中華民國第56屆中小學科學展覽會
作品說明書

高級中等學校組　數學科

第三名

050407

棋盤中的美好「缺」憾

學校名稱：國立臺中第一高級中學

作者：	指導老師：
高二 賴永玄 高二 張彥霆	梁勇能

關鍵詞：和平排列、(k×k－m×m)缺角正方形

摘要

本研究首先發現在 n×n 棋盤的所有和平排列(每行每列各放一個棋子)中，皆可找到不包含棋子的 k×k 正方形，同時得到 n 和 k 的關係：k 的最大值為$\lfloor\sqrt{(n-1)}\rfloor$。

接著延伸這個題目，從找 k×k 正方形變成找(k×k-m×m)的缺角正方形。並在程式的輔助下，除了得到 fa(k,m)和 fb(k,m)的值，也可以知道 n=fa(k,m)和 fb(k,m)時放不下缺角正方形的和平排列，而基本上，報告的整體架構就分為兩個部分，證明每個(n+1)×(n+1)的和平排列都找的到，以及構造 n×n 的和平排列找不到(缺角)正方形。

$f(k,0)=k^2$
$f_\alpha(k,1)=k^2-k$
$f_\beta(k,1)=k^2-1$
$f_\beta(k,k-1)=2k-1$
$f_\alpha(k,\frac{k}{2})=\frac{k^2}{2}$

壹、研究動機

本題目源自於 2014 年 IMO 第 2 題：n≥2 為整數。有一個 $n\times n$ 的方格棋盤，把 n 顆棋子放在棋盤的方格中，使得每行每列都恰有一個棋子，稱為**和平排列**。每一個 $n\times n$ 的和平排列，都可以在其中找到一個不包括任何棋子的 $k\times k$ 正方形，求 k 的最大值。原題目是由 n 的值得到 k 的值，但我們的研究方向是由 k 的值得到 n 的值，並且把 $k\times k$ 正方形拓展到更一般化的 $(k\times k\text{–}m\times m)$缺角正方形。

貳、研究目的

一、證明原題，並討論$f(k,0)$之值及$S(\mathrm{k},0)$內元素。

二、討論$f_\alpha(k,1)$的值及 $S_\alpha(k,1)$中元素。

三、討論$f_\beta(k,1)$的值

四、討論$f_\beta(k,k-1)$的值

五、討論$f_\alpha(k,\frac{k}{2})$的值

參、研究器材

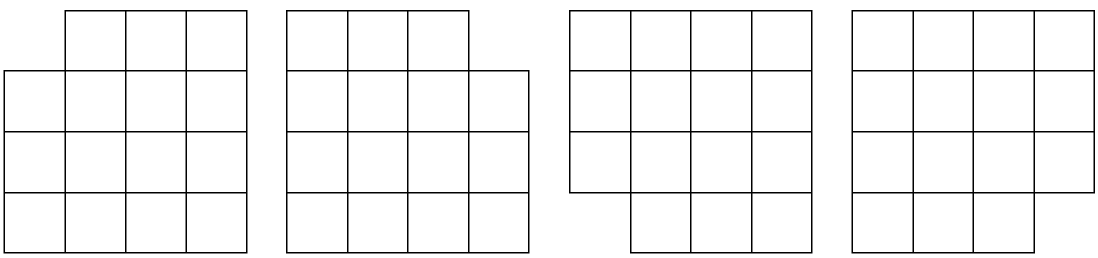
紙、筆、codeblocks

肆、研究過程與討論

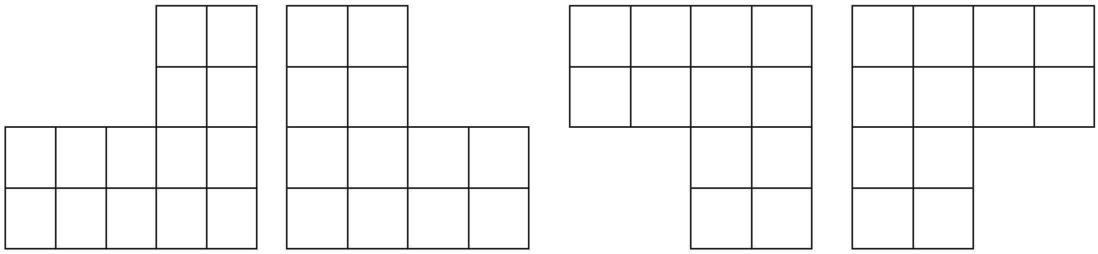
一、名詞定義

(一)、$(k\times k\text{–}m\times m)$缺角正方形($k>m,k\geq 2$)：

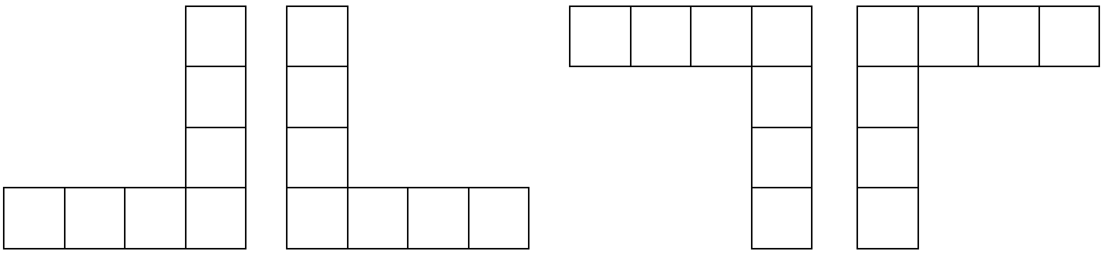
$k\times k$ 的正方形，在左上、左下、右上、右下其中一角拿掉 $m\times m$ 的正方形，簡稱為$(k\times k\text{–}m\times m)$缺角正方形。原題目所探討的為 $k\times k$ 正方形，亦即 $m=0$。舉例如下，(k,m)分別為(4,1),(4,2),(4,3)的情況。



(4×4–1×1)缺角正方形



(4×4–2×2)缺角正方形



(4×4–3×3)缺角正方形

(二)、缺角所在位置：

若限定在做「找沒有包含任何棋子的$(k \times k - m \times m)$缺角正方形」時，尋找的缺角正方形只侷限在缺左上、左下、右上、右下的其中一個方向，所得到的結果會和缺角可以在四個角落中的任何位置不同。以下以小寫希臘字母表示缺角可在的位置。

1、α：缺角可在正方形四個角落中的任意位置。

2、β：缺角只能固定在正方形其中一角。

(三)、$f(k,m)$：

若存在一個 $n \times n$ 棋盤的和平排列，找不到沒有包含任何棋子的$(k \times k - m \times m)$缺角正方形；而每一個$(n+1) \times (n+1)$的和平排列都一定找的到，則記為 $f(k,m)=n$。

1. $m=0$ 時即為原題目的 $k \times k$ 正方形；
2. 當 $m \geq 1$ 時，則要考慮缺角可在的位置：若缺角固定在其中一角，則記為 $f_{\beta}(k,m)$；
3. 若缺角可在任何位置，則記為 $f_{\alpha}(k,m)$，以此類推。

(四)、和平排列數字表示法及 $S(k,m)$：

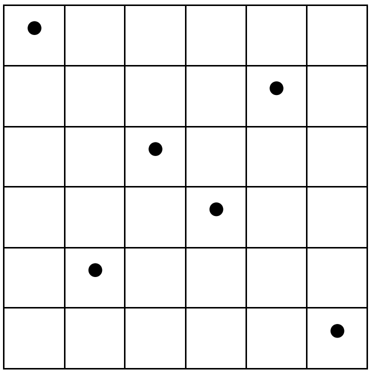
每一個和平排列都可以被表示成 $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ 的形式，其中 $\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ 為 $\{1,2,\ldots,n\}$ 的一種排列。

$a_i=j$ 代表第 i 行第 j 列放有棋子。(行的編號為由左至右，列的編號為由上至下)

$S(k,m)$ 為所有 $n=f(k,m)$ 時，找不到沒有包含棋子的 $(k\times k-m\times m)$ 之和平排列所構成的集合。

同樣的，當 $m\geq 1$ 時，要在 S 和左括號之間寫上小寫希臘字母以示區別。

舉例如下：$n=6,k=3,m=1$



此和平排列即為 $(1,5,3,4,2,6)$，裡頭找不到缺角在任何方向的 $(3\times 3-1\times 1)$ 缺角正方形，並且因為 $f_\alpha(3,1)=6$(將在三－(一)證明)，所以 $(1,5,3,4,2,6)\in S_\alpha(3,1)$。

二、*m*=0：證明原題，並討論 *f*(*k*,0)之值及 *S*(*k*,0)內元素。

(一)、證明原題

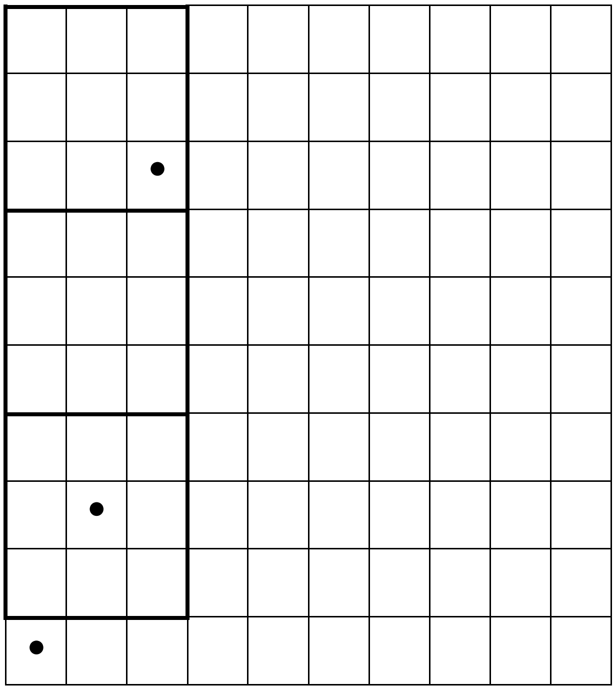
$n\geq 2$ 為整數。有一個 $n\times n$ 的方格棋盤，把 n 顆棋子放在棋盤的方格中，使得每行每列都恰有一個棋子，稱為和平排列。每一個 $n\times n$ 的和平排列，都可以在其中找到一個 $k\times k$ 的正方形，沒有包含任何的棋子。證明：k 的最大值為 $\left\lfloor \sqrt{n-1} \right\rfloor$。

1、證明：任意 $n=k^2+1$ 的和平排列一定找的到 $k\times k$ 正方形

在 $(k^2+1)\times(k^2+1)$ 的正方形中，假設第 k^2+1 列的棋子位於第 p 行。可以取第 p 行和其臨近的 $k-1$ 行，為一個 $k\times(k^2+1)$ 的長方形。把長方形的第 1 到 k^2 列切成 k 個 $k\times k$ 正方形，分別為第 $jk+1$ 到 $(j+1)k$ 列，$j=0,1,\ldots,k-1$。

第 k^2+1 列有 1 個棋子，而整個長方形有 k 個棋子，故此 k 個正方形總共有 $k-1$ 個棋子，由鴿籠原理知必有一個 $k\times k$ 正方形裡沒有棋子，故得證。

以下舉例 n=10，k=3 的情形。



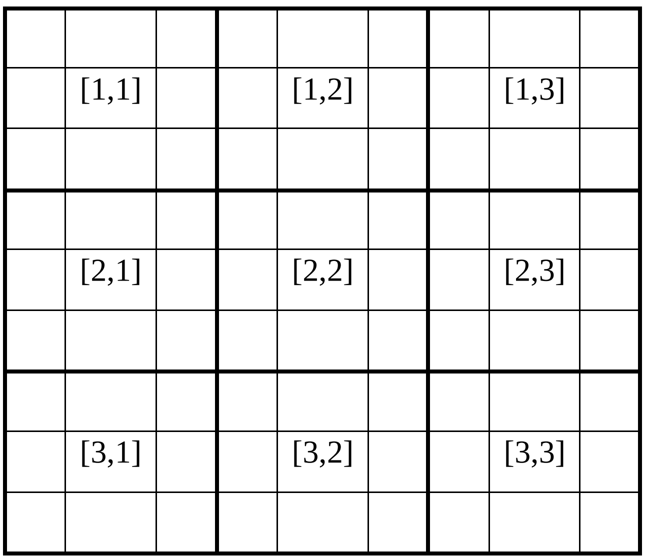
證明在 10×10 的正方形中，必找得到 3×3 的小正方形：

令第 10 列的棋子在第 p 行，取與第 p 行相鄰的兩行組成 3×10 的長方形，不失一般性，取 p=1 如上圖，長方形中，第 1 列到第 9 列共可分割為 3 個 3×3 的小正方形，已知第 1 行第 10 列有一枚棋子，第 2 和第 3 行各可放入一枚棋子，而整個長方形有 3 個 3×3 小正方形，由鴿籠原理可知必有一個小正方形未填入棋子，故得證。

