

中華民國第 56 屆中小學科學展覽會

作品說明書

高級中等學校組 數學科

050406

相切圓與內心旁心的隱密連結

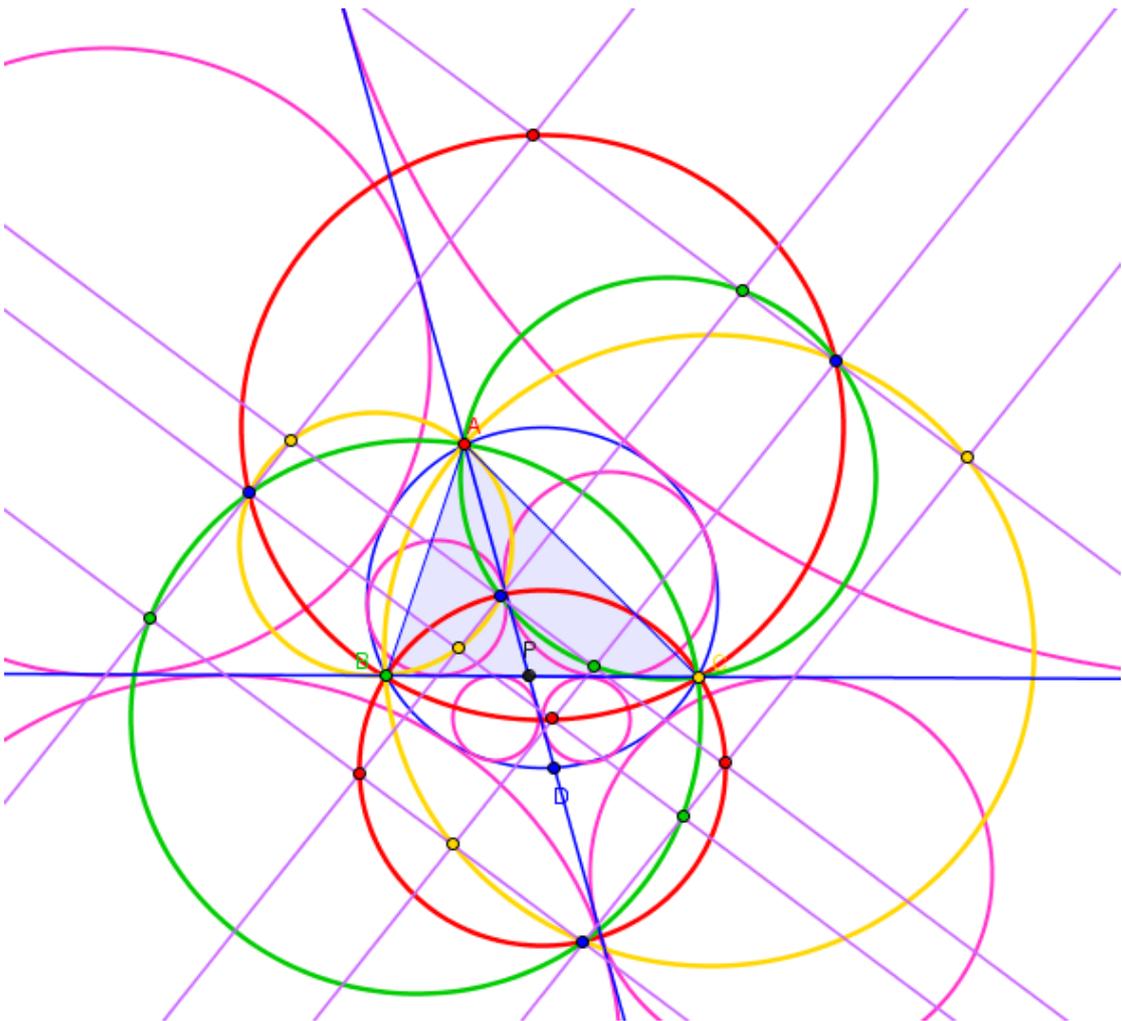
學校名稱：國立臺南第一高級中學

作者： 高二 李雙言 高二 柯致淳 高二 黃誠恩	指導老師： 蔡仲彬
---	------------------

關鍵詞：相切圓、內心旁心、極線

摘要

偽內切圓與**偽旁切圓**為與三角形的兩條邊相切，並分別與三角形的外接圓內切、外切的圓。本研究從**偽內切圓**與**偽旁切圓**出發，因為猜測他們與內心及旁心有關聯，於是從這個角度切入。接著我們再對與其相關的 **Mannheim**(曼海姆)定理進行推廣，進而將問題由三角形延伸至圓內接四邊形上。在圓內接四邊形的情況時，我們探討「圓內接四邊形對角線交點」對八個切圓的極線組成的網格及其交點的性質，並以其退化結果證明**偽內切圓**與**偽旁切圓**與內心及旁心的關係。最後我們以不同的方式移動外接圓上的點，利用 **Geogebra** 動態繪圖軟體，觀察極線網格交點的軌跡，發現了其軌跡與擺線之間相當有趣的關聯。下圖即為極線網格及 **P** 點在 ΔABC 外接圓上移動時其線網格交點的軌跡。



壹、 研究動機

在高中數學中，課本沒有對垂心這個“心”著墨許多，之後在研讀幾何的時候，讀到了三角形的內心跟三個旁心會組成垂心組。隨後我們得知一個與內切圓有著類似性質的幾何圖形--偽內切圓，便開始研究偽內切圓、偽旁切圓與內心、旁心、垂心的相關性。幸運地，根據偽內切圓、偽旁切圓的相關定理——Mannheim 定理，我們發現極線可以做為連接兩者的橋樑，但其中仍有尚未完備之處，於是進一步將 Mannheim 定理與上述的假設進行推廣，期待能證明他們的關聯性並找出更多相關的內容。

貳、 研究目的

- 一、探討三角形的一個頂點對偽內切圓及偽旁切圓的極線之交點與內心、旁心的關係。
- 二、Mannheim 定理對原三角形一邊或其延長線上任一點的推廣。
- 三、探討將三角形推廣至圓內接四邊形時，Mannheim 定理推廣的應用，及其中各圓極線交點與內心及旁心的關係。
- 四、探討極線網格之交點的軌跡特性。

參、 研究器材與設備

本研究主要利用 Geogebra 電腦動態幾何軟體進行研究問題的幾何實驗，透過實觀察、猜測與驗證，然後提出研究結果並加以證明。

肆、 文獻探討

一、 九點圓定理及垂心組：

【定理 1】

設三角形 ABC 的垂心為 H ， $A_1 = AH \cap BC$ 、 $B_1 = BH \cap CA$ 、 $C_1 = CH \cap AB$ ，
 AB 、 BC 、 CA 中點分別為 A_2 、 B_2 、 C_2 ， AH 、 BH 、 CH 中點分別為 A_3 、 B_3 、 C_3
 則 A_1 、 B_1 、 C_1 、 A_2 、 B_2 、 C_2 、 A_3 、 B_3 、 C_3 九點共圓。

【證明】

由於 A_1 與 A 關於 B_2C_2 對稱，而 $\Delta ABC \sim \Delta A_2B_2C_2$ ，所以 $\angle B_2A_1C_2 = \angle B_2AC_2$
 $= \angle B_2A_2C_2$ ，因此 A_1 在 $\Delta A_2B_2C_2$ 的外接圓上，同理 B_1 、 C_1 也在 $\Delta A_2B_2C_2$

