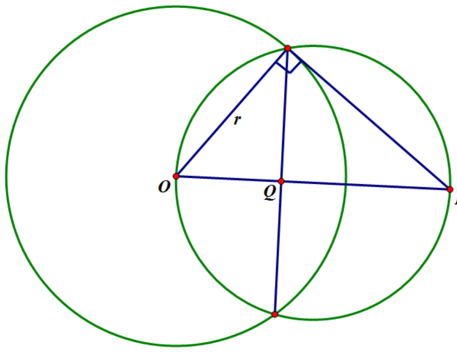
1. 在直角坐標平面上，設直線 $L_0 = x$ 軸(因此 $\overline{e_0} = (1,0)$ 為其單位方向向量)，而 L_1 是通過原點而異於 x 軸的直線，令 $\overline{e_1} = (\cos\theta, \sin\theta)$ (θ 為有向角) 為其單位方向向量。(例如，在十字橢圓規中，做為框架的兩直線 L_0, L_1 分別為 x 軸與 y 軸，此時 $\theta = 90°$。) 在此報告中，當我們說「採斜角座標系」，意思是由原點 $O(0,0)$, L_0, L_1, $\overline{e_0}$, $\overline{e_1}$ 來建立斜角座標系，因此在這個直角坐標平面上的任一點 P，皆可用 形如 $\overline{OP} = p_0\overline{e_0} + p_1\overline{e_1}$ 的方式來描述其位置。
2. 在本報告中，為了方便敘述及數學推導過程之流暢，在一些地方，我們會使用複數 $x + yi$ 或

符號$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$來表示向量$(x,y)$。

3. 平面上的線性變換：以$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$的方式來進行的變換，例如鏡射、旋轉、伸縮、推移。

4. 反演：

給定圓O，設其半徑為r。對平面上一點P，若Q點使得$\overline{OP}\times\overline{OQ}=r^2$且$\overline{OQ}$和$\overline{OP}$同向，則稱$Q$為$P$關於圓$O$的反演。



5. **預備定理**：

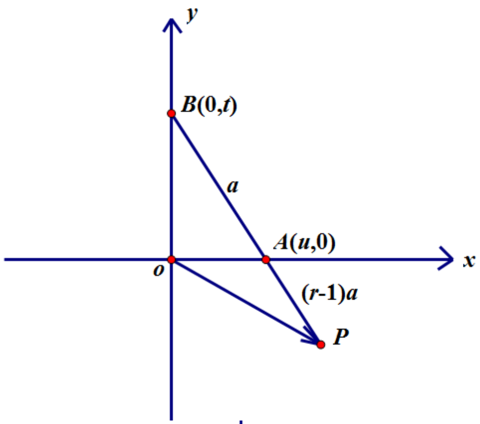
設二次曲線，曲線上一點$Q(t,u)$經過線性變換為$P(x,y)$後，在行列式不為 0 的情況下，仍然為原來類型的二次曲線(詳細證明請見附錄一)。

二、<u>根據以上定義進行以下多項探討</u>：

研討一：直角坐標系橢圓規定義及討論，並推廣至斜角坐標系中

根據直角坐標系橢圓規(十字橢圓規)，作了以下三種延伸分析：

一、P,A,B 三點共線，且採直角坐標系(如右圖)



設 A 坐標$(u,0)$，B 坐標$(0,t)$，

令$|\overline{AB}|=a$，為定值，根據畢氏定理得$t^2+u^2=a^2$，

今對給定的實數r，考慮

P 點滿足$\overline{PB}=r\overline{AB}$，則有$\overline{PB}=r\overline{AB}$，

得$\overline{OA}=x\overline{OB}+y\overline{OP}=\dfrac{r-1}{r}\overline{OB}+\dfrac{1}{r}\overline{OP}$，

$\overline{OP}=r\overline{OA}+(1-r)\overline{OB}=ru(1,0)+(1-r)t(0,1)=(ru,(1-r)t)$，

$x=ru$，$y=(1-r)t$。

$\Rightarrow u=\dfrac{x}{r}$，$t=\dfrac{y}{1-r}$。

$\because t^2+u^2=a^2$，

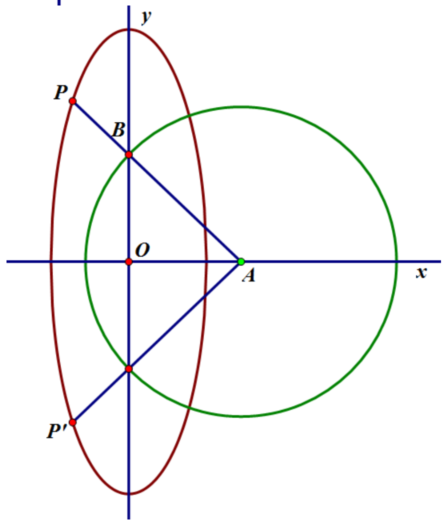
$\therefore \dfrac{x^2}{r^2}+\dfrac{y^2}{(1-r)^2}=a^2$，

$\Rightarrow \dfrac{x^2}{(ra)^2}+\dfrac{y^2}{(a-ra)^2}=1$。

$\Rightarrow P$ 點之軌跡必為一橢圓或其退化。

且在$r=1$時，軌跡為一水平線段；$r=0$時，軌跡為一鉛直線段。

長軸短軸為 $2|ra|$ 及 $2|a-ra|$。



二、P,A,B 三點共線，且採斜角坐標系(如右圖)

設斜角坐標軸L_0,L_1上單位向量對應在直角坐標系為$\overrightarrow{e_0}=(1,0),\overrightarrow{e_1}=(\cos\theta,\sin\theta)$，$\overline{OA}=u\overrightarrow{e_0}$，$\overline{OB}=t\overrightarrow{e_1}$

令$|\overline{AB}|=a$為定值，根據餘弦定理得

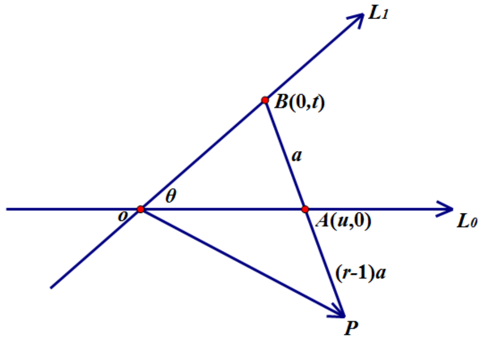
$a^2=t^2+u^2-2tu\cos\theta$

可改寫為$t^2-2tu\cos\theta+u^2=a^2$，

令$1=A,-2\cos\theta=B,1=C$，

$$\begin{pmatrix}\text{判別式}=B^2-4AC=(-2\cos\theta)^2-4=4\cos^2\theta-4\le 0\\ \text{又}0^\circ<\theta<180^\circ\Rightarrow 4(\cos^2\theta-1)<0\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow Q(t,u)$軌跡為橢圓



接下來想要知道橢圓長短軸長度，利用旋轉座標軸，

設$Q(t,u)$在新的直角座標系中的座標為(t',u')。計算，

$A'+C'=2$，$A'-C'=2\cos\theta$，

$(A'-C')^2+B'^2=(A-C)^2+B^2=4\cos^2\theta$，

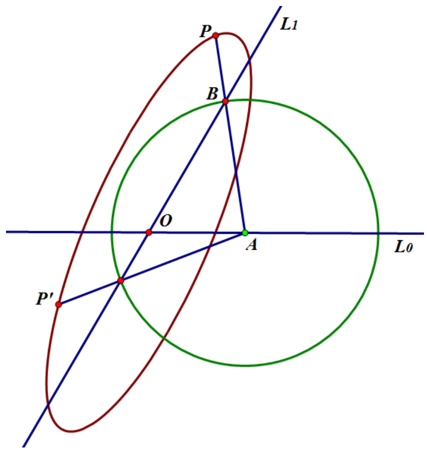
$B'^2-4A'C'=B^2-4AC$，

$\Rightarrow -4A'C'=4\cos^2\theta-4\ \Rightarrow A'C'=1-\cos^2\theta\ \Rightarrow A'=1+\cos\theta,C'=1-\cos\theta$

$\Rightarrow(1+\cos\theta)t'^2+(1-\cos\theta)u'^2=a^2$

$$\Rightarrow\frac{t'^2}{\dfrac{a^2}{1+\cos\theta}}+\frac{u'^2}{\dfrac{a^2}{1-\cos\theta}}=1$$

長軸短軸為$\dfrac{2a}{\sqrt{1+\cos\theta}}$及$\dfrac{2a}{\sqrt{1-\cos\theta}}$。



今對給定的實數r，考慮P點滿足$\overline{PB}=r\overline{AB}$，則有

$\overline{OA}=x\overline{OB}+y\overline{OP}=\dfrac{r-1}{r}\overline{OB}+\dfrac{1}{r}\overline{OP}$，

$\overline{OP}=r\overline{OA}+(1-r)\overline{OB}=ru\overline{e_0}+(1-r)t\overline{e_1}=ru(1,0)+(1-r)t(\cos\theta,\sin\theta)$，

$$\Rightarrow\begin{cases}x=ru+(1-r)t\cos\theta\\ y=(1-r)t\sin\theta\end{cases}\text{。}$$

利用第二次線性變換，$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(1-r)\cos\theta & r\\(1-r)\sin\theta & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t\\u\end{pmatrix}$

$\Rightarrow$根據預備定理，P點之軌跡必為一橢圓或其退化。

$$\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}(1-r)\cos\theta & r\\(1-r)\sin\theta & 0\end{vmatrix}=-r(1-r)\sin\theta\\ r=0\vee 1\vee\sin\theta=0\text{時橢圓退化}\\ (\text{又}0^\circ<\theta<180^\circ,\sin\theta\neq 0)\end{pmatrix}$$

三、將二、向下推廣，不限定在$\overleftrightarrow{AB}$上。P,A,B三點不必共線，且採斜角坐標系(如右圖)

設斜角坐標軸L_0,L_1上單位向量對應在直角坐標系為$\overline{e_0}=(1,0),\overline{e_1}=(\cos\theta,\sin\theta)$

$\overline{OA}=u\overline{e_0}$，$\overline{OB}=t\overline{e_1}$，根據餘弦定理得$t^2+u^2-2tu\cos\theta=a^2$，

今對給定的實數r，考慮P點滿足$\overline{PB}=r\overline{AB}$，則有$\overline{OP}=p\overline{OA}+q\overline{OB}$，

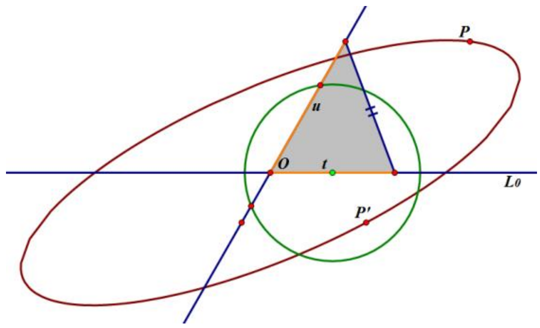
$\Rightarrow\overline{OP}=pu\overline{e_0}+qt\overline{e_1}$，$\Rightarrow\overline{OP}=pu(1,0)+qt(\cos\theta,\sin\theta)$，

$\Rightarrow\overline{OP}=(pu+qt\cos\theta,qt\sin\theta)$，$\Rightarrow\overline{OP}=(pu+q(\cos\theta)t,q(\sin\theta)t)$，

由二、中的二次曲線線性變換，

$$\Rightarrow\frac{t'^2}{\dfrac{a^2}{1+\cos\theta}}+\frac{u'^2}{\dfrac{a^2}{1-\cos\theta}}=1\text{，}$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}q\cos\theta & p\\q\sin\theta & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t\\u\end{pmatrix}$$



$\Rightarrow$根據**預備定理**，P 點之軌跡必為一橢圓或其退化。

$$\left(\begin{array}{l}\begin{vmatrix} q\cos\theta & p \\ q\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = -pq\sin\theta \\ p=0 \vee q=0 \vee \sin\theta=0\text{時橢圓退化} \\ (\text{又}0^\circ<\theta<180^\circ,\sin\theta\neq 0) \end{array}\right)$$

研討二：推廣橢圓規的原理至各種二次曲線(橢圓、雙曲線、拋物線)

根據研討一分析可得出 P 之軌跡為橢圓，現在希望把此操作方式推廣而能處理一般的二次曲線。注意到 $t^2+u^2-2tu\cos\theta=1^2$ 為研討二引進橢圓條件之關鍵式，由此式進行線性變換，便可得到橢圓的關係式。

因此，在這裡引進一個新想法：

視此式為「基因」。

首先必須定義「基因」、「操作」及「對基因進行操作」。第一，「基因」指兩實變數 t 和 u 的關係，例如 $t^2+u^2-2tu\cos\theta=1^2$。又若滿足某「基因」的數對 (t,u) 在直角坐標平面上的圖形為某一類曲線，就稱其為此類基因，例如橢圓基因。第二，「操作」即是各式各樣的幾何變換。最後，「對基因進行操作」就是將「基因」運用「操作」，並找出操作後所得到的 P 點的軌跡。

所以現在只需設法「種出」一般的二次曲線的基因，即可經由線性變換來對此基因操作出許多同類型的二次曲線。

一、橢圓：

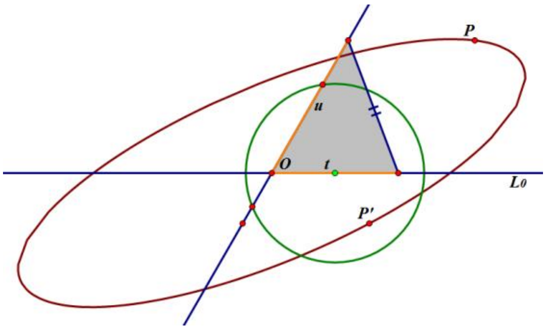
$t^2+u^2-2tu\cos\theta=1^2$，$\Rightarrow t^2-2tu\cos\theta+u^2=1$，

$\Rightarrow D=4\cos^2\theta-4\cdot1\cdot1=4(\cos^2\theta-1)<0$，

由研討一分析可知，(t,u)軌跡為橢圓，

根據研討一，如右圖，

$\Rightarrow P$ 點之軌跡必為一橢圓或其退化。



二、雙曲線：

從橢圓延伸到雙曲線，必須討論其判別式範圍，

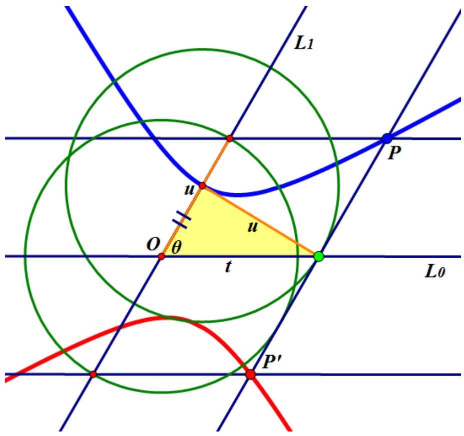
在右圖中，θ的對邊為 u，固定邊在另一邊，於是用 t,u 找出關係式，

$1^2+t^2-2\cdot1\cdot t\cos\theta=u^2$，$\Rightarrow u^2-t^2+2\cdot1\cdot t\cos\theta=1$，

$\Rightarrow D=0-4\cdot1\cdot(-1)=4>0$，

由上述分析可知，(t,u)軌跡為雙曲線，使用線性變換，

$\Rightarrow$根據**預備定理**，P 點之軌跡必為一雙曲線或其退化。

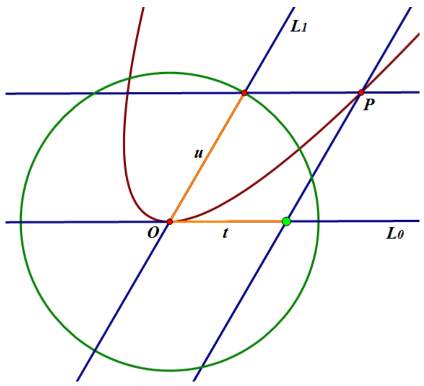


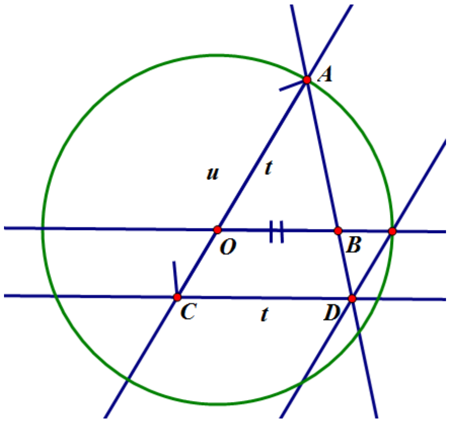
三、拋物線：

從橢圓延伸到拋物線，必須討論其判別式範圍，右圖中：

$\triangle AOB \sim \triangle ACD(AA)$，$\Rightarrow t:u=1:t$，$\Rightarrow t^2=u$，$\Rightarrow t^2-u=0$

將 t,u 對應在座標軸上，由上述分析可知，(t,u)軌跡為拋物線。





右圖 t 為圓半徑。

使用線性變換，

$\Rightarrow$根據**預備定理**，P 點之軌跡必為一拋物線或其退化。

研討三：發展出對各式曲線進行操作之方式

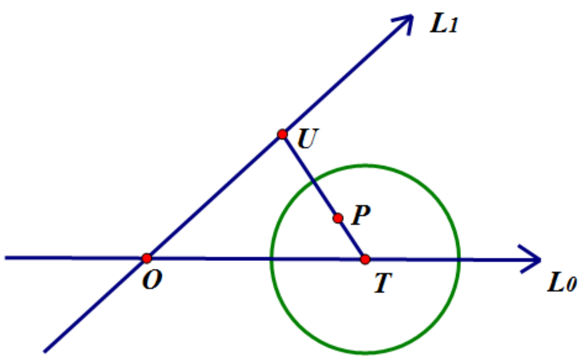
依此線性變換與研討一和研討二的結果進行討論分析。研討二的目的是為了創造出更推廣的曲線規，所以試著模仿研討一的結果做出「十字型雙曲線規」和「十字型拋物線規」，發現其實只是利用基因的觀念，加上線性變換，加以類推成此結果。