2、構造： $n=k^2$ 時，找不到 $k\times k$ 正方形的和平排列：

首先，把 $k^2\times k^2$ 棋盤切割成 k^2 個 $k\times k$ 正方形。

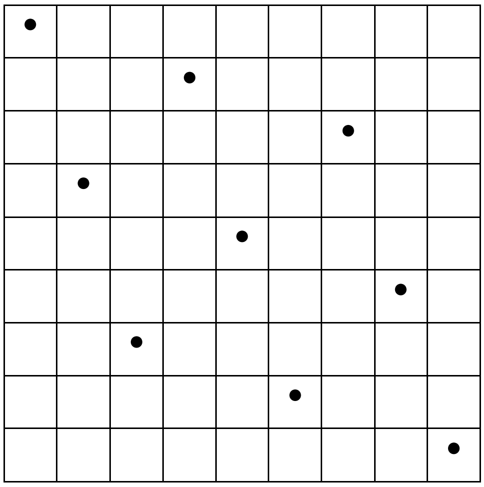
其中[j,i]代表第(i–1)k+1 行到第 ik 行，與第(j–1)k+1 列到第 jk 列的交集所形成的 $k\times k$ 正方形。



在[j,i]內的第 j 行第 i 列放置棋子，此擺法為一個和平排列，以數字表示之，即$(1,k+1,2k+1,\ldots,(k-1)k+1, 2,k+2,\ldots,(k-1)k+2,\ldots, k,2k,\ldots,k^2)$。

而棋子的排列形狀也非常特殊，像是 $k\times k$ 的菱形。

下圖為 n=9，k=3 時，[j,i]之示例及構造出來的和平排列(1,4,7,2,5,8,3,6,9)。



由 1、2 討論可知，當 $k^2<n\leq(k+1)^2$ 時，每一個 $n\times n$ 和平排列必可找到 $k\times k$ 正方形，但不一定找的到$(k+1)\times(k+1)$正方形。

證明 k 的最大值為$\left\lfloor\sqrt{n-1}\right\rfloor$

$$k^2<n\leq(k+1)^2 \Leftrightarrow k<\sqrt{n}\leq k+1 \Leftrightarrow k+1=\left\lceil\sqrt{n}\right\rceil \Leftrightarrow k=\left\lceil\sqrt{n}\right\rceil-1$$

$$k^2<n\leq(k+1)^2 \Leftrightarrow k^2\leq n-1<(k+1)^2 \Leftrightarrow k\leq\sqrt{n-1}<k+1 \Leftrightarrow k=\left\lfloor\sqrt{n-1}\right\rfloor$$

證畢。

(二)、$f(k,0)$：原題目要求的是由 n 來得到 k 的值，但在我們的研究中，我們想要做的是由 k 和 m 來得到 n 的邊界值，即$f(k,m)$。而在上述的證明中可以得到：$\boldsymbol{f(k,0)=k^2}$。

(三)、求 $S(k,0)$

接下來要證明，所有 $n=k^2$ 的和平排列中，只有上述構造出的像是 $k\times k$ 菱形的排列，以及它的類似排列(水平對稱)中，找不到 $k\times k$ 正方形。亦即 $S(k,0)$中只有這兩個元素。

以下證明皆假設存在一個找不到$k\times k$正方形的$k^2\times k^2$和平排列。

1、引入二-(一)-2 討論中所使用的[j,i]符號。每個[j,i]正方形中必有一棋子，而整個棋盤共有 k^2 個棋子，故知每個正方形中恰有一個棋子。

下面利用數學歸納法證明：

若$[j,1]$內的棋子在第 p 行，則$\forall i,[j,i]$內的棋子皆在第 p 行。

令$[j,i]$內的棋子在第 p'行，則易知 $p\geq p'$，否則必會有 $k\times k$ 正方形內沒有任何棋子。

對 p 歸納。

(1) $p=1$ 時，$p'\leq 1$ 又 $p'\in N$，故只有 $p'=1$。

(2) 令 $p=1,2,3,\ldots,M$ 時原命題均成立，故$\forall i,[1,i]$到$[k,i]$這個 $k\times k^2$ 長方形中，第 $1,2,3,\ldots,M$ 行均已有棋子。

(3) 當 $p=M+1$ 時，有 $M+1\geq p'$(已知)以及 $p'\geq M+1$(根據歸納假設)，因此只有 $p'=M+1=p$，證畢。

同理有：

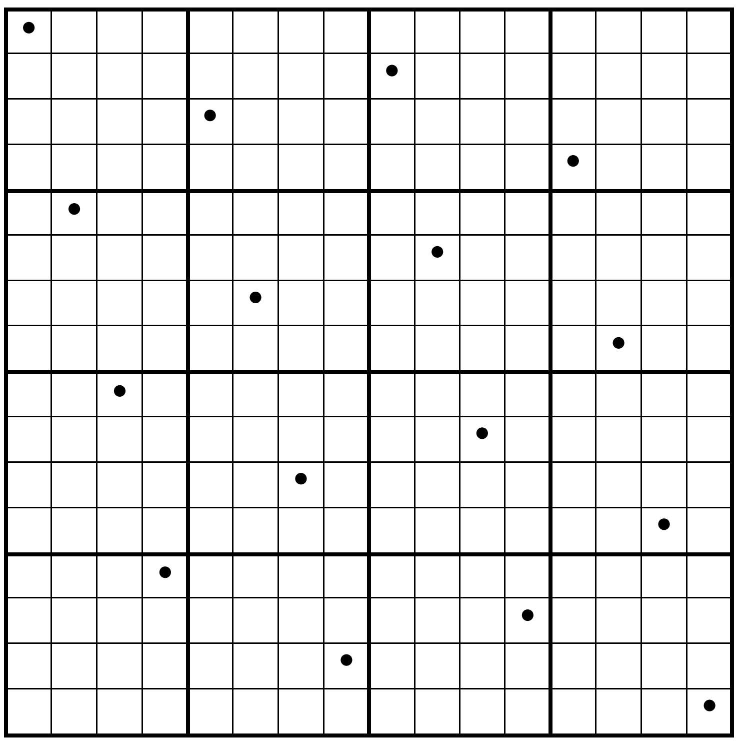
若$[1,i]$內的棋子在第 q 列，則$\forall j,[j,i]$內的棋子皆在第 q 列。

$[j,i]$內棋子的行數取決於 j 的值，列數取決於 i 的值，因此我們可令$[j,i]$內的棋子位於第 p_j 行第 q_i 列，記為(p_j,q_i)。

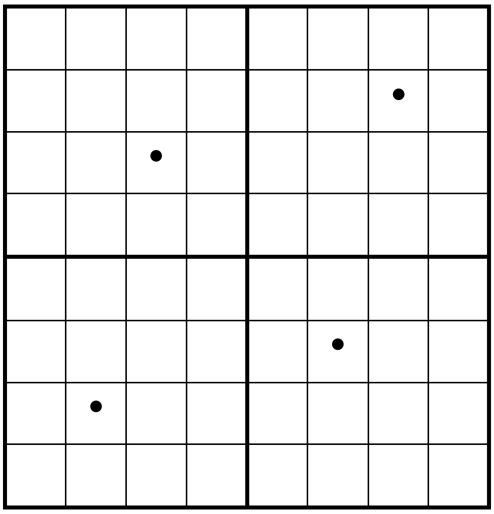
$\{p_1,p_2,\ldots,p_k\}$和$\{q_1,q_2,\ldots,q_k\}$皆為$\{1,2,3,\ldots,k\}$的其中一種排列。

以下即為一個滿足目前條件的和平排列的例子：

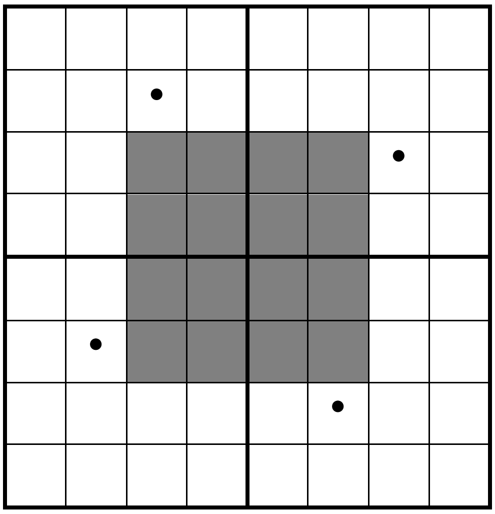
$n=16$，$k=4$，$(p_1,p_2,p_3,p_4)=(1,2,3,4)$，$(q_1,q_2,q_3,q_4)=(1,3,2,4)$。



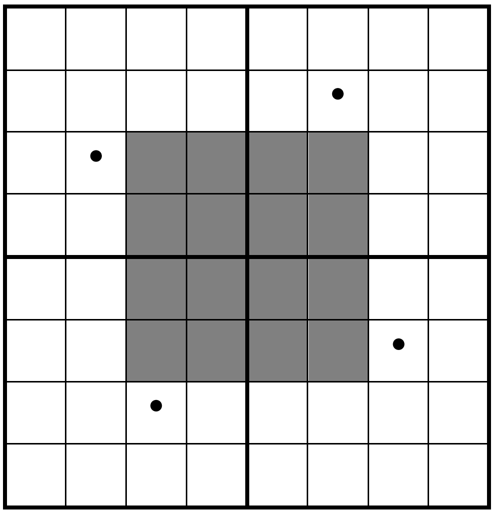
2、$\forall i,j$，若$(p_j-p_{j+1})(q_i-q_{i+1})<0$，$[j,i],[j,i+1],[j+1,i],[j+1,i+1]$這個 $2k\times 2k$ 區域中必可找到一 $k\times k$ 正方形。故$(p_j-p_{j+1})(q_i-q_{i+1})>0$。



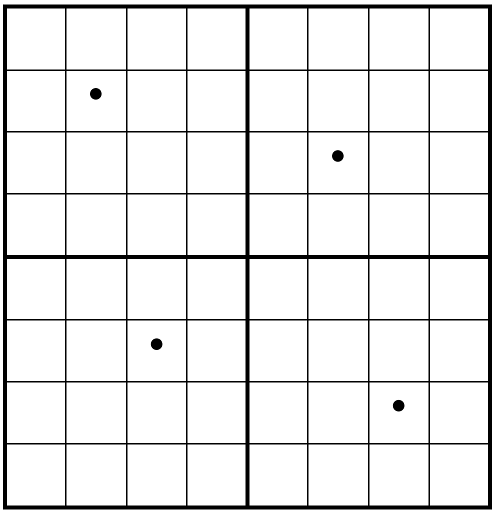
$(p_j,p_{j+1},q_i,q_{i+1})=(3,2,3,2)$



$(p_j,p_{j+1},q_i,q_{i+1})=(3,2,2,3)$



$(p_j,p_{j+1},q_i,q_{i+1})=(2,3,3,2)$



$(p_j,p_{j+1},q_i,q_{i+1})=(2,3,2,3)$

3、若 $p_1>p_2\Rightarrow(p_1-p_2)(q_i-q_{i+1})>0$

故 $q_i>q_{i+1}\Rightarrow(p_j-p_{j+1})(q_i-q_{i+1})>0$

故 $p_j>p_{j+1}\Rightarrow p_1>p_2>\ldots>p_k,q_1>q_2>\ldots>q_k\Rightarrow p_j=k^2+1-j,q_i=k^2+1-i$

數字表示：$(k^2, (k-1)k, (k-2)k, \ldots, k, k^2-1, (k-1)k-1, \ldots, k-1, \ldots, k^2-(k-1), (k-1)k-(k-1),\ldots,1)$

