中華民國第56屆中小學科學展覽會
作品說明書

高級中等學校組　數學科

最佳團隊合作獎

050405

即刻救援

學校名稱：臺北市立中山女子高級中學

作者：	指導老師：
高二 蘇琪 高二 王宜婷	林世哲

關鍵詞：燃燒數、火距、鄰域

摘要

筆者將 2005 亞太數學奧林匹亞(APMO)試題第四題，延伸題幹情境，將「一個在邊界上之起火點」的條件推廣至「任意位置之多個起火點」，並討論單位時間內搶救數大於 1、改變棋盤條件及改變火勢蔓延方式等情況的燃燒數，再推廣至空間系統。在每一種情境下，試著找出最佳的搶救方法、歸納最小燃燒數的規律並證明其皆為最佳的策略，而後發現當起火點數(f)為 s 個，單位時間內搶救數(d)為 1 時，燃燒總數$b = k(n-k) + (n+1)(h+s)$；d 為 2 時，火勢被三面包圍之燃燒總數為$b = k(k+s) + \left(4s + 1 - \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil\right)\left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil + \left(2s - \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil\right)\left\lceil \frac{k+1}{2} - \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil \right\rceil + \frac{s^2-s}{2}$;而其他條件下，最佳搶救方法的燃燒規律、燃燒數皆有相關性。

壹、　研究動機

在一次的專題討論課程中，老師推薦一些國內外數學競賽試題的網站，提供尋找研究題目的機會，透過探索後，發現 2005 亞太數學奧林匹亞(APMO)試題中一個令我們覺得新奇而且活潑的題目，內容是關於生活中的救火危機處理，在了解及推導原題解法後，我們也嘗試改變部分因素，繼續相關的研究和發展。原題如下：

在一個小鎮有 n×n 間房子，而這些房子以坐標(i,j)表示，其中 1≤i, j≤n，且坐標(1,1)表示頂端左上方的房子。在時間 0 時，位於坐標(1,c)的房子著火，其中 c≤ $\frac{n}{2}$。隨後在每一個時間區間[t,t+1](t為非負整數)，消防隊員搶救一間尚未著火的房子，然而在時間 t 時，火苗擴散到所有未搶救到的鄰域。一旦房子被搶救，則它將一直保持原狀。當火苗不再擴散時，搶救過程就算結束。請問：至多有多少間房子能被消防隊員搶救？若$|i-h| + |j-k| = 1$則稱坐標(i,j)的房子為坐標(h,k)的房子之鄰域。

貳、　研究目的

一、 原題討論。

二、 改變起火點位置、個數及單位時間內的搶救數，並找出搶救規則及一般式。

三、 改變棋盤條件。

四、 討論火勢蔓延方式的改變對於搶救數及燃燒數的影響。

五、 將起火點位置、個數、單位時間內的搶救數⋯等改至空間討論。

參、　研究設備及器材

硬體：筆、電腦；軟體：Geogebra。

肆、　研究過程

一、原題討論

(一) 名詞定義

1. 若$|i-1|+|j-c|=t$表示坐標(i,j)的房子與火源的距離為 t(以下簡稱為火距 t)。
2. 若$|i-h|+|j-k|=1$則稱坐標(i,j)的房子為坐標(h,k)的房子之鄰域，並以 $N=\{n_{ij}||i-h|+|j-k|=1\}$代表一坐標$(h,k)$之鄰域形成的集合
3. $d(t)$：0~t 時間內(by time t)火距為 t 的房子之集合中，被搶救的房子個數。
4. $p(t)$：0~t 時間內(by time t)火距大於 t 的房子之集合中，被搶救的房子個數。
5. $s(t)$：在第 t 時間(at time t) 火距為 t 的房子之集合中，未燃燒房子的個數。
6. 最佳策略：在搶救過程結束後，使被燃燒的房子總數為最小值之搶救方法，稱為最佳策略。

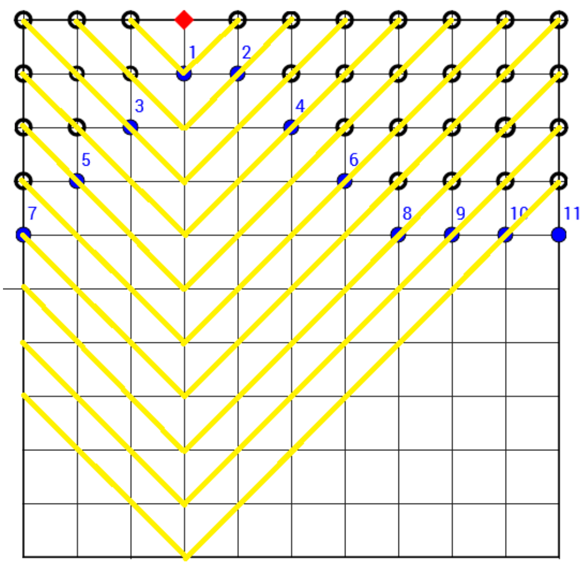
(二) 解題

在時間 t=0 時，位於坐標(1,c)的房子著火，其中$c\leq\frac{n}{2}$，經過多次測試及觀察，發現一個最佳策略，依下列的搶救順序便可達成：

(2,c),(2,c+1);(3,c-1),(3,c+2);(4,c-2),(4,c+3)⋯;(c+1,1),(c+1,2c);

(c+1,2c+1);(c+1,2c+2)⋯;(c+1,n)

如圖 1 為 n=11 且 c=4 的情形。以◆表示起火的房子；以●表示被搶救的房子，以○表示燃燒的房子。



(圖 1)

而在此策略下，各行被搶救的房子數為：

第 c、c+1 行有 n−1 間房子被搶救；第 c-1、c+2 行有 n-2 間房子被搶救⋯

第 1、2c 行有 n-c 間房子被搶救；第 n-2c+1、⋯、n 行(共 n-2c 行)有 n-c 間房子被搶救

將上述的情形相加，可得：

$$2[(n-1)+(n-2)+\cdots+(n-c)]+(n-2c)(n-c)=n^2+c^2-nc-c$$

經試驗後，發現此方法可使最多房子獲得搶救，且經觀察及歸納得到下列不等式：

$$p(t)+\sum_{i=1}^{t} d(i)\le t\ ,\ p(t+1)+d(t+1)\le p(t)+1$$

利用此二不等式證明

[定理一] 對所有 $t\in[1,n-1]$恆有 $s(t)\le t-p(t)\le t$。

當 t=1 時，$s(1)\le 1-p(1)\le 1$明顯成立；假設 t=k 時上式成立，

在 t=k+1 時，在任意$(k-p(k)+1)$間房子的鄰域之聯集$N_1\cup N_2\cup\ldots\cup N_{(k-p(k)+1)}$至少包含在火距為 k 的$(k-p(k)+1)$個房子。因 $s(k)\le k-p(k)$，在時間 k 時，這些房子的其中一間正著火，因此，在 t=k+1時，至多有$(k-p(k))$間房子其鄰域沒有著火。

故：$s(k+1)\ \le k-p(k)+d(k+1)=(k+1)-(p(k)+1-d(k+1))$

$\le(k+1)-p(k+1)$　得證

經由上述的策略得知：在任何策略下，在火距小於、等於(n-1)的房子中，能被搶救的房子數至多為:$1+2+\cdots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}=C_2^n$。

此外，在火距大於(n-1)的房子中，根據上述的策略：每一間房子都能被搶救，共有：

$\{(c-1)+[(c-1)-1]+\cdots+1\}+[(n-c)+(n-c-1)+\cdots+1]$間房子。

故在最佳策略下，搶救最多的房子為：

$C_2^n+\{(c-1)+[(c-1)-1]+\cdots+1\}+[(n-c)+(n-c-1)+\cdots+1]$

$=n^2+c^2-nc-c$。

二、改變起火點位置、個數及單位時間內的搶救數

(一) 名詞定義：

1. 坐標化：將房子位置表示為(h,k)、小鎮大小以(n+1)×(n+1)表示，即由 n×n 個單位正方形

組成的棋盤，並將最左下方的房子表示為(0,0)，以此類推。

2. b：被燃燒的房子總數、f：起火點個數、d：單位時間內搶救的房子總數。

(二) 當 f=1 時，針對 b 作討論

1. d=1：起火點為(h,k)且 $h \geq k$，因為單位時間搶救數的限制，在此狀況下只能阻擋其中一面的火勢，故直接使用原題之搶救策略。

以n=5為例，由觀察得到：

若起火點為(0,0)，則$b = 6$ (圖2-2-1)

若起火點為(1,0)，則$b = 6 + (6-2)$ (圖2-2-2)