根據研討二的結果，可以看出關鍵其實是線性變換，所以這讓我們考慮在一般的斜角坐標系(由點 O , 及向量 $\overline{e_1}$, $\overline{e_2}$ 所構成)中，將 $\overline{OQ} = t\,\overline{e_1} + u\,\overline{e_2}$ 利用線性變換 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ u \end{pmatrix}$ 變換為 $\overline{OP} = x\,\overline{e_1} + y\,\overline{e_2}$ ，再找出 P 點軌跡。此操作模式不只侷限於橢圓、雙曲線、拋物線上，而是更推廣的常數基因、線型基因，甚至三角函數基因($\sin, \cos$ ……)，只要利用此系統皆可對上述基因進行線性變換，得到結果。

研討四：利用研討三系統，但並非使用線性變換，而用其餘方法變換

以上研究皆是由線性變換所變成，在討論完線性變換的部分，便會想到是否還有其他的幾何變換，也會有一樣的結果。第一個，使用反演變換，雖然此變換手法不是很常見，但也是一種特別的幾何變換，於是決定深入討論：

L_1 上一固定點 U ，如右圖



$C:(x-t)^2 + y^2 = r^2$

對 T 以 U 做反演，$\Rightarrow \overline{TP} \times \overline{TU} = r^2$

令 $P(x_0, y_0)$

$$\Rightarrow \sqrt{(x_0 - t)^2 + y^2} \times \sqrt{t^2 - 2tu\cos\theta + u^2} = r^2$$

$$\Rightarrow (x_0 - t)^2 + {y_0}^2 = \frac{r^4}{t^2 - 2tu\cos\theta + u^2}$$

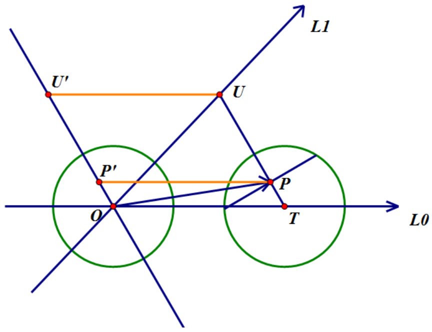
且 $\overleftrightarrow{TU} : y - t = \dfrac{u\sin\theta}{u\cos\theta - t}(x - t)$,P 代入

$$\Rightarrow y_0 - t = \frac{u\sin\theta}{u\cos\theta - t}(x_0 - t) \qquad \Rightarrow (\frac{u\cos\theta - t}{u\sin\theta}(y_0 - t))^2 + {y_0}^2 = \frac{r^4}{t^2 - 2tu\cos\theta + u^2}$$

直接解此式過於複雜，所以採用另一種想法

由反演定義得$\overline{TP}\times\overline{TU}=r^2$，如下頁圖，利用平移想法得$\overline{OP'}\times\overline{OU'}=r^2$

和標準位置圓$x^2+y^2=r^2$



$\overline{OU'}=\overline{TU}$

$\overrightarrow{OU'}=u\cos\theta-t+iu\sin\theta$

$\because \overline{OP'}=\dfrac{r^2}{\overline{OU'}}$ 且$\overrightarrow{OP'},\overrightarrow{OU'}$同向

$\therefore \overrightarrow{OP'}=\overline{OP'}\times\dfrac{\overrightarrow{OU'}}{\overline{OU'}}=\dfrac{r^2}{\overline{OU'}^2}\overrightarrow{OU'}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OP'}=\frac{r^2}{t^2-2tu\cos\theta+u^2}(u\cos\theta-t+u\sin\theta)=\frac{r^2u\cos\theta-r^2t}{t^2-2tu\cos\theta+u^2}+i\frac{r^2u\sin\theta}{t^2-2tu\cos\theta+u^2}$$

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OT}+\overrightarrow{TP}=\overrightarrow{OT}+\overrightarrow{OP'}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OT}+\frac{r^2}{\overline{OU'}^2}\overrightarrow{OU'}=t+\frac{r^2u\cos\theta-r^2t}{t^2-2tu\cos\theta+u^2}+i\frac{r^2u\sin\theta}{t^2-2tu\cos\theta+u^2}$$

$\Rightarrow U'$為U **平移**$\overrightarrow{TO}$的結果，P'相當於是U'對O做**反演**(反演中心為O，反演圓半徑r)，

P為P' **平移**$\overrightarrow{OT}$的結果

因此，我們可用「**先平移再反演再平移**」的操作模式來協助理解、分析**對基因進行反演**所得到的軌跡。由於反演操作較複雜，目前先以常數基因、線型基因、橢圓基因為討論的對象。

一、常數基因：$(u=k)$

$$\overrightarrow{OP'}=\frac{r^2k\cos\theta-r^2t}{t^2-2tk\cos\theta+k^2}+i\frac{r^2k\sin\theta}{t^2-2tk\cos\theta+k^2}$$

$$\Rightarrow x=\frac{r^2k\cos\theta-r^2t}{t^2-2tk\cos\theta+k^2},y=\frac{r^2k\sin\theta}{t^2-2tk\cos\theta+k^2}$$

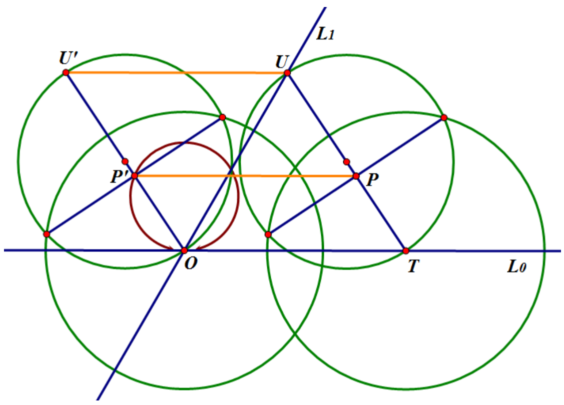
$$\Rightarrow x^2+y^2=\frac{r^4(k^2\cos^2\theta+t^2-2tk\cos\theta)}{(t^2-2tk\cos\theta+k^2)^2}+\frac{r^4k^2\sin^2\theta}{(t^2-2tk\cos\theta+k^2)^2}$$

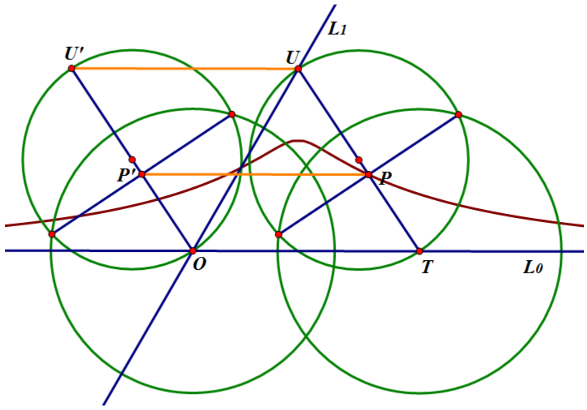
$$\Rightarrow x^2+y^2=\frac{r^4(k^2+t^2-2tk\cos\theta)}{(t^2-2tk\cos\theta+k^2)^2}=\frac{r^4}{t^2-2tk\cos\theta+k^2}$$

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OT}+\overrightarrow{OP'}$

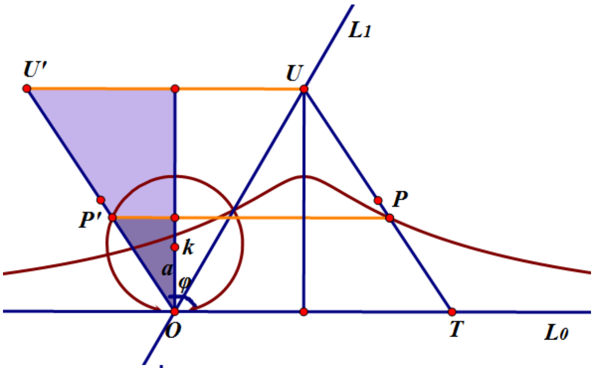
$$\Rightarrow \overrightarrow{OP}=t+\frac{r^2k\cos\theta-r^2t}{t^2-2tk\cos\theta+k^2}+i\frac{r^2k\sin\theta}{t^2-2tk\cos\theta+k^2}$$

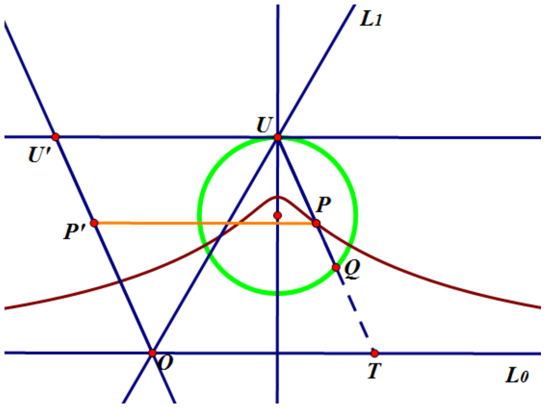
$$\Rightarrow \overrightarrow{OP}=\frac{t(t^2-2tk\cos\theta+k^2)+r^2k\cos\theta-r^2t}{t^2-2tk\cos\theta+k^2}+i\frac{r^2k\sin\theta}{t^2-2tk\cos\theta+k^2}$$

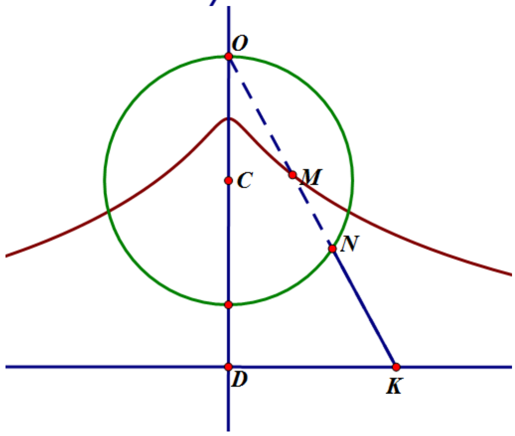




觀察 GSP 作圖 P' 點軌跡應為圓，而由傳統的反演理論可知 P' 點軌跡的確是個過 O 點的圓。將此圓上的點 P' 平移 $\overline{OT}$ 可得到我們所關切的 P 點。觀察 GSP 作圖中的 P 點軌跡，經過證明發現其軌跡為**史留斯蚌線**。(詳細證明請見附錄九)

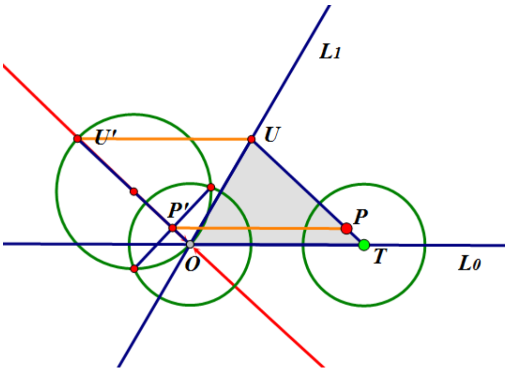


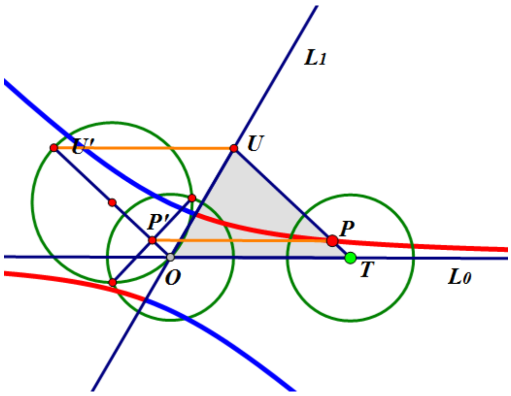




我已在代數上證明反演所得 P 點軌跡為史留斯蚌線，接下來便欲從幾何定義上解釋其為史留斯蚌線，左上圖綠圓即為依照定義所找出史留斯蚌線所必須之定圓，右上圖為依照史留斯蚌線定義所作出的圖，反演所作出的圖可以運用史留斯蚌線定義作圖。

二、線型基因：($u=mt+k$)





$$\overrightarrow{OP'}=\frac{r^2u\cos\theta-r^2t}{t^2-2tu\cos\theta+u^2}+i\frac{r^2u\sin\theta}{t^2-2tu\cos\theta+u^2}$$

i. 若 $k=0$

$$\overrightarrow{OP'}=\frac{r^2mt\cos\theta-r^2t}{t^2-2tmt\cos\theta+m^2t^2}+i\frac{r^2mt\sin\theta}{t^2-2tmt\cos\theta+m^2t^2}$$

$$\Rightarrow\overrightarrow{OP'}=\frac{r^2m\cos\theta-r^2}{t(1-2m\cos\theta+m^2)}+i\frac{r^2m\sin\theta}{t(1-2m\cos\theta+m^2)}\ ,$$

$$\Rightarrow x=\frac{r^2m\cos\theta-r^2}{t(1-2m\cos\theta+m^2)},\ y=\frac{r^2m\sin\theta}{t(1-2m\cos\theta+m^2)}\ ,$$

$$\Rightarrow t=\frac{r^2m\cos\theta-r^2}{x(1-2m\cos\theta+m^2)}=\frac{r^2m\sin\theta}{y(1-2m\cos\theta+m^2)}\ ,$$

$$\Rightarrow\frac{r^2m\cos\theta-r^2}{x}=\frac{r^2m\sin\theta}{y}\ ,\ \Rightarrow y=\frac{m\sin\theta}{m\cos\theta-1}x\ ,$$

$\Rightarrow P'$ 點軌跡為一斜率為 $\dfrac{m\sin\theta}{m\cos\theta-1}$ 的直線

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OT}+\overrightarrow{OP'}$$

$\Rightarrow\overrightarrow{OP}=t+\dfrac{r^2m\cos\theta-r^2}{t(1-2m\cos\theta+m^2)}+i\dfrac{r^2m\sin\theta}{t(1-2m\cos\theta+m^2)}$，經過計算可得

$$\Rightarrow y\left(x-\frac{m\cos\theta-1}{m\sin\theta}y\right)=\frac{r^2m\sin\theta}{(1-2m\cos\theta+m^2)}$$

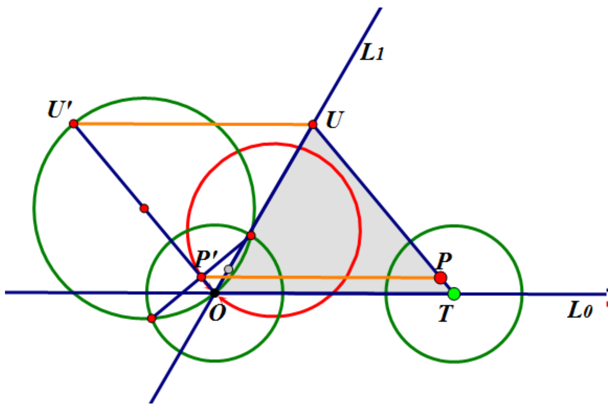
$\Rightarrow P$ 點軌跡為雙曲線

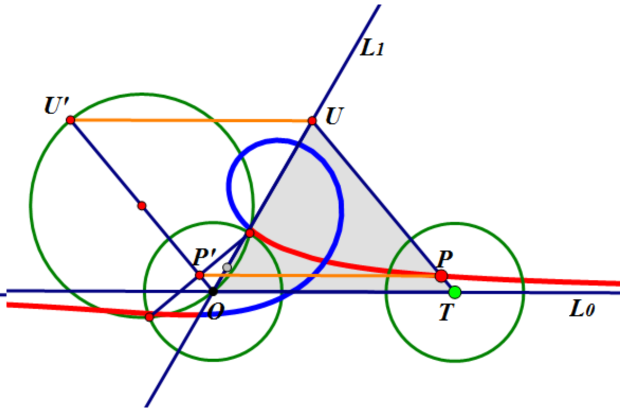
ii. 若 $k \neq 0$

經過與 i. 類似計算可得

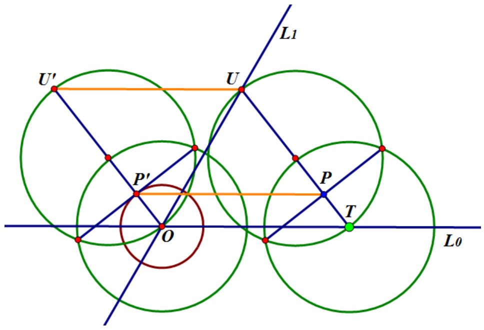
$$\Rightarrow \overline{OP} = t + \frac{t(r^2 m\cos\theta - r^2) + r^2 k\cos\theta}{t^2(1-2m\cos\theta+m^2)+t(-2k\cos\theta+2mk)+k^2} + i\frac{t(r^2 m\sin\theta) + r^2 k\sin\theta}{t^2(1-2m\cos\theta+m^2)+t(-2k\cos\theta+2mk)+k^2}$$

利用與一、常數基因類似的分析，觀察 GSP 作圖中的 P 點軌跡，目前推測 P 點軌跡可能是**史留斯蚌線**(或其變形)，目前尚在積極查證中，希望能及早釐清。





三、橢圓基因：$(t^2 - 2tu\cos\theta + u^2 = k^2\,,\,k > 0)$



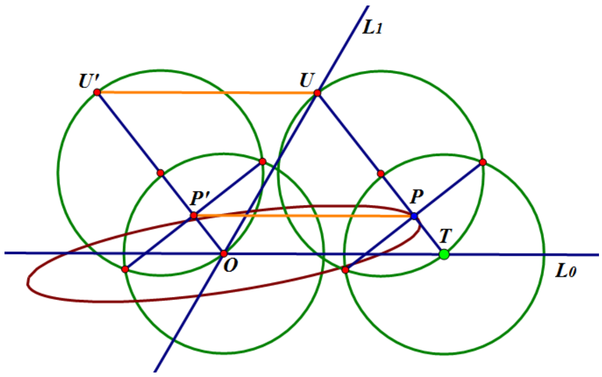
$$\overline{OP'} = \frac{r^2 u\cos\theta - r^2 t}{t^2 - 2tu\cos\theta + u^2} + i\frac{r^2 u\sin\theta}{t^2 - 2tu\cos\theta + u^2}$$

$$\Rightarrow \overline{OP'} = \frac{r^2 u\cos\theta - r^2 t}{k^2} + i\frac{r^2 u\sin\theta}{k^2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{r^2 u\cos\theta - r^2 t}{k^2}, y = \frac{r^2 u\sin\theta}{k^2}$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = \frac{r^4(u^2\cos^2\theta - 2tu\cos\theta + t^2)}{k^4} + \frac{r^4 u^2 \sin^2\theta}{k^4} = \frac{r^4(u^2 - 2tu\cos\theta + t^2)}{k^4} = \frac{r^4}{k^2}$$