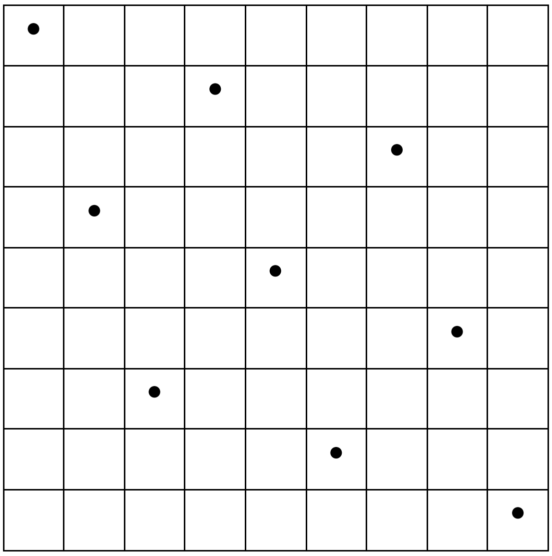
若 $p_1<p_2\Rightarrow(p_1-p_2)(q_i-q_{i+1})>0$

故 $q_i<q_{i+1}\Rightarrow(p_j-p_{j+1})(q_i-q_{i+1})>0$

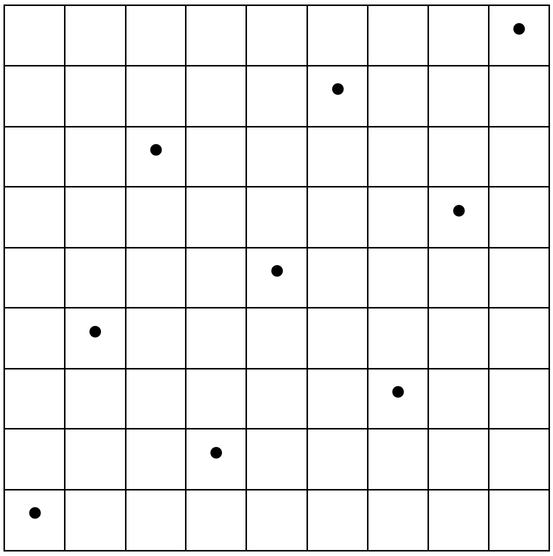
故 $p_j<p_{j+1}\Rightarrow p_1<p_2<\ldots<p_k,q_1<q_2<\ldots<q_k\Rightarrow p_j=j,q_i=i$

數字表示：$(1,k+1,2k+1,\ldots,(k-1)k+1,\ 2,k+2,\ldots,(k-1)k+2,\ldots,\ k,2k,\ldots,k^2)$

故只有這兩種 $k^2\times k^2$ 的和平排列找不到 $k\times k$ 正方形，$S(k,0)$中的元素即這兩個菱形的和平排列，$\boxed{|S(k,0)|=2}$。下圖即$(n,k)=(9,3)$時，這兩種和平排列的圖形。



(1,4,7,2,5,8,3,6,9)



(9,6,3,8,5,2,7,4,1)

三、討論$f_\beta(k,1)$的值

我們利用原題的結果來證明$f_\beta(\mathrm{k},1)$。

透過程式的輔助，我們得到$f_\beta(\mathrm{k},\mathrm{m})$的一些初步結果，如下表

	k=2	3	4	5	6	7	8
m=1	3	8	15	24	35		
2	X	5	11	21	30		
3	X	X	7	16	24		
4	X	X	X	9	19	33	
5	X	X	X	X	11	24	
6	X	X	X	X	X	13	
7	X	X	X	X	X	X	15

我們注意到 $f_\beta(2,1)=3$、$f_\beta(3,1)=8$、$f_\beta(4,1)=15$，於是猜測：

$$\boldsymbol{f_\beta(k,1)=k^2-1}$$

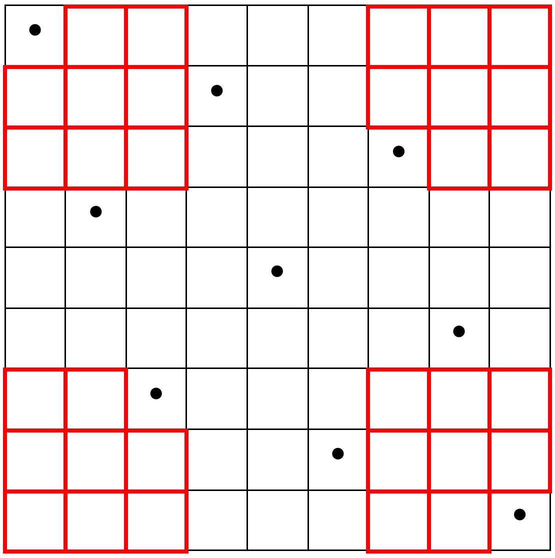
(一)、證明：缺角固定在一角時，任意 $n=k^2$ 的和平排列必找得到

$(k\times k-1\times 1)$缺角正方形

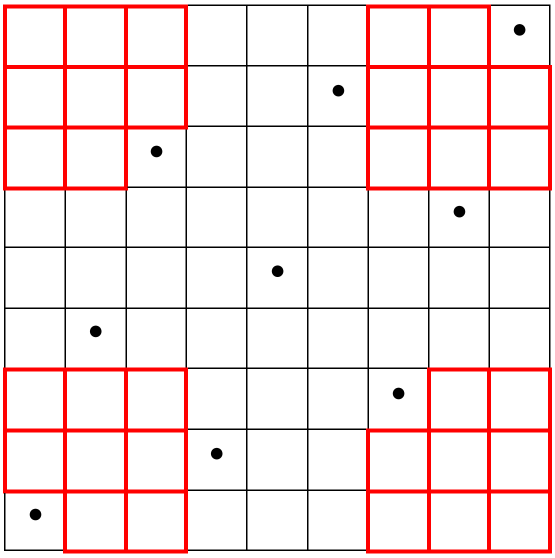
1、$f_\beta(k,1)=n$代表的意思是存在 $n\times n$ 棋盤的和平排列，缺角固定在其中一角時，存在找不到沒有包含任何棋子的$(k\times k-1\times 1)$缺角正方形，而每一個$(n+1)\times(n+1)$的和平排列都一定找的到。若能在 $n\times n$ 棋盤的棋盤中找到沒有包含任何棋子的 $k\times k$ 正方形，則必也存在沒有包含任何棋子的$(k\times k-1\times 1)$缺角正方形，於是我們得出：

$$f_\beta(k,1)\leqq f(k,0)$$

2、而由 $f(k,0)$的證明得出，$S(k,0)$中的元素只有兩個，也就是菱形排列與之水平對稱，於是我們先從這兩種情況做討論，舉 n=9、k=3 為例。



(1,4,7,2,5,8,3,6,9)



(9,6,3,8,5,2,7,4,1)

我們發現符合 $f(3,0)$結果之和平排列，其左上、右上、左下及右下角恰各出現缺角在左上、左下、右上及右下角的(3×3-1×1)缺角正方形，因此仍無法滿足 $f_\beta(3,1)$，因為不管將缺角固定在哪一角，總能找到與之相符之沒有包含任何棋子的缺角正方形，而其餘 n=9 之和平排列必存在 3×3 的正方形，故也不符合 $f_\beta(3,1)$。

證明：在 n= $k\times k$ 的棋盤中，共有 k^2 顆棋子，此棋盤恰可棋盤分割成 k^2 個 $k\times k$ 小正方形，故每個 $k\times k$ 小正方形必存在且僅有一顆棋子。

接著依此棋盤之各個角落做討論：
最左上角之 $k\times k$ 小正方形：

$$(1,k+1,2k+1,\ldots,(k-1)k+1,\ 2,k+2,\ldots,(k-1)k+2,\ldots,\ k,2k,\ldots,k^2)$$

棋子所在位置為此 $k\times k$ 小正方形第 1 行第 1 列，因此存在缺角在左上角之 ($k\times k$-1×1)缺角正方形。

最左下角之 $k\times k$ 小正方形：

$$(\overbrace{1,k+1,2k+1,\ldots,(k-1)k+1}^{\text{k 個}},\ 2,k+2,\ldots,(k-1)k+2,\ldots,\ k,2k,\ldots,k^2)$$

$$(k-1)k+1 \equiv 1 \mod k$$

棋子所在位置為此 $k\times k$ 小正方形第 k 行第 1 列，因此存在缺角在右上角之 ($k\times k$-1×1)缺角正方形。

最右上角之 $k\times k$ 小正方形：

$$(\overbrace{1,k+1,2k+1,\ldots,(k-1)k+1,\ 2,k+2,\ldots,(k-1)k+2,\ldots,\ k}^{\text{k(k-1)+1 個}},2k,\ldots,k^2)$$

$$(k-1)k+1 \equiv 1 \mod k$$

棋子所在位置為此 $k\times k$ 小正方形第 1 行第 k 列，因此存在缺角在左下角之 ($k\times k$-1×1)缺角正方形。

最右下角之 $k\times k$ 小正方形：

$$(\overbrace{1,k+1,2k+1,\ldots,(k-1)k+1,\ 2,k+2,\ldots,(k-1)k+2,\ldots,\ k,2k,\ldots,k^2}^{\text{k}^2\text{ 個}})$$

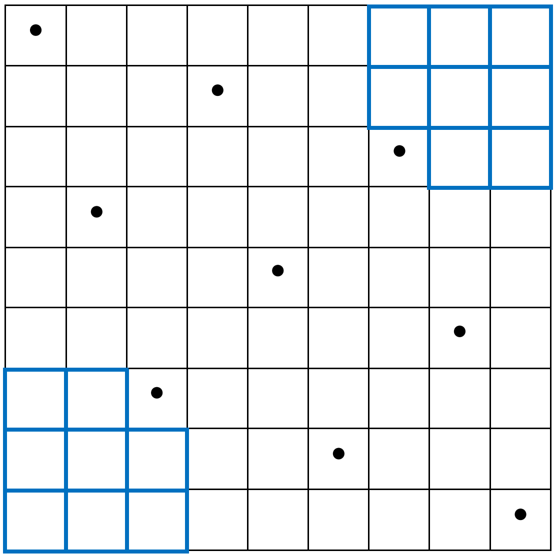
$$k^2 \equiv \mathrm{k} \mod \mathrm{k}$$

棋子所在位置為此 $k\times k$ 小正方形第 k 行第 k 列，因此存在缺角在右下角之 $(\mathrm{k}\times\mathrm{k}-1\times 1)$缺角正方形

因此當$\mathrm{n}=\ \mathrm{k}\times\mathrm{k}$時，必找得到缺角固定在其中一角，沒有包含任何棋子的 $(\mathrm{k}\times\mathrm{k}-1\times 1)$缺角正方形。

(二)、構造：缺角固定在其中一角時，存在$\text{n} = k^2 - 1$的和平排列，找不到沒有包含任何棋子的$(k \times k\text{–}1 \times 1)$缺角正方形。

首先觀察$\text{n} = k^2$符合$f(k, 0)$之和平排列



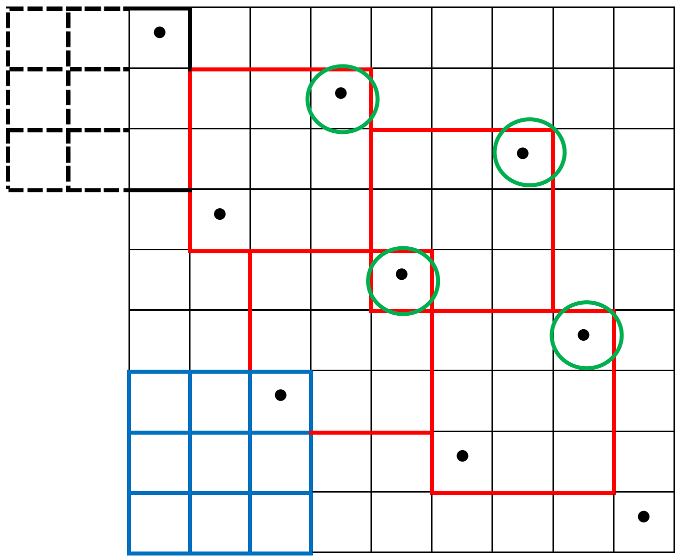
我們發現若此菱形排列為左上延伸到右下，則缺角在右上或左下的缺角正方形僅存在於棋盤之左下或右上角，反之亦成立。

1、 假設在符合$f_\beta(k, 1) = \text{n}$之 $n \times n$ 棋盤的和平排列存在缺角正方形之缺角處沒有棋子，則必存在 $k \times k$ 正方形，矛盾，因此可以棋子為基準點，來確認是否存在$(k \times k - 1 \times 1)$缺角正方形。