若起火點為(1,1)，則$b = 6 + (6-2) + 6 \times 1$ (圖2-2-3)

歸納可得被燃燒的房子總數：

$$b = [(n+1) + (n-1) + (n-3\,) + \cdots + (n-2h+1) + (n+1)k]$$

$$= (n+1)k + \sum_{t=0}^{h}(n-2t+1)$$

$$= h(n-h) + (n+1)(k+1)$$

且將原題之總搶救數$(n^2 + c^2 - nc - c)$套用至此狀況，故此情境下的總搶救數為

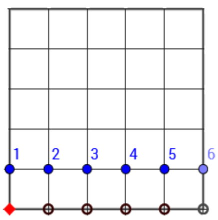
$$(n+1)^2 + (h+1)^2 - (n+1)(h+1) - (h+1) - (n+1)k$$

$$= n^2 - nk - nh + n - k - h + h^2$$

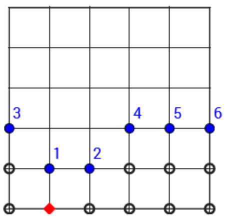
得到 $b = (n+1)^2 - (n^2 - nk - nh + n - k - h + h^2 + h)$

$$= nk + nh + n + k - h^2 + 1 = h(n-h) + (n+1)(k+1)$$

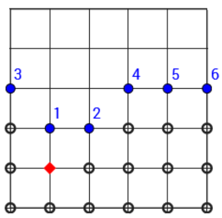
故確定以上搶救方法為最佳策略。



(圖 2-2-1)



(圖 2-2-2)



(圖 2-2-3)

2. d=2：

(1) 由觀察得到：

若起火點為(0,0)，則 b=1；

若起火點為(1,1)，則 b=4。(圖 2-2-4)

若起火點(h,k)，$h,k \geq 2$ 且 $h \geq k$時

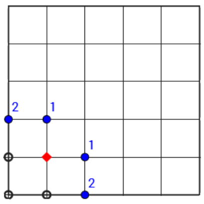
當$k = 0$，則b=2

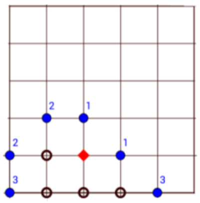
當$k = 1$，則b=5　(圖 2-2-5)

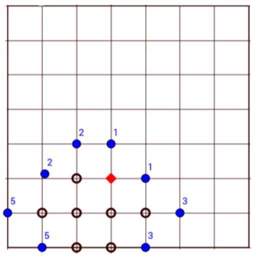
當$k = 2$，則b=8　(圖 2-2-6)

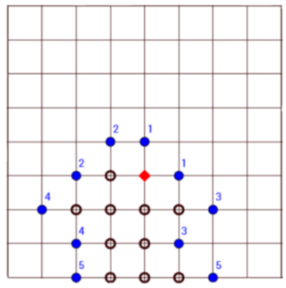
當$k = 3$，則b=11　(圖 2-2-7)

歸納得到 b=3k+2。


(圖 2-2-4)


(圖 2-2-5)


(圖 2-2-6)


(圖 2-2-7)

經觀察得到下列不等式：

$p(t) + \sum_{i=1}^{t} d(i) \leq 2t$ ，$p(t+1) + d(t+1) \leq p(t) + 2$

利用此兩不等式證明

[定理二] 對所有 $t \in [2, k+2]$恆有 $s(t) \leq 4t - 3 - p(t) \leq 4t - 3$，且 $s(1) \leq 2$

當 t=2 時，$s(2) \leq 5$成立；假設 t =a 時，$s(a) \leq 4a - 3 - p(a) \leq 4a - 3$成立。

在 t=a+1 時，在任意$(4a - 3 - p(a))$間房子的鄰域之聯集$N_1 \cup N_2 \cup \ldots \cup N_{(4a-3-p(a))}$至少包含在火距為 a 的$(4a - 3 - p(a))$個房子。因 $s(a) \leq 4a - 3 - p(a)$，在時間 a 時，這些房子的其中一間正著火，因此，在 t=a+1時，至多有 $4a - 3 - p(a)$間房子其鄰域沒有著火。故：

$$s(a+1) \leq 4a - 3 - p(a) + d(a+1) = (4a - 1) - [p(a) + 2 - d(a+1)]$$

$$\leq (4a + 1) - p(a+1) \leq 4(a+1) - 3 - p(a+1)$$

$$\leq 4(a+1) - 3 \text{ 得證}$$

經由上述的策略得知(起火點(h,k)，$h \geq k$)：

a. 當$h \geq k + 2$ 時，在任何策略下，在火距小於、等於(k+2)的房子中能被搶救的房子數至多為$2 + [5 + 9 + \cdots + 4(k+2) - 3] = 2 + (2k+5)(k+1)$

此外，在火距大於(k+2)的房子中，根據上述的策略：每一間房子都能被搶救，則

$b=[4+8+\cdots+4(k+2)+1-4]-[2+(2k+5)(k+1)]=3k+2$ (圖 2-2-8)

b. 當 $h=k+1$ 時，因火距為 $(k+1)$ 的房子已觸及棋盤左方邊界，所以在火距 $t=k+2$ 的房子中，$s(t)\le 4t-4=4(k+2)-4$；故在任何策略下，在火距小於、等於(k+2)的房子中能被搶救的房子數至多為

$2+[5+9+\cdots+4(k+1)-3]+4(k+2)-4=2k^2+7k+6$

此外，在火距大於(k+2)的房子中，根據上述策略：每一間房子都能被搶救，則

$b=[4+8+\cdots+4(k+2)+1-4-1]-(2k^2+7k+6)=3k+2$ (圖 2-2-9)

c. 當 $h=k$ 時，因火距 k 已觸及棋盤左方邊界，所以在火距 $t=k+1$ 的房子中，$s(t)\le 4t-4=4(k+1)-4$；在火距 $t=k+2$ 的房子中，$s(t)\le 4t-7=4(k+2)-7$；故在任何策略下，在火距小於、等於(k+2)的房子中能被搶救的房子數至多為

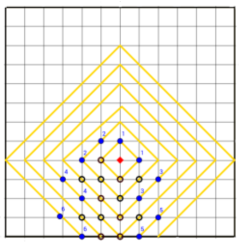
$2+[5+9+\cdots+4k-3]+[4(k+1)-4]+[4(k+2)-7]=2k^2+7k+3$

此外，在火距大於(k+2)的房子中，根據上述的策略：每一間房子都能被搶救，

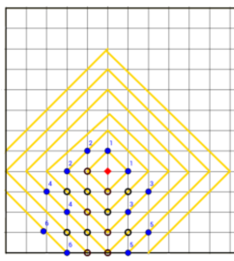
則 $b=[4+8+\cdots+4(k+2)+1-4-1-3]-(2k^2+7k+3)=3k+2$

(圖 2-2-10)

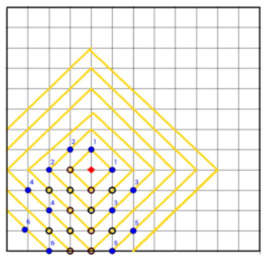
由以上 a、b、c 確定上述的搶救方法為最佳策略。



(圖 2-2-8)



(圖 2-2-9)

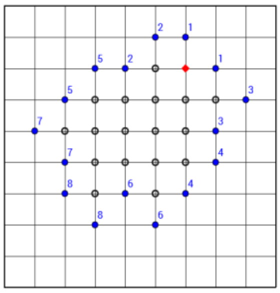


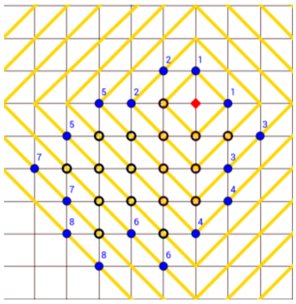
(圖 2-2-10)

(2) 當 k 增加時，若 $h\ge k\ge 6$，在第一~三個單位時間的搶救方法與上述(1)之搶救方法相同，而第四個單位時間之後搶救策略有些許的變化(圖 2-2-11、2-2-12)，且能四面包圍住火勢：b=18；各火距中的搶救關係如下：

火距	總房子數	=	未燃燒數	+	燃燒數	，	燃燒數	=	可能燃燒數	-	搶救數
t=1	4	=	2	+	2	，	2				
t=2	8	=	5	+	3	，	3	=	5	-	2
t=3	12	=	9	+	3	，	3	=	5	-	2
t=4	16	=	13	+	3	，	3	=	5	-	2
t=5	20	=	17	+	3	，	3	=	5	-	2
t=6	24	=	22	+	2	，	2	=	4	-	2
t=7	28	=	27	+	1	，	1	=	3	-	2
t=8	32	=	32	+	0	，	0	=	2	-	2