的外接圓上設 H 對於 BC 的對稱點為 H_1 ，則 $\angle BH_1C = \angle BHC = \pi - \angle BAC$ ，

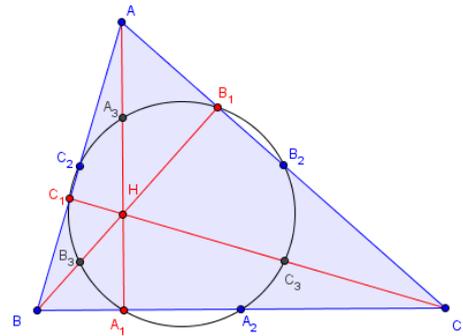
所以 H 對於 BC 的對稱點在 ΔABC 的外接圓上

，同理 H 對於 CA 、 AB 的對稱點也在 ΔABC 的外接圓上，因此 ΔABC 的外接圓為 $\Delta A_1B_1C_1$

的外接圓在位似 $(H, 2)$ 的像，因此 A_3 、 B_3 、 C_3 在

$\Delta A_1B_1C_1$ 故 A_1 、 B_1 、 C_1 、 A_2 、 B_2 、 C_2 、

A_3 、 B_3 、 C_3 九點共圓。



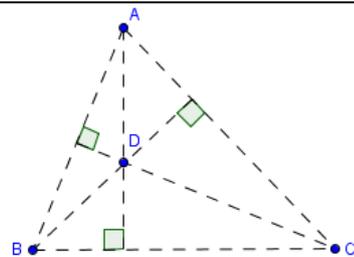
▲圖(4-1)

【定義 1】

垂心組：

由四個點組成的平面圖形，使得其中一點都是另外三點組成的三角形的垂心。

如圖(4-2)， A 、 B 、 C 、 D 四點即構成一垂心組。



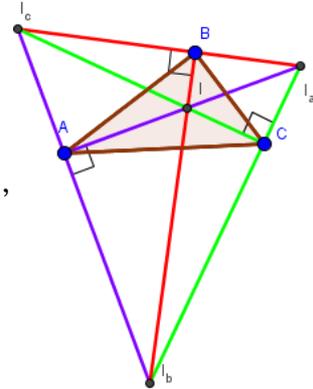
▲圖(4-2)

【性質 1-1】

任意三角形的三個旁心與內心形成一組垂心組。

【證明】

設三角形 ABC 的內心為 I ，旁心為 I_a 、 I_b 、 I_c ，因為對於任意一角，內角平分線和外角平分線垂直，所以 $\overline{AI} \perp \overline{I_b I_c}$ ， $\overline{BI} \perp \overline{I_c I_a}$ ， $\overline{CI} \perp \overline{I_a I_b}$ ，即 I 為 $\Delta I_a I_b I_c$ 的垂心，所以 I 、 I_a 、 I_b 、 I_c 形成一組垂心組。



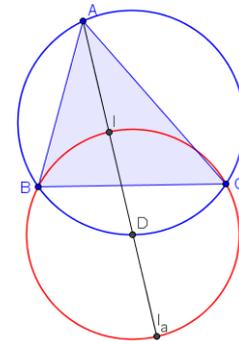
▲圖(4-3)

【性質 1-2】

設 ΔABC 內心為 I ，外接圓為 τ ， \overline{AI} 交 τ 另一點於 D ，則 D 為 ΔBIC 的外心。

【證明】

設 $\angle A$ 的旁心為 I_a ，則 $\angle B I_a I = \frac{\pi}{2} = \angle C I_a I$ ，所以 B 、 I 、 C 、 I_a 四點共圓，且圓心為 $\overline{BI_a}$ 中點，對 $\Delta I_a I_b I_c$ 使用九點圓定理知， $\overline{BI_a}$ 中點在九點圓 τ 上，因此 D 為 ΔBIC 的外心。

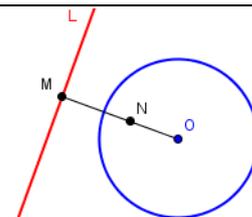


▲圖(4-4)

二、極點與極線：

【定義 2】

對於平面上任一圓，設圓心為 O 、半徑為 r ，及任一不過 O 的直線 L ，設 $OM \perp L$ 於 M ，在直線 OM 上取一點 N 使得 $\overline{OM} \times \overline{ON} = r^2$ (為有向長度)。
則 N 稱為 L 關於圓 O 的極點，而 L 稱為 N 關於圓 O 的極線。



▲圖(4-5)

【性質 2】

若 M 在圓 O 外，設過 M 的圓 O 切線與圓 O 切於 A 、 B 兩點，則 A 、 B 在 M 關於圓 O 的極線 L 上。

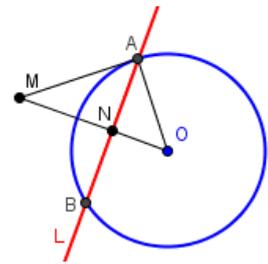
【證明】

設 L 交圓 O 於 A_1 、 B_1 ， $OM \cap L = N$ ，圓 O 半徑為 r ，由極線定義知 $\overline{OM} \times \overline{ON} = r^2$

$= \overline{OA_1}^2$ ，所以 $\triangle ONA_1 \sim \triangle OA_1M$ ， $\angle OA_1M = \angle ONA_1 = \frac{\pi}{2}$ ，

故 OA_1 與圓 O 相切，同理 OB_1 與圓 O 相切，因此 A_1 、 B_1

與 A 、 B 重合，所以 A 、 B 在 M 關於圓 O 的極線 L 上。



▲圖(4-6)

三、曼海姆定理：

【定義 3】

偽內切圓：

與三角形的兩條邊相切，並與三角形的外接圓內切的圓。

位於 $\angle A$ 內的偽內切圓，稱為 A -偽內切圓。

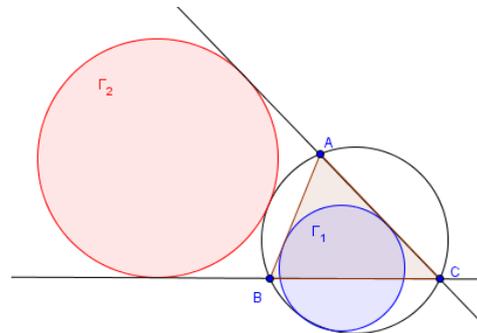
偽旁切圓：

與三角形的兩條邊相切，並與三角形的外接圓外切的圓。

位於 $\angle A$ 內的偽旁切圓，稱為 A -偽旁切圓。

如圖(4-7)，

Γ_1 稱為 A -偽內切圓， Γ_2 稱為 C -偽旁切圓。



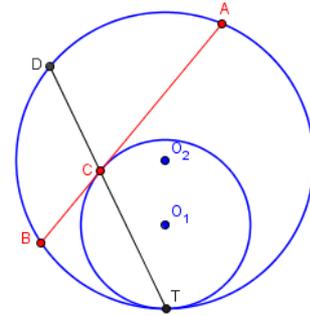
▲圖(4-7)

【引理 3】

設圓 O_1 內切圓 O_2 於 T ，任意一切圓 O_1 的切線 \overline{AB} 交圓 O_2 於 A 、 B ，切圓 O_1 於 C ， $TC \cap$ 圓 $O_2 = D \neq T$ ，則 D 為 \widehat{AB} 的中點。

【證明】

於 D 作圓 O_2 的切線 L ，因為圓 O_1 、圓 O_2 的外位似中心為 T ，故 $L \parallel AB$ ，所以 $\widehat{AD} = \widehat{DB}$ 。