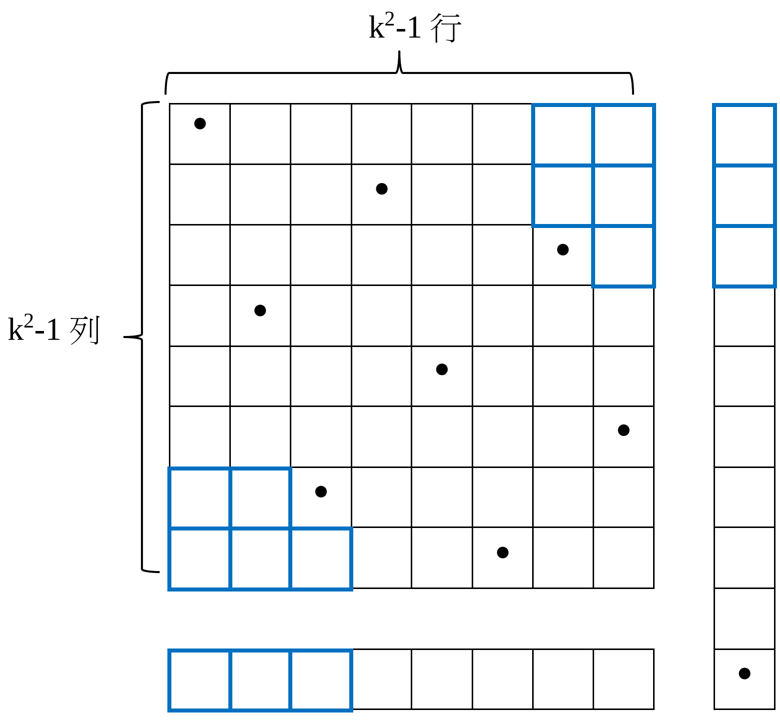
已知棋子的排列方法以數字表示為：

$(1, k+1, 2k+1, \ldots, (k\text{–}1)k+1,\ 2, k+2, \ldots, (k\text{–}1)k+2, \ldots,\ k, 2k, \ldots, k^2)$

不失一般性，討論缺角在右上角之缺角正方形，將每顆旗子都視為 $k \times k$ 正方形之最右上角，因此在 1~k-1 行與(k-1)k+2~k^2 列之交集內的棋子不需討論，而我們發現將剩餘的棋子往左找 k-1 行及往下找 k-1 列，形成 $k \times k$ 正方形，除了第 k 行第$(k\text{–}1)k+1$ 列的棋子所形成的 $k \times k$ 正方形，其餘正方形左下角必存在另一顆棋子，因此缺角在右上方之$(\text{k} \times \text{k} - 1 \times 1)$缺角正方形僅出現在棋盤之左下角，同理，缺角在左下方之$(\text{k} \times \text{k} - 1 \times 1)$缺角正方形僅出現在棋盤之右上角。



因此，構造$f_\beta(\mathrm{k},1) = k^2 - 1$之和平排列，僅需將最外圍包含一顆棋子之一行一列刪除，即可得符合$f_\beta(\mathrm{k},1) = k^2 - 1$之和平排列。



四、討論 $f_\beta(k,k\text{-}1)$的值

同樣地根據上面的表格，我們注意到

$f_\beta(2,1)$=3、$f_\beta(3,2)$=5、$f_\beta(4,3)$=7、$f_\beta(5,4)$=9、$f_\beta(6,5)$=9，於是我們猜測：

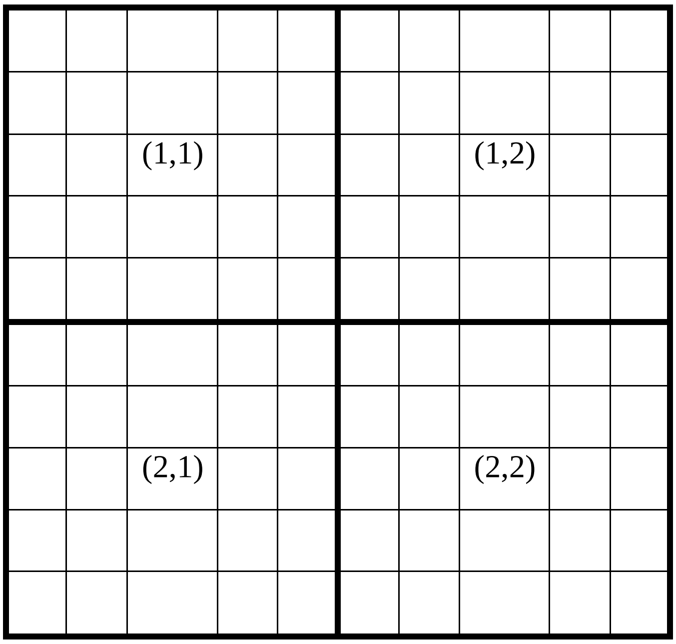
$$\boldsymbol{f_\beta(\mathrm{k},\mathrm{k}-1)=2\mathrm{k}-1}$$

(一) 、證明：缺角固定在一角時，任意 n=2k 的和平排列必找得到

$k\times k$–$(k-1)\times(k-1)$缺角正方形。

我們只要證明在 n=2k 的和平排列中，必找得到某一固定方向的缺角正方形，則剩餘三個方向的缺角正方形也必存在。

我們將 2k×2k 正方形切成 4 個 k×k 正方形，分別為(1,1)、(1,2)、(2,1)、(2,2)



1、證明(1,1)內第一列不可存在棋子，否則必有缺角在右下角之

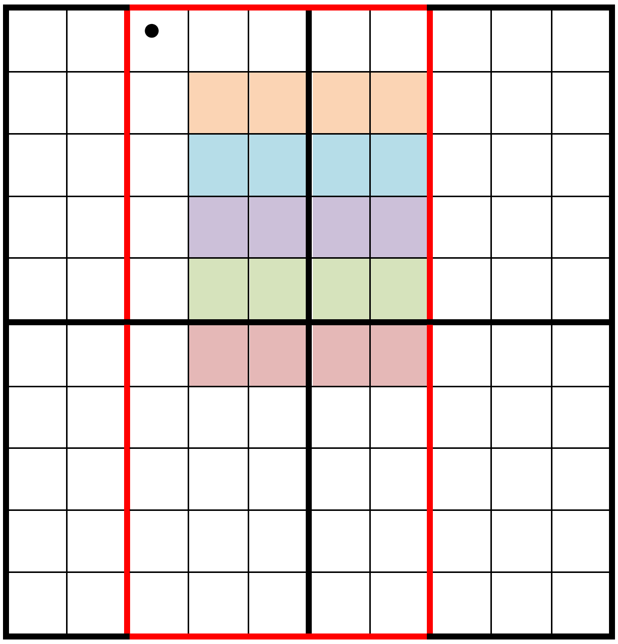
$k\times k$–$(k-1)\times(k-1)$缺角正方形。

利用反證法，假設第一列存在棋子於第 p 行，像右取與第 p 行相鄰$k-1$行為$k\times 2k$長方形。

我們可以在此長方形中找到 k 個缺角在右下角之$k\times k$–$(k-1)\times(k-1)$缺角正方形，卻只能再擺入$k-1$顆棋子，矛盾，因此第一列不可存在棋子。

2、同理，(1,1)內第一行也不可存在棋子，但我們仍能取第一列第一行為

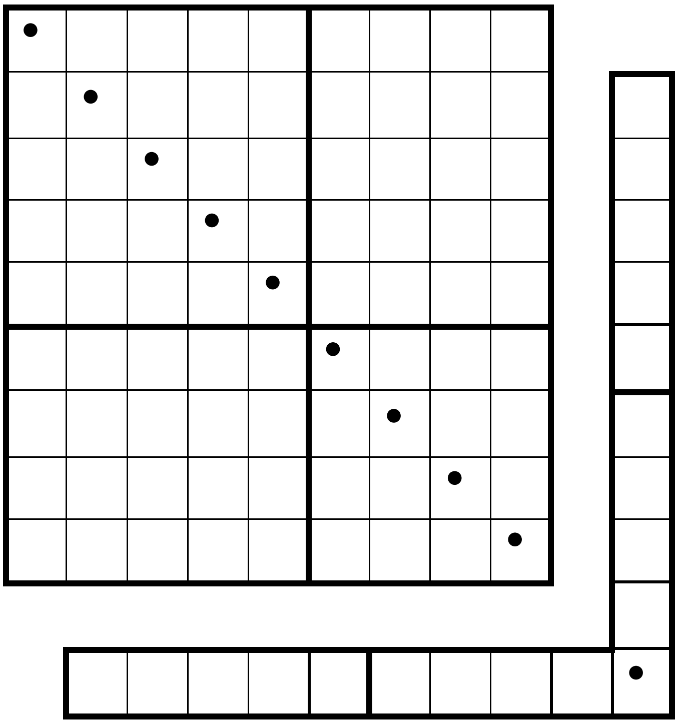
$k\times k$–$(k-1)\times(k-1)$缺角正方形，因此在 n=2k 的和平排列中，必存在缺角在右下角之$k\times k$–$(k-1)\times(k-1)$缺角正方形，也就必同時存在缺角在四個方向的缺角正方形。



(二)、構造：缺角固定在其中一角時，存在 n=2k-1 沒有包含任何棋子的

$k \times k - (k-1) \times (k-1)$缺角正方形

此構造方式不難，我們發現只要在 n=2k 的棋盤中，將棋子沿對角線一一放入，再將包含棋子之一列一行剔除，即為符合所求之 n=2k-1 和平排列。



五、討論 $f_\alpha(k,1)$的值及 $S_\alpha(k,1)$中元素

在缺角所在的位置中，我們一開始只有考慮α(不限制缺角可能在的方向)，也因此先做了 $f_\alpha(k,1)$的值。由於 $f_\alpha(k,1)$的答案是未知的，我們沒辦法很快速的猜出它的值，也找不到相關的資料，因而想到寫程式來尋找這個值。

我們得到 $f_\alpha(2,1)=2$, $f_\alpha(3,1)=6$, $f_\alpha(4,1)=12$, $f_\alpha(5,1)=20$, $f_\alpha(6,1)=30$ 這些數據，因此我們猜測：

$$\boldsymbol{f_\alpha(k,1)=k^2-k}$$

而且 $S_\alpha(k,1)$的元素在 k 是這些小數字時也很有規律性。

由於 $k=2$ 時，$f_\alpha(2,1)=2$，$S_\alpha(2,1)=\{(1,2),(2,1)\}$能得到，所以我們以下先從 $k=3$ 的 *case* 開始研究。

(一)、證明 $f_\alpha(3,1)=6$

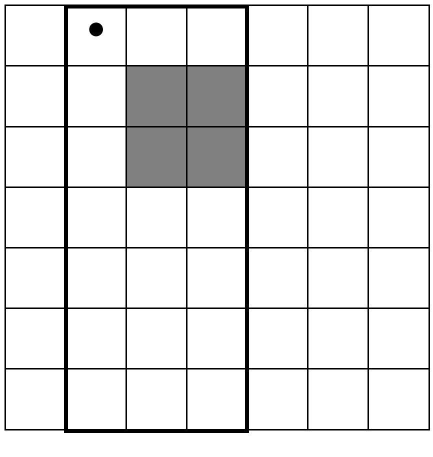
要證明 $f_\alpha(3,1)=6$，必須要證明每個 $n=7$ 的和平排列一定找的到(3×3–1×1)缺角正方形，再構造出一個找不到(3×3–1×1)缺角正方形的 $n=6$ 和平排列。

以下證明過程利用反證法，假設存在一找不到(3×3–1×1)缺角正方形的 7×7 和平排列。

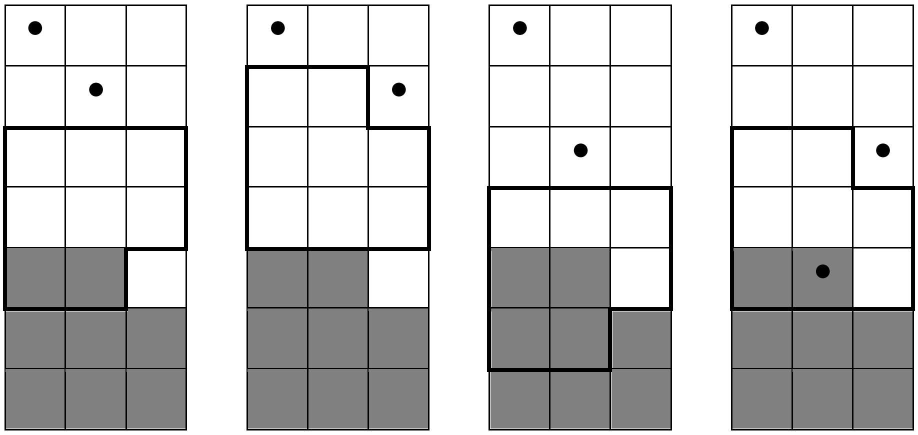
1、設 $a_p=1$(第 p 行第 1 列有棋子)，則必可取第 p 至 $p+2$ 行(或 $p-2$ 至 p 行)的 3×7 長方形，在這個長方形中的左上(或右上)角放有棋子。