由上表可得，在火距為 6 的房子中，可能燃燒數明顯減少為 4，經過一次搶救後，燃燒數最大值為 2；火距為 7 的房子中，可能燃燒數為 3，再經一次搶救後，燃燒數最大值為 1；而火距為 8 的房子中，可能燃燒數為 2，經一次搶救後，能四面包圍住火勢：b=18。



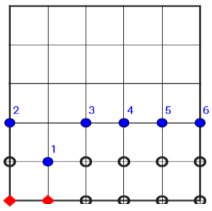


(3) 將(1)、(2)整理為：$b=\begin{cases}3k+2\,,當\ k\le 5\\ 18\qquad ,當\ k\ge 6\end{cases}$

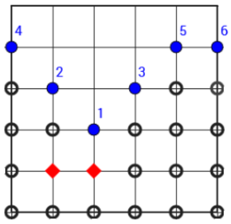
(三) 當 f=2，且兩起火點為(h,k)、(h+1,k)時，針對 b 作討論:

1. d=1：經測試得知在此狀況下，兩起火點的位置與邊界之距離遠近會影響火勢蔓延趨勢，故最佳搶救方法因起火點之兩坐標所在位置而異

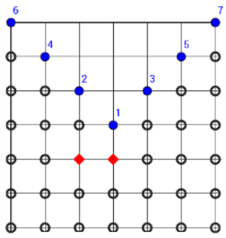
（1）若$k<h+1$，發現以下搶救方法：



(圖 2-3-1)



(圖 2-3-2)



(圖 2-3-3)

經過觀察後，整理如下：

若起火點為(0,0)(1,0)，則 b=2n+1　　　　(圖 2-3-1)

若起火點為(1,1)(2,1)，則 b=3(n-2)+(2+1+2)+(n+1)k　　　　(圖 2-3-2)

若起火點為(2,2)(3,2)，則 b=4(n-4)+(3+2+1+2+3)+(n+1)k　　　　(圖 2-3-3)

歸納得:$b=(h+2)(n-2h)+2\times\frac{(h+2)(h+1)}{2}-1+(n+1)k$

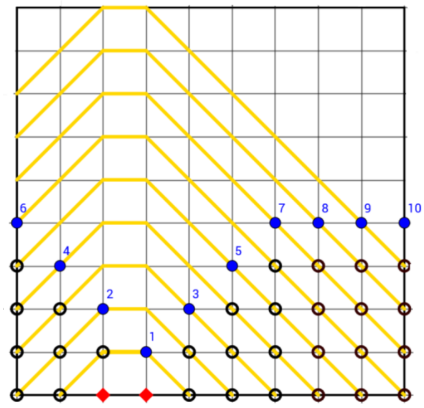
$=(h+1)(n-h)+(k+1)(n+1)$

並由[定理一]對所有 $t\in[1,n-1]$恆有 $s(t)\le t-p(t)\le t$ 得知，在任何策略下，在火距小於、等於 n 的房子中，能被搶救的房子數至多為$1+2+\cdots+(n-1)=\frac{n(n+1)}{2}=C_2^{n+1}$。

以圖 2-3-4 為例，在火距小於、等於 n 的房子中，被搶救的房子數恰為C_2^{n+1}個，且在火

距大於 n 的每一間房子都能被搶救，故得知此方法為最佳策略且總搶救數為：

$$\frac{n(n+1)}{2}+\frac{h(h+1)}{2}+\frac{(n-h)(n-h-1)}{2}-(n+1)k$$



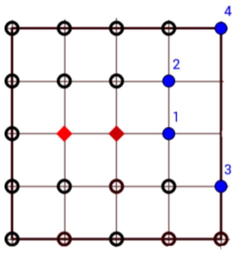
(圖2-3-4)

而若$k \geq 0$ ，因單位時間內搶救數的限制，在此條件下只能阻擋一方的火勢，故直接使用上述搶救策略，得：

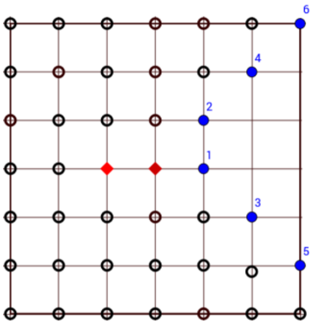
$$b=(n+1)^2-\left[\frac{n(n+1)}{2}+\frac{h(h+1)}{2}+\frac{(n-h)(n-h-1)}{2}-(n+1)k\right]$$

$=(h+1)(n-h)+(k+1)(n+1)$ 確定以上搶救方法最佳策略。

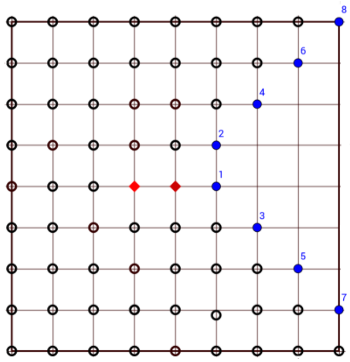
(2) 若$k \geq h+1$，因為單位時間搶救數的限制，此條件下只能包圍住一方的火勢，故直接使用原題之搶救策略。



(圖 2-3-5)



(圖 2-3-6)



(圖 2-3-7)

經過觀察後，整理如下：

若起火點為(2,1)、(2,2)，則 b=2x(3+4)+5x(n-3) (圖 2-3-5)

若起火點為(3,2)、(3,3)，則 b=2x(4+5+6)+7x(n-5) (圖 2-3-6)

若起火點為(4,3)、(4,4)，則 b=2x(5+6+7+8)+9x(n-7) (圖 2-3-7)

歸納得：

$$b=2[(h+2)+(h+3)+\cdots+(h+k+1)]+(h+k+2)[n-(2k-1)]$$

$$=k(n-k)+(h+2)(n+1)$$

且將原題之總搶救數(n^2+c^2-nc-c)套用至此狀況，故總搶救數為

$(n+1)^2+(k+1)^2-(n+1)(k+1)-(k+1)-(n+1)(h+1)$

$=n^2-nh-nk-h-1+k^2$

得到$b=(n+1)^2-(n^2-nk-nh-h-1+k^2)=k(n-k)+(h+2)(n+1)$

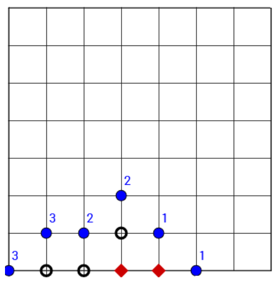
故確定以上搶救方法為最佳策略。

（3）將(1)、(2)整理如下：當兩相鄰起火點為$(h,k)(h+1,k)$時

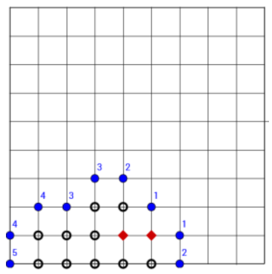
若$k<h+1$，被燃燒的房子總數 $b=(h+1)(n-h)+(k+1)(n+1)$。

若$k\geq h+1$，被燃燒的房子總數 $b=k(n-k)+(h+2)(n+1)$。

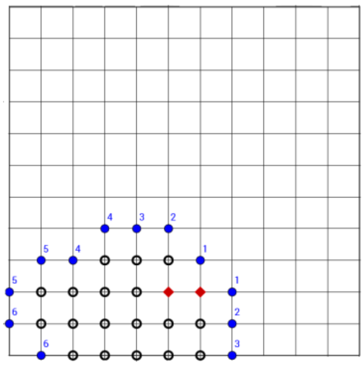
2. d=2 時：經觀察後，發現以下搶救方法



(圖 2-3-8)



(圖 2-3-9)



(圖 2-3-10)

不同的相鄰起火點之間引起的燃燒數並無明顯的規律，但依特定搶救方法能將火勢三面包圍，且燃燒數呈現規律。

若$k=0,h\geq 3$ 則 b=1+4=5 (圖 2-3-8)

若$k=1,h\geq 4$ 則 b=2+5+5=12 (圖 2-3-9)

若$k=2,h\geq 5$ 則 b=3+6+6+5=20 (圖 2-3-10)

則整理為：$b=k(k+2)+\left(9-\left[\frac{k}{2}\right]\right)\left[\frac{k}{2}\right]+\left(4-\left[\frac{k}{2}\right]\right)\left|\frac{k+1}{2}-\left[\frac{k}{2}\right]\right|+1$—(1)