$\Rightarrow P'$ 點軌跡為以 O 為圓心，半徑 $\frac{r^2}{k}$ 之圓



$$\overline{OP} = \overline{OT} + \overline{OP'}$$

$$\Rightarrow \overline{OP} = t + \frac{r^2 u\cos\theta - r^2 t}{k^2} + i\frac{r^2 u\sin\theta}{k^2}$$

$$\Rightarrow \overline{OP} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{r^2}{k^2} & \frac{r^2}{k^2}\cos\theta \\ 0 & \frac{r^2}{k^2}\sin\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ u \end{pmatrix}$$

(註：事實上還需把矩陣的乘積轉置，為了行文方便而將其省略。以下皆同此意。)

$\Rightarrow P$ 點必可經由研討二結果使用線性變換，根據**預備定理**，發現 P 點軌跡為一橢圓。

為了解決常數基因和線型基因($k \neq 0$)之中分母的問題，提出一個**輔助觀念**來解決這個問題：

我們發現常數基因和線型基因($k \neq 0$)的向量都是兩個變量的分式 2 次多項式，試著將它分成兩個以上的式子，把原本的分式化簡成可以解釋的各種操作。

將此操作視為一連串的操作所組成，也可視為多個單一操作後的曲線進行疊合。

而式子中的兩個變量，在將基因引入後，會變成只有一個變量。

首先討論基本的三種類型$(t+a,\dfrac{1}{t+a},\dfrac{1}{t^2+a^2})$：

i. $x=t+a,y=t+b\wedge a,b\in\mathbb{R}$，$\Rightarrow t=a-x=b-y$，$\Rightarrow (x,y)$軌跡為一直線

ii. $x=\dfrac{1}{t+a},y=\dfrac{1}{t+b}\wedge a,b\in\mathbb{R}$，$\Rightarrow t=\dfrac{1-ax}{x}=\dfrac{1-by}{y}$，$\Rightarrow y-axy=x-bxy$

$\Rightarrow((a-b)x-1)(y+\dfrac{1}{a-b})=\dfrac{-1}{a-b}$，$\Rightarrow(x,y)$軌跡為雙曲線

iii. $x=\dfrac{1}{t^2+a^2},y=\dfrac{1}{t^2+b^2}\wedge a,b\in\mathbb{R}$，$\Rightarrow t^2=\dfrac{1-a^2x}{x}=\dfrac{1-b^2y}{y}$，$\Rightarrow y-a^2xy=x-b^2xy$

$\Rightarrow((a^2-b^2)x-1)(y+\dfrac{1}{a^2-b^2})=\dfrac{-1}{a^2-b^2}$，$\Rightarrow(x,y)$軌跡為雙曲線

解釋完$t+a,\dfrac{1}{t+a},\dfrac{1}{t^2+a^2}$三種類型後實際運用：

i. $\dfrac{t+6}{t^2-4}=\dfrac{1}{t-2}+\dfrac{4}{t^2-4}$，此式即代表兩條雙曲線互相疊合。

ii. $\dfrac{1}{t^2+t-6}=\dfrac{1}{5}(\dfrac{1}{t+3}-\dfrac{1}{t-2})$，此式即代表兩條雙曲線互相疊合後再進行伸縮變換。

iii. $\dfrac{t^2+6t+7}{t-3}=(t+9)+\dfrac{34}{t-3}$，此式即代表一條雙曲線和一條直線互相疊合。

iv. $\dfrac{t^2+6t+7}{t^2+t-6}=1+\dfrac{5t+1}{t^2+t-6}=1+\dfrac{5(t-2)+11}{t^2+t-6}=1+\dfrac{5}{t+3}+\dfrac{11}{t^2+t-6}=1+\dfrac{5}{t+3}+\dfrac{11}{5}(\dfrac{1}{t+3}-\dfrac{1}{t-2})$，此式即代表三條雙曲線互相疊合且伸縮後再和一直線疊合，最後才進行平移變換。

以上只是舉例說明，希望能將此想法加以詳細證明，並推廣至一般化的情形，而能方便地運用來處理一些分式，進而對所研究的曲線有比較充分的理解。

研討五：一些特殊的幾何操作(例如三角形的特殊點、費馬點……)

應用以上的討論，分析各種情況 P 點的軌跡(以下採取複數極式想法)：

一、定斜角坐標系L_0,L_1上單位向量對應在直角坐標系為$\overrightarrow{e_0}=(1,0),\overrightarrow{e_1}=(\cos\theta,\sin\theta)$

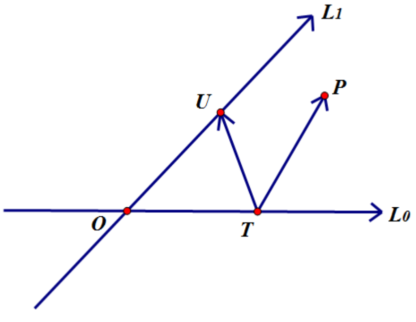
$\overrightarrow{OT}=t\overrightarrow{e_0}$，$\overrightarrow{OU}=u\overrightarrow{e_1}$，

考慮若將$\overline{TU}$做一次線性變換

$\overline{OT}=t,\overline{OU}=u\cos\theta+iu\sin\theta$

$\overline{TU}=u\cos\theta-t+iu\sin\theta$

$\overline{OP}=\overline{OT}+\overline{TP}$



$$\overline{TP}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\cos\theta-t\\u\sin\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}au\cos\theta-at+bu\sin\theta\\cu\cos\theta-ct+du\sin\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u(a\cos\theta+b\sin\theta)-ta\\u(c\cos\theta+d\sin\theta)-tc\end{pmatrix}$$

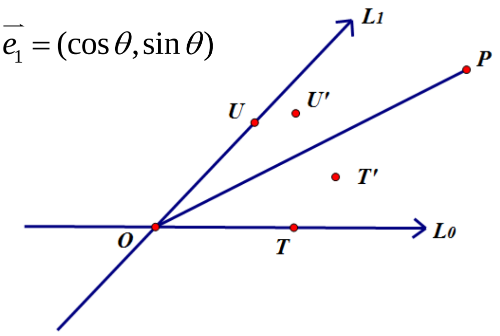
$$\overline{OP}=\begin{pmatrix}u(a\cos\theta+b\sin\theta)-ta+t\\u(c\cos\theta+d\sin\theta)-tc\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-a&a\cos\theta+b\sin\theta\\-c&c\cos\theta+d\sin\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t\\u\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow P$ 點軌跡必可經由研討二結果使用線性變換及基因概念，從(t,u)數對變為 (x,y)坐標而為同類型之曲線，又

$$\det(D)=\begin{vmatrix}1-a & a\cos\theta+b\sin\theta\\ -c & c\cos\theta+d\sin\theta\end{vmatrix}=c\cos\theta+d\sin\theta-ac\cos\theta-ad\sin\theta+ac\cos\theta+bc\sin\theta$$

$=c\cos\theta+(d-ad+bc)\sin\theta$ 是否為 0 為軌跡是否退化之關鍵。

二、定斜角坐標系 L_0,L_1 上單位向量對應在直角坐標系為 $\overline{e_0}=(1,0),\overline{e_1}=(\cos\theta,\sin\theta)$



$\overline{OT}=t\overline{e_0}$，$\overline{OU}=u\overline{e_1}$，

考慮先將 $\overline{OT},\overline{OU}$ 做一次線性變換，再進行向量加法

$\overline{OT}=t,\overline{OU}=u\cos\theta+iu\sin\theta$

令 $\overline{OT}'=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}at\\ ct\end{pmatrix},\overline{OU}'=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\cos\theta\\ u\sin\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}au\cos\theta+bu\sin\theta\\ cu\cos\theta+du\sin\theta\end{pmatrix}$

$\overline{OP}=\overline{OT}'+\overline{OU}'$

$$\overline{OP}=\begin{pmatrix}at+au\cos\theta+bu\sin\theta\\ ct+cu\cos\theta+du\sin\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ta+u(a\cos\theta+b\sin\theta)\\ tc+u(c\cos\theta+d\sin\theta)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & a\cos\theta+b\sin\theta\\ c & c\cos\theta+d\sin\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t\\ u\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow P$ 點軌跡必可經由研討二結果使用線性變換及基因概念，從(t,u)數對變為 (x,y)坐標

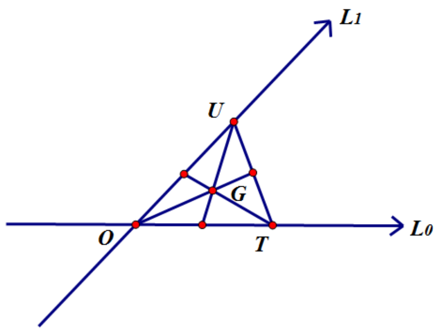
$$\det(D)=\begin{vmatrix}a & a\cos\theta+b\sin\theta\\ c & c\cos\theta+d\sin\theta\end{vmatrix}=ac\cos\theta+ad\sin\theta-ac\cos\theta-bc\sin\theta$$

三、定斜角坐標系 L_0,L_1 上單位向量對應在直角坐標系為 $\overline{e_0}=(1,0),\overline{e_1}=(\cos\theta,\sin\theta)$

$\overline{OT}=t\overline{e_0}$，$\overline{OU}=u\overline{e_1}$，

考慮 $\triangle TOU$ 之重心、垂心、外心、內心軌跡

1. 重心 G：



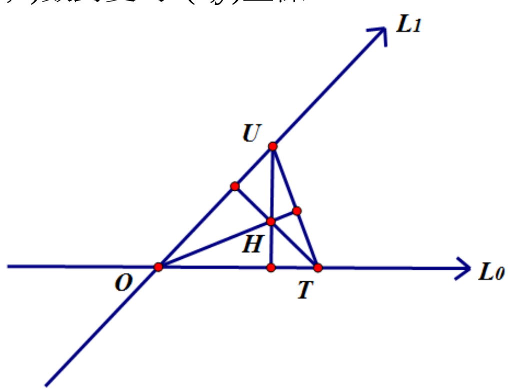
$\overline{OT}=t,\overline{OU}=u\cos\theta+iu\sin\theta$

$$\overline{OG}=\frac{1}{3}(\overline{OT}+\overline{OU})=\begin{pmatrix}\dfrac{t+u\cos\theta}{3}\\ \dfrac{u\sin\theta}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{3} & \dfrac{\cos\theta}{3}\\ 0 & \dfrac{\sin\theta}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t\\ u\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow G$ 點軌跡經由研討二結果使用線性變換及基因概念，從(t,u)數對變為 (x,y)坐標

$$\det(D)=\begin{vmatrix}\dfrac{1}{3} & \dfrac{\cos\theta}{3}\\ 0 & \dfrac{\sin\theta}{3}\end{vmatrix}=\frac{\sin\theta}{9}-0=\frac{\sin\theta}{9}\neq 0$$，故不退化。

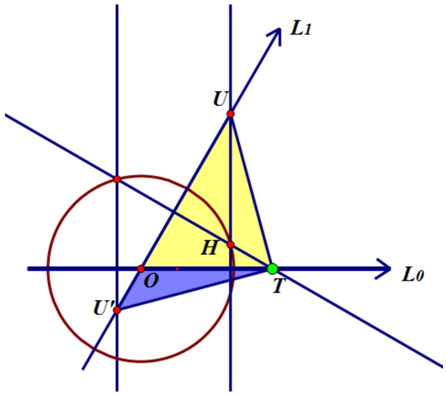
2. 垂心 H：



$\overline{OT}=t,\overline{OU}=u\cos\theta+iu\sin\theta$，$\overline{TU}=u\cos\theta-t+iu\sin\theta$

設$\overline{OH}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$，$\overline{OH}\perp\overline{TU}\Rightarrow\overline{OH}\cdot\overline{TU}=0$，

$\Rightarrow(u\cos\theta-t)x+(u\sin\theta)y=0$ $\overline{UH}=(x-u\cos\theta)+i(y-u\sin\theta)$



$\overline{UH}\perp\overline{OT}\Rightarrow\overline{UH}\cdot\overline{OT}=0\Rightarrow t(x-u\cos\theta)+0\cdot(y-u\sin\theta)=0$

$\Rightarrow\begin{cases}(u\cos\theta-t)x+(u\sin\theta)y=0\\ t(x-u\cos\theta)=0\end{cases}\Rightarrow x=u\cos\theta$代入

$\Rightarrow(u\cos\theta-t)u\cos\theta+(u\sin\theta)y=0\Rightarrow y=\dfrac{t\cos\theta-u\cos^2\theta}{\sin\theta}$

$$\overline{OH}=\begin{pmatrix}u\cos\theta\\ \dfrac{t\cos\theta}{\sin\theta}-\dfrac{u\cos^2\theta}{\sin\theta}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&\cos\theta\\ \cot\theta&-\cos\theta\cot\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t\\u\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow H$點軌跡經由研討二結果使用線性變換及基因概念，從(t,u)數對變為 (x,y)坐標，又

$$\det(D)=\begin{vmatrix}0&\cos\theta\\ \cot\theta&-\cos\theta\cot\theta\end{vmatrix}=-\cos\theta\cot\theta$$

在L_0,L_1兩線垂直時為 0，觀察可知退化為O點。另外經過數學軟體的測試，使用橢圓基因做垂心，其垂心軌跡為一圓形(如上圖)。

$$\overline{OH}=\begin{pmatrix}0&\cos\theta\\ \cot\theta&-\cos\theta\cot\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t\\u\end{pmatrix}$$

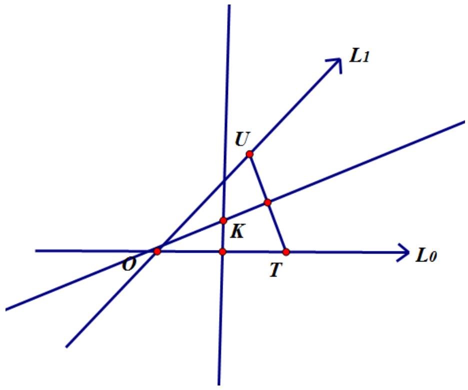
經過推導得證(詳細式子請見附錄四)，當$\theta\neq90°$時，

$\Rightarrow\dfrac{x^2}{\cot^2\theta}+\dfrac{y^2}{\cot^2\theta}=1\Rightarrow$垂心軌跡在$(t,u)$關係為橢圓時，為一圓形，半徑為$k|\cot\theta|,k=|\overline{TU}|$

3. 外心K：

根據三角形尤拉線性質

外心K重心G垂心H三點共線，且$\dfrac{\overline{KG}}{\overline{GH}}=\dfrac{1}{2}$

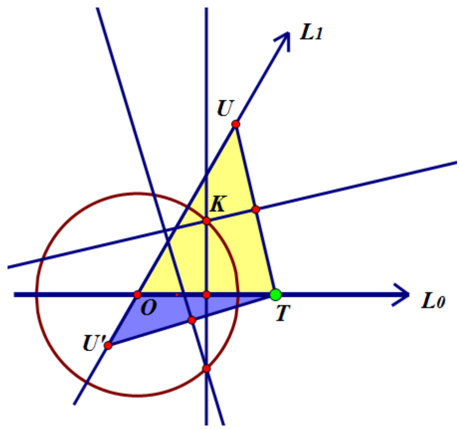


$$\overline{OG}=\begin{pmatrix}\dfrac{t+u\cos\theta}{3}\\ \dfrac{u\sin\theta}{3}\end{pmatrix},\overline{OH}=\begin{pmatrix}u\cos\theta\\ t\cot\theta-u\cos\theta\cot\theta\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\overline{OK}=\frac{3}{2}\overline{OG}+\frac{-1}{2}\overline{OH}\qquad=\begin{pmatrix}\dfrac{t}{2}\\ \dfrac{u\sin^2\theta+u\cos^2\theta}{2\sin\theta}-\dfrac{t\cot\theta}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{2}&0\\ \dfrac{-\cot\theta}{2}&\dfrac{1}{2\sin\theta}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t\\u\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow K$點軌跡經由研討二結果使用線性變換及基因概念，從(t,u)數對變為 (x,y)坐標

$$\det(D)=\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ \frac{-\cot\theta}{2} & \frac{1}{2\sin\theta}\end{vmatrix}=\frac{1}{4\sin\theta}-0=\frac{1}{4\sin\theta}\neq 0$$，故不退化。



另經過數學軟體測試，使用橢圓基因，其外心軌跡為一圓。

$$\overrightarrow{OK}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ \frac{-\cot\theta}{2} & \frac{1}{2\sin\theta}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t\\ u\end{pmatrix}$$

經過推導得證(詳細式子請見附錄五)$\Rightarrow 4x^2\sin^2\theta+4y^2\sin^2\theta=1$

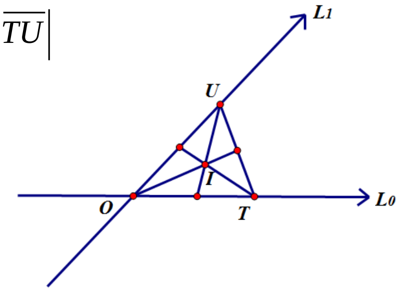
$\Rightarrow$外心軌跡在(t,u)關係為橢圓時，為一圓形，半徑為$\dfrac{k}{2\sin\theta},k=\left|\overline{TU}\right|$