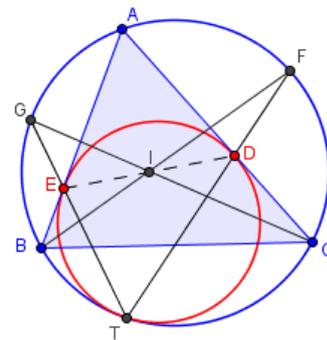
▲圖(4-8)

【定理 3-1】

設 $\triangle ABC$ 內心為 I ，外接圓為 τ ，令 A -偽內切圓與 \overline{AC} 、 \overline{AB} 相切於 D 、 E ，則 I 在 DE 上。

【證明一】

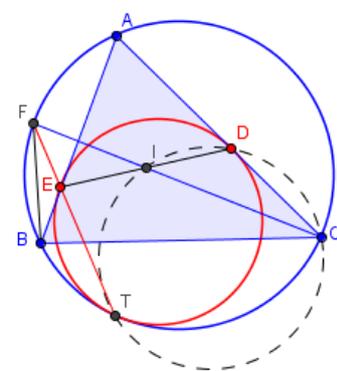
設 τ 與 A -偽內切圓切於 T ， $TD \cap \tau = F \neq D$ 、 $TE \cap \tau = G \neq E$ ，則由帕斯卡定理知， $FT \cap CA$ 、 $TG \cap AB$ 、 $GC \cap BF$ 三點共線，而由【引理 3】知 F 、 G 分別為 \widehat{AC} 、 \widehat{AB} 的中點，故 $I = BF \cap CG$ ，所以 E 、 D 、 I 共線。



▲圖(4-8)

【證明二】

延長 TE 交 τ 另一點於 F ，則由 <引理 1> 可得 F 為 \widehat{AB} 中點，由 $\angle FTB = \frac{1}{2} \angle ACB = \angle FBE$ ，所以 $\triangle FTB \sim \triangle FBE$ ， $\overline{FB}^2 = \overline{FE} \times \overline{FT}$ ，設 $I_1 = \overline{FC} \cap \overline{DE}$ ，又 $\angle TDI_1 = \angle TEB = \pi - \angle FBT = \angle FCT = \angle I_1CT$ ，所以 C 、 D 、 I_1 、 T 四點共圓，而 $\angle FEI_1 = \pi - \angle I_1ET = \pi - \angle CDT = \pi - \angle CI_1T = \angle FI_1T$ ，所以 $\triangle FEI_1 \sim \triangle FI_1T$ ， $\overline{FI_1}^2 = \overline{FE} \times \overline{FT} = \overline{FB}^2$ ，所以 $\overline{FI_1} = \overline{FB}$ ，由【性質 1-2】知， I_1 與 I 重合，又 $\overline{AD} = \overline{AE}$ ，所以 I 為 D 、 E 中點。



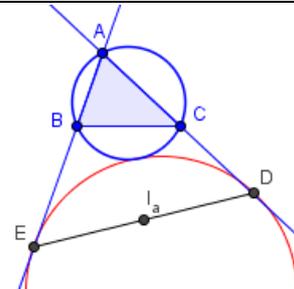
▲圖(4-9)

【定理 3-2】

設 ΔABC 對 A 的旁心為 I_a ，外接圓為 τ ，有一圓 τ' 與 τ 外切於 T ，與 \overline{AC} 、 \overline{AB} 的延長線相切於 D 、 E ，則 I_a 為 D 、 E 中點。

【證明】

類似於【定理 3-1】的證明。



▲圖(4-10)

四、偽內切圓及偽旁切圓的作圖方法：

偽內切圓：作三角形的外接圓 τ ， A 的外角平分線交 τ 於 M ，作 ΔABC 的內心 I 、 ΔABC 對 A 的旁心 I_a ，作 $T = MI \cap \tau \neq M$ 、 $T_a = MI_a \cap \tau \neq M$ ，作三角形的外心 O ， $O' = OT \cap AI$ 、 $O'_a = OT_a \cap AI$ ，則以 O' 為圓心、 $\overline{O'T}$ 為半徑的圓即是偽內切圓。以 O'_a 為圓心、 $\overline{O'_a T_a}$ 為半徑的圓即是偽旁切圓。

【證明】

偽內切圓：

設 A -偽內切圓切 AB 於 F 由【定理 3-1】的證明知， I 、

F 、 B 、 T 四點共圓，故 $\angle BTM = \angle IFA = \frac{\pi}{2} - \frac{\angle BAC}{2}$ ，

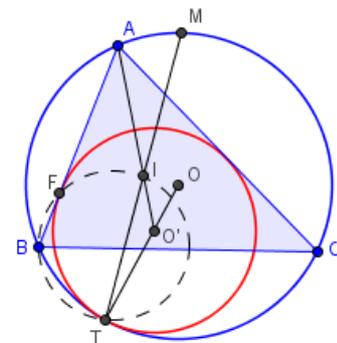
所以 AM 為 $\angle BAC$ 的外角平分線，反過來說，延長 \overline{MI}

與 ΔABC 外接圓圓 O 的交點即為 A -偽內切圓與圓 O 的

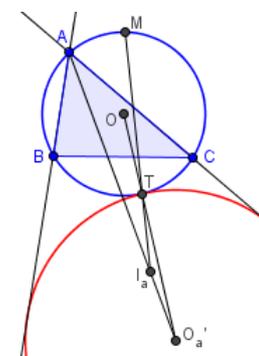
切點，因此 \overline{OT} 過 O' ，又 A -偽內切圓與 \overline{AB} 、 \overline{AC} 相切，故 O'

也過 A 的內角平分線 \overline{AI} ，因此 O' 即為 AI 與 OT 的交點。

偽旁切圓：類似偽內切圓的證明。



▲圖(4-11)



▲圖(4-12)

五、Monge 定理

【定理 5-1】

O_1 、 O_2 、 O_3 為三個相異圓，令 O_1O_2 的外位似中心為 X 、 O_2O_3 的外位似中心為 Y 、 O_1O_3 的外位似中心為 Z ，則 X 、 Y 、 Z 三點共線。

【定理 5-2】

O_1 、 O_2 、 O_3 為三個相異圓，令 O_1O_2 的外位似中心為 X 、 O_2O_3 的內位似中心為 Y 、 O_1O_3 的內位似中心為 Z ，則 X 、 Y 、 Z 三點共線。

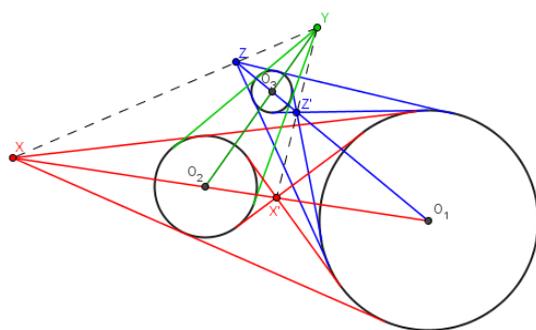
【證明】

易知 O_1 、 O_2 、 X 三點共線， O_2 、 O_3 、 Y 三點共線， O_1 、 O_3 、 Z 三點共線。設 O_1 、

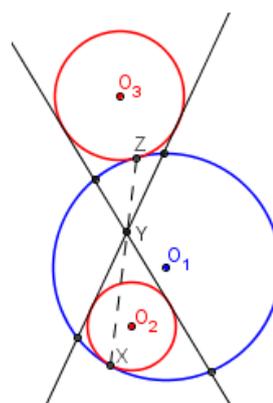
O_2 、 O_3 的半徑分別為 R_1 、 R_2 、 R_3 ，由位似中心定義可知 $\frac{XO_1}{XO_2} = \frac{R_1}{R_2}$ 。同理可得 $\frac{YO_2}{YO_3} = \frac{R_2}{R_3}$ 、