並由觀察得到下列兩個不等式：

$p(t)+\sum_{i=1}^{t}d(i)\leq 2t$ ， $p(t+1)+d(t+1)\leq p(t)+2$

利用此兩不等式證明

[定理三]對所有 $t\in[1,k+3]$恆有 $s(t)\leq 3t-1-p(t)\leq 3t-1$

當 t=1 時，s(1)$\leq 2-p(t)\leq 2$明顯成立；假設 t=k 時，$s(k)\leq 3k-1-p(k)\leq 3k-1$成立，

在 t=k+1 時，在任意$(3k-1-p(k))$間房子的鄰域之聯集$N_1 \cup N_2 \cup \ldots \cup N_{(3k-1-p(k))}$至少包含在火距為 k 的$(3k-1-p(k))$個房子。因 $s(k) \leq 3k-1-p(k)$，在時間 k 時，這些房子的其中一間正著火，因此，在 t=k+1時，至多有$(3k-1-p(k))$間房子其鄰域沒有著火。故：

$$
\begin{aligned}
s(k+1) &\leq 3k-1-p(k)+d(k+1) = (3k+1)-[p(k)+2-d(k+1)] \\
&\leq (3k+1)-p(k+1) \leq 3(k+1)-1-p(k+1) \\
&\leq 3(k+1)-1 \quad \text{得證}
\end{aligned}
$$

且上述策略符合不等式中等號成立時，在火距小於、等於(k+3)的房子中被搶救的房子數為:$2+5+\cdots+3(k+3)-1=\frac{(3k+10)(k+3)}{2}$。

此外，在火距大於(k+3)的房子中，根據上述的策略：

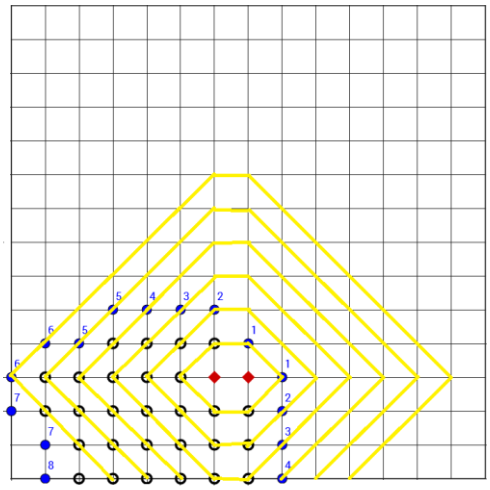
在火距為(k+3)的房子中，仍有 k 個燃燒點，故在火距為(k+4)的房子中有 k 個相鄰可能燃燒點，而經過一單位時間的搶救後，在火距(k+4)的房子中至少有(k-2)個燃燒點；而在火距(k+5)的房子中有(k-2)個相鄰可能燃燒點，再經一單位時間的搶救後，在火距(k+5)的房子中至少有(k-4)個燃燒點；以此類推，故火距大於(k+3)的房子中，被燃燒的房子總數因 k 之奇偶性而異。(圖 2-3-11)

當 k 為奇數時，火距大於(k+3)之被燃燒的房子總數為：

$$(k-2)+(k-4)+\cdots+1=\frac{1}{2}\left[(k-1)\left(\frac{k-3}{2}+1\right)\right]$$

當 k 為偶數時，火距大於(k+3)之被燃燒的房子總數為：

$$(k-2)+(k-4)+\cdots+2=\frac{1}{2}\left[(k-1)\left(\frac{k-4}{2}+1\right)\right]$$



(圖 2-3-11)

故此狀況下之總燃燒數為：

當 k 為奇數時

$$
\begin{aligned}
b=&\left\{[6+10+\cdots+4(k+3)+2]-(2+4+6)+2-\frac{(3k+10)(k+3)}{2}\right\} \\
&+\frac{1}{2}\left[(k-1)\left(\frac{k-3}{2}+1\right)\right] \\
=&\frac{3}{4}k^2+6k+\frac{21}{4}
\end{aligned}
$$

當 k 為偶數時

$$b=\left\{[6+10+\cdots+4(k+3)+2]-(2+4+6)+2-\frac{(3k+10)(k+3)}{2}\right\}$$
$$+\frac{1}{2}\left[(k-1)(\frac{k-4}{2}+1)\right]$$
$$=\frac{3}{4}k^2+6k+5$$

故將上述整理得：$b=\begin{cases}\frac{3}{4}k^2+6k+\frac{21}{4}, \text{當 } k \text{ 為奇數} \\ \frac{3}{4}k^2+6k+5\ , \text{當 } k \text{ 為偶數}\end{cases}$ —(2)

且將 k 以任意正整數代入(2)驗證，被燃燒的房子總數皆與前述觀察出的結果(1):

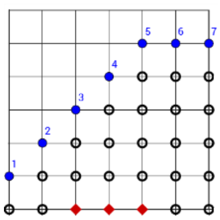
$b=k(k+2)+\left(9-\left[\frac{k}{2}\right]\right)\left[\frac{k}{2}\right]+\left(4-\left[\frac{k}{2}\right]\right)\left[\frac{k+1}{2}-\left[\frac{k}{2}\right]\right]+1$ 一致，故確定以上搶救方法為最佳策略。

(四) 當 f=3 時且三起火點為$(h,k)(h+1,k)(h+2,k)$，且$(h+1)\le\frac{n}{2}$，針對 b 作討論

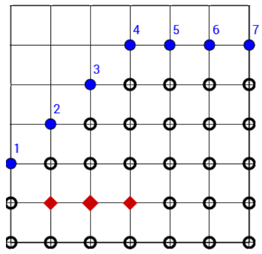
1. d=1 時：此情形如同前述 f=2,d=1 的狀況，三相鄰起火點的位置與邊界之距離遠近會影響蔓延趨勢，故亦發現了兩種最佳搶救方法：

（1）若$(h+2)>k$，發現以下的搶救規則，搶救步驟為:

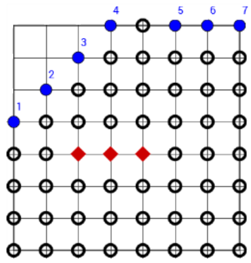
$(0,k+1)$、$(1,k+2)$、$(2,k+3)\ldots(h+2,k+h+3)$、$(h+3,k+h+3)\ldots(n,k+h+3)$



(圖 2-4-1)



(圖 2-4-2)



(圖 2-4-3)

a. 若$n-k+1>h+3$，(圖 2-4-1、2-4-2)

則$b=\frac{[2(n+1)+(h+3-1)(-1)](h+3)}{2}+(n+1)k=\frac{(2n-h)(h+3)}{2}+(n+1)k$

b. 若 $n-k+1\le h+3$，(圖 2-4-3)

則 $b=\frac{[2(n+1)+(n-k)(-1)](n-k+1)}{2}-[(n+1)-(h+2+1)]+(n+1)k$

$$=\frac{(n+k+2)(n-k+1)}{2}-(n-h-2)+(n+1)k$$

以下先證明此方法在 k=0 時為最佳策略。

由[定理一]對所有 $t\in[1,n-1]$恆有 $s(t)\le t-p(t)\le t$ 得知，在各火距為 t 的房子中，未燃燒最大值皆為 t

但經過多次試驗發現，在 f=3,d=1 此條件下，無法找到一個各火距為 t 的未燃燒房子數 s(t)皆為 t 的搶救方法，而在上述方法中，

$$\sum_{t=1}^{n-1} s(t)=0+0+\cdots 0+(h+1)+(h+2)+\cdots+n=\frac{(n+h+1)(n-h)}{2}$$

$$=\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}h^2+\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}h,$$

又因 $n\ge 2(h+1)$，$\sum_{t=1}^{n-1} s(t)\ge\frac{1}{2}(2h+2)^2-\frac{1}{2}h^2+\frac{1}{2}(2h+2)-\frac{1}{2}h$

$$\ge\frac{3}{2}h^2+\frac{9}{2}h+3$$ (圖 2-4-4~6)

並將此方法與 f=1、d=1 搶救策略類似之方法(簡稱「方法(1,1)」，令各火距為 t 的未燃燒房子數總和為$\sum_{t=1}^{n-1} s'(t)$)做比較，如下：

在方法(1,1)中:

當起火點為(1,0)、(2,0)、(3,0)時，$\sum_{t=1}^{n-1} s'(t)=1+2+3(n-2)$　(圖 2-4-7)