不失一般性假設取的是 p 至 $p+2$ 行(3×7 長方形的左上角有棋子)。

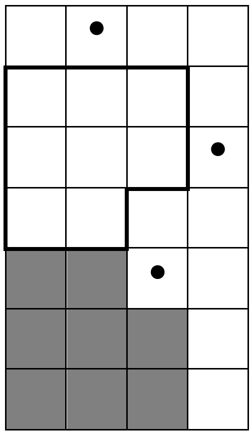
那麼 $a_{p+1}=2,a_{p+1}=3,a_{p+2}=2,a_{p+2}=3$ 中必有一成立。



2、下面四圖中，粗框和塗色的(3×3–1×1)中皆須至少有一棋子，但是當 a_{p+1}=2、a_{p+2}=2、a_{p+1}=3 時是不可能的，因此可知道必有 a_{p+2}=3，從而 a_{p+1}=5。

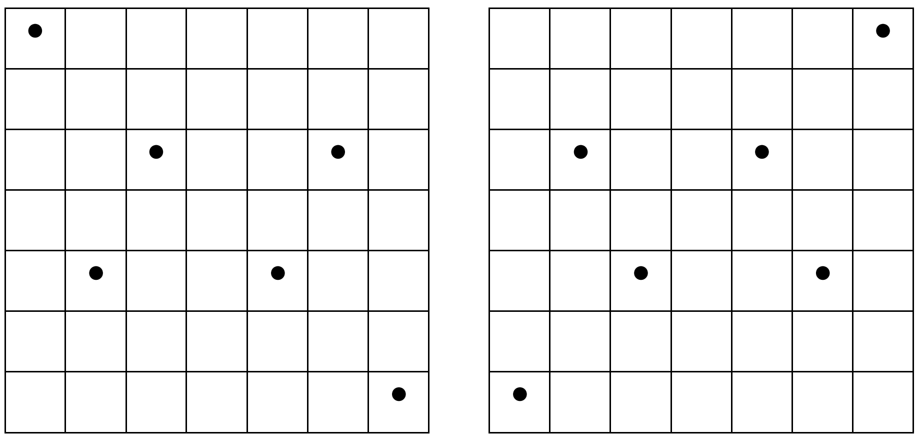


3、若 p>1，則把第 p–1 行納入考慮，同樣的粗框和塗色的(3×3–1×1)中皆須至少有一棋子，但是這不可能，故只有 p=1。

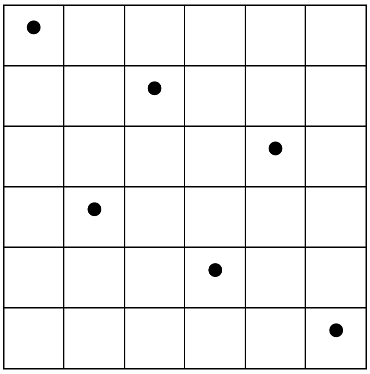


4、考慮第 1 列，有(a_1,a_2,a_3)=(1,5,3)或者對稱的(a_7,a_6,a_5)=(1,5,3)；同理，考慮第 7 列亦有(a_7,a_6,a_5)=(7,3,5)或者對稱的(a_1,a_2,a_3)=(7,3,5)，若同時考慮第 1 列和第 7 列則有 a_3=a_6=3 或者 a_2=a_5=3，不符合和平排列，矛盾。

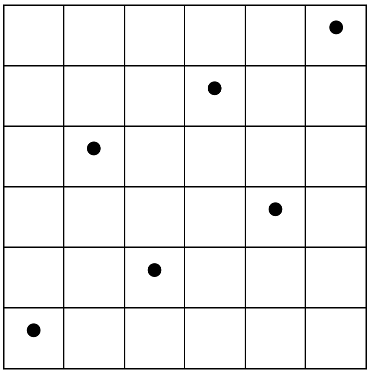
因此可知原假設不成立，每一個 7×7 和平排列必找的到(3×3–1×1)缺角正方形。



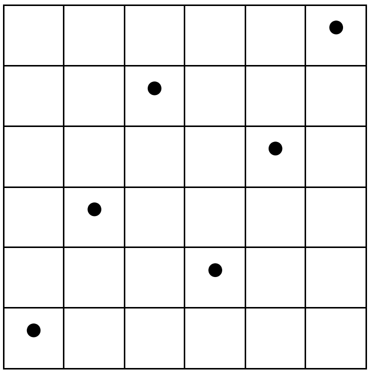
5、另一方面，放不下(3×3–1×1)的 6×6 和平排列如下圖所示：



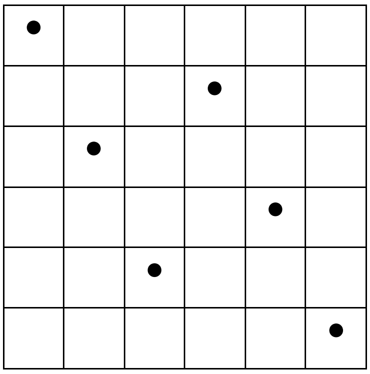
(1,4,2,5,3,6)



(6,3,5,2,4,1)

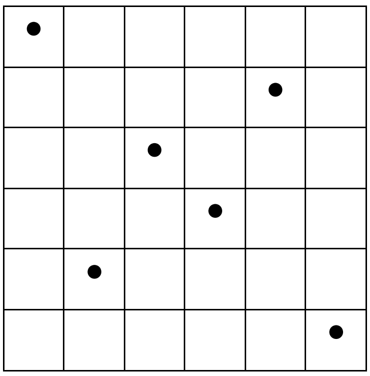


(6,4,2,5,3,1)

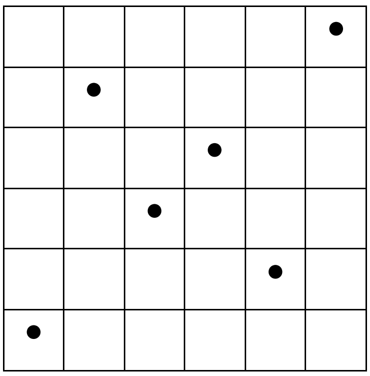


(1,3,5,2,4,6)

這是其中一類，形狀是 2×3 的菱形，共 4 種。左圖和右圖是左右對稱，上圖旋轉 90 度即為下圖



(1,5,3,4,2,6)



(6,2,4,3,5,1)

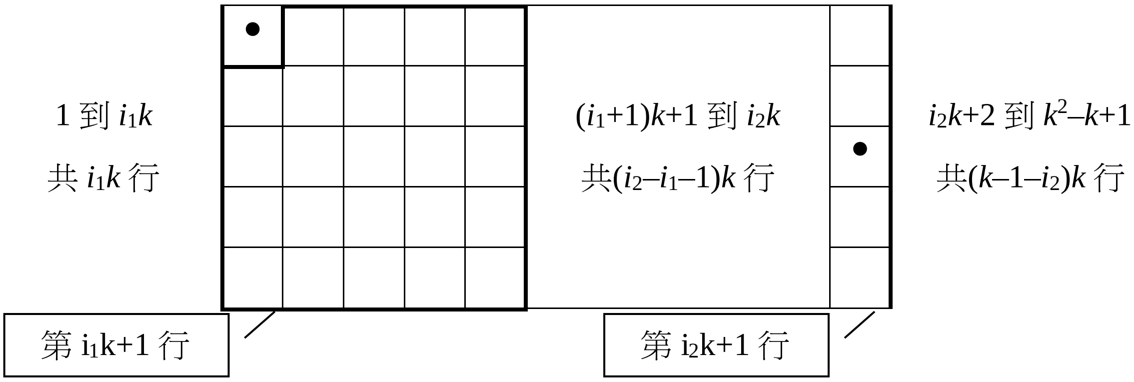
這是另外一類，共 2 種，左右兩圖互相對稱。利用程式的輔助，只有這六種情況放不下(3×3–1×1)的缺角正方形。

(二)、證明：任意 $n=k^2-k+1$ 的和平排列找得到$(k\times k-1\times 1)$正方形

1、考慮 $n=k^2-k+1$ 的棋盤，利用反證法假設存在找不到$(k\times k-1\times 1)$的和平排列。

先證：若有 $a_{i_1\times k+1}=j_1, a_{i_2\times k+1}=j_2$ $(0\le i_1<i_2\le k-1)$，則$|j_1-j_2|\ge k$。

(1)不論 j_1 和 j_2 的大小關係為何，只要$|j_1-j_2|<k$ 則我們必可在棋盤中取一$(k^2-k+1)\times k$ 的長方形，它的第一列或最後一列是第 j_1 或 j_2 列。不妨設這個長方形的第一列是第 j_1 列。



(2)如上圖所示，第 1 到 i_1k 行、第$(i_1+1)k+1$ 到 i_2k 行、第 i_2k+2 到 k^2-k+1 行三個區域，每 k 行至少要有一個棋子，故總共分別需要 i_1、(i_2-i_1-1)、$(k-1-i_2)$ 行。

粗框區域也要有一個棋子，再加上原本第 i_1k+1 和 i_2k+1 行的棋子，故總共需有 $i_1+(i_2-i_1-1)+(k-1-i_2)+3=k+1$ 個棋子，但$(k^2-k+1)\times k$ 長方形最多只有 k 個棋子，矛盾。故可知$|j_1-j_2|\ge k$。

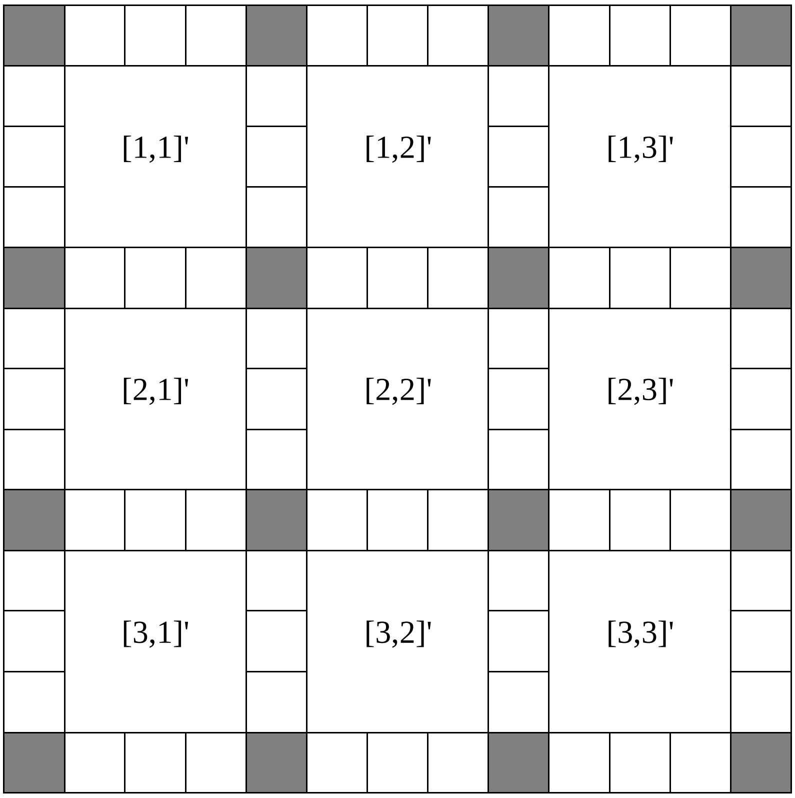
2、再觀察整個棋盤，將$\{a_1, a_{k+1}, a_{2k+1}, \ldots, a_{(k-1)k+1}\}$由小到大重排成$\{b_1, b_2, \ldots, b_k\}$，有 $b_{i+1}-b_i\ge k$，故 $b_k-b_1\ge (k-1)k$。但 $b_1\ge 1$，$b_k\le k^2-k+1$，$b_k-b_1\le (k-1)k$，故只有 $b_k=b_1+(k-1)k$，從而 $b_i=(i-1)k+1$。