4. 內心 I：

由內心定義得知，斜角坐標系θ若固定，其角平分線也必固定

$\Rightarrow$內心必在那條角平分線上

$\Rightarrow I$ 點軌跡為一直線(即$\angle TOU$的角平分線)的一部分。



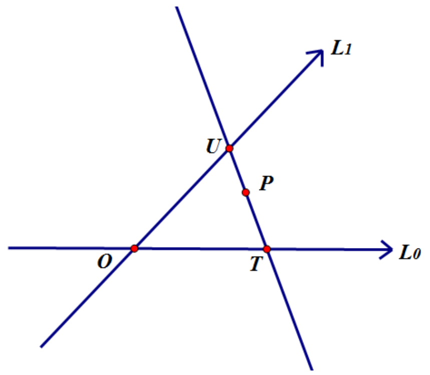
四、過定點的直線：定斜角坐標系L_0,L_1上單位向量對應在直角坐標系為$\overrightarrow{e_0}=(1,0),\overrightarrow{e_1}=(\cos\theta,\sin\theta)$

$\overrightarrow{OT}=t\overrightarrow{e_0}$，$\overrightarrow{OU}=u\overrightarrow{e_1}$，

考慮直線 L 過一定點 $P(a,b)$，與兩軸交於 $T,U\Rightarrow\dfrac{x}{t}+\dfrac{y}{u}=1$

P 代入$\Rightarrow\dfrac{a}{t}+\dfrac{b}{u}=1\Rightarrow(t-a)(u-b)=ab\Rightarrow(t,u)$軌跡為雙曲線

$\Rightarrow$代表此種情形的基因為雙曲線之基因，因此可襲用前面三、之 1.~3.的研究心得，知道對應的外心、重心、垂心軌跡為雙曲線或其退化。



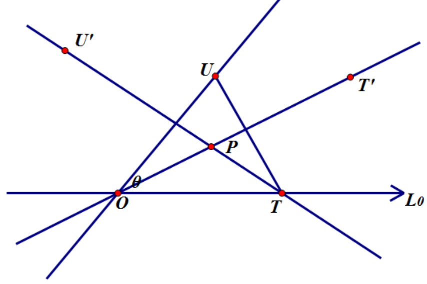
五、費馬點(及其推廣)：定斜角坐標系L_0,L_1上單位向量對應在直角坐標系為$\overrightarrow{e_0}=(1,0),\overrightarrow{e_1}=(\cos\theta,\sin\theta)$。

設$\overrightarrow{OT}=t\,\overrightarrow{e_0},\overrightarrow{OU}=u\,\overrightarrow{e_1}$，(即在複數座標中，$\overrightarrow{OT}=t$，

$\overrightarrow{OU}=u\cos\theta+iu\sin\theta$。)

分別以O,U為中心，將U,T向外旋轉$60°$而得U',T'。

設$\overleftrightarrow{TU'},\overleftrightarrow{OT'}$交於$P(x,y)$。經過整理推導得



$$\Rightarrow x=\frac{tu\sin(60°+\theta)(t\cos 60°+u\cos(60°-\theta))}{tu(\sin\theta-\sin(60°-\theta))+(t^2+u^2)\sin 60°}$$

$$\Rightarrow y=\frac{tu\sin(60°+\theta)(t\cos 60°+u\cos(60°-\theta))}{tu(\sin\theta-\sin(60°-\theta))+(t^2+u^2)\sin 60°}\times\frac{t\sin 60°-u\sin(60°-\theta)}{t\cos 60°+u\cos(60°-\theta)}$$

為了處理此式，先從簡單的基因下手，第一個我嘗試的是簡單的關係，討論$u=mt+k$時，改變m和k，

觀察t,u的關係。

1. $m=0$：

因為此時$u=k$

$$\Rightarrow x=\frac{tk\sin(60°+\theta)(t\cos 60°+k\cos(60°-\theta))}{tk(\sin\theta-\sin(60°-\theta))+(t^2+k^2)\sin 60°}$$

$$\Rightarrow y=\frac{tk\sin(60°+\theta)(t\cos 60°+u\cos(60°-\theta))}{tk(\sin\theta-\sin(60°-\theta))+(t^2+k^2)\sin 60°}\times\frac{t\sin 60°-k\sin(60°-\theta)}{t\cos 60°+k\cos(60°-\theta)}$$

經過實驗得知此軌跡為一個圓，想要利用多項式除法和**輔助觀念**，想要試著解開此式，目前已有部分心得，希望能儘快將此問題解決。

2. $m\neq 0$：

i. $k=0$：

$$x=\frac{tu\sin(60°+\theta)(t\cos 60°+u\cos(60°-\theta))}{tu(\sin\theta-\sin(60°-\theta))+(t^2+u^2)\sin 60°}$$

$$\Rightarrow x=t\frac{m\cos 60°\sin(60°+\theta)+m^2\sin(60°+\theta)\cos(60°-\theta))}{m(\sin\theta-\sin(60°-\theta))+(1+m^2)\sin 60°}$$

同理

$$\Rightarrow y=t\frac{m\sin(60°+\theta)(\cos 60°+m\cos(60°-\theta))}{m(\sin\theta-\sin(60°-\theta))+(1+m^2)\sin 60°}\times\frac{\sin 60°-m\sin(60°-\theta)}{\cos 60°+m\cos(60°-\theta)}$$

$\Rightarrow$根據研討三的**輔助觀念**，判斷其為一直線，且在$m=0$時退化成原點。

ii. $k\neq 0$：

利用多項式除法，並利用**輔助觀念**是目前的方法，不過其稍嫌複雜，目前未有比較清楚而易見的幾何證法，尚在努力中。

費馬點因為是轉$60°$，所以恰巧交於一點；而在以O為旋轉中心，將$\overline{OT}$, $\overline{OU}$各自向外側旋轉α角時，與$60°$的部分式子相同，但圖形有些許不同。

$$\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{tu\sin(\alpha+\theta)(t\cos\alpha+u\cos(\alpha-\theta))}{tu(\sin\theta-\sin(\alpha-\theta))+(t^2+u^2)\sin\alpha}\\ y=\dfrac{tu\sin(\alpha+\theta)(t\cos\alpha+u\cos(\alpha-\theta))}{tu(\sin\theta-\sin(\alpha-\theta))+(t^2+u^2)\sin\alpha}\times\dfrac{t\sin\alpha-u\sin(\alpha-\theta)}{t\cos\alpha+u\cos(\alpha-\theta)}\end{cases}$$

先從常數基因開始分析，經過 GSP 測試發現其為圓形，由於對上式進行分析時，遭遇到目前還無法完全克服的困難，因此轉而研尋、採用較幾何的看法：

圖形可視為$\Delta U'OT$旋轉了α，變成$\Delta UOT'$，P點也為Q點旋轉α所得，K為$\Delta UOU'$之外心

因此此時ΔQOP為等腰三角形，作ΔQOP之垂足P'，此時$\angle U'OP'=\delta,\angle KOP=\gamma,\angle P'OU=\phi$。

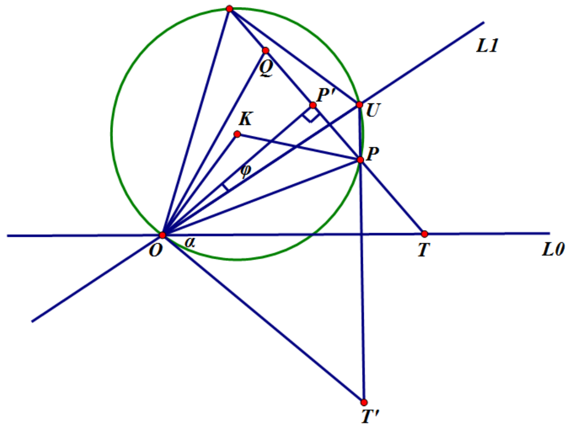
先說明$\angle KOP=\angle U'OP'=\delta$，

$\angle U'OP'=\angle U'OU-\angle P'OU=\alpha-\phi$

$$\angle KOQ=\frac{\alpha}{2}-\angle U'OQ=\frac{\alpha}{2}-\angle UOP=\frac{\alpha}{2}-(\frac{\alpha}{2}-\phi)=\phi$$

$\Rightarrow\angle KOP=\angle QOP-\angle KOQ=\alpha-\phi$

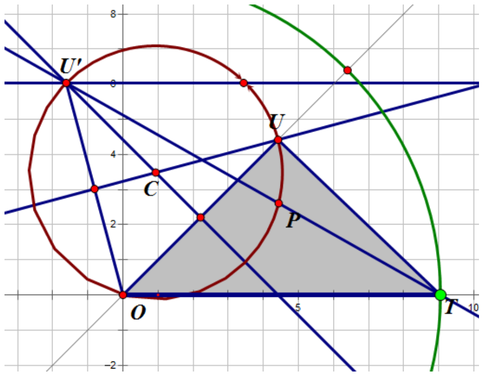
即代表$\angle KOP=\angle U'OP'=\delta$



因此 $\overline{OK}=\dfrac{\overline{OU}}{2\cos\frac{\alpha}{2}},\overline{OP}=\overline{OU}\dfrac{\cos\delta}{\cos\frac{\alpha}{2}}\Rightarrow 2\overline{OK}\cos\delta=2\dfrac{\overline{OU}}{2\cos\frac{\alpha}{2}}\cos\delta=\overline{OP}$

$\Rightarrow$此時 ΔKOP 為等腰三角形，故 $\overline{OK}=\overline{OP}$ 。$\Rightarrow P$ 點位在此圓上。

(註：當 P' 位在 L_1 的另一側時，證法僅微調而類似)



接下來要說明此圓上的所有 P 點是否都是由此方法做出來的。

任取圓上一點 $P(x_0,y_0)$，若 $\overrightarrow{U'P}$ 不平行 L_0 ，則可

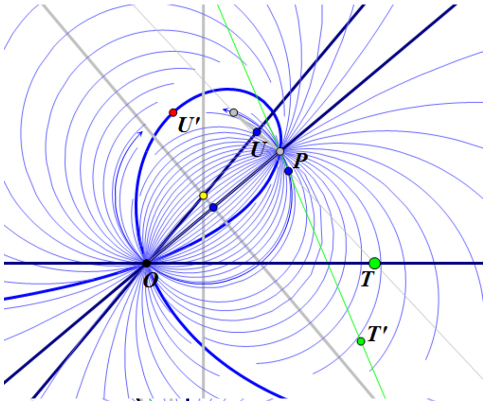
延長 $\overrightarrow{U'P}$ 交 L_0 於 T，並在 $\overrightarrow{UP}$ 取 T'' ，使得 $\overline{UT''}=\overline{U'T}$

此時

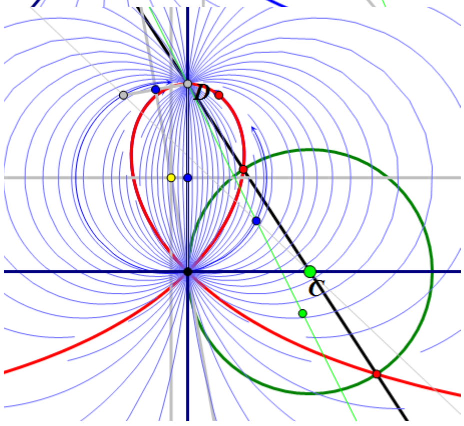
$$\overline{OU}=\overline{OU'},\overline{U'T}=\overline{UT''},\angle OU'P=\angle OUP(\text{對同弧})$$

$$\Rightarrow \Delta U'OT\cong\Delta UOT'(SAS)$$

$$\Rightarrow \overline{OT}=\overline{OT'},\angle U'OU=\angle TOT'\Rightarrow P\text{ 點可由此方法做出來。}$$



但若 $\overrightarrow{U'P}$ 平行 L_0 ，即 P 是過 U' 與 L_0 平行的那條線與圓的交點，因為此時延長 $\overrightarrow{U'P}$ 無法與 L_0 交於 T，所以此點為例外，也就是說，P 點軌跡是一個圓再扣掉一點。



另外發現當將所有角度產生的圓，出現恆過 O,U 的共軸圓系，把每個圓上須扣掉的點描出其軌跡，會出現類似環索線的曲線(如右圖藍色曲線)，若依照定義作圖，可以發現兩種方式做出來的圖，作法相同，圖形可以吻合，以下進行代數分析討論。

根據「形形色色的曲線」一書中提到，環索線直角坐標方程式為 $y^2=x^2\dfrac{a+x}{a-x}$ 。

經過分析後整理出所有曲線上點的軌跡參數方程式如下(詳細證明請見附錄十)

$$\sin\theta\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\cos\theta-\frac{x}{u}-\frac{\sqrt{u^2-y^2}}{u}$$

1. 若 $\theta=90°(\sin\theta=1,\cos\theta=0)$ ：

$$\sin\theta\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\cos\theta-\frac{x}{u}-\frac{\sqrt{u^2-y^2}}{u}\text{ , }\Rightarrow\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=-\frac{x}{u}-\frac{\sqrt{u^2-y^2}}{u}\text{ , }\Rightarrow\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=-\frac{x}{u}-\frac{\sqrt{u^2-y^2}}{u}\text{ ,}$$

$$\because\sin\alpha=\frac{y}{u}\cos\theta-\frac{\sqrt{u^2-y^2}}{u}\sin\theta,\cos\alpha=\frac{\sqrt{u^2-y^2}}{u}\cos\theta+\frac{y}{u}\sin\theta\text{ ,}$$

$$\Rightarrow\frac{u-\sqrt{u^2-y^2}\cos\theta-y\sin\theta}{y\cos\theta-\sqrt{u^2-y^2}\sin\theta}=-\frac{x}{u}-\frac{\sqrt{u^2-y^2}}{u}\text{ , }\Rightarrow\frac{u-y}{-\sqrt{u^2-y^2}}=-\frac{x}{u}-\frac{\sqrt{u^2-y^2}}{u}\text{ ,}$$

$$\Rightarrow u-y=\frac{x\sqrt{u^2-y^2}}{u}+\frac{u^2-y^2}{u}\text{ , }\Rightarrow\frac{u^2-uy}{u}-\frac{u^2-y^2}{u}=\frac{x\sqrt{u^2-y^2}}{u}\text{ , }\Rightarrow y^2-uy=x\sqrt{u^2-y^2}\text{ ,}$$

$$\Rightarrow(y^2-uy)^2=x^2(u^2-y^2)\text{ , }\Rightarrow y^2(u-y)(u-y)=x^2(u-y)(u+y)\text{ ,}$$

$\Rightarrow y^2(u-y)=x^2(u+y)$ ，$\Rightarrow y^2\dfrac{u-y}{u+y}=x^2$ 。

把此式與環索線直角坐標方程式比較，發現圖形確實為環索線。

2. 若$\theta\neq 90^\circ$：

方程式無法直觀的推出環索線形式的方程式，不過我推測其為斜環索線(「形形色色的曲線」p.131)，因為斜環索線為環索線的直接推廣，而且圖形也有些許相似，但目前尚未證明完全，此為未來深入探討的部分。

由上述幾何證法自然想到，關於「分別以O,U為中心，將U,T向外旋轉60°」的P點軌跡問題，可能有類似證法。

另外，若兩個旋轉角不同，或是兩個旋轉中心不同，目前由 GSP 發現其軌跡可能是一般的二次曲線而充滿奇趣，但其變化機制似乎很難用類似上面這種幾何手法來解決，看來仍須對座標的參數式進行分析。

在此討論$\overline{OP}$的參數式，經過分析過後得(詳細推導過程請見附錄七)

$$\Rightarrow \overline{OP}=\frac{t^2\sin\alpha_1+tu(\sin\theta-\sin(\theta+\alpha_1))}{t^2\sin\alpha_1+u^2\sin\alpha_2+2tu\cos(\theta+\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2})\sin(\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2})}(u\cos(\theta+\alpha_2)+iu\sin(\theta+\alpha_2)-t)+t$$

設$t^2\sin\alpha_1+u^2\sin\alpha_2+2tu\cos(\theta+\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2})\sin(\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2})=\sin\alpha_1(t-t_1)(t-t_2)$ ，

1. $D=(\cos(\theta+\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2})\sin(\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}))^2-4\sin\alpha_1\sin\alpha_2>0$ ，則t_1,t_2為兩相異實數。

$$\Rightarrow \overline{OP}=\frac{a_1t^2+a_2t+a_3}{(t-t_1)(t-t_2)}+i\frac{a_4t^2+a_5t+a_6}{(t-t_1)(t-t_2)}=a_1+\frac{b_1t+b_2}{(t-t_1)(t-t_2)}+i(a_4+\frac{b_3t+b_4}{(t-t_1)(t-t_2)})$$

$$\Rightarrow \overline{OP}=a_1+\frac{c_1}{t-t_1}+\frac{c_2}{t-t_2}+i(a_4+\frac{c_3}{t-t_1}+\frac{c_4}{t-t_2}),(c_1+c_2=b_1\wedge c_1t_2+c_2t_1=-b_2)$$

$$\Rightarrow \overline{OP}=\begin{pmatrix}c_1 & c_2\\ c_3 & c_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{1}{t-t_1}\\ \dfrac{1}{t-t_2}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a_1\\ a_4\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$根據**輔助觀念**，$(\frac{1}{t-t_1},\frac{1}{t-t_2})$軌跡為雙曲線或其退化，經過線性變換後，$\overline{OP}$軌跡為雙曲線或退化。

2. $D=(\cos(\theta+\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2})\sin(\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}))^2-4\sin\alpha_1\sin\alpha_2=0$ ，則$t_1=t_2$ 。

$$\Rightarrow \overline{OP}=\frac{a_1t^2+a_2t+a_3}{(t-t_1)^2}+i\frac{a_4t^2+a_5t+a_6}{(t-t_1)^2}=a_1+\frac{b_1t+b_2}{(t-t_1)^2}+i(a_4+\frac{b_3t+b_4}{(t-t_1)^2})$$

$$\Rightarrow \overline{OP}=a_1+\frac{c_1}{t-t_1}+\frac{c_2}{(t-t_1)^2}+i(a_4+\frac{c_3}{t-t_1}+\frac{c_4}{(t-t_1)^2}),(c_1=b_1,c_3=b_3,c_2=b_2+c_1t_1,c_4=b_4+c_3t_1)$$

$$\Rightarrow \overline{OP}=\begin{pmatrix}c_1 & c_2\\ c_3 & c_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{1}{t-t_1}\\ (\dfrac{1}{t-t_1})^2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a_1\\ a_4\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow (\frac{1}{t-t_1},(\frac{1}{t-t_1})^2)$ 軌跡為拋物線 $(y=x^2)$ 或其退化，經過線性變換後，$\overline{OP}$ 軌跡為拋物線或退化。