$\frac{ZO_3}{ZO_1} = \frac{R_3}{R_1}$ 。故 $\frac{XO_1}{XO_2} \times \frac{YO_2}{YO_3} \times \frac{ZO_3}{ZO_1} = \frac{R_1}{R_2} \times \frac{R_2}{R_3} \times \frac{R_3}{R_1} = 1$ 。由 Menelaus 逆定理得 X 、 Y 、 Z

三點共線。(若考慮有向線段比，則知【定理 5-1】為三個負數相乘，【定理 5-2】為一個負數)



▲圖(4-13)



▲圖(4-14)

Monge 定理的特殊狀況：

當 O_1O_2 內切、 O_2O_3 外切時，可得 O_1O_2 的切點 X 、 O_2O_3 的切點 Y 及 O_3O_1 其內位似中心 Z 共線，如圖(4-14)。

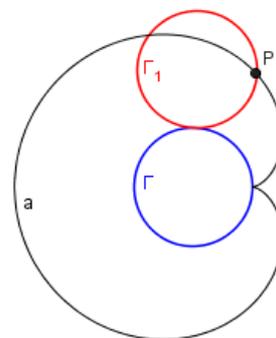
六、外擺線：

【定義 6】

假設有一個定圓 Γ ，若有另一個半徑是 Γ 圓的 $\frac{1}{n-1}$ 倍的 Γ' 圓在上純滾動，則圓周上的一點在純滾動時劃出的軌跡就是一條外擺線。

特別地，當 $n = 2$ 的時候，劃出的擺線稱為心臟線。

如右圖(4-15)， P 為圓 Γ' 的定點， Γ' 在 Γ 上滾動時 P 點的軌跡即為心臟線 a 。



▲圖(4-15)

七、自編名詞定義：

已知直線 L_1, L_2 和圓 O ，那麼對於相切於直線 L_1, L_2 和圓 O 的圓，我們給出如下定義：

【定義 7-1】

$\tau(\widehat{MN}, L_1, L_2) \equiv$ 與 τ 相切於 \widehat{MN} 、依逆時針先切 L_1 再切 L_2 之圓。

【定義 7-2】

$L(\widehat{MN}, L_1, L_2) \equiv$ 以 L 為極點， $\tau(\widehat{MN}, L_1, L_2)$ 為圓做的極線。

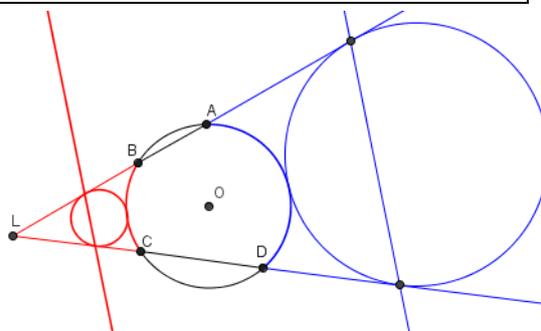
如右圖(4-16)中，

左邊的圓為 $\tau(\widehat{BC}, AB, CD)$ ，

L 對左邊的圓的極線為 $L(\widehat{BC}, AB, CD)$ ；

而右邊的圓為 $\tau(\widehat{AD}, CD, AB)$ ，

L 對右邊的圓的極線為 $L(\widehat{AD}, CD, AB)$ 。

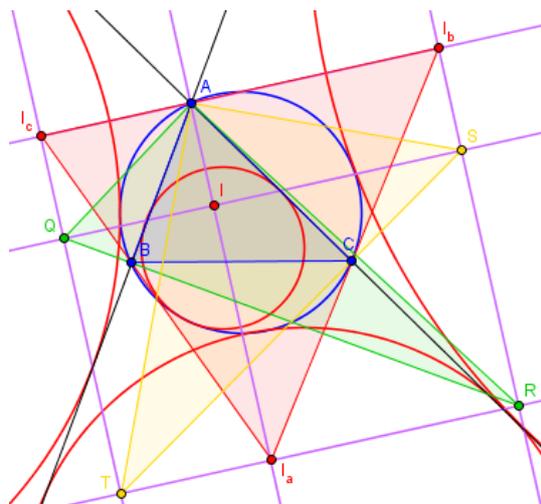


▲圖(4-16)

伍、 研究過程與結果

一、探討三角形切圓的相關性質

如圖(5-1)所示，我們分別作出 A-偽內切圓、A-偽旁切圓、 $\tau(\widehat{AB}, AC, AB)$ 、 $\tau(\widehat{AC}, AC, AB)$ ，再分別畫出 A 對上述四個圓的極線，以及 A 本身在三角形內的兩條角平分線，共形成 6 條線及 9 個交點，藉由 Geogebra 動態繪圖軟體，我們可以歸納出以下性質，並加以證明：



▲圖(5-1)

【性質 6-1】

對 A 的極線與 A 的兩條角平分線形成兩組平行線且兩組平行線正交。

【證明】

因為 A 對四個圓的極線與 A 與該圓圓心連線垂直，即 $\angle BAC$ 內角平分線或外角平分線，又 $\angle BAC$ 的內角平分線及外角平分線互相垂直，故結論成立。