當起火點為(h,0)、(h+1,0)、(h+2,0)，$h\ge 2$時，

$\sum_{t=1}^{n-1} s'(t)=1+2+3+2(2h-3)+3(n-2h)=3n-2h$，

又因 $n\ge 2(h+1)$，$\sum_{t=1}^{n-1} s(t)\ge 3(2h+2)-2h\ge 4h+6$　(圖 2-4-8、9)

並比較$\sum_{t=1}^{n-1} s(t)$與$\sum_{t=1}^{n-1} s'(t)$之最小值：

a. 當起火點為(1,0)、(2,0)、(3,0)時，若$n\ge 4$，

$$\sum_{t=1}^{n-1} s'(t)=1+2+3(n-2)\le\sum_{t=1}^{n-1} s(t)=0+2+3+4+\cdots+n$$

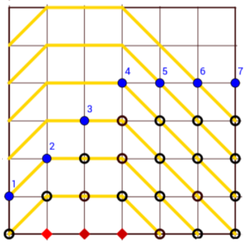
b. 當起火點為(h,0)、(h+1,0)、(h+2,0)，$h\ge 2$時

$(\frac{3}{2}h^2+\frac{9}{2}h+3)$-$(4h+6)=\frac{3}{2}h^2+\frac{1}{2}h-3=\frac{3}{2}(h+\frac{1}{6})^2-\frac{73}{24}$，

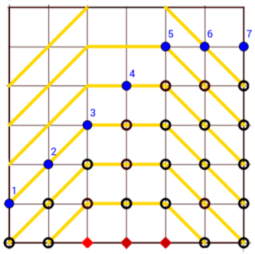
當$h\ge 2$時，$\frac{3}{2}\left(h+\frac{1}{6}\right)^2-\frac{73}{24}>0$ 明顯成立

c. 由 a、b 得知在$n\ge 2(h+1)$之條件下，$\sum_{t=1}^{n-1} s(t)\ge\sum_{t=1}^{n-1} s'(t)$恆成立，故上述方法為較佳

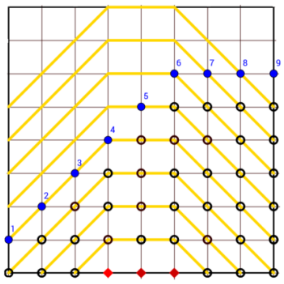
的策略。



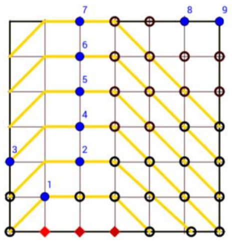
(圖 2-4-4)



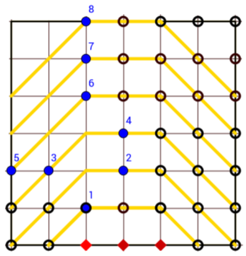
(圖 2-4-5)



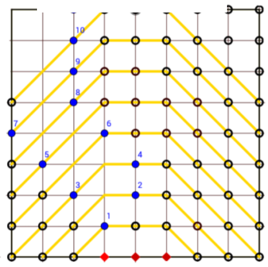
(圖 2-4-6)



(圖 2-4-7)



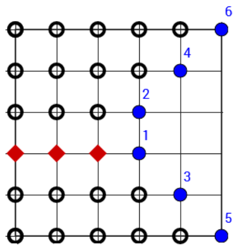
(圖 2-4-8)



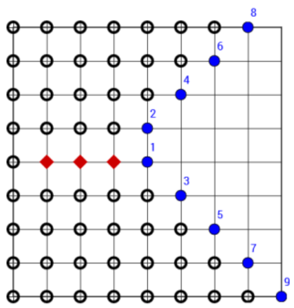
(圖 2-4-9)

(2) 若$(h+2) \leq k$，因為單位時間搶救數的限制，此狀況下只能阻擋一方的火勢，故直接使用原題之搶救策略，並找出規律，整理得

$$b = k(n-k) + (h+3)(n+1) \quad (\text{圖 2-4-10、11})$$



(圖 2-4-10)



(圖 2-4-11)

且將原題之總搶救數$(n^2 + c^2 - nc - c)$套用至此狀況，故總搶救數為

$(n+1)^2 + (k+1)^2 - (n+1)(k+1) - (k+1) - (n+1)(h+2)$

$= n^2 - nh - nk - h - 2 - n + k^2$

得到$b = (n+1)^2 - (n^2 - nh - nk - h - 2 - n + k^2)$

$= nk + nh + 3n + h - k^2 + 3 = k(n-k) + (h+3)(n+1)$

故確定以上搶救方法最佳策略。

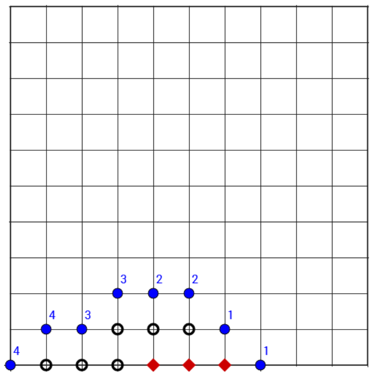
(3) 將(1)和(2)整理如下：當三起火點為$(h,k),(h+1,k),(h+2,k)$時

a. 若 $h+2 > k$，

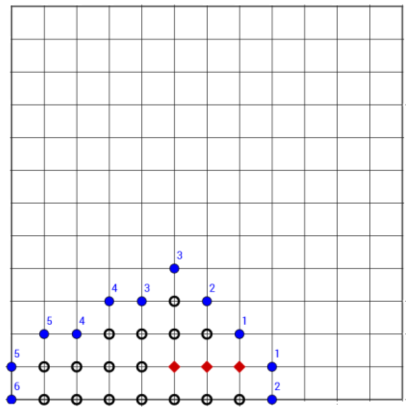
$$
\text{則 } b=\begin{cases}\dfrac{(2n-h)(h+3)}{2}+(n+1)k & ,\text{當 } n-k+1>h+3\\ \dfrac{(n+k+2)(n-k+1)}{2}-(n-h-2)+(n+1)k, & \text{當 } n-k+1\le h+3\end{cases}
$$

b. 若 $h+2\le k$，則 $b=k(n-k)+(h+3)(n+1)$ 。

2. d=2 時：經觀察，發現以下的搶救方法



(圖 2-4-12)



(圖 2-4-13)

不同的相鄰起火點之間引起的被燃燒的房子個數並無明顯的規律，但在下列狀況，依特定搶救方法能將火勢三面包圍，且被燃燒的房子總數呈現規律增加。

若 $k=0$，$h\ge 4$，則 $b=0+3+6=9$。 (圖 2-4-12)

若$k=1$，$h\ge 5$，則 $b=1+4+7+7=19$ 。 (圖 2-4-13)

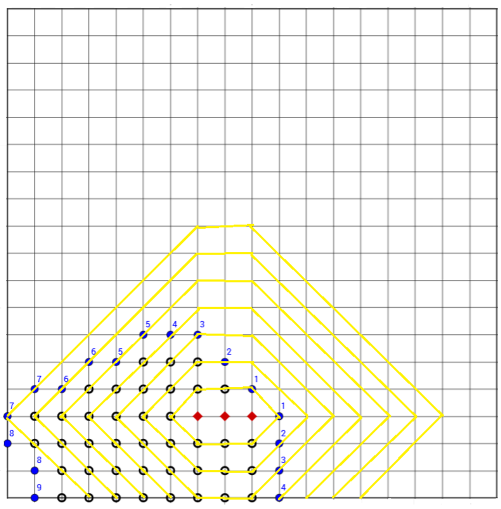
若$k=2$，$h\ge 6$，則 $b=2+5+8+8+7=30$。

整理為：$b=k(k+3)+\left(13-\left[\frac{k}{2}\right]\right)\left[\frac{k}{2}\right]+\left(6-\left[\frac{k}{2}\right]\right)\left|\frac{k+1}{2}-\left[\frac{k}{2}\right]\right|+3$ —(3)

並由[定理三]更改條件，可得「對所有 $t\in[1,k+4]$恆有 $s(t)\le 3t-1-p(t)\le 3t-1$」上述策略符合不等式中等號成立時，在火距小於、等於(k+4)的房子中被搶救的房子數為:$2+5+\cdots+3(k+4)-1=\frac{(3k+13)(k+4)}{2}$。

此外，在火距大於(k+4)的房子中，根據上述的策略：

在火距為(k+4)的房子中仍有 k 個燃燒點，故在火距為(k+5)的房子中有 k 個相鄰可能燃燒點，經過一單位時間的搶救後，在火距為(k+5)的房子中至少有(k-2)個燃燒點；而在火距(k+6)的房子中有(k-2)個相鄰可能燃燒點，經一單位時間的搶救後，在火距(k+6) 的房子中至少有(k-4)個燃燒點；以此類推，故火距大於(k+4)的房子中，被燃燒的房子總數因 k 之奇偶性而異。(圖 2-4-14)