3. $D=(\cos(\theta+\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2})\sin(\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}))^2-4\sin\alpha_1\sin\alpha_2<0$ ，則 t_1,t_2 為共軛虛數。

$$\Rightarrow \overline{OP}=\frac{a_1t^2+a_2t+a_3}{t^2+a_7t+a_8}+i\frac{a_4t^2+a_5t+a_6}{t^2+a_7t+a_8}=a_1+\frac{b_1t+b_2}{t^2+a_7t+a_8}+i(a_4+\frac{b_3t+b_4}{t^2+a_7t+a_8})$$

$$\left(a_7=\frac{\cos(\theta+\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2})\sin(\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2})}{\sin\alpha_1},a_8=\frac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha_1}\right)$$

令 $\frac{x'}{y'}=\frac{b_1t+b_2}{b_3t+b_4}\Rightarrow t=\frac{y'b_2-x'b_4}{x'b_3-y'b_1}$ ，

$$\Rightarrow x'=\frac{b_1(y'b_2-x'b_4)(x'b_3-y'b_1)+b_2(x'b_3-y'b_1)^2}{(y'b_2-x'b_4)^2+a_7(y'b_2-x'b_4)(x'b_3-y'b_1)+a_8(x'b_3-y'b_1)^2}$$ ，

$$\Rightarrow x'=\frac{(b_2b_3{}^2-b_1b_3b_4)x'^2+(b_1b_4{}^2-b_1b_2b_3)x'y'}{(y'b_2-x'b_4)^2+a_7(y'b_2-x'b_4)(x'b_3-y'b_1)+a_8(x'b_3-y'b_1)^2}$$ ，

$$\Rightarrow 1=\frac{(b_2b_3{}^2-b_1b_3b_4)x'+(b_1b_4{}^2-b_1b_2b_3)y'}{(y'b_2-x'b_4)^2+a_7(y'b_2-x'b_4)(x'b_3-y'b_1)+a_8(x'b_3-y'b_1)^2}$$ ，

令 $\begin{cases}y'b_2-x'b_4=X\\x'b_3-y'b_1=Y\end{cases}$ ，$\Rightarrow X^2+a_7XY+a_8Y^2-c_1x-c_2y=0$ ，又 $-c_1x-c_2y=d_1X+d_2Y$ ，

$\Rightarrow X^2+a_7XY+a_8Y^2+d_1X+d_2Y=0$ ，

此時 $D'=a_7{}^2-4a_8<0$ ，且 $\begin{pmatrix}-b_4 & b_2\\ b_3 & -b_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}$ ，

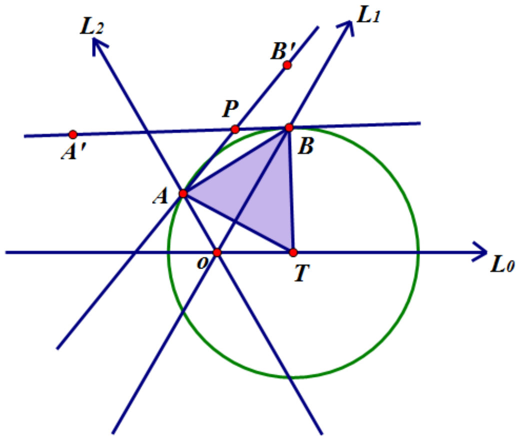
因為 (X,Y) 軌跡為橢圓或其退化，所以根據**預備定理**得到 (x',y') 軌跡為橢圓或其退化。

又 $\overline{OP}=\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a_1\\a_4\end{pmatrix}$ ，所以得到 $\overline{OP}$ 軌跡為橢圓或其退化。

研討六：雙軸斜角之比例線段橢圓規討論

依據以上的「十字型橢圓規」分析中，向下推廣，試著加上另一條軸，為了由簡入繁，將兩軸的夾角夾 $60°$ 及 $120°$ ，經過下列作圖：

1. 圖上有一條基本軸，另外兩軸 $\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$ 分別以原點為中心旋轉 γ 和 δ
2. 有一固定半徑長的圓在基本軸上移動，交 $\vec{e_1}$ 於 B
3. 將 $\overline{TB}$ 以 T 為中心旋轉 θ，為 $\overline{TA_1}$ ，發現 A_1 恰好交在 $\vec{e_2}$ 上

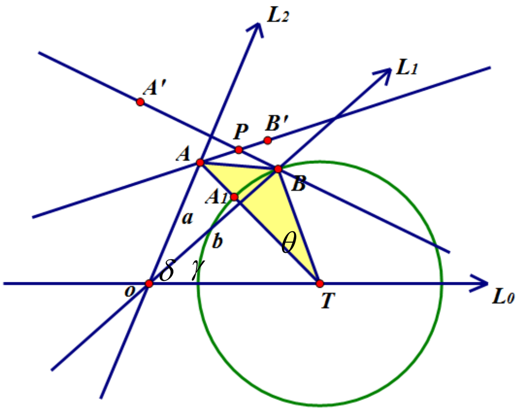


4. 將 $\overline{TA},\overline{TB}$ 分別乘上 r_1,r_2 倍得到 $\overline{TA'},\overline{TB'}$，連 $\overleftrightarrow{AB'},\overleftrightarrow{A'B}$，相交於 P

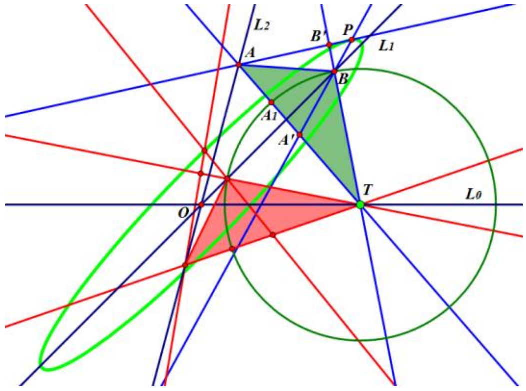
觀察 P 點軌跡，發現 P 點軌跡為**一橢圓**

對此現象感到興趣，因此針對雙軸斜角橢圓規的夾角 γ 和 δ 進行一般化分析。

經過一般化修改的作圖方法如下：



1. 圖上有一條基本軸，另外兩軸 $\overline{e_1}$，$\overline{e_2}$ 分別以原點為中心旋轉 γ 和 δ
2. 有一固定半徑長的圓在基本軸上移動，交 $\overline{e_1}$ 於 B
3. 將 $\overline{TB}$ 以 T 為中心旋轉 θ，為 $\overline{TA_1}$
4. 因為 γ 和 δ 不為 $60°$ 及 $120°$，因此延長 $\overline{TA_1}$ 交 $\overline{e_2}$ 於 A，取 $\triangle TAB$
5. 將 $\overline{TA},\overline{TB}$ 分別乘上 r_1,r_2 倍得到 $\overline{TA'},\overline{TB'}$，連 $\overleftrightarrow{AB'},\overleftrightarrow{A'B}$，相交於 P
6. 觀察 P 點軌跡



在觀察將此種工具一般化而調整角度的時候，

發現在 $\theta=\delta-\gamma$ 時圖形會呈現橢圓，

於是提出猜想：**當兩軸斜角夾角 $\theta=\delta-\gamma$ 時，P 點軌跡為橢圓**

試證：若 $\theta=\delta-\gamma$，

則 P 點之軌跡為橢圓或其退化(詳細證明過程請見附錄二)。

又在證明過程中，整理出底下的線性變換式子：

$$(r_1r_2-1)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-mn+(n+1)m(\dfrac{-\sin\theta\cos\delta}{\sin\gamma}) & (n+1)m(\dfrac{\sin\delta\cos\delta}{\sin\gamma})+(m+1)n\cos\gamma\\ (n+1)m(\dfrac{-\sin\theta\sin\delta}{\sin\gamma}) & (n+1)m(\dfrac{\sin^2\delta}{\sin\gamma})+(m+1)n\sin\gamma\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t\\b\end{pmatrix},$$

其中 t,b 滿足 $t^2+b^2-2tb\cos\gamma=1$；

根據研討三可知，只需改變 t,b 的關係，且 $\theta=\delta-\gamma$，即可改變圖形形狀。

另外討論分析 $\overline{TP}=\dfrac{r_1r_2-r_2}{r_1r_2-1}\overline{TA}+\dfrac{r_1r_2-r_1}{r_1r_2-1}\overline{TB}$，

令 $\overline{TP}=t_1\overline{TA}+t_2\overline{TB}$，$\Rightarrow r_1=\dfrac{t_2}{1-t_1},r_2=\dfrac{t_1}{1-t_2}$，

$\Rightarrow$ 由此可看出 t_1,t_2 與 r_1,r_2 可由上述關係式轉換，從 r_1,r_2 的比例線段轉換成 t_1,t_2 的向量加法(詳細推導請見附錄三)。

另外，再進一步分析此種增加軸線的二次曲線規。

考慮線性變換：

$$(r_1r_2-1)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-mn+(n+1)m(\dfrac{-\sin\theta\cos\delta}{\sin\gamma}) & (n+1)m(\dfrac{\sin\delta\cos\delta}{\sin\gamma})+(m+1)n\cos\gamma\\ (n+1)m(\dfrac{-\sin\theta\sin\delta}{\sin\gamma}) & (n+1)m(\dfrac{\sin^2\delta}{\sin\gamma})+(m+1)n\sin\gamma\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t\\b\end{pmatrix}$$

此時 $\theta=\delta-\gamma$，是由 t,b 經由線性變換轉變成，原本的二次曲線，仍然是原本的二次曲線。這三種二次曲線規，皆是用 t,b 的關係式，來影響後面的作圖(直線、雙曲線、拋物線……)。

考慮當$\theta \neq \delta-\gamma$時會發生甚麼情形，最棘手的便是$\dfrac{-bt\sin(\gamma+\theta)\cos\delta+t^2\sin\theta\cos\delta}{b\sin(\delta-(\gamma+\theta))-t\sin(\delta-\theta)}$，如果$\theta \neq \delta-\gamma$，軌跡會變得很複雜，必定不能直接使用過於複雜的圖形，不過我們仍然可以先討論單純基因的部分，例如下列兩種基因：

一、常數基因($b=k$)：

i. 分析$\theta=\delta$：

經過向量整理得到(詳細推導請見附錄五)

$$\Rightarrow (r_1r_2-1)\overline{OP}=\left[t^2((r_1r_2-r_2)\frac{\sin\theta\cos\delta}{k\sin(-\gamma)})+t(-(r_1-1)(r_2-1)-(r_1r_2-r_2)\frac{\sin(\gamma+\theta)\cos\delta}{\sin(-\gamma)})+\right.$$

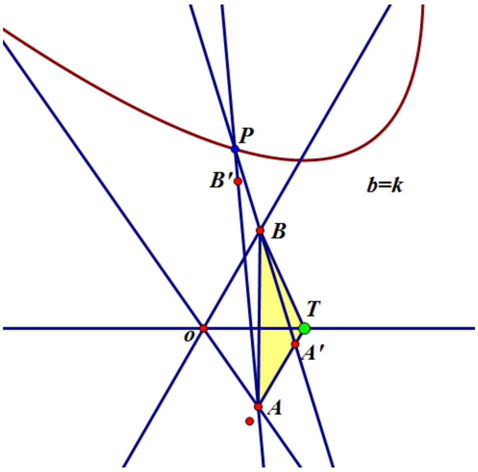
$$\left.((r_1r_2-r_1)k\cos\gamma)\right]+i\left[t^2((r_1r_2-r_2)\frac{\sin\theta\sin\delta}{k\sin(-\gamma)})+t(-(r_1r_2-r_2)\frac{\sin(\gamma+\theta)\sin\delta}{\sin(-\gamma)})+((r_1r_2-r_1)k\sin\gamma)\right]$$

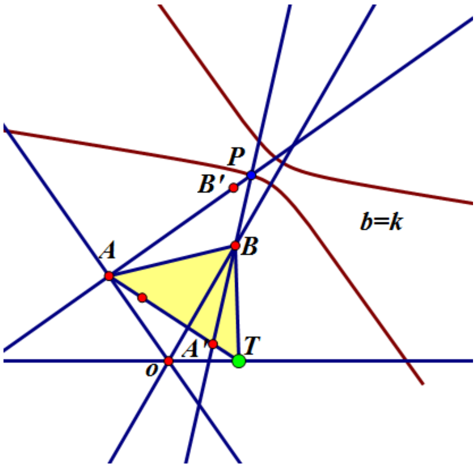
⇒根據研討四的**輔助觀念**，得證，P點軌跡為拋物線(如下頁左圖)。

ii. 分析$\theta\neq\delta$：

考慮$\dfrac{-bt\sin(\gamma+\theta)\cos\delta+t^2\sin\theta\cos\delta}{b\sin(\delta-(\gamma+\theta))-t\sin(\delta-\theta)}$

⇒利用多項式除法整理，根據研討四的**輔助觀念**得知P點軌跡為雙曲線(如下頁右圖) (詳細推導請見附錄六)。





二、線型基因($b=mt+k$)：

在此討論k值：

i. 若$k=0$：

經過向量整理得到

$$(r_1r_2-1)\overline{OP}=(r_1r_2t-t+t(r_1r_2-r_2)(\frac{-m\sin(\gamma+\theta)\cos\delta+\sin\theta\cos\delta}{m\sin(\delta-(\gamma+\theta))-\sin(\delta-\theta)})-r_1r_2t+r_2t$$

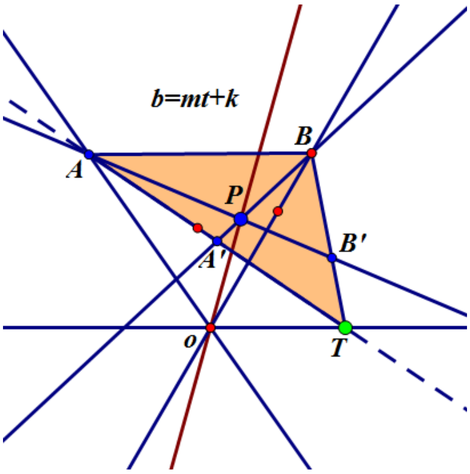
$$+mt(r_1r_2-r_1)\cos\gamma-r_1r_2t+r_1t)+i(t(r_1r_2-r_2)(\frac{-m\sin(\gamma+\theta)\sin\delta+\sin\theta\sin\delta}{m\sin(\delta-(\gamma+\theta))-\sin(\delta-\theta)})$$

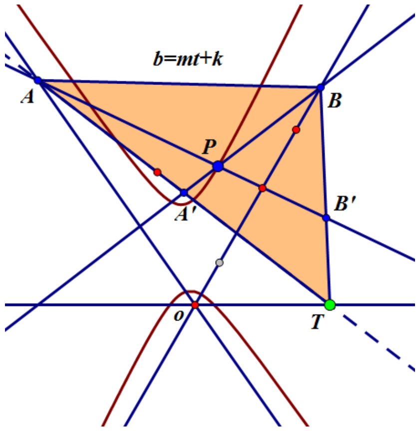
$$+mt(r_1r_2-r_1)\sin\gamma)$$

⇒由研討四的**輔助觀念**得知P點軌跡為一直線(如左圖) (詳細推導請見附錄六)。

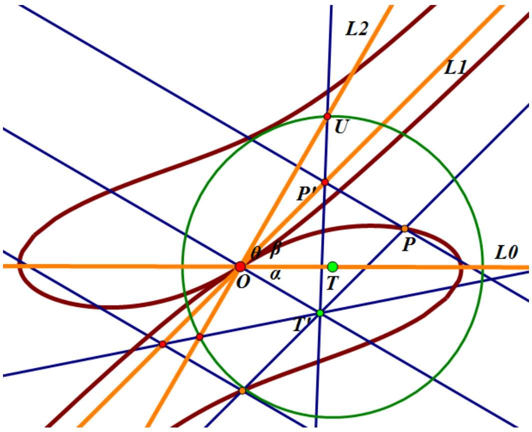
ii. 若$k\neq0$：

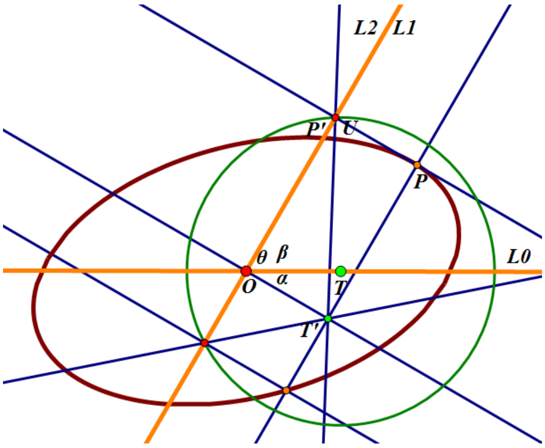
⇒根據研討四的**輔助觀念**得知P點軌跡為雙曲線(如右圖) (詳細推導請見附錄六)。





因為在費馬點和雙軸斜角橢圓規的情況中都有兩條線互相向另一邊的點相交的操作，在此將它推廣，把此作法簡單化：





將$\overline{OT}$旋轉$-\alpha$角，為$\overline{OT'}$，連T',U，交L_1於P'。(詳細推導過程請見附錄八)

$$\Rightarrow \overline{OP}=\frac{t\sin(\beta+\alpha)(t\cos\alpha-u\cos\theta)}{t\sin(\beta-\alpha)+u\sin(\beta-\theta)}+2t\cos\alpha+i(\frac{-t\sin(\beta+\alpha)(t\sin\alpha+u\sin\theta)}{t\sin(\beta-\alpha)+u\sin(\beta-\theta)}-2t\sin\alpha)$$

當$\beta=\theta$時得

$$\overline{OP}=\frac{\sin(\beta+\alpha)(t\cos\alpha-u\cos\theta)}{\sin(\beta-\alpha)}+2t\cos\alpha+i(\frac{-\sin(\beta+\alpha)(t\sin\alpha+u\sin\theta)}{\sin(\beta-\alpha)}-2t\sin\alpha)$$