【性質 6-2】

$\triangle ABC$ 旁邊兩個與外接圓相切的圓，A 對這兩個圓的極線會過旁心。

【性質 6-3】

四條極線的交點與 A 形成兩個直角三角形($\triangle AQR$ 及 $\triangle AST$)，其為垂心組的退化情況。

【性質 6-4】

四條極線與角平分線的交點(I, I_a, I_b, I_c)為 $\triangle ABC$ 的內心及三個旁心，因此其為一組垂心組。

【證明】

對於【性質 6-2】、【性質 6-3】、【性質 6-4】

我們將在【結果六】對此進行討論

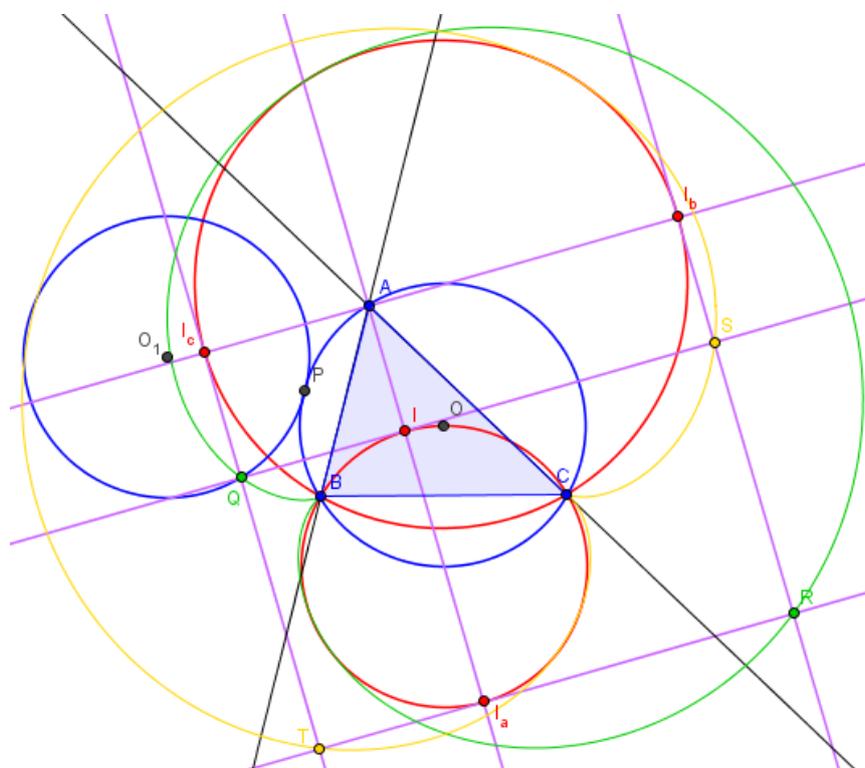
二、移動點 A 時，極線交點形成的軌跡

【性質 7】

當有一個圓 τ ，三角形三個頂點 A、B、C 皆在 τ 上，且 τ 、B、C 固定時，移動 A，則極線交點的軌跡為兩條心臟線。

【證明】

如圖(5-2)所示，設 Q 為其中一個極線交點，O 為 τ 的圓心，作 \widehat{AB} 中點 P，由【性質 1-2】，我們可以得到 P 為 A、 I_a 、B、I 的外接圓圓心，又 A、 I_a 、Q、I 四點共圓，所以 A、P、Q 共線且 $\overline{AP} = \overline{PQ}$ ，延長 OP 至 O_1 ，使 $\overline{OP} = \overline{PO_1}$ ，因此 A、O、Q、 O_1 為平行四邊形，所以 $\triangle AOP \cong \triangle QO_1P$ ，作 O_1 為圓心、 $\overline{PO_1}$ 為半徑的圓 τ_1 ，由相似我們可以得到 τ_1 與 τ 相切，且半徑相等，考慮當 A 在圓上移動時，若其圓心角逆時針移動 2α 時，則 P 的圓心角逆時針移動 α ，而 Q 的圓心角逆時針移動 2α ，故這符合純滾動，即 Q 的軌跡為心臟線，而 R、S、T 則同理可證。



▲圖(5-2)

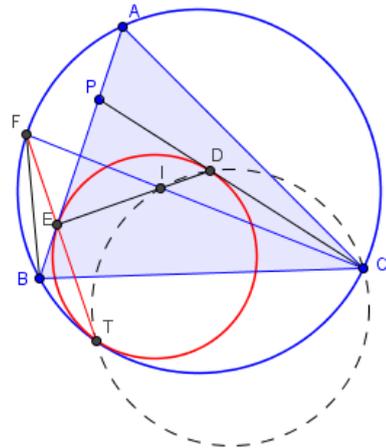
三、Mannheim 定理的推廣

【推廣 8-1】

設 $\triangle ABC$ 內心為 I ，外接圓為 τ ，在 \overline{AB} 上取任意一點 P ，有一圓 τ' 與 τ 內切於 T ，與 \overline{PC} 、 \overline{PB} 相切於 D 、 E ，則 I 在 DE 上。

【證明】

延長 \overline{TE} 交 τ 另一點於 F ，由【引理 3】可得 F 為 \widehat{AB} 中點，由 $\angle FTB = \frac{1}{2} \angle ACB = \angle FBE$ ，所以 $\triangle FTB \sim \triangle FBE$ ， $\overline{FB}^2 = \overline{FE} \times \overline{FT}$ ，設 \overline{FC} 交 \overline{DE} 於 I_1 ，又 $\angle TDI_1 = \angle TEB = \pi - \angle FBT = \angle FCT = \angle I_1CT$ ，所以 C 、 D 、 I_1 、 T 四點共圓， $\angle FEI_1 = \pi - \angle I_1ET = \pi - \angle CDT = \pi - \angle CI_1T = \angle FI_1T$ ，所以 $\triangle FEI_1 \sim \triangle FI_1T$ ， $\overline{FI_1}^2 = \overline{FE} \times \overline{FT} = \overline{FB}^2$ ，所以 $\overline{FI_1} = \overline{FB}$ ，由【性質 1-2】知， I_1 與 I 重合。



▲圖(5-3)

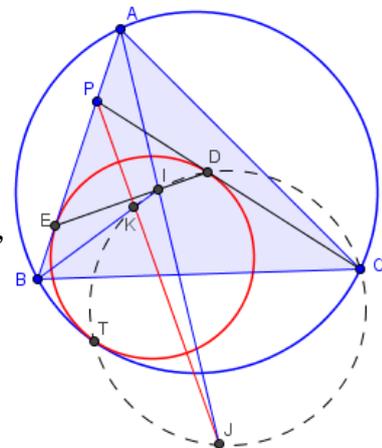
知， I_1 與 I 重合。

設 $\triangle ABC$ 的外接圓為 τ ，在 \overline{AB} 上取任意一點 P ， K 、 J 為 $\triangle PBC$ 的內心及 $\triangle PAC$ 關於 A 的旁心， I 為 $\triangle ABC$ 的內心，有一圓 τ' 與 τ 內切於 T ，與 \overline{PC} 、 \overline{PB} 相切於 D 、 E ，則 C 、 D 、 I 、 T 、 K 、 J 六點共圓。

【證明】

由【推廣 8-1】的證明可知 C 、 D 、 I 、 T 四點共圓。
 K 在圓 $CDIT$ 上：連 BI 交圓 $CDIT$ 於 K 。因為 I 為內心， $\angle EBI = \angle KBC$ 。又因 $\angle CKI = \angle PDE = \angle PED$ ，所以 $\angle BEI = \angle BKC$ ，故 $\triangle BEI \sim \triangle BCK$ 。由 $\triangle BEI \sim \triangle BCK$ 可知 $\angle PCK = \angle BIE = \angle BCK$ ，得證 K 為 PBC 的內心。

J 在圓 $CDIT$ 上：類似於 K 在圓 $CDIT$ 上的證明。



▲圖(5-4)

四、Mannheim 定理推廣的應用

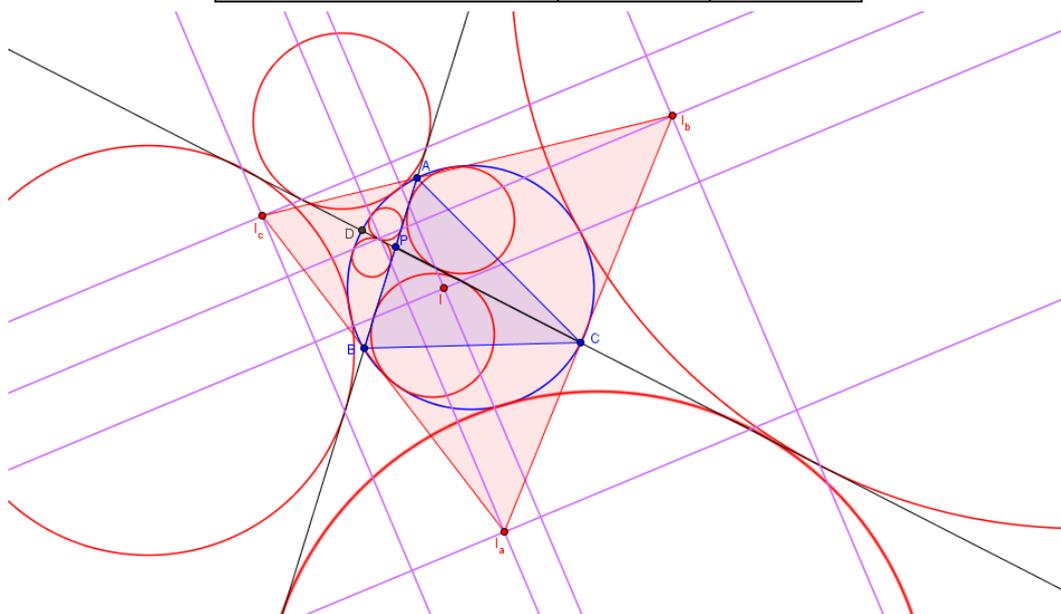
藉由觀察可以知道，圖(5-4)中與 PB 、 PC 、 τ 相切的圓共有 8 個，這時可分兩種情況： P 在線段 \overline{AB} 上或線段 \overline{AB} 外，如圖(5-5)、圖(5-6)。