3、此時再引入$[j,i]$的符號，但這邊的$[j,i]$符號和前面的定義不同，記為$[j,i]'$以示區別。

這裡的$[j,i]'$是第$(i-1)k+2$ 到 ik 行，與第$(j-1)k+2$ 到 jk 列的交集所形成的$(k-1)\times(k-1)$正方形。每一個$[j,i]'$，加上其上方的$(k-1)\times 1$ 和其左方的 $1\times(k-1)$，都形成一個$(k\times k-1\times 1)$，但其上方和左方都不能放棋子，故每一個$[j,i]'$中必至少有一棋子。總共有$(k-1)^2$ 個$[j,i]'$。

又這些$[j,i]'$正方形內最多共有$(k–1)^2$個棋子，故知每個$[j,i]'$內恰有一個棋子。

舉 k=4，n=13 之例子如下：

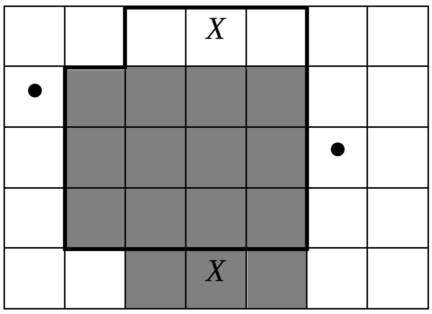


16 個塗色格子中，恰有其中 4 個有棋子；而每個$[j,i]'$內亦恰有一個棋子。

4、利用數學歸納法證明：

若$[j,1]'$內的棋子在第 p 行，則$\forall i,[j,i]'$內的棋子皆在第 p 行。

以下先證：若$[j,i]'$和$[j,i+1]'$內的棋子分別在第 p 和 p'行，則 $p\geq p'$。



如上圖示例，$[j,i]'$為第 1 到 3 行、第 2 到 4 列之交集，$[j,i+1]'$為第 5 到 7 行、第 2 到 4 列之交集。$p<p'$時，因為兩個 X 位置中最多只有一個有棋子，故粗框和塗色的兩個$(k\times k–1\times1)$內必有一個沒有棋子，矛盾。

因此有：

若$[j,i]'$和$[j,i+1]'$內的棋子分別在第 p 和 p'行，則 $p \geq p'$

→若$[j,1]'$和$[j,i]'$內的棋子分別在第 p 和 p'行，則 $p \geq p'$。

有這個條件後，歸納部分即和(二)–3–(1)的證明類似，故可得證。

同理也有：$\boxed{\text{若}[1,i]'\text{內的棋子在第 } q \text{ 列，則} \forall j,[j,i]'\text{內的棋子皆在第 } q \text{ 列。}}$

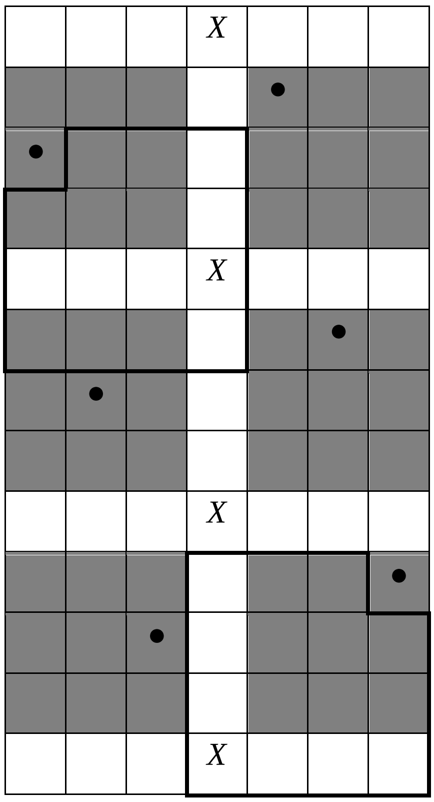
所以我們一樣可令$[j,i]'$內的棋子位於第 p_j 行第 q_i 列，記為(p_j,q_i)。

5、令 $p_{j1}=1,p_{j2}=k-1$。則觀察$[j_1,1]'$和$[j_2,2]'$，以$[j_1,1]'$中的棋子為左上(或左下)角，畫一缺角在左上(或左下)的$(k \times k-1 \times 1)$；

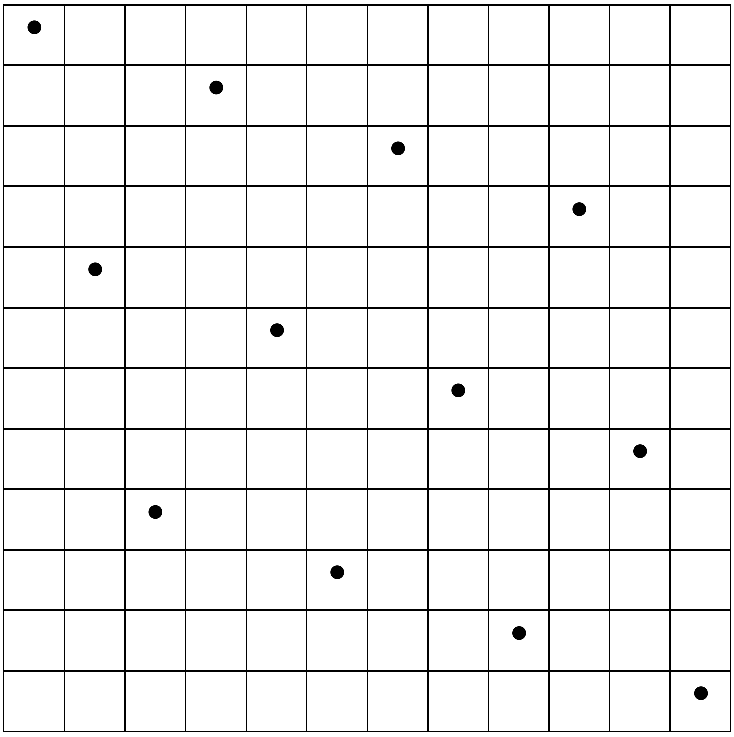
以$[j_2,2]'$中的棋子為右上(或右下)角，畫一缺角在右上(或右下)的$(k \times k-1 \times 1)$。

這兩個缺角正方形中，棋子只可能出現在第 $k+1$ 行，但第 $k+1$ 行只有一棋子，故必有至少一個缺角正方形內無棋子，矛盾。證畢

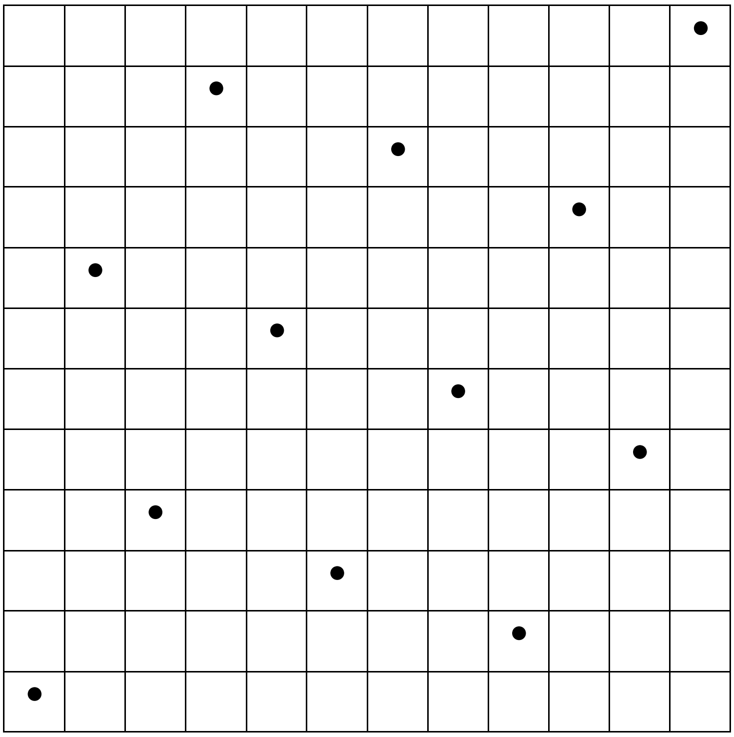
底下為 $n=13$，$k=4$，$j_1=1$，$j_2=3$ 之例子。



(三)、構造：找不到$(k \times k-1 \times 1)$缺角正方形的$n = k^2 - k$和平排列：當 k=3 時前面已討論過，共有兩類；而 k>3 時亦有兩類。



上圖代表的是$(1,k+1,\ldots,(k-2)k+1,\ 2,k+2,\ldots,(k-2)k+2,\ldots,\ k,2k,\ldots,(k-1)k)$，它和它的類似排列(順時針旋轉 90 度；水平對稱；以左上─右下對角線對稱)共 4 種，皆為 $S_\alpha(k,1)$中的元素，和平排列圖形皆為$(k-1)\times k$ 的平行四邊形。



上圖代表的是($\boldsymbol{(k-1)k}$,k+1,…,(k–2)k+1, 2,k+2,…,(k–2)k+2,…, k,2k,…,(k–2)k,**1**)，它和它的類似排列(順時針旋轉 90 度；水平對稱；以左上─右下對角線對稱)，皆為 $S_\alpha(k,1)$中的元素，這一類和上一類很類似，只差在 a_1 和 $a_{k(k-1)}$不同而已。

我們猜測當 k>3 時 $S_\alpha(k,1)$中的元素都只有這 8 個，亦即$\boxed{\forall k>3, |S_\alpha(k,1)|=8}$。

雖然在 k 較小的時候都已經經過程式驗證，但仍未證明出來。

六、討論$\boldsymbol{f_\alpha(k,\frac{k}{2})}$的值及$\boldsymbol{S_\alpha(k,\frac{k}{2})}$中元素

接著，我們利用程式跑了$f_\alpha(k,m)$的一些初步結果，如下表：

	k=2	3	4	5	6	7	8	9
m=1	**2**	6	12	20	30			
2	X	4	**8**	15	24			
3	X	X	5	10	**18**			
4	X	X	X	7	13			
5	X	X	X	X	8			
6	X	X	X	X	X	10		
7	X	X	X	X	X	X	12	
8	X	X	X	X	X	X	X	13

我們注意到 $f_\alpha(2,1)=2$, $f_\alpha(4,2)=8$, $f_\alpha(6,3)=18$,於是我們猜測：

$$\boldsymbol{f_\alpha(k,m)=\frac{k^2}{2}}$$

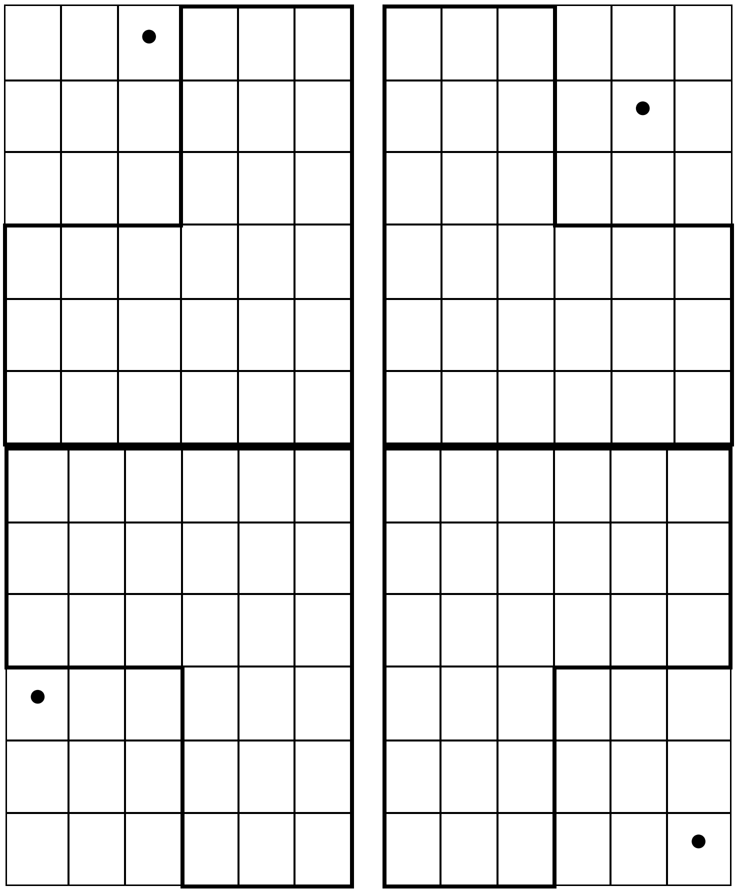
(一)、證明：任意 $n=\frac{k^2}{2}+1$ 的和平排列必找得到$\left(k\times k-\frac{k}{2}\times\frac{k}{2}\right)$缺角正方形