即可利用雙軸斜角橢圓規的方法，使用線性變換從(t,u)數對變為(x,y)座標(如右上圖)。

上述式子與雙軸斜角橢圓規中的$\overline{OP}$差異不大，所以上面擁有的結果，這邊都適用。

當$\beta\neq\theta$時，使用簡單基因，可推得

1. 基因為常數($u=k$)，軌跡為雙曲線。

$$\Rightarrow \overline{OP}=\frac{t\sin(\beta+\alpha)(t\cos\alpha-k\cos\theta)}{t\sin(\beta-\alpha)+k\sin(\beta-\theta)}+2t\cos\alpha+i(\frac{-t\sin(\beta+\alpha)(t\sin\alpha+k\sin\theta)}{t\sin(\beta-\alpha)+k\sin(\beta-\theta)}-2t\sin\alpha)$$

即可將形如$\dfrac{at^2+bt+c}{dt+e}$的式子，利用**輔助觀念**，可證明其為雙曲線。

2. 基因為線型($u=mt+k$)。

i. 若$k=0$，軌跡為一直線。

$$\Rightarrow \overline{OP}=\frac{\sin(\beta+\alpha)(t\cos\alpha-mt\cos\theta)}{\sin(\beta-\alpha)+m\sin(\beta-\theta)}+2t\cos\alpha+i(\frac{-\sin(\beta+\alpha)(t\sin\alpha+mt\sin\theta)}{\sin(\beta-\alpha)+m\sin(\beta-\theta)}-2t\sin\alpha)$$

$$\Rightarrow \overline{OP}=\frac{t\sin(\beta+\alpha)(\cos\alpha-m\cos\theta)}{\sin(\beta-\alpha)+m\sin(\beta-\theta)}+2t\cos\alpha+i(\frac{-t\sin(\beta+\alpha)(\sin\alpha+m\sin\theta)}{\sin(\beta-\alpha)+m\sin(\beta-\theta)}-2t\sin\alpha)$$

由**輔助觀念**得證其為一直線。

ii. 若 $k \neq 0$，軌跡為雙曲線。

$$\Rightarrow \overline{OP} = \frac{t\sin(\beta+\alpha)(t\cos\alpha-(mt+k)\cos\theta)}{t\sin(\beta-\alpha)+(mt+k)\sin(\beta-\theta)} + 2t\cos\alpha + i\left(\frac{-t\sin(\beta+\alpha)(t\sin\alpha+(mt+k)\sin\theta)}{t\sin(\beta-\alpha)+(mt+k)\sin(\beta-\theta)} - 2t\sin\alpha\right)$$ 即可

將形如 $\frac{at^2+bt+c}{dt+e}$ 的式子，利用**輔助觀念**，當 $d \neq 0$ 時，可知其為雙曲線。

而基本上這種關係相較於雙軸斜角橢圓規是屬於簡單的操作，所以可以利用此操作作為一個開頭，由此操作作為解決相關問題的最基礎部分，必須透徹瞭解這種操作，才能把費馬點等等相關問題分析清楚。

伍、研究結果

一、可將「P,A,B 三點共線的十字型橢圓規」的原理推廣，而在直角坐標系或斜角坐標系，皆可類似地利用線性變換模式的操作來獲得 P 點軌跡為橢圓。

二、引進基因的概念，求出二次曲線的(t,u)基因即可經由線性變換，轉換成其他同類的二次曲線(或其退化)。例如橢圓基因($t^2+u^2-2tu\cos\gamma=1$)、雙曲線基因($1^2+t^2-2\cdot 1\cdot t\cos\gamma=u^2$)、拋物線基因($t^2=u$)。

三、從第二點的結果，可以使線性變換單純化，使用一般斜角坐標系，利用線性變換，找出 P 點軌跡，不只是原本的二次曲線基因，而是更推廣的常數基因、線型基因，甚至三角函數基因，只要利用此系統皆可對上述基因進行線性變換，得到結果。

四、反演：

利用操作模式(先平移再反演再平移)進行反演，分析出以下結果：

1. 常數基因 ($u=k$)

   可看成由反演得到的圓再進行因點而異的水平方向的平移，經證明發現軌跡為史留斯蚌線。

2. 線型基因 ($u=mt+k$)

   $k=0$：軌跡方程式為 $y(x-\frac{m\cos\theta-1}{m\sin\theta}y)=\frac{r^2m\sin\theta}{(1-2m\cos\theta+m^2)}$，$P$ 點軌跡為雙曲線。

   $k\neq 0$：可看成由反演得到的圓再進行因點而異的水平方向的平移。由 GSP 實驗觀察，形似史留斯蚌線。

3. 橢圓基因

$$\overline{OP}=\begin{pmatrix} 1-\frac{r^2}{k^2} & \frac{r^2}{k^2}\cos\theta \\ 0 & \frac{r^2}{k^2}\sin\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ u \end{pmatrix}$$

   P 點必可經由研討二結果使用線性變換及基因概念，發現 P 點軌跡為一橢圓。

五、應用各種操作模式，可以得到各種情況 P 點的軌跡：

1. 若以 T 為中心，將 $\overline{TU}$ 做一次線性變換：

   P 點軌跡必可經由研討二結果使用線性變換及基因概念，從(t,u)數對變為 (x,y)坐標

2. 若將 $\overline{OT},\overline{OU}$ 做一次線性變換，再進行向量加法：

   P 點軌跡必可經由研討二結果使用線性變換及基因概念，從(t,u)數對變為 (x,y)坐標

3. 重心 G：

   G 點軌跡必可經由研討二結果使用線性變換及基因概念，從(t,u)數對變為 (x,y)坐標

4. 垂心 H 及外心 K：

H 點軌跡必可經由研討二結果使用線性變換及基因概念，從(t,u)數對變為 (x,y)坐標且垂心軌跡在(t,u)關係為橢圓時，皆為我們可確知半徑的圓。

5. 內心I：已知軌跡為直線$y=(\tan\dfrac{\theta}{2})x$的一部分，卻無法使用線性變換推得。

6. 過定點 P(a,b)得直線與兩軸圍成的三角形：

   t,u 關係為$(t-a)(u-b)=ab$，故(t,u) 軌跡為雙曲線，因此為雙曲線基因，因此可套用關於重心、垂心、外心之相關結果。

7. 費馬點(及其推廣)：

   在常數基因($u=k\neq 0$)時，以O為中心，將T,U各向外側旋轉α角而分別得點T',U'，令P為$\overleftrightarrow{T'U},\overleftrightarrow{U'T}$之交點。則$P$的軌跡為$\Delta OUU'$的外接圓扣掉一點，且扣掉的那點$Q$軌跡在$\theta=90°$時為環索線。

   且在兩旋轉角不同時，利用**輔助觀念**得到其為二次曲線。

六、針對雙軸斜角橢圓規進行分析中，若旋轉角$\theta=\delta-\gamma$時，可推出此時為線性變換，而P點之軌跡為橢圓或其退化，且當$(r_1-1)(r_2-1)=0\vee\left(r_1\sin^2\gamma+r_2\sin^2\delta-2r_1r_2\sin\gamma\sin\delta\cos\theta\right)=0$時橢圓退化。

七、分析雙軸斜角橢圓規，當$\theta\neq\delta-\gamma$ 使用簡單基因，可推得基因為常數，當$\theta=\delta$，軌跡為拋物線，當$\theta\neq\delta$，軌跡為雙曲線；基因為線型，若$k=0$，軌跡為一直線，若$k\neq 0$，軌跡為雙曲線。

八、在雙軸斜角橢圓規的推廣分析中發現當$\beta=\theta$時，可以利用線性變換，證明P點之軌跡為橢圓或其退化，若$\beta\neq\theta$，則與雙軸斜角橢圓規的結果相同。並利用此操作作為一個開頭，由此操作作為解決有關類似費馬點問題的最基礎部分。

九、費馬點和雙軸斜角橢圓規的推廣部分，與雙軸斜角橢圓規中的$\overline{OP}$差異不大，所以雙軸斜角橢圓規擁有的結果，在雙軸斜角橢圓規的推廣部分這邊都適用。當$\beta\neq\theta$時，使用簡單基因，可推得基因為常數($u=k$)，軌跡為雙曲線；基因為線型($u=mt+k$)，若$k=0$，軌跡為一直線。

陸、討論與未來展望

一、反演變換相對於線性變換是比較複雜的，還有很多比較複雜的基因尚未分析清楚(包含**輔助觀念**的解釋)。

二、另外費馬點的作圖方式為在三角形邊長向外做正三角形，在將頂點連向對邊頂點所生成之交點，若推廣費馬點的想法，旋轉角度不等於60°時，連線並不會交在同一點，結果也會有所不同，會出現橢圓等等曲線。

三、在費馬點的部分我是採用偏向代數的證明，目前觀察 GSP 幾何軟體，發現若以T,U為中心旋轉，圖形的分析可以利用圓內接四邊形的想法，證明其為一個圓，目前尚未有完整而清楚的證明。

四、另外在費馬點的部分，如果採用一般線性變換，而不只用旋轉變換，發現其圖形也為二次曲線或其退化，此部分還尚待研究。

五、以上所有問題皆是單個基因進行不同的幾何操作，若將兩個以上的基因，用特殊的方式結合在一起(例如$\overline{OU}=\overline{OU_1}+\overline{OU_2}$)，再進行不同的幾何操作，觀察圖形是否有特殊的變化性質。

柒、結論

本次研究分析了橢圓規的性質並加以推廣。第一，將直角橢圓規推廣至斜角坐標系中；第二，從橢圓規的原理中，發展出「種基因」觀念，並對二次曲線乃至各類曲線進行線性變換操作之模式；第

三，用反演變換來對基因進行操作；第四，應用基因觀念於各種幾何特殊點的操作；第五，發現「雙軸斜角橢圓規」的變換模式，與線性變換有相當大關聯性。在三、四、五中所得的曲線，除了直線或二次曲線(含退化)，還有形似史留斯蚌線或環索線之類的曲線，而操作之過程又常含有線性變換與分子分母為二次多項式之分式，此皆有待我們再深入探討。

捌、參考資料

一、普通高級中學數學第四冊，民國98年，康熹文化。

二、普通高級中學數學甲，民國90年，康熹文化。

三、陳創義，**平面幾何變換**，www3.stat.sinica.edu.tw/olympiad/5thtrain/CYChen.doc。

四、蔣聲，**形形色色的曲線**，1985，P.113-132。

五、Ya. Bakel' man 原著，王敬庚譯，**反演**，P.70-82。

附錄

一、**預備定理**詳細證明：

若(t,u)數對經過線性變換為$P(x,y)$後，原來的二次圖形，在行列式不為 0 的情況下，仍然為原來的圖形：

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ u \end{pmatrix}$$

若要使圖形不改變類型，必須要判別式同號。

$$D' = mD, m > 0$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ u \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} t \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x + \beta y \\ \gamma x + \delta y \end{pmatrix}$$

(t,u)關係

$$k_1 t^2 + k_2 tu + k_3 u^2 + k_4 t + k_5 u + k_6 = 0$$

$$\Rightarrow x^2(k_1\alpha^2 + k_2\alpha\gamma + k_3\gamma^2) + y^2(k_1\beta^2 + k_2\beta\delta + k_3\delta^2) + xy(2k_1\alpha\beta + k_2(\alpha\delta + \beta\gamma) + 2k_3\gamma\delta)$$

$$+x^2(x(k_4\alpha + k_5\gamma) + y(k_4\beta + k_5\delta) + k_6 = 0$$

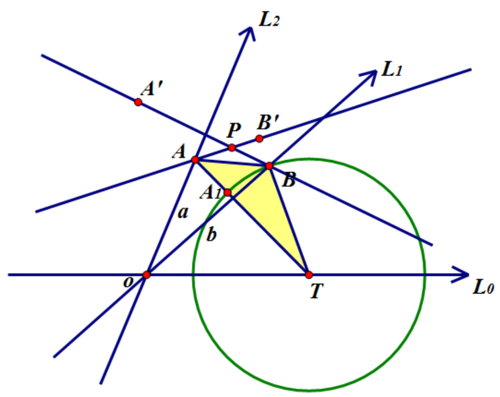
$$D = k_2{}^2 - 4k_1k_3$$

$$D' = (2k_1\alpha\beta + k_2(\alpha\delta + \beta\gamma) + 2k_3\gamma\delta)^2 - 4(k_1\alpha^2 + k_2\alpha\gamma + k_3\gamma^2)(k_1\beta^2 + k_2\beta\delta + k_3\delta^2)$$

$$= k_2{}^2(\alpha\delta - \beta\gamma)^2 - 4k_1k_3(\alpha\delta - \beta\gamma)^2$$

$$= (\alpha\delta - \beta\gamma)^2(k_2{}^2 - 4k_1k_3) = (\alpha\delta - \beta\gamma)^2 D$$

$\Rightarrow (t,u)$數對經過線性變換為$P(x,y)$後，判別式值同號，所以圖形類型仍然維持不變。



二、根據雙軸斜角橢圓規

試證：若$\theta = \delta - \gamma$時，則P點之軌跡為橢圓或其退化

證明：

$$\overrightarrow{OT} = t, t \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{TB} = b(\cos\gamma + (\sin\gamma)i) - t$$

$$\overrightarrow{TA_1} = R_\theta(\overrightarrow{TB}) \Rightarrow \overrightarrow{TA_1} = R_\theta(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OT}) = R_\theta(\overrightarrow{OB}) - R_\theta(\overrightarrow{OT})$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{TA_1} = b(\cos\gamma + i\sin\gamma)(\cos\theta + i\sin\theta) - t(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{TA_1} = ((b\cos(\gamma + \theta) - t\cos\theta) + i(b\sin(\gamma + \theta) - t\sin\theta))$$

$$\overrightarrow{TA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OT}$$

$\Rightarrow \overrightarrow{TA} = k\overrightarrow{TA_1}$

$\Rightarrow \overrightarrow{TA} = a(\cos\delta + i\sin\delta) - t$

$\begin{cases} k(b\cos(\gamma+\theta) - t\cos\theta) = a\cos\delta - t \\ k(b\sin(\gamma+\theta) - t\sin\theta) = a\sin\delta \end{cases}$

$\dfrac{a(b\cos(\gamma+\theta) - t\cos\theta)\sin\delta}{(b\sin(\gamma+\theta) - t\sin\theta)} = a\cos\delta - t$ ，經過整理計算得

$\Rightarrow a = (\dfrac{-b\sin(\gamma+\theta) + t\sin\theta}{b\cos(\gamma+\theta)\sin\delta - t\cos\theta\sin\delta - b\sin(\gamma+\theta)\cos\delta + t\sin\theta\cos\delta})t$

代入 $\overrightarrow{TA} = a(\cos\delta + i\sin\delta) - t$ ，經過整理計算得

$\Rightarrow \overrightarrow{TA} = (\dfrac{-bt\sin(\gamma+\theta)\cos\delta + t^2\sin\theta\cos\delta}{b\sin(\delta-(\gamma+\theta)) - t\sin(\delta-\theta)} - t) + i(\dfrac{-bt\sin(\gamma+\theta)\sin\delta + t^2\sin\theta\sin\delta}{b\sin(\delta-(\gamma+\theta)) - t\sin(\delta-\theta)})$

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OT} + \overrightarrow{TP}$

$\Rightarrow \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OT} + (\dfrac{r_1r_2 - r_2}{r_1r_2 - 1}\overrightarrow{TA} + \dfrac{r_1r_2 - r_1}{r_1r_2 - 1}\overrightarrow{TB})$

$\Rightarrow (r_1r_2 - 1)\overrightarrow{OP} = (r_1r_2 - 1)\overrightarrow{OT} + (r_1r_2 - r_2)\overrightarrow{TA} + (r_1r_2 - r_1)\overrightarrow{TB}$

$$\begin{aligned}\Rightarrow (r_1r_2 - 1)\overrightarrow{OP} = {} & (r_1r_2t - t + (r_1r_2 - r_2)(\frac{-bt\sin(\gamma+\theta)\cos\delta + t^2\sin\theta\cos\delta}{b\sin(\delta-(\gamma+\theta)) - t\sin(\delta-\theta)}) - r_1r_2t + r_2t \\ & + (r_1r_2 - r_1)b\cos\gamma - r_1r_2t + r_1t) + i((r_1r_2 - r_2)(\frac{-bt\sin(\gamma+\theta)\sin\delta + t^2\sin\theta\sin\delta}{b\sin(\delta-(\gamma+\theta)) - t\sin(\delta-\theta)}) \\ & + (r_1r_2 - r_1)b\sin\gamma)\end{aligned}$$

若 $\theta = \delta - \gamma$ 時

$$\begin{aligned}\Rightarrow (r_1r_2 - 1)\overrightarrow{OP} = {} & (-t(r_1 - 1)(r_2 - 1) + (r_1r_2 - r_2)(\frac{-b\sin\delta\cos\delta + t\sin\theta\cos\delta}{-\sin\gamma}) + (r_1r_2 - r_1)b\cos\gamma) \\ & + i((r_1r_2 - r_2)(\frac{-b\sin^2\delta + t\sin\theta\sin\delta}{-\sin\gamma}) + (r_1r_2 - r_1)b\sin\gamma)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow (r_1r_2 - 1)\overrightarrow{OP} = {} & \Big[-(r_1 - 1)(r_2 - 1) + (r_1r_2 - r_2)(\frac{-\sin\theta\cos\delta}{\sin\gamma}))t + ((r_1r_2 - r_2)(\frac{\sin\delta\cos\delta}{\sin\gamma}) \\ & + (r_1r_2 - r_1)\cos\gamma)b\Big] + i\Big[((r_1r_2 - r_2)(\frac{-\sin\theta\sin\delta}{\sin\gamma}))t + ((r_1r_2 - r_2)(\frac{\sin^2\delta}{\sin\gamma}) + (r_1r_2 - r_1)\sin\gamma)b\Big]\end{aligned}$$