(圖 2-4-14)

當 k 為奇數時，火距大於(k+4)之被燃燒的房子總數為：

$$(k-2)+(k-4)+\cdots+1=\frac{1}{2}\left[(k-1)(\frac{k-3}{2}+1)\right]$$

當 k 為偶數時，火距大於(k+4)之被燃燒的房子總數為：

$$(k-2)+(k-4)+\cdots+2=\frac{1}{2}\left[(k-1)(\frac{k-4}{2}+1)\right]$$

而被燃燒的房子總數為：

當 k 為奇數時：

$$b=\left\{[8+12+\cdots+4(k+4)+4]-(3+5+7+9)+3-\frac{(3k+13)(k+4)}{2}\right\}$$

$$+\frac{1}{2}\left[(k-1)(\frac{k-3}{2}+1)\right]=\frac{3}{4}k^2+9k+\frac{37}{4}$$

當 k 為偶數時：

$$b=\left\{[8+12+\cdots+4(k+4)+4]-(3+5+7+9)+3-\frac{(3k+13)(k+4)}{2}\right\}$$

$$+\frac{1}{2}\left[(k-1)(\frac{k-4}{2}+1)\right]=\frac{3}{4}k^2+9k+9$$

將上述整理如下：

$$b=\begin{cases}\frac{3}{4}k^2+9k+\frac{37}{4}, \text{當 k 為奇數} \\ \frac{3}{4}k^2+9k+9\ , \text{當 k 為偶數}\end{cases} \text{—}(4)$$

將 k 以任意正整數代入(4)驗證，被燃燒的房子總數皆與前述觀察出的結果(3)

$b=k(k+3)+\left(13-\left[\frac{k}{2}\right]\right)\left[\frac{k}{2}\right]+\left(6-\left[\frac{k}{2}\right]\right)\left[\frac{k+1}{2}-\left[\frac{k}{2}\right]\right]+3$一致，故確定以上搶救方法最佳策略。

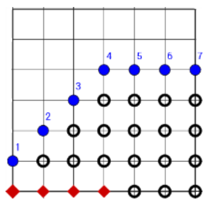
(五) 當 f=4 時，四起火點$(h,k)(h+1,k)(h+2,k)(h+3,k)$，$h+\frac{3}{2}\leq\frac{n}{2}$，針對 b 作以下討論:

一、 d=1 時：

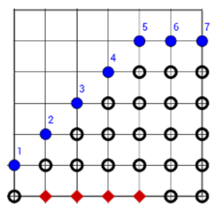
此情形如同前述 f=2,d=1 的狀況，三相鄰成一直線起火點的位置與邊界之距離遠近會影響蔓延趨勢，故亦發現了兩種最佳搶救方法:

（1） 若$(h+3)>k$，發現以下的搶救規則，搶救步驟為

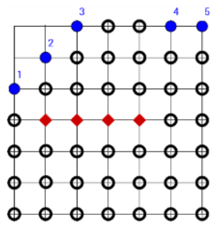
$(0,k+1)$、$(1,k+2)$、$(2,k+3)\ldots(h+2,k+h+3)$、$(h+3,k+h+3)\ldots(n,k+h+3)$



(圖 2-5-1)



(圖 2-5-2)



(圖 2-5-3)

a. 若 $n-k+1>h+4$， (圖 2-5-1、2-5-2)

則 $b=\dfrac{[2(n+1)+(h+4-1)(-1)](h+4)}{2}+(n+1)k=\dfrac{(2n-h)(h+3)}{2}+(n+1)k$

b. 若 $n-k+1\leq h+4$ (圖 2-5-3)

$$b=\frac{[2(n+1)+(n-k)(-1)](n-k+1)}{2}-[(n+1)-(h+3+1)]+(n+1)k$$

$$=\frac{(n+k+2)(n-k+1)}{2}-(n-h-3)+(n+1)k$$

由[定理一]對所有 $t\in[1,n-1]$恆有 $s(t)\leq t-p(t)\leq t$得知，在各火距為 t 的房子中，未燃燒最大值皆為 t，經由多次試驗發現，在 f=4、d=1 此條件下，無法找到一個各火距為 t 的未燃燒房子數 s(t)皆為 t 的搶救方法，而上述方法的

$$\sum_{t=1}^{n-1}s(t)=0+0+\cdots 0+(h+1)+(h+2)+\cdots+n=\frac{(n+h+1)(n-h)}{2}$$

$$=\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}h^2+\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}h,$$

又因 $n\geq 2(h+\frac{3}{2})$，$\sum_{t=1}^{n-1}s(t)\geq\frac{1}{2}(2h+3)^2-\frac{1}{2}h^2+\frac{1}{2}(2h+3)-\frac{1}{2}h$

$$\geq\frac{3}{2}h^2+\frac{9}{2}h+6$$ (圖 2-5-4、5)

並將此方法與 f=1,d=1 搶救策略類似之方法(簡稱「方法(1,1)」，令各火距為 t 的未燃燒

房子數總和為$\sum_{t=1}^{n-1} s'(t)$)做比較，如下：

在方法(1,1)中：

當起火點為(1,0)、(2,0)、(3,0)、(4,0)時，$\sum_{t=1}^{n-1} s'(t) = 1 + 2 + 3(n-2)$ (圖 2-5-6)

當起火點為(h,0)、(h+1,0)、(h+2,0)、(h+3,0)，$h \geq 2$時，

$\sum_{t=1}^{n-1} s'(t) = 1 + 2 + 3 + 2(2h-3) + 3(n-2h) = 3n - 2h$，

又因 $n \geq 2\left(h + \frac{3}{2}\right)$， $\sum_{t=1}^{n-1} s(t) \geq 3(2h+3) - 2h \geq 4h + 9$ (圖 2-5-7)

以下比較$\sum_{t=1}^{n-1} s(t)$ 與 $\sum_{t=1}^{n-1} s'(t)$ 之最小值:

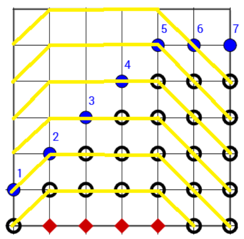
當起火點為(1,0)、(2,0)、(3,0)、(4,0)時，若$n \geq 5$，

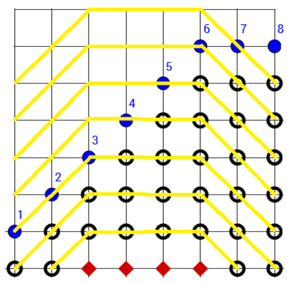
$$\sum_{t=1}^{n-1} s'(t) = 1 + 2 + 3(n-2) \leq \sum_{t=1}^{n-1} s(t) = 0 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n$$

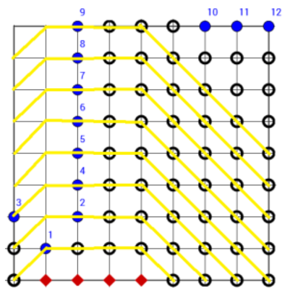
當起火點為(h,0)(h+1,0)(h+2,0)(h+3,0)，$h \geq 2$時

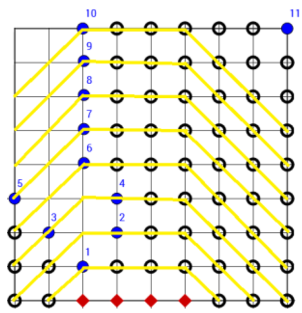
$(\frac{3}{2}h^2 + \frac{9}{2}h + 6)$-$(4h + 9) = \frac{3}{2}(h + \frac{1}{6})^2 - \frac{73}{24}$，且$h \geq 2$ 時，$\frac{3}{2}\left(h + \frac{1}{6}\right)^2 - \frac{73}{24} > 0$明顯成立。

由以上的結果得知在$n \geq 2\left(h + \frac{3}{2}\right)$之條件下，$\sum_{t=1}^{n-1} s(t) \geq \sum_{t=1}^{n-1} s'(t)$ 恆成立，故上述方法相較於方法(1,1)，為較佳的策略。

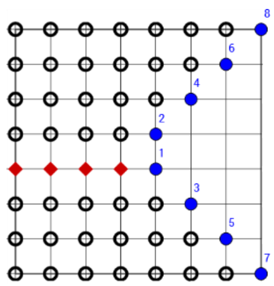

(圖 2-5-4)