1、將 k×k 正方形切割成四塊的小正方形，利用反證法，假設一顆棋子能使 k×k 正方形內找不到$\left(k\times k-\frac{k}{2}\times\frac{k}{2}\right)$缺角正方形，視棋子所在的小正方形為缺角，另外三個$\frac{k}{2}\times\frac{k}{2}$小正方形便可組成$\left(k\times k-\frac{k}{2}\times\frac{k}{2}\right)$缺角正方形，矛盾。

故每個 k×k 正方形須至少兩枚棋子方能滿足要求，而此時兩顆或以上的棋子需在不同的$\frac{k}{2}\times\frac{k}{2}$小正方形。

於是我們得證 k×k 正方形至少須包含兩顆棋子，使其內找不到$\left(k\times k-\frac{k}{2}\times\frac{k}{2}\right)$缺角正方形。

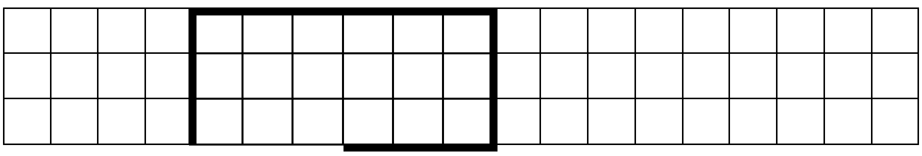
以下舉例 k=6、m=3 的情況

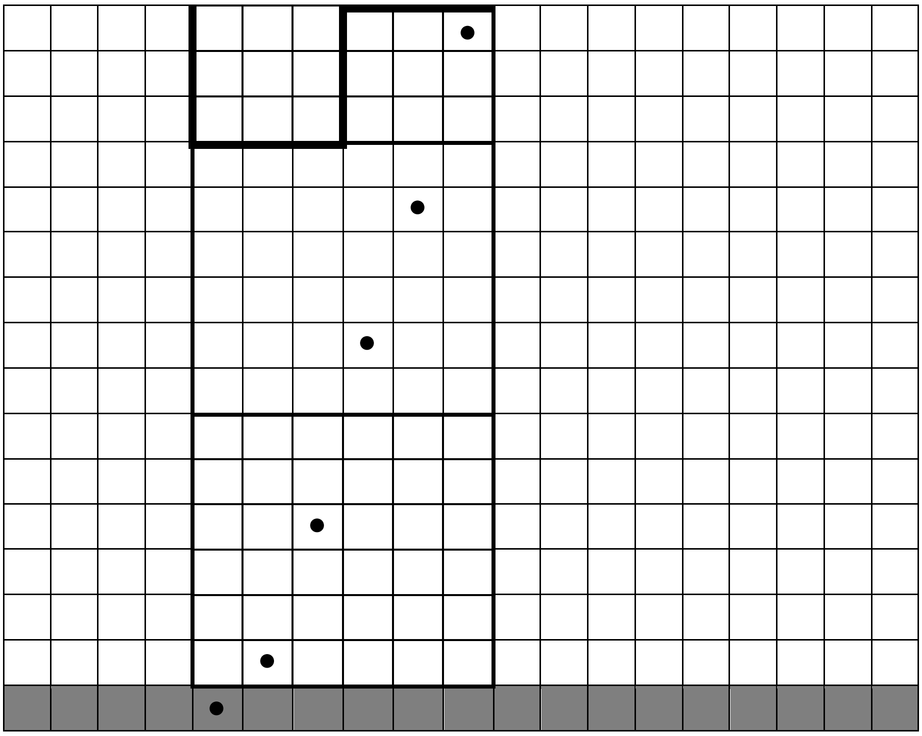


2、在$\left(\frac{k^2}{2}+1\right)\times\left(\frac{k^2}{2}+1\right)$的正方形中，假設第$\frac{k^2}{2}+1$列的棋子位於第 p 行，可以取第 p 行和其臨近的 k–1 行，為一$k\times\left(\frac{k^2}{2}+1\right)$的長方形。

長方形中，第 1 列到第$\frac{k^2}{2}$列可分割為$\frac{k}{2}$個 $k\times k$ 正方形，分別為第 $jk+1$ 到 $(j+1)k$ 列，$j=0,1,\ldots,\frac{k}{2}-1$。第$\frac{k^2}{2}+1$ 列有 1 顆棋子，而整個$k\times\left(\frac{k^2}{2}+1\right)$的長方形有 k 顆棋子，故此$\frac{k}{2}$個正方形有 k-1 顆棋子。

由鴿籠原理可知必有一個 $k\times k$ 正方形內僅有一顆或沒有棋子，綜合 1、得證。





(二)、構造：存在 $n=\frac{k^2}{2}$的和平排列找不到$k\times k-\frac{k}{2}\times\frac{k}{2}$缺角正方形

同樣引入二-(一)-2 所使用的$[j,i]$符號，$[j,i]$代表第$(i-1)k+1$ 到第 ik 行，與第$(j-1)k+1$ 到第 jk 列的交集所形成的 $k\times k$ 正方形。

整個棋盤只能有$\frac{k^2}{2}$個 $k\times k$ 正方形，且由上述證明得知每個 $k\times k$ 正方形中必有兩顆或以上的棋子，由鴿籠原理，每個 $k\times k$ 正方形恰有兩顆棋子。

令最末行為第 $i'k$ 行，而整個正方形共有$\frac{k^2}{2}$行，則：

$$\boldsymbol{i'\mathrm{k}=\frac{k^2}{2}\text{，}i'=\frac{\mathrm{k}}{2}}$$

同樣地令最末列為第 $j'k$ 列，共有$\frac{k^2}{2}$列，則：

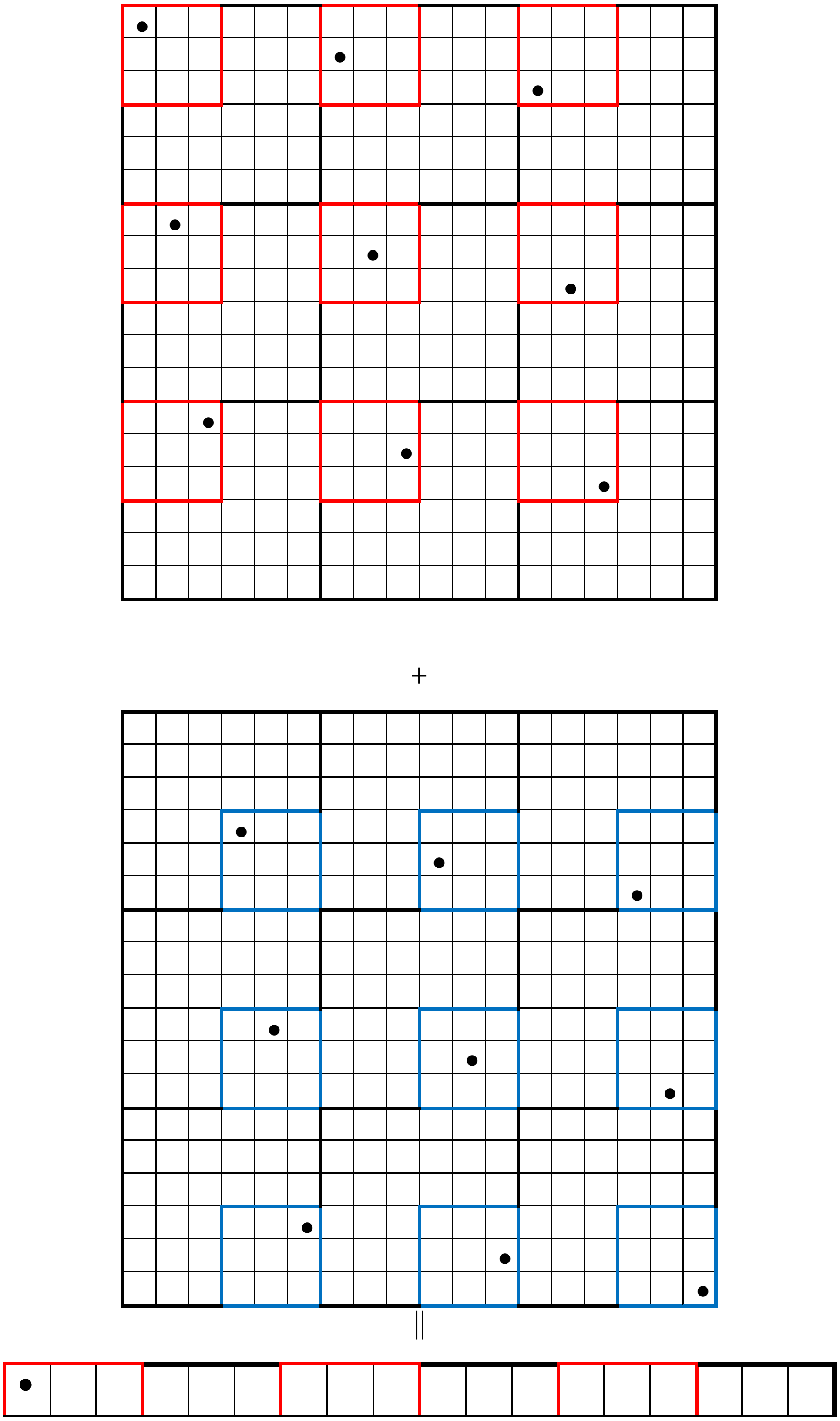
$$\boldsymbol{j'\mathrm{k}=\frac{k^2}{2}\text{，}j'=\frac{\mathrm{k}}{2}}$$

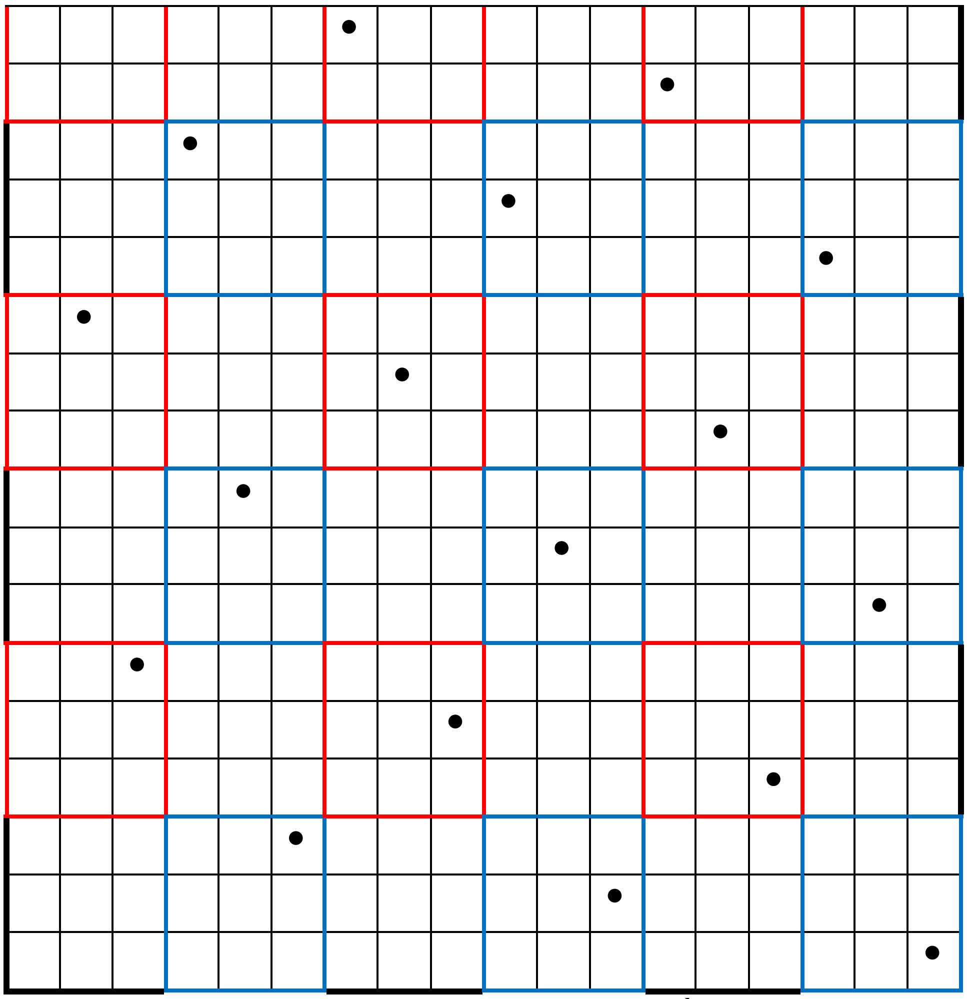
於是$[j,i]$內 i=1,2,…, $\frac{k}{2}$、j=1,2,…, $\frac{k}{2}$