【情況 1】

當 P 在線段 \overline{AB} 上時，延長 \overline{CP} 交 τ 於 D ，則 8 個相異圓按照【定義 7-1】及【定義 7-2】的方式分類為下表(5-1)：

▼表(5-1)

極線過的內心或旁心	(PC, AB)	(AB, PC)
τ' 切 τ 於 \widehat{AD}	I_b	I_c
τ' 切 τ 於 \widehat{DB}	I_c	I_a
τ' 切 τ 於 \widehat{BC}	I	I_a
τ' 切 τ 於 \widehat{CA}	I_b	I



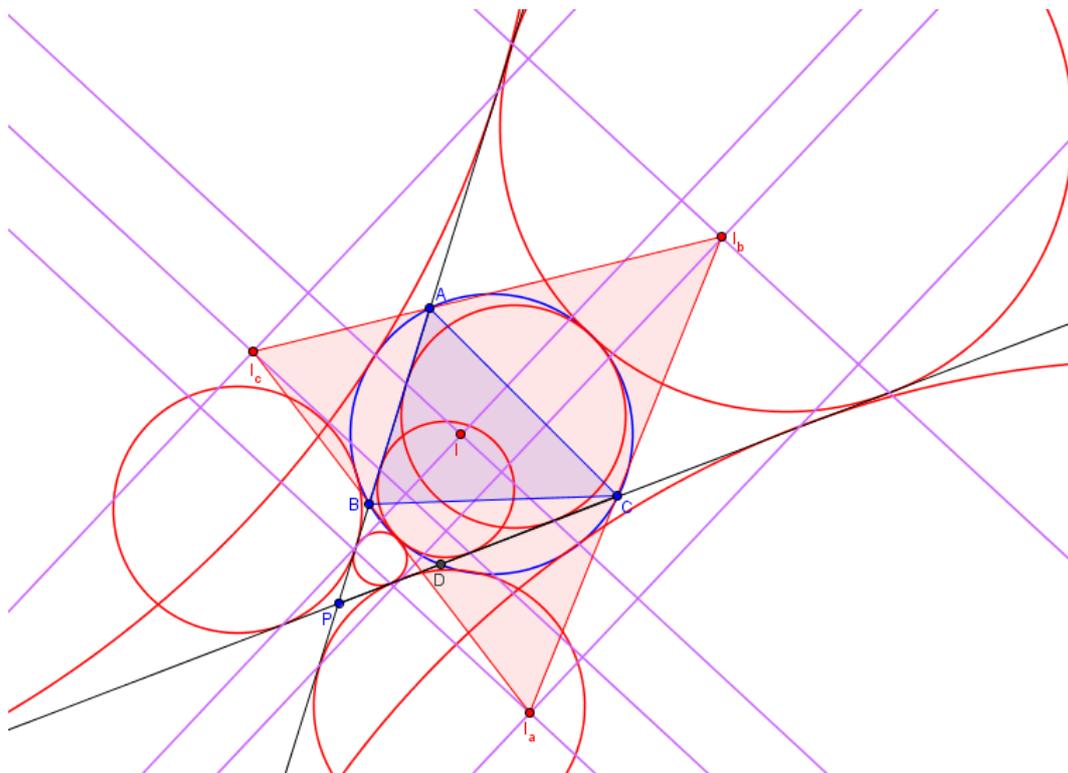
▲圖(5-5)

【情況 2】

當 P 在線段 \overline{AB} 外時，延長 \overline{CP} 交 τ 於 D，則 8 個相異圓按照【定義 7-1】及【定義 7-2】的方式分類為下表(5-2)：

▼表(5-2)

極線過的內心或旁心	(PC, AB)	(AB, PC)
τ' 切 τ 於 \widehat{AB}	I	I_c
τ' 切 τ 於 \widehat{BD}	I_c	I_A
τ' 切 τ 於 \widehat{DC}	I_B	I_A
τ' 切 τ 於 \widehat{CA}	I_B	I



▲圖(5-6)

五、圓內接四邊形中的 Mannheim 定理推廣

由【結果四】，我們可以得到以下性質：

【性質 9-1】

ΔABC 的外接圓為 τ ，任取 τ 上一點 D 連結 AD 交 BC 於 P ，作與 AD 、 BC 、 τ 相切的圓 τ' ，這樣的圓我們可以得到 8 個。

【性質 9-2】

無論 D 位於 \widehat{AB} 、 \widehat{BC} 、 \widehat{CA} 何者上，我們皆可以得到

$P(\widehat{AB}, AD, BC)$ 、 $P(\widehat{AB}, BC, AD)$ 、 $P(\widehat{CD}, AD, BC)$ 、 $P(\widehat{CD}, BC, AD)$

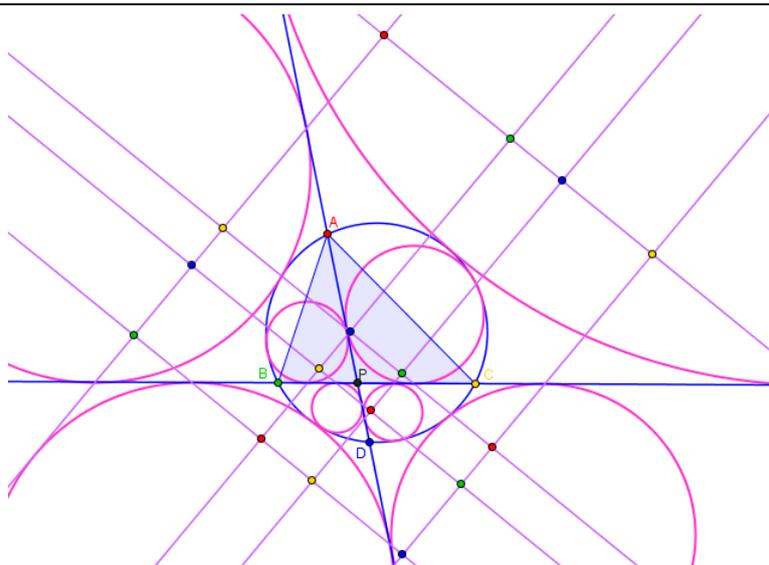
為四條平行線，

同樣地 $P(\widehat{AC}, AD, BC)$ 、 $P(\widehat{AC}, BC, AD)$ 、 $P(\widehat{BD}, AD, BC)$ 、 $P(\widehat{BD}, BC, AD)$