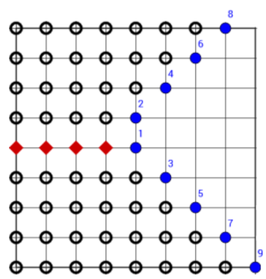

(圖 2-5-5)


(圖 2-5-6)


(圖 2-5-7)

(2) 若$(h+3) \leq k$，因為單位時間搶救數的限制，此狀況下只能阻擋一方的火勢，故直接使用原題之搶救策略，並找出規律，整理得:$b = k(n-k) + (h+4)(n+1)$ (圖 2-5-8、9)


(圖 2-5-8)


(圖 2-5-9)

且將原題之總搶救數(n^2+c^2-nc-c)套用至此狀況，故總搶救數為

$(n+1)^2+(k+1)^2-(n+1)(k+1)-(k+1)-(n+1)(h+3)$

$=n^2-nh-nk-h-3-2n+k^2$

得到$b=(n+1)^2-(n^2-nh-nk-h-3-2n+k^2)=k(n-k)+(h+4)(n+1)$

故確定以上搶救方法最佳策略

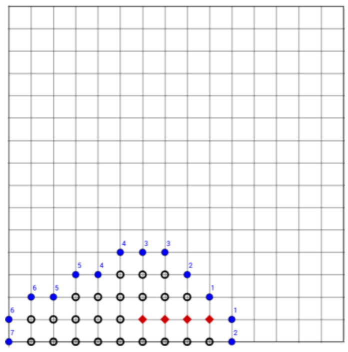
(3) 將(1)和(2)整理如下:當四相鄰起火點為$(h,k)(h+1,k)(h+2,k)(h+3,k)$時

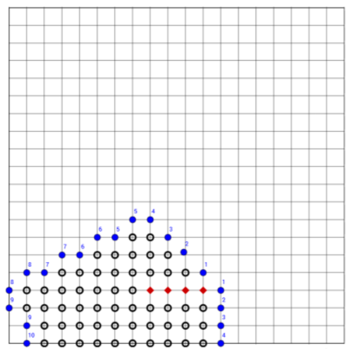
a. 當$(h+3)>k$

$$b=\begin{cases}\dfrac{(2n-h-1)(h+4)}{2}+(n+1)k & ,\text{當 } n-k+1>h+4\\ \dfrac{(n+k+2)(n-k+1)}{2}-(n-h-3)+(n+1)k & ,\text{當 } n-k+1\le h+4\end{cases}$$

b. 當$(h+3)\le k$，則$b=k(n-k)+(h+4)(n+1)$

二、 當 d=2 時：經觀察，發現以下的搶救方法


(圖 2-5-10)


(圖 2-5-11)

不同的相鄰起火點之間被燃燒的房子個數並無明顯的規律，但在下列狀況下，依特定搶救方法能將火勢三面包圍，而被燃燒的房子總數呈現規律。

若 $k=1,h\ge 6$ 則 b=2+2+3+3+4+4+4+3+2=27 (圖 2-5-10)

若$k=2,h\ge 7$ 則 b=2+3+4+4+5+5+6+5+4+3=41

若 $k=3,h\ge 8$ 則 b=2+4+5+5+6+6+7+7+6+5+4=57 (圖 2-5-11)

整理為：$b=k(k+4)+\left(17-\left[\frac{k}{2}\right]\right)\left[\frac{k}{2}\right]+\left(8-\left[\frac{k}{2}\right]\right)\left[\frac{k+1}{2}-\left[\frac{k}{2}\right]\right]+6$—(5)

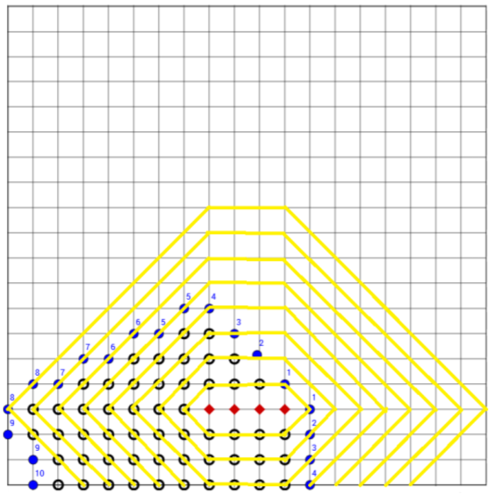
並由[定理三]更改條件，可得「對所有 $t\in[1,k+5]$恆有 $s(t)\le 3t-1-p(t)\le 3t-1$」

上述策略符合不等式中等號成立時，在火距小於、等於(k+5)的房子中被搶救的房子數

為:$2+5+\cdots+3(k+5)-1=\frac{(3k+16)(k+5)}{2}$。

此外，在火距大於(k+5)的房子中，根據上述的策略：

在火距為(k+5)的房子中仍有 k 個燃燒點，故在火距為(k+6)的房子中有 k 個相鄰可能燃燒點，經過一單位時間的搶救後，在火距為(k+6)的房子中至少有(k-2)個燃燒點，而在火距為(k+7)的房子中有(k-2)個相鄰可能燃燒點，再經一單位時間的搶救後，在火距(k+8)的房子中至少有(k-4)個燃燒點；以此類推，故火距大於(k+5)的房子中，被燃燒的房子總數因 k 之奇偶性而異。(圖 2-5-12)



(圖 2-5-12)

當 k 為奇數，火距大於(k+5)之被燃燒的房子總數為：

$$(k-2)+(k-4)+\cdots+1=\frac{1}{2}\left[(k-1)(\frac{k-3}{2}+1)\right]$$

當 k 為偶數，火距大於(k+5)之被燃燒的房子總數為:

$$(k-2)+(k-4)+\cdots+2=\frac{1}{2}\left[(k-1)(\frac{k-4}{2}+1)\right]$$

且總燃燒數為：

當 k 為奇數時

$$b=\left\{[10+14+\cdots+4(k+5)+6]-(4+6+8+10+12)+4-\frac{(3k+16)(k+5)}{2}\right\}+\frac{1}{2}\left[(k-1)\left(\frac{k-3}{2}+1\right)\right]=\frac{3}{4}k^2+12k+\frac{57}{4}$$

當 k 為偶數時

$$b=\left\{[10+14+\cdots+4(k+5)+6]-(4+6+8+10+12)+4-\frac{(3k+16)(k+5)}{2}\right\}$$
$$+\frac{1}{2}\left[(k-1)(\frac{k-4}{2}+1)\right]=\frac{3}{4}k^2+12k+14$$

將整理如下：

$$b=\begin{cases}\frac{3}{4}k^2+12k+\frac{57}{4}, 當\ k\ 為奇數\\ \frac{3}{4}k^2+12k+14, 當\ k\ 為偶數\end{cases}—(6)$$

且將 k 以任意正整數代入(6)驗證，被燃燒的房子總數皆與前述觀察出的結果(5)

$b=k(k+4)+\left(17-\left[\frac{k}{2}\right]\right)\left[\frac{k}{2}\right]+\left(8-\left[\frac{k}{2}\right]\right)\left[\frac{k+1}{2}-\left[\frac{k}{2}\right]\right]+6$ 一致，故確定以上搶救方法最佳策略。

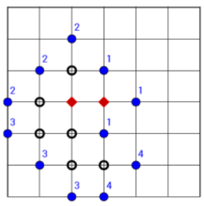
三、 改變棋盤條件(無邊界之棋盤)

(一) 當 f=1 時，對 b 之討論

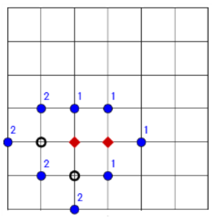
1. d=1 時：在單位時間內，由於搶救數過少，故無法控制火勢的蔓延情形。
2. d=2 時：如有邊界棋盤$f=1, d=2, k\geq 6$四面包圍住火勢之情況，b=18。
3. d=3 時：兩個步驟即能四面包圍住火勢，且 b=2。
4. d=4 時：一個步驟即能四面包圍住火勢，且 b=1。

(二) 當 f=2 時，對 b 之討論

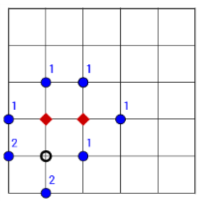
1. d=1 時：在單位時間內，由於搶救數過少，故無法控制火勢的蔓延情形。
2. d=2 時：在單位時間內，由於搶救數過少，故無法控制火勢的蔓延情形。
3. d=3 時：圖 3-2-1，能四面包圍住火勢，且 b=8。
4. d=4 時：圖 3-2-2，能四面包圍住火勢，且 b=4。
5. d=5 時：圖 3-2-3，能四面包圍住火勢，且 b=3。
6. d=6 時：一個步驟即能四面包圍住火勢，且 b=2。