令 $\begin{cases} r_1 - 1 = m \\ r_2 - 1 = n \end{cases}$

$$\begin{aligned}(r_1r_2 - 1)\overrightarrow{OP} = {} & \Big[(-mn + (n+1)m(\frac{-\sin\theta\cos\delta}{\sin\gamma}))t + ((n+1)m(\frac{\sin\delta\cos\delta}{\sin\gamma}) + (m+1)n\cos\gamma)b\Big] \\ & + i\Big[((n+1)m(\frac{-\sin\theta\sin\delta}{\sin\gamma}))t + ((n+1)m(\frac{\sin^2\delta}{\sin\gamma}) + (m+1)n\sin\gamma)b\Big]\end{aligned}$$

又 $b^2 + t^2 - 2bt\cos\gamma = 1^2 \Rightarrow b^2 - 2bt\cos\gamma + t^2 = 1$

$D = 4\cos^2\gamma - 4\cdot 1\cdot 1 = 4(\cos^2\gamma - 1) < 0$

$\Rightarrow (t,b)$ 軌跡為橢圓

$$(r_1r_2 - 1)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -mn + (n+1)m(\frac{-\sin\theta\cos\delta}{\sin\gamma}) & (n+1)m(\frac{\sin\delta\cos\delta}{\sin\gamma}) + (m+1)n\cos\gamma \\ (n+1)m(\frac{-\sin\theta\sin\delta}{\sin\gamma}) & (n+1)m(\frac{\sin^2\delta}{\sin\gamma}) + (m+1)n\sin\gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow P$ 點之軌跡必為一橢圓或其退化

接著討論退化情形

$$\det(D)=\begin{vmatrix} -mn+(n+1)m(\dfrac{-\sin\theta\cos\delta}{\sin\gamma}) & (n+1)m(\dfrac{\sin\delta\cos\delta}{\sin\gamma})+(m+1)n\cos\gamma \\ (n+1)m(\dfrac{-\sin\theta\sin\delta}{\sin\gamma}) & (n+1)m(\dfrac{\sin^2\delta}{\sin\gamma})+(m+1)n\sin\gamma \end{vmatrix}$$

經過計算可得

$$\det(D)=\frac{(r_1-1)(r_2-1)}{\sin\gamma}\left[r_1r_2(\sin^2\theta-\sin^2\delta-\sin^2\gamma)+(r_2\sin^2\delta+r_1\sin^2\gamma)\right]$$

又 $\sin^2\theta-\sin^2\delta-\sin^2\gamma=\sin^2(\delta-\gamma)-\sin^2\delta-\sin^2\gamma$

$=(\sin\delta\cos\gamma-\cos\delta\sin\gamma)^2-\sin^2\delta-\sin^2\gamma=-2\sin\delta\sin\gamma\cos\theta$

代回原式

$$\det(D)=\frac{(r_1-1)(r_2-1)}{\sin\gamma}\left[-2r_1r_2\sin\delta\sin\gamma\cos\theta+r_2\sin^2\delta+r_1\sin^2\gamma\right]$$

$$\det(D)=\frac{(r_1-1)(r_2-1)}{\sin\gamma}\left[r_1\sin^2\gamma+r_2\sin^2\delta-2r_1r_2\sin\gamma\sin\delta\cos\theta\right]$$

當 $(r_1-1)(r_2-1)=0\vee\left(r_1\sin^2\gamma+r_2\sin^2\delta-2r_1r_2\sin\gamma\sin\delta\cos\theta\right)=0$ 時橢圓退化

三、討論分析 $\overline{TP}=\dfrac{r_1r_2-r_2}{r_1r_2-1}\overline{TA}+\dfrac{r_1r_2-r_1}{r_1r_2-1}\overline{TB}$

令 $\overline{TP}=t_1\overline{TA}+t_2\overline{TB},\ t_1=\dfrac{r_1r_2-r_2}{r_1r_2-1},t_2=\dfrac{r_1r_2-r_1}{r_1r_2-1}$ $\begin{cases} t_1=\dfrac{r_1r_2-r_2}{r_1r_2-1}=1+\dfrac{1-r_2}{r_1r_2-1} \\ t_2=\dfrac{r_1r_2-r_1}{r_1r_2-1}=1+\dfrac{1-r_1}{r_1r_2-1}\end{cases}$ $\dfrac{t_1-1}{t_2-1}=\dfrac{\dfrac{1-r_2}{r_1r_2-1}}{\dfrac{1-r_1}{r_1r_2-1}}$

$$\Rightarrow\frac{t_1-1}{t_2-1}=\frac{1-r_2}{1-r_1}\Rightarrow(t_1-1)(1-r_1)=(t_2-1)(1-r_2)\Rightarrow t_1-1-(t_1-1)r_1=t_2-1-(t_2-1)r_2$$

$\Rightarrow-(t_1-1)r_1=t_2-t_1-(t_2-1)r_2\Rightarrow(t_1-1)r_1=t_1-t_2+(t_2-1)r_2\Rightarrow r_1=\dfrac{t_1-t_2}{t_1-1}+\dfrac{t_2-1}{t_1-1}r_2$ ，代入原式，

$$t_2-1=\frac{1-\dfrac{t_1-t_2}{t_1-1}-\dfrac{t_2-1}{t_1-1}r_2}{\dfrac{t_1-t_2}{t_1-1}r_2+\dfrac{t_2-1}{t_1-1}r_2{}^2-1}\ ,$$

$\Rightarrow(t_2-1)^2r_2{}^2+(t_1-t_2)(t_2-1)r_2-(t_1-1)(t_2-1)=(t_1-1)-(t_1-t_2)-(t_2-1)r_2$ ，

$\Rightarrow(t_2-1)\left[(t_2-1)r_2+t_1\right]\left[r_2-1\right]=0,$ 又 $r_2\neq1,t_2\neq1$ ，

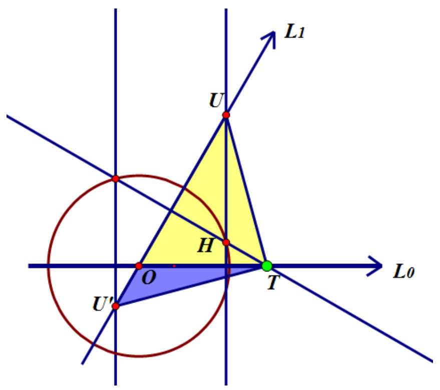
$$\Rightarrow r_2=\frac{t_1}{1-t_2}\Rightarrow r_1=\frac{t_1-t_2}{t_1-1}+\frac{t_2-1}{t_1-1}\times\frac{t_1}{1-t_2}=\frac{t_1-t_2}{t_1-1}-\frac{t_1}{t_1-1}=\frac{t_2}{1-t_1}\ 。$$

$\Rightarrow$ 由此可看出 t_1,t_2 與 r_1,r_2 可由上述關係式轉換，從 r_1,r_2 的比例線段轉換成 t_1,t_2 的向量加法。

四、使用橢圓基因做垂心，其垂心軌跡為一圓形

$$\overline{OH}=\begin{pmatrix}0 & \cos\theta \\ \cot\theta & -\cos\theta\cot\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t\\u\end{pmatrix}$$

$\because(t,u)$ 為橢圓基因： $t^2+u^2-2tu\cos\theta=1$

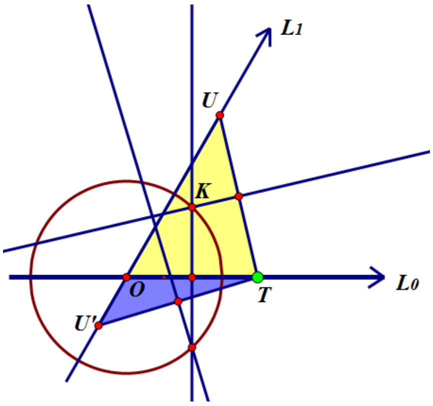


$$\Rightarrow\begin{cases} x = u\cos\theta \\ y = t\cot\theta - u\cos\theta\cot\theta \end{cases} \Rightarrow u = \frac{x}{\cos\theta}$$代入，

$$t = \frac{y + \dfrac{x}{\cos\theta}\cdot\cos\theta\cot\theta}{\cot\theta} = \frac{y}{\cot\theta} + x$$ 經過消參數處理及計算得到 $\dfrac{x^2}{\cot^2\theta} + \dfrac{y^2}{\cot^2\theta} = 1$，

$\Rightarrow$垂心軌跡在(t,u)關係為橢圓時。(且當$\theta \neq 90°$ 時，為一圓形，半徑為$k\cot\theta, k = \left|\overline{TU}\right|$)

五、使用橢圓基因做外心，其外心軌跡為一圓形



$$\overline{OK} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & 0 \\ \dfrac{-\cot\theta}{2} & \dfrac{1}{2\sin\theta} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ u \end{pmatrix}$$

$\because (t,u)$為橢圓基因：$t^2 + u^2 - 2tu\cos\theta = 1$

$$\Rightarrow\begin{cases} x = \dfrac{t}{2} \\ y = \dfrac{-t\cos\theta}{2} + \dfrac{u}{2\sin\theta} \end{cases}$$，$t = 2x$代入

$y = -x\cot\theta + \dfrac{u}{2\sin\theta}$，經過消參數處理及計算得到$4x^2\sin^2\theta + 4y^2\sin^2\theta = 1$，

$\Rightarrow$外心軌跡在(t,u)關係為橢圓時。(且當$\theta \neq 90°$ 時，為一圓形，半徑為$\dfrac{k}{2\sin\theta}, k = \left|\overline{TU}\right|$)

六、當$\theta \neq \delta - \gamma$，簡單基因的軌跡證明：

考慮當$\theta \neq \delta - \gamma$時會發生甚麼情形，最棘手的便是$\dfrac{-bt\sin(\gamma+\theta)\cos\delta + t^2\sin\theta\cos\delta}{b\sin(\delta-(\gamma+\theta)) - t\sin(\delta-\theta)}$，如果$\theta \neq \delta - \gamma$，軌跡會變得很複雜，必定不能直接使用過於複雜的圖形，不過我們仍然可以先討論單純基因的部分，例如下列兩種基因：

(一)常數基因($b = k$)：

附錄二中的證明中寫到

$$(r_1r_2 - 1)\overline{OP} = (r_1r_2t - t + (r_1r_2 - r_2)(\frac{-bt\sin(\gamma+\theta)\cos\delta + t^2\sin\theta\cos\delta}{b\sin(\delta-(\gamma+\theta)) - t\sin(\delta-\theta)}) - r_1r_2t + r_2t$$
$$+(r_1r_2 - r_1)b\cos\gamma - r_1r_2t + r_1t) + i((r_1r_2 - r_2)(\frac{-bt\sin(\gamma+\theta)\sin\delta + t^2\sin\theta\sin\delta}{b\sin(\delta-(\gamma+\theta)) - t\sin(\delta-\theta)})$$
$$+(r_1r_2 - r_1)b\sin\gamma)$$

i. 分析$\theta = \delta$：

考慮$\dfrac{-bt\sin(\gamma+\theta)\cos\delta + t^2\sin\theta\cos\delta}{b\sin(\delta-(\gamma+\theta)) - t\sin(\delta-\theta)}$

因為$\theta = \delta$，所以$\dfrac{-bt\sin(\gamma+\theta)\cos\delta + t^2\sin\theta\cos\delta}{b\sin(\delta-(\gamma+\theta)) - t\sin(\delta-\theta)} = \dfrac{-bt\sin(\gamma+\theta)\cos\delta + t^2\sin\theta\cos\delta}{b\sin(-\gamma)}$

同理$\dfrac{-bt\sin(\gamma+\theta)\sin\delta + t^2\sin\theta\sin\delta}{b\sin(\delta-(\gamma+\theta)) - t\sin(\delta-\theta)} = \dfrac{-bt\sin(\gamma+\theta)\sin\delta + t^2\sin\theta\sin\delta}{b\sin(-\gamma)}$

$$\Rightarrow (r_1r_2-1)\overline{OP}=(r_1r_2t-t+(r_1r_2-r_2)(\frac{-bt\sin(\gamma+\theta)\cos\delta+t^2\sin\theta\cos\delta}{b\sin(-\gamma)})-r_1r_2t+r_2t$$

$$+(r_1r_2-r_1)b\cos\gamma-r_1r_2t+r_1t)+i((r_1r_2-r_2)(\frac{-bt\sin(\gamma+\theta)\sin\delta+t^2\sin\theta\sin\delta}{b\sin(\delta-(\gamma+\theta))-t\sin(\delta-\theta)})$$

$$+(r_1r_2-r_1)b\sin\gamma)$$

$$\Rightarrow (r_1r_2-1)\overline{OP}=\left[t^2((r_1r_2-r_2)\frac{\sin\theta\cos\delta}{k\sin(-\gamma)})+t(-(r_1-1)(r_2-1)-(r_1r_2-r_2)\frac{\sin(\gamma+\theta)\cos\delta}{\sin(-\gamma)})+\right.$$

$$\left.((r_1r_2-r_1)k\cos\gamma)\right]+i\left[t^2((r_1r_2-r_2)\frac{\sin\theta\sin\delta}{k\sin(-\gamma)})+t(-(r_1r_2-r_2)\frac{\sin(\gamma+\theta)\sin\delta}{\sin(-\gamma)})+((r_1r_2-r_1)k\sin\gamma)\right]$$

$\Rightarrow$根據研討三的**預備定理**，得證，P點軌跡為拋物線。

ii. 分析$\theta\neq\delta$：

考慮$\dfrac{-bt\sin(\gamma+\theta)\cos\delta+t^2\sin\theta\cos\delta}{b\sin(\delta-(\gamma+\theta))-t\sin(\delta-\theta)}$

利用研討三**預備定理**的方法以及多項式除法得到

$$\frac{-bt\sin(\gamma+\theta)\cos\delta+t^2\sin\theta\cos\delta}{b\sin(\delta-(\gamma+\theta))-t\sin(\delta-\theta)}$$

$$=t\frac{\sin\theta\cos\delta}{\sin(\theta-\delta)}+\frac{tb(\sin\theta\cos\delta\sin(\delta-(\gamma+\theta))-\sin(\gamma+\theta)\cos\delta\sin(\theta-\delta))}{b\sin(\delta-(\gamma+\theta))-t\sin(\delta-\theta)}$$

$$=t\frac{\sin\theta\cos\delta}{\sin(\theta-\delta)}+b\frac{\sin\theta\cos\delta\sin(\delta-(\gamma+\theta))-\sin(\gamma+\theta)\cos\delta\sin(\delta-\theta)}{\sin^2(\theta-\delta)}+$$

$$\frac{-b^2\dfrac{\sin(\delta-(\gamma+\theta)}{\sin^2(\theta-\delta)}(\sin\theta\cos\delta\sin(\delta-(\gamma+\theta))-\sin(\gamma+\theta)\cos\delta\sin(\theta-\delta))}{t\sin(\theta-\delta)+b\sin(\delta-(\gamma+\theta)}$$

且$b=k$，得到

$$t\frac{\sin\theta\cos\delta}{\sin(\theta-\delta)}+k\frac{\sin\theta\cos\delta\sin(\delta-(\gamma+\theta))-\sin(\gamma+\theta)\cos\delta\sin(\delta-\theta)}{\sin^2(\theta-\delta)}+$$

$$\frac{-k^2\dfrac{\sin(\delta-(\gamma+\theta)}{\sin^2(\theta-\delta)}(\sin\theta\cos\delta\sin(\delta-(\gamma+\theta))-\sin(\gamma+\theta)\cos\delta\sin(\theta-\delta))}{t\sin(\theta-\delta)+k\sin(\delta-(\gamma+\theta)}$$

同理，得到

$$\frac{-bt\sin(\gamma+\theta)\sin\delta+t^2\sin\theta\sin\delta}{b\sin(\delta-(\gamma+\theta))-t\sin(\delta-\theta)}$$

$$=t\frac{\sin\theta\cos\delta}{\sin(\theta-\delta)}+k\frac{\sin\theta\sin\delta\sin(\delta-(\gamma+\theta))-\sin(\gamma+\theta)\sin\delta\sin(\delta-\theta)}{\sin^2(\theta-\delta)}+$$

$$\frac{-k^2\dfrac{\sin(\delta-(\gamma+\theta)}{\sin^2(\theta-\delta)}(\sin\theta\sin\delta\sin(\delta-(\gamma+\theta))-\sin(\gamma+\theta)\sin\delta\sin(\theta-\delta))}{t\sin(\theta-\delta)+k\sin(\delta-(\gamma+\theta)}$$

代回原式檢查，因為$\overline{OP}$擁有形如$\dfrac{b}{t+a}$的部份，根據研討三**預備定理**得知P點軌跡為雙曲線。

(二)線型基因($b=mt+k$)：

附錄二中的證明中寫到

$$(r_1r_2-1)\overrightarrow{OP}=(r_1r_2t-t+(r_1r_2-r_2)(\frac{-bt\sin(\gamma+\theta)\cos\delta+t^2\sin\theta\cos\delta}{b\sin(\delta-(\gamma+\theta))-t\sin(\delta-\theta)})-r_1r_2t+r_2t$$
$$+(r_1r_2-r_1)b\cos\gamma-r_1r_2t+r_1t)+i((r_1r_2-r_2)(\frac{-bt\sin(\gamma+\theta)\sin\delta+t^2\sin\theta\sin\delta}{b\sin(\delta-(\gamma+\theta))-t\sin(\delta-\theta)})$$
$$+(r_1r_2-r_1)b\sin\gamma)$$

在此討論 k 值問題：

i. 若 $k=0$：

考慮 $\frac{-bt\sin(\gamma+\theta)\cos\delta+t^2\sin\theta\cos\delta}{b\sin(\delta-(\gamma+\theta))-t\sin(\delta-\theta)}$ ，$b=mt$ 代入，得到

$$\frac{-mt^2\sin(\gamma+\theta)\cos\delta+t^2\sin\theta\cos\delta}{mt\sin(\delta-(\gamma+\theta))-t\sin(\delta-\theta)}=t(\frac{-m\sin(\gamma+\theta)\cos\delta+\sin\theta\cos\delta}{m\sin(\delta-(\gamma+\theta))-\sin(\delta-\theta)})$$