也為四條平行線。

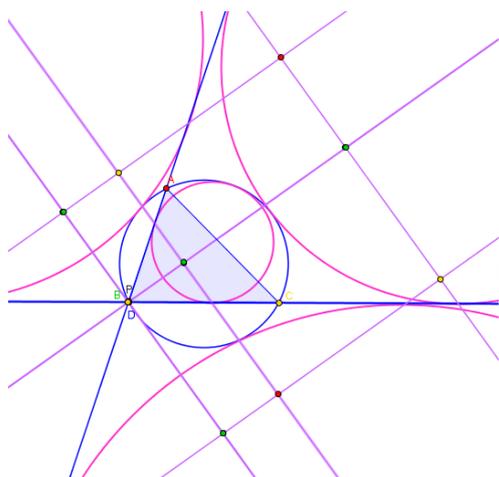
【性質 9-3】

【性質 9-2】中的八條線共有 16 個交點，當中會有四組垂心組，分別為 ΔABC 、 ΔBCD 、 ΔCDA 、 ΔDAB 的內心和三個旁心。

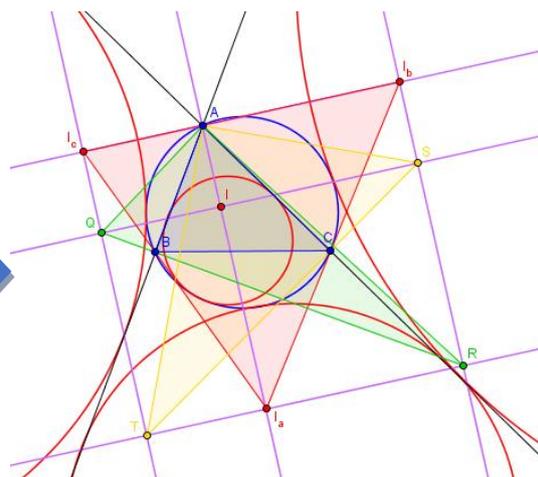


▲圖(5-7)

六、將圓內接四邊形退化為三角形



▲圖(5-8)



▲圖(5-9)

將圓內接四邊形 $ABCD$ 中的 B 與 D 重合，並將 $\triangle BCA$ 轉為 $\triangle ABC$ 後，即為【結果一】的情形，因此以下將對【結果一】中的性質進行證明。

【性質 6-2】

$\triangle ABC$ 旁邊兩個與外接圓相切的圓， A 對這兩個圓的極線會過旁心。

【證明】

四條平行線變為三條且其中兩條合併為 $\angle A$ 的內角平分線或外角平分線。

【性質 6-3】

四條極線的交點與 A 形成兩個直角三角形。

【證明】

$\triangle AQR$ 與 $\triangle AST$ 為退化過後的垂心組，因為原圓內接四邊形 $ABCD$ 中的 B 與 D 重合可得： $\triangle BQR$ 和 $\triangle BST$ 的垂心 D 與 B 重合 $\Leftrightarrow \triangle BQR$ 和 $\triangle BST$ 為直角三角形。

【性質 6-4】

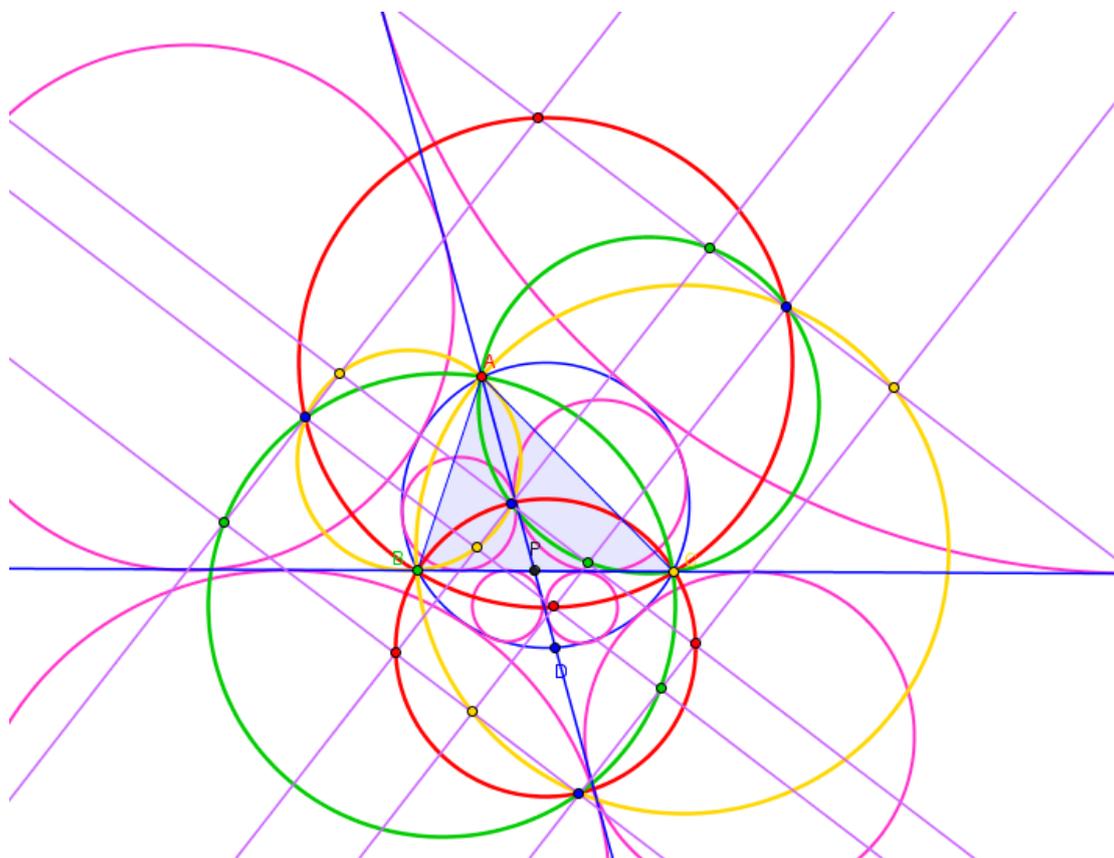
四條極線與角平分線的交點(I 、 I_a 、 I_b 、 I_c)為 $\triangle ABC$ 的內心及三個旁心，因此其為一組垂心組。

【證明】

因為原圓內接四邊形 $ABCD$ 中的 B 、 D 重合，所以 $\triangle BCA$ 與 $\triangle DCA$ 的內心及旁心亦重合，因此極線交點即為垂心組(I 、 I_a 、 I_b 、 I_c)。

七、當圓內接四邊形一點在移動時，極線網格交點的軌跡

將 D 在 τ 上移動，記錄 16 個極線交點的軌跡，可發現 $\triangle ABC$ 內心及旁心所形成的垂心組不動，其餘 12 個點中每兩個點為一組，而每一組的軌跡成一圓，因此共組成 6 個過 ABC 三點中兩點的圓，如下圖(5-10)。



▲圖(5-10)

八、從另一個角度看四組垂心組

上面得到的四組垂心組能連結到這樣的命題：

【性質 11】

若 A 、 B 、 C 、 D 構成一垂心組，先從四個點連出任一方向的平行線，再由四點做出與該方向垂直的四條線(他們四條本身也互相平行)，則一共有 8 條線。形成 16 個交點(除 A 、 B 、 C 、 D 外共 12 個)，則另外 12 個點必能形成另外對稱的三組垂心組。

我們先證明以下引理

【引理 11】

對於平面上任意四點 A、B、C、D， \overline{AB} 垂直於 $\overline{CD} \Leftrightarrow \overline{AC}^2 - \overline{BC}^2 = \overline{AD}^2 - \overline{BD}^2$ 。