在$[j,i]$內的第 j 行第 i 列放置棋子後，每個 $k\times k$ 正方形，第$(\frac{k}{2}+1)$到第 k 行與第$(\frac{k}{2}+1)$到第 k 列仍尚未填入棋子，也就是所有棋子皆在第 1 行到第 $\frac{k}{2}$ 行與第 1 列到第 $\frac{k}{2}$ 列的交集。

接著將棋盤旋轉 180 度，$k\times k$ 正方形內，第 1 行到第$\frac{k}{2}$ 行與第 1 列到第 $\frac{k}{2}$

列交集內的所有棋子會跑到第($\frac{k}{2}$+1)列到第 k 行與第($\frac{k}{2}$+1)到第 k 列的交集。接著再重新依[j,i]填入棋子，也就是將 A 棋盤上的棋子疊加到 B 棋盤上，此排列即為和平排列，且其內找不到$k \times k - \frac{k}{2} \times \frac{k}{2}$缺角正方形。





這只是其中一種構造法，我們尚未確定$f_\alpha(k,\frac{k}{2})$所有的構造法。利用程式的輔助下，我們得知 $S_\alpha(2,1)=2$，$S_\alpha(4,2)=38$，$S_\alpha(6,3)=232$，由於隨著 k 值的增加，其總數會如指數函數般增大，我們很難去確認每一種排列方式。

伍、研究結果與未來展望

一、目前的研究結果整理如下：

(一)、m=0 時：$f(k,0)=k^2$，$|S(k,0)|=2$，$S(k,0)$中元素為

$(1,k+1,2k+1,\ldots,(k-1)k+1,\ 2,k+2,\ldots,(k-1)k+2,\ldots,\ k,2k,\ldots,k^2)$和它的類似排列。

(二)、m=1 時：

1、$f_\beta(k,1)=k^2-1$。

2、$f_\alpha(2,1)=2$，$|S_\alpha(2,1)|=2$，$S_\alpha(2,1)$中元素為(1,2)和(2,1)。

3、$f_\alpha(3,1)=6$，$|S_\alpha(3,1)|=6$，$S_\alpha(3,1)$中元素為(1,4,2,5,3,6)和(1,5,3,4,2,6)，和它們的類似排列。

4、$\forall k>3$，$f_\alpha(k,1)=k^2-k$，推測$|S_\alpha(k,1)|=8$，$S_\alpha(k,1)$中元素為

$(1,k+1,\ldots,(k-2)k+1,\ 2,k+2,\ldots,(k-2)k+2,\ldots,\ k,2k,\ldots,(k-1)k)$、

$(\boldsymbol{(k-1)k},k+1,\ldots,(k-2)k+1,\ 2,k+2,\ldots,(k-2)k+2,\ldots,\ k,2k,\ldots,(k-2)k,\mathbf{1})$和它們類似排列。

(三)、$\mathrm{f}_\alpha(k,\frac{k}{2})=\frac{k^2}{2}$。

(四)、$f_\beta(k,k-1)=2k-1$

陸、結論

在報告中，主要是由證明每個$(n+1)\times(n+1)$的和平排列都找的到，以及構造 $n\times n$ 的和平排列找不到(缺角)正方形為骨幹，不管是$f_\alpha(k,1)$、$f_\beta(k,1)$、$f_\beta(k,k-1)$、$f_\alpha(k,\frac{k}{2})$都是如此，研究過程中，憑空證明及構造實屬不易，於是我們請同學幫我們寫程式，因此得出了$f_\alpha(k,m)$和$f_\beta(k,m)$的值，藉由尋找規律得出通式後，再利用一些組合的方法證明及構造。然而我們尚未完全確定 $S_\alpha(k,1)$內的所有元素，這部分是我們之後首先要證明的，接著我們也期望將二維的$n\times n$棋盤、$(k\times k-m\times m)$缺角正方形，拓展至三維的$n\times n\times n$立體棋盤、$(k\times k\times k-m\times m\times m)$缺角立方體。日後也可應用在保全或預警系統之最佳化，假設每單位面積內必存在感應器，或將監視器可監視之範圍視為單位面積，可將放棋子的位置放置感應器或監視器，則無論受器在何處皆會在感應器範圍內，而其感應器的數量為最小值。

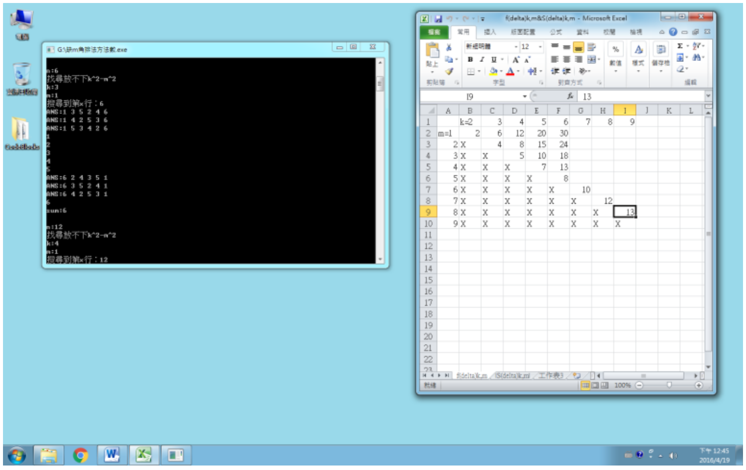
柒、參考資料及其他

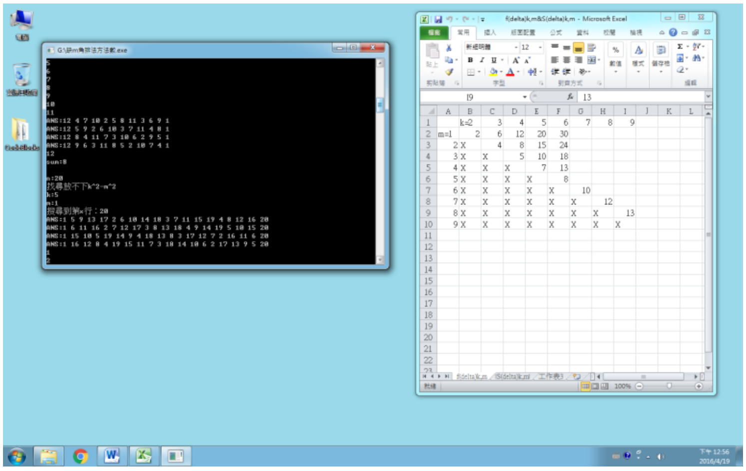
原題目來源則是 2014 年第 55 屆 IMO 試題 P2，題目參考網址：

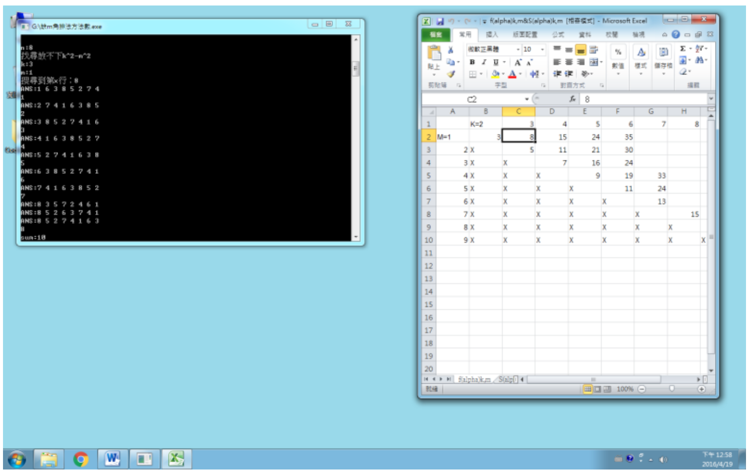
http://www.artofproblemsolving.com/community/c3841_2014_imo

捌、附件

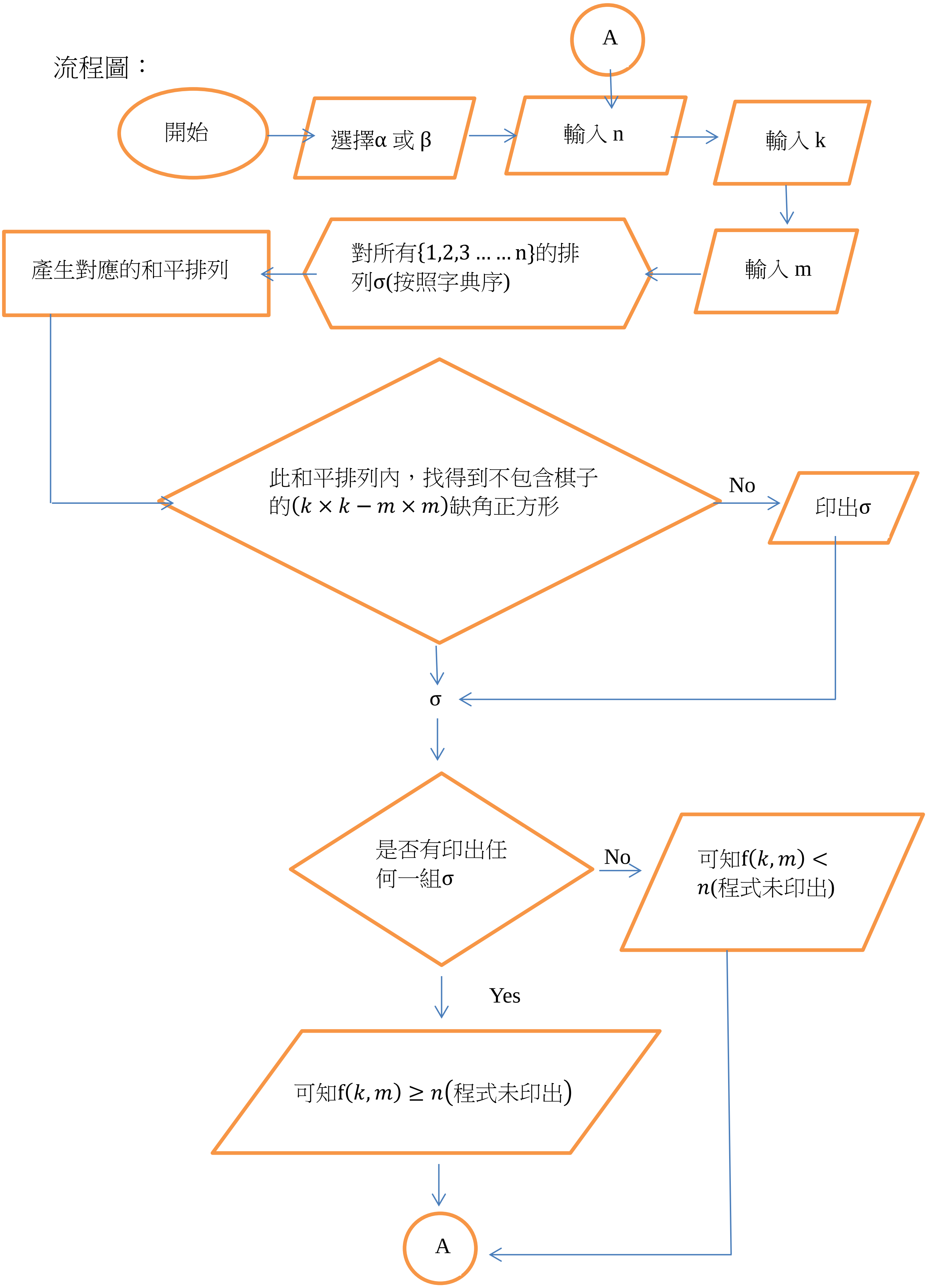
執行檔：







流程圖：


A
開始
選擇α 或 β
輸入 n
輸入 k
輸入 m
對所有{1,2,3 … … n}的排列σ(按照字典序)
產生對應的和平排列
此和平排列內，找得到不包含棋子的$(k \times k - m \times m)$缺角正方形
No
印出σ
σ
是否有印出任何一組σ
No
可知$\mathrm{f}(k, m) < n$(程式未印出)
Yes
可知$\mathrm{f}(k, m) \geq n$(程式未印出)
A

【評語】050407

本作品從競賽題目出發，從找 k×k 的正方形到 k×k-m×m 的缺角正方形，相當具有科學探究的精神，若能確立所有構造法會更完美。