同理得到

$$\frac{-bt\sin(\gamma+\theta)\sin\delta+t^2\sin\theta\sin\delta}{b\sin(\delta-(\gamma+\theta))-t\sin(\delta-\theta)}=t(\frac{-m\sin(\gamma+\theta)\sin\delta+\sin\theta\sin\delta}{m\sin(\delta-(\gamma+\theta))-\sin(\delta-\theta)})$$

代回原式，得到

$$(r_1r_2-1)\overrightarrow{OP}=(r_1r_2t-t+t(r_1r_2-r_2)(\frac{-m\sin(\gamma+\theta)\cos\delta+\sin\theta\cos\delta}{m\sin(\delta-(\gamma+\theta))-\sin(\delta-\theta)})-r_1r_2t+r_2t$$
$$+(r_1r_2-r_1)b\cos\gamma-r_1r_2t+r_1t)+i((r_1r_2-r_2)(\frac{-bt\sin(\gamma+\theta)\sin\delta+t^2\sin\theta\sin\delta}{b\sin(\delta-(\gamma+\theta))-t\sin(\delta-\theta)})$$
$$+(r_1r_2-r_1)b\sin\gamma)$$

$\Rightarrow$由研討三**預備定理**得知 P 點軌跡為一直線。

ii. 若 $k\neq 0$：

考慮 $\frac{-bt\sin(\gamma+\theta)\cos\delta+t^2\sin\theta\cos\delta}{b\sin(\delta-(\gamma+\theta))-t\sin(\delta-\theta)}$ ，$b=mt+k$ 代入，得到

$$\frac{-bt\sin(\gamma+\theta)\cos\delta+t^2\sin\theta\cos\delta}{b\sin(\delta-(\gamma+\theta))-t\sin(\delta-\theta)}=\frac{t^2(\sin\theta\cos\delta-m\sin(\gamma+\theta)\cos\delta)-t(k\sin(\gamma+\theta)\cos\delta)}{t(m\sin(\delta-(\gamma+\theta))-\sin(\delta-\theta))+k\sin(\delta-(\gamma+\theta))}$$

同常數基因的概念，利用研討三**預備定理**的方法以及多項式除法得到

$$t\frac{\sin\theta\cos\delta-m\sin(\gamma+\theta)\cos\delta}{m\sin(\delta-(\gamma+\theta))-\sin(\delta-\theta)}+\frac{tk(\frac{\sin\theta\cos\delta\sin(\delta-(\gamma+\theta))-\sin(\gamma+\theta)\cos\delta\sin(\delta-\theta)}{m\sin(\delta-(\gamma+\theta))-\sin(\delta-\theta)})}{t(m\sin(\delta-(\gamma+\theta))-\sin(\delta-\theta))+k\sin(\delta-(\gamma+\theta))}$$

代回原式檢查，因為 $\overline{OP}$ 擁有形如 $\frac{b}{t+a}$ 的部份，根據研討三**預備定理**得知 P 點軌跡為雙曲線(或其退化)。

七、費馬點兩側旋轉角不同的 $\overline{OP}$ 參數式推導

$\overrightarrow{OT}=t$ ，$\overrightarrow{OU}=u\cos\theta+iu\sin\theta$ ，

$\Rightarrow\overrightarrow{OT'}=t(\cos(-\alpha_1)+i\sin(-\alpha_1))=t\cos\alpha_1-it\sin\alpha_1$ ，

$\Rightarrow\overrightarrow{OU'}=(u\cos\theta+iu\sin\theta)(\cos\alpha_2+i\sin\alpha_2)=u\cos(\theta+\alpha_2)+iu\sin(\theta+\alpha_2)$ 。

$\overrightarrow{OP}=k\overrightarrow{OU'}+(1-k)\overrightarrow{OT}=l\overrightarrow{OU}+(1-l)\overrightarrow{OT'}$ ，$\Rightarrow\overrightarrow{OP}=k(u\cos(\theta+\alpha_2)+iu\sin(\theta+\alpha_2)-t)+t$ ，

$\Rightarrow\overrightarrow{OP}=l(u\cos\theta+iu\sin\theta-t\cos\alpha_1+it\sin\alpha_1)+t\cos\alpha_1-it\sin\alpha_1$ ，

$$\Rightarrow \begin{cases} k(u\cos(\theta+\alpha_2)-t)+t = l(u\cos\theta - t\cos\alpha_1)+t\cos\alpha_1 \\ k(u\sin(\theta+\alpha_2)) = l(u\sin\theta + t\sin\alpha_1) - t\sin\alpha_1 \end{cases}$$ 。

$$\Delta = \begin{vmatrix} u\cos(\theta+\alpha_2)-t & t\cos\alpha_1 - u\cos\theta \\ u\sin(\theta+\alpha_2) & -t\sin\alpha_1 - u\sin\theta \end{vmatrix} = t^2\sin\alpha_1 + u^2\sin\alpha_2 + 2tu\cos(\theta+\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2})\sin(\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2})$$

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} t\cos\alpha_1 - t & t\cos\alpha_1 - u\cos\theta \\ -t\sin\alpha_1 & -t\sin\alpha_1 - u\sin\theta \end{vmatrix} = t\begin{vmatrix} \cos\alpha_1 - 1 & t\cos\alpha_1 - u\cos\theta \\ -\sin\alpha_1 & -t\sin\alpha_1 - u\sin\theta \end{vmatrix}$$,

$$\Rightarrow \Delta_k = t(-u\sin(\theta+\alpha_1)+t\sin\alpha_1+u\sin\theta) = t^2\sin\alpha_1 + tu(\sin\theta - \sin(\theta+\alpha_1))$$ ，

$$\Rightarrow k = \frac{t^2\sin\alpha_1 + tu(\sin\theta-\sin(\theta+\alpha_1))}{t^2\sin\alpha_1 + u^2\sin\alpha_2 + 2tu\cos(\theta+\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2})\sin(\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2})}$$,

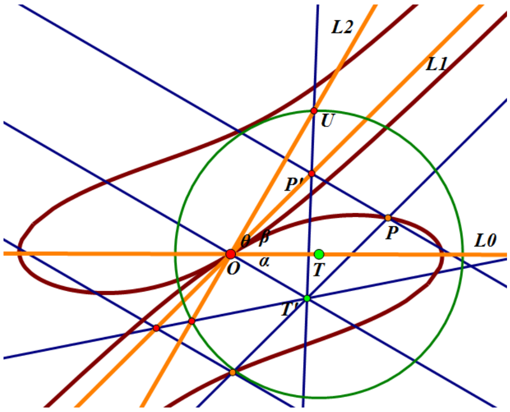
$$\Rightarrow \overrightarrow{OP} = k\overrightarrow{OU'} + (1-k)\overrightarrow{OT}$$ ，

$$\Rightarrow \overrightarrow{OP} = \frac{t^2\sin\alpha_1 + tu(\sin\theta-\sin(\theta+\alpha_1))}{t^2\sin\alpha_1 + u^2\sin\alpha_2 + 2tu\cos(\theta+\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2})\sin(\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2})}(u\cos(\theta+\alpha_2)+iu\sin(\theta+\alpha_2)-t)+t$$,

此時 $\overline{OP}$ 必可整理出 $\frac{a_1t^2+a_2t+a_3}{(t-t_1)(t-t_2)} + i\frac{a_4t^2+a_5t+a_6}{(t-t_1)(t-t_2)}$ 的形式。

八、雙軸斜角橢圓規推廣：

將 $\overline{OT}$ 旋轉 $-\alpha$ 角，為 $\overline{OT'}$ ，連 T',U ，交 L_1 於 P' 。



$$\overrightarrow{OT'} = R_{-\alpha}\overrightarrow{OT}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OT'} = t\cos(-\alpha)+it\sin(-\alpha) = t\cos\alpha - it\sin\alpha$$

$$\overrightarrow{OP'} = (1-k)\overrightarrow{OT'} + k\overrightarrow{OU}$$

將 $\overrightarrow{OP'}$ 整理後代入 L_1 得

$$\Rightarrow k(-t\cos\alpha + u\cos\theta)\tan\beta + t\cos\alpha\tan\beta = k(t\sin\alpha + u\sin\theta) - t\sin\alpha$$

$$\Rightarrow k(t\cos\alpha\tan\beta + u\cos\theta\tan\beta - t\sin\alpha - u\sin\theta) = -t\sin\alpha - t\cos\alpha\tan\beta$$

$$\Rightarrow k = \frac{-t\sin\alpha - t\cos\alpha\tan\beta}{t(\cos\alpha\tan\beta - \sin\alpha) + u(\cos\theta\tan\beta - \sin\theta)} = \frac{-t\sin(\beta+\alpha)}{t\sin(\beta-\alpha)+u\sin(\beta-\theta)}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OP'} = \frac{t\sin(\beta+\alpha)(t\cos\alpha - u\cos\theta)}{t\sin(\beta-\alpha)+u\sin(\beta-\theta)} + t\cos\alpha + i(\frac{-t\sin(\beta+\alpha)(t\sin\alpha+u\sin\theta)}{t\sin(\beta-\alpha)+u\sin(\beta-\theta)} - t\sin\alpha)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OT'} + \overrightarrow{T'P} = \overrightarrow{OT'} + \overrightarrow{OP'}$$

當 $\beta=\theta$ 時，經過一番計算後得

$$\overrightarrow{OP} = \frac{\sin(\beta+\alpha)(t\cos\alpha - u\cos\theta)}{\sin(\beta-\alpha)} + 2t\cos\alpha + i(\frac{-\sin(\beta+\alpha)(t\sin\alpha+u\sin\theta)}{\sin(\beta-\alpha)} - 2t\sin\alpha)$$

即可利用雙軸斜角橢圓規的方法，使用線性變換從 (t,u) 數對變為 (x,y) 座標。

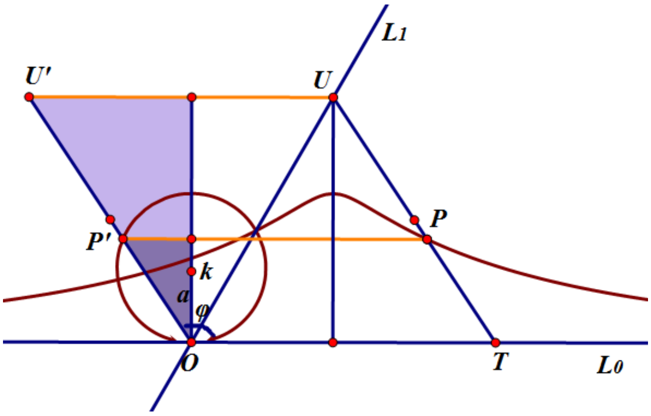
九、反演(常數基因)

令 $k(0,a)$，

$x^2+(y-a)^2=a^2$，$\Rightarrow x^2+y^2-2ay=0$，

令 $x^2+y^2=\rho^2$，$\Rightarrow \rho^2-2a\rho\sin\phi=0$，$\Rightarrow \rho=2a\sin\phi$，

$\left|\overline{OP'}\right|=2a\sin\phi$，



$\Rightarrow 2a\sin\phi\cos\phi=x$，$\Rightarrow 2a\sin\phi\sin\phi=y$，

$\Rightarrow P'(2a\sin\phi\cos\phi,2a\sin^2\phi)$，

根據三角形相似，

$$\Rightarrow \frac{2a\sin^2\phi}{k\sin\theta}=\frac{2a\sin\phi\cos\phi}{t-k\cos\theta}，$$

$\Rightarrow t\sin\phi=k(\sin\theta\cos\phi+\cos\theta\sin\phi)$，

$$\Rightarrow t=\frac{k\sin(\theta+\phi)}{\sin\phi}，$$

$$\Rightarrow \overline{OP}=(\frac{k\sin(\theta+\phi)}{\sin\phi}+2a\sin\phi\cos\phi,2a\sin^2\phi)，$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=k\sin\theta\cot\phi+k\cos\phi+2a\sin\phi\cos\phi \\ y=2a\sin^2\phi \end{cases}，\Rightarrow \sin^2\phi=\frac{y}{2a}，$$

經過整理可得

$$\Rightarrow (x-k\cos\phi)^2=\frac{2ak^2\sin^2\theta}{y}+4ak\sin\theta+2ay-k^2\sin^2\theta-2k\sin\theta y-y^2，$$

x 軸平移 $k\cos\phi$ 單位，令 $x-k\cos\phi=X$，

$\Rightarrow X^2y=2ak^2\sin^2\theta+4ak\sin\theta y+2ay^2-k^2\sin^2\theta y-2k\sin\theta y^2-y^3$，

$\Rightarrow X^2y=-y^3+(2a-2k\sin\theta)y^2+(-k^2\sin^2\theta+4ak\sin\theta)y+2ak^2\sin^2\theta$，

又根據「形形色色的曲線」一書中所提史留斯蚌線方程式為 $y^2=\dfrac{x+2r-a}{a-x}x^2$，

以防符號重複使用，令 $a=b$，

$\Rightarrow y^2(b-x)=(x+2r-b)x^2$，$\Rightarrow y^2(b-x)=x^3+(2r-b)x^2$，$\Rightarrow y^2(x-b)=-x^3+(b-2r)x^2$，

以 $y=x$ 做鏡射，$\Rightarrow y=x',x=y'$，$\Rightarrow x^2(y-b)=-y^3+(b-2r)y^2$，

y 軸平移 b 單位，令 $y-b=Y$，

$\Rightarrow x^2Y=-(Y+b)^3+(b-2r)(Y+b)^2$，$\Rightarrow x^2Y=-Y^3-2(b+r)Y^2-(b^2+4br)Y-2b^2r$，

以 x 軸做鏡射，令 $Z=-Y,(\because Y=-Z)$，得

$\Rightarrow x^2(-Z)=-(-Z)^3-2(b+r)(-Z)^2-(b^2+4br)(-Z)-2b^2r$，

$\Rightarrow x^2Z=-Z^3+2(b+r)Z^2-(b^2+4br)Z+2b^2r$，

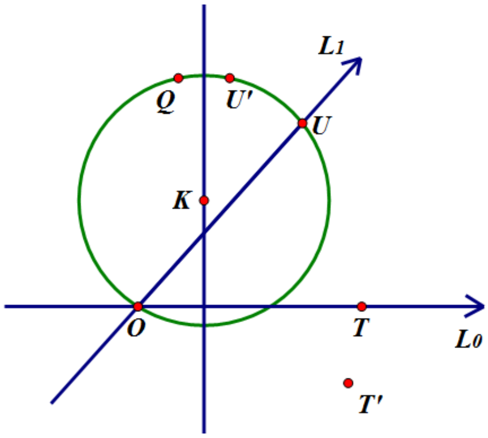
以此式與我所推出的式子，進行比較，

$$\Rightarrow \begin{cases} 2(b+r)=2a-2k\sin\theta \\ -(b^2+4br)=-k^2\sin^2\theta+4ak\sin\theta \\ 2b^2r=2ak^2\sin^2\theta \end{cases}，\Rightarrow \begin{cases} b+r=a-k\sin\theta \\ b^2+4br=k^2\sin^2\theta-4ak\sin\theta \\ b^2r=ak^2\sin^2\theta \end{cases}，\Rightarrow \begin{cases} b=-k\sin\theta \\ r=a \end{cases}，$$

且因為 $a>0$，所以 $r>0$，不產生矛盾。

$\Rightarrow$由此可知，反演圖形在常數基因，且 $b=-k\sin\theta,r=a$ 時，P 點軌跡為史留斯蚌線。

十、費馬點：環索線軌跡參數方程式推導



$\overrightarrow{OU'} = u\cos(\theta+\alpha) + iu\sin(\theta+\alpha)$

設 P 點所形成圓軌跡，圓心 K ，半徑 r

$\because \Delta OUU'$ 為等腰三角形

$\therefore \overrightarrow{OK} = r\cos(\theta+\frac{\alpha}{2}) + ir\sin(\theta+\frac{\alpha}{2})$

$\Rightarrow \overrightarrow{OQ} = (2r\cos(\theta+\frac{\alpha}{2}) - u\cos(\theta+\alpha)) + iu\sin(\theta+\alpha)$

又 $r\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{u}{2} \Rightarrow r = \dfrac{u}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OQ} = (u\frac{\cos(\theta+\frac{\alpha}{2})}{\cos\frac{\alpha}{2}} - u\cos(\theta+\alpha)) + iu\sin(\theta+\alpha) \Rightarrow \begin{cases} x = u\dfrac{\cos(\theta+\frac{\alpha}{2})}{\cos\frac{\alpha}{2}} - u\cos(\theta+\alpha) \\ y = u\sin(\theta+\alpha) \end{cases}$$

$$y = u\sin(\theta+\alpha) \Rightarrow \sin(\theta+\alpha) = \frac{y}{u} \Rightarrow \theta+\alpha = \sin^{-1}\frac{y}{u} \Rightarrow \alpha = \sin^{-1}\frac{y}{u} - \theta$$

$$\Rightarrow \sin\alpha = \frac{y}{u}\cos\theta - \frac{\sqrt{u^2-y^2}}{u}\sin\theta \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\sqrt{u^2-y^2}}{u}\cos\theta + \frac{y}{u}\sin\theta$$

另外 $\dfrac{\cos(\theta+\frac{\alpha}{2})}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \cos\theta - \sin\theta\tan\frac{\alpha}{2} = \cos\theta - \sin\theta\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$

代回原式，得

$\Rightarrow x = u(\cos\theta - \sin\theta\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}) - u\cos(\theta+\alpha)$ ， $\Rightarrow \frac{x}{u} - (\cos\theta - \sin\theta\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}) = -\cos(\theta+\alpha)$ ，

$\Rightarrow \sin\theta\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \cos\theta - \frac{x}{u} - \frac{\sqrt{u^2-y^2}}{u}$ 。

【評語】050408

作者在第一部份的研究時,得到一個關鍵式$t^2+u^2-2tu\cos\theta=1^2$，把此式視為「基因」,並利用平移、旋轉，反演等變換去操作「基因」,得到一系列的結果。這些結果有些有嚴格證明，有些則只是觀察，但整體而言，結果算是相當多，也很有趣。其實上述關鍵式就是從餘弦定理得出，然而作者並沒有特別強調與說明，是美中不足之處。