【證明】

$$(\rightarrow) \overline{AC}^2 - \overline{BC}^2 = (\overline{AP}^2 + \overline{PC}^2) - (\overline{BP}^2 + \overline{PC}^2) = \overline{AP}^2 - \overline{BP}^2 =$$

$$(\overline{AP}^2 + \overline{PD}^2) - (\overline{BP}^2 + \overline{PD}^2) = \overline{AD}^2 - \overline{BD}^2$$

(\leftarrow) 設 C 對 \overline{AB} 的垂足為 P，D 對 \overline{AB} 的垂足為 P'，

$$\text{則 } \overline{AC}^2 - \overline{BC}^2 = (\overline{AP}^2 + \overline{PC}^2) - (\overline{BP}^2 + \overline{PC}^2) = \overline{AP}^2 - \overline{BP}^2，$$

$$\overline{AD}^2 - \overline{BD}^2 = (\overline{AP}'^2 + \overline{PD}'^2) -$$

$$(\overline{BP}'^2 + \overline{PD}'^2) = \overline{AP}'^2 - \overline{BP}'^2，$$

$$\text{因此 } \overline{AB} \cdot (\overline{AP} - \overline{BP}) = (\overline{AP} + \overline{BP})(\overline{AP} - \overline{BP}) = \overline{AP}^2 - \overline{BP}^2$$

$$= \overline{AP}'^2 - \overline{BP}'^2 = (\overline{AP}' + \overline{BP}')(\overline{AP}' - \overline{BP}') = \overline{AB}(\overline{AP}' - \overline{BP}')$$

$$\rightarrow \overline{AP} \cdot \overline{BP} = \overline{AP}' \cdot \overline{BP}' \rightarrow 2\overline{BP} = \overline{AB} - (\overline{AP} - \overline{BP})$$

$$= \overline{AB} - (\overline{AP}' - \overline{BP}') = 2\overline{BP}' \rightarrow P \text{ 與 } P' \text{ 重合，所以 } \overline{AB} \text{ 垂直於 } \overline{CD}$$

回到原命題

【證明】

如圖(5-10)中的 (A_1, B_1, C_1, D_1) 、 (A_2, B_2, C_2, D_2) 、 (A_3, B_3, C_3, D_3)

在此我們引用 **【引理 11】**，所以可以得到：

$$\overline{AB} \perp \overline{CD} \Leftrightarrow \overline{AC}^2 - \overline{BC}^2 = \overline{AD}^2 - \overline{BD}^2$$

$$\Leftrightarrow [c^2 + (d+e+f)^2] - [f^2 + (a+b+c)^2] = (b^2 + d^2) - (a^2 + e^2)$$

$$\Leftrightarrow (a+b)(b+c) = (d+e)(e+f)$$

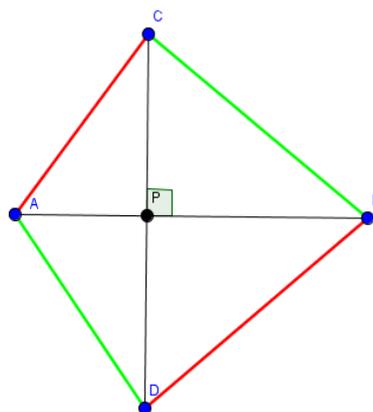
同理， $\overline{A_1B_1} \perp \overline{C_1D_1}$ 、 $\overline{A_2B_2} \perp \overline{C_2D_2}$

、 $\overline{A_3B_3} \perp \overline{C_3D_3}$ 皆等價於 $(a+b)(b+c) =$

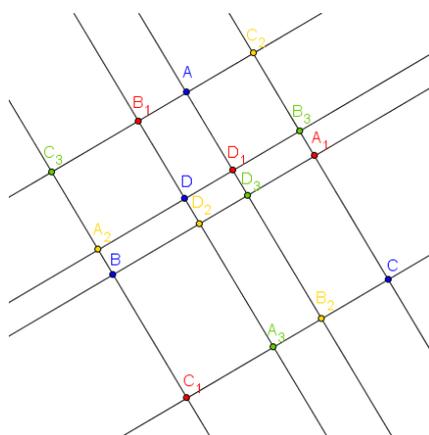
$$(d+e)(e+f)，\text{ 所以 } \overline{AB} \perp \overline{CD} \Leftrightarrow \overline{A_nB_n} \perp \overline{C_nD_n}$$

$(n=1, 2, 3)$ ，同理， $\overline{AC} \perp \overline{BD} \Leftrightarrow \overline{A_nC_n} \perp \overline{B_nD_n} (n=1, 2, 3)$

所以 (A_1, B_1, C_1, D_1) 、 (A_2, B_2, C_2, D_2) 、 (A_3, B_3, C_3, D_3) 為三組垂心組。



▲圖(5-11)



▲圖(5-12)

陸、 結論

正如研究主題<相切圓與巧合點的隱密關聯>，我們探討了圓內接四邊形對角線交點對八個切圓的極線組成的圖形，並以其退化結果證明偽內切圓與偽旁切圓跟內心與旁心的關係。而後藉由 Geogebra 繪圖軟體移動四邊形的點，觀察極線網格交點的軌跡，得出更多相切圓跟內心與旁心之間的關聯性。以下整理我們的結論：

一、 對任意 $\triangle ABC$ ， A 對以 A 為頂點作出的四個切圓的極線網格性質(見 P.11、P.12)：

- (一) 四條極線與 A 的兩條角平分線形成的兩組平行線正交。
- (二) 四條極線的四個交點與 A 可以形成兩個以 $\angle A$ 為直角的直角三角形。
- (三) 四條極線與角平分線的交點為三角形的內心及三個旁心，因此其為一組垂心組。
- (四) 固定三角形的外接圓及兩頂點，使另外一頂點在外接圓上移動，對移動的頂點照上述定義做切圓，其四條極線的交點的軌跡形成的圖形為兩條心臟線。

二、 **Mannheim 定理的推廣(見 P.13)：**

將過 Mannheim 定理推廣後，我們得知三角形的一頂點作任一直線，作圓與該直線、該對邊及三角形的外接圓相切，則該圓對兩條線的切點之連線過三角形之內心或旁心。

三、 圓內接四邊形對角線交點對八個切圓的極線網格的性質(見 P.14~P.16)：

- (一) 八條極線為兩組平行線且彼此正交。
- (二) 四邊形的頂點中任取三個共可形成四個三角形，這四個三角形的內心與旁心為極線交點中的四個點，因此形成四組垂心組。
- (三) 固定四邊形的三個頂點，使另外一頂點在外接圓上移動，則極線交點中有四點為固定之三點形成的三角形的內心或旁心，這四點亦固定不動，其他 12 個交點之軌跡則各為半圓，且兩兩成對組成圓，共可組成六個圓。

柒、 未來展望

- 一、將偽內切圓與偽旁切圓的其他有趣性質進行推廣。
- 二、將圓內接四邊形推廣至圓內接多邊形並找出相切圓極線的更多關係。
- 三、改變條件觀察極線交點的軌跡，如：將圓內接四邊形推廣為圓內接多邊形、稱加動點、改變固定點。目前有些軌跡猜測為次擺線但尚未論證。
- 四、將圖形推廣至立體圖形，研究四面體的內切球與旁切球等切球的相關性質。

捌、 參考資料及其他

[1]、黃家禮, 幾何明珠, 2000 年, 九章出版社

[2]、沈文选, 张垚, 冷岗松, 奥林匹克数学中的几何问题-奥赛经典, 2009 年, 湖南师大出版社

【評語】 050406

Mannheim 定理是一個相當有名的古老幾何問題，建議多蒐集相關文獻，將此定理做更多推廣及延伸，會是篇更完整的作品。