(圖 3-2-1)



(圖 3-2-2)



(圖 3-2-3)

(三) 當 f=3 時，針對 b 作討論:

1. d=1 時：在單位時間內，搶救數過少，故無法控制火勢的蔓延。
2. d=2 時：在單位時間內，搶救數過少，故無法控制火勢的蔓延。
3. d=3 時：圖 3-2-4，能四面包圍住火勢，b=17。

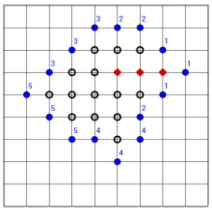
4. d=4 時：圖 3-2-5，能四面包圍住火勢，b=9。

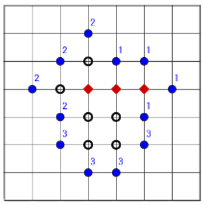
5. d=5 時：圖 3-2-6，能四面包圍住火勢，b=6。

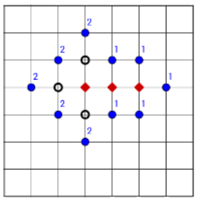
6. d=6 時：圖 3-2-7，能四面包圍住火勢，b=5。

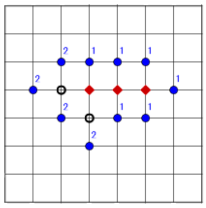
7. d=7 時：圖 3-2-8，能四面包圍住火勢 ，b=4。

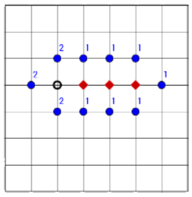
8. d=8 時：一個步驟即能四面包圍住火勢，b=3。


(圖 3-2-4)


(圖 3-2-5)


(圖 3-2-6)


(圖 3-2-7)

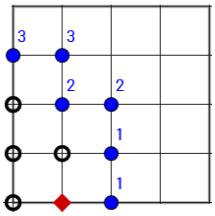

(圖 3-2-8)

四、 改變火勢蔓延方式(九宮格)

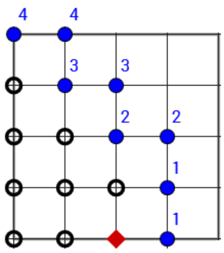
(一) 當 f=1 時，針對 b 作討論

經由觀察發現若以單位時間內一個搶救點(d=1)進行搶救，將無法包圍，所以我們從一個起火點、單位時間內二個搶救點開始討論:

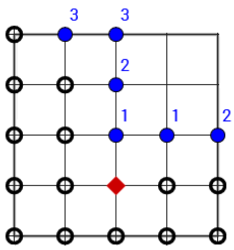
1. d=2:



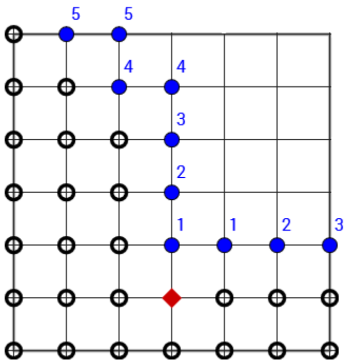
起火點(1,0)



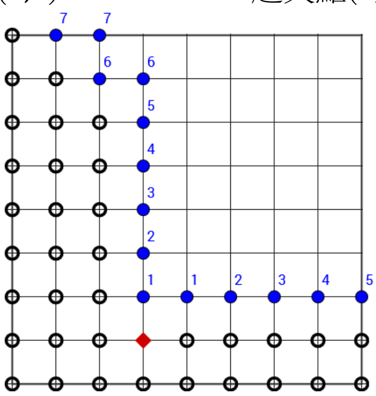
起火點(2,0)



起火點(2,1)



起火點(3,1)



起火點(3,1)

若搶救點為水平設至的階層稱為不完整搶救層，其餘為完整搶救層。

經由觀察可發現：根據(h-k)的不同，會造成不完整搶救層，並且觀察未燃燒的數量變化。而完整搶救層的未燃燒數呈現一公差為 2 的等差級數。又隨著邊長 n 的增加，須加上的公差為

2 的個數隨之增加。將上述化為表格進行討論:

（1）h-k=0

起火點	邊長	完整搶救層	不完整搶救層
(0,0)	n=1	2	0
	n=2	2　4	0
	n=3	2　4　6	0
(1,1)	n=2	2	0
	n=3	2　4	0
	n=4	2　4　6	0
(2,2)	n=4	2　4	0
	n=5	2　4　6	0
	n=6	2　4　6　8	0

（2）h-k=1

起火點	邊長	完整搶救層	不完整搶救層
(1,0)	n=2	2	3
	n=3	2　4	4
	n=4	2　4　6	5
(2,1)	n=4	2　4	4
	n=5	2　4　6	5
	n=6	2　4　6　8	6
(3,2)	n=6	2　4　6	5
	n=7	2　4　6　8	6
	n=8	2　4　6　8　10	7

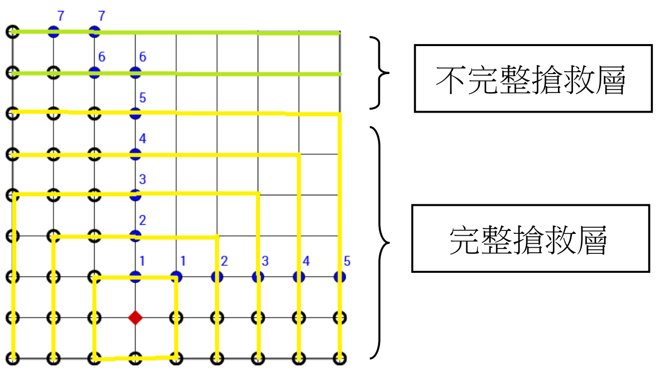
(3) h-k=2

起火點	邊長	完整搶救層	不完整搶救層
(2,0)	n=4	2　4	4　5
	n=5	2　4　6	5　6
	n=6	2　4　6　8	6　7
(3,1)	n=6	2　4　6	5　6
	n=7	2　4　6　8	6　7
	n=8	2　4　6　8　10	7　8
(4,2)	n=8	2　4　6　8	6　7
	n=9	2　4　6　8　10	7　8
	n=10	2　4　6　8　10　12	8　9

如表格所示，完整搶救層之未燃燒數為(n-h)項、公差為 2 的級數總和，等於 $\sum_{t=1}^{n-h} 2t$。

而不完整搶救層之未燃燒數為$\sum_{s=1}^{h-k}[(n-h+2)+(s-1)]$

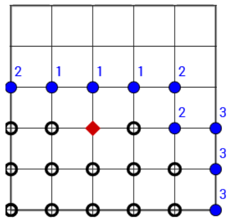
將兩個數值相加可得所有未燃燒個數: 為$\sum_{t=1}^{n-h} 2t+\sum_{s=1}^{h-k}[(n-h+2)+(s-1)]$



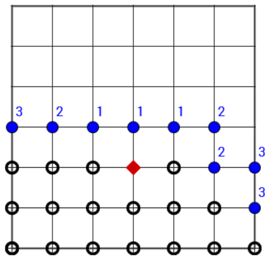
由觀察得到:若起火點位於邊上為(h,0)，則被燃燒的房子總數 b=2+$\frac{(5+h)h}{2}$。

若 h≥k，則被燃燒的房子總數 b=(k+1)(n+1)+h(n-h)+$\frac{(h-k-1)(h-k)}{2}$。

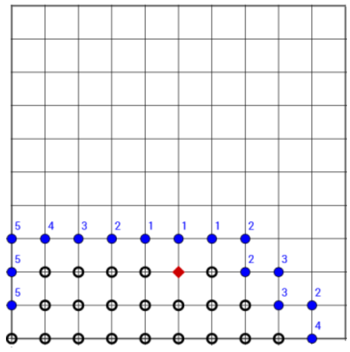
2.　d=3：經觀察後，發現搶救方式如下：



起火點(2,2)



起火點(3,2)



起火點(5,2)

由觀察得到：在(k+2)層內的未燃燒數呈現一等差級數的規律變化，每一層的未燃燒數為

3+5(k-1)=5k-2，則1~$(k+2)$層的未燃燒總數為$\sum_{n=1}^{k+2} 5n-2=\frac{5k^2+21k+22}{2}$

被燃燒的房子總數為$[(k+4)+(k+5)+\cdots+(2k+4)]=\frac{3k^2+11k+8}{2}$

在(k+2)層之外的層數中，分成 k 為奇數和偶數兩種不同的情況討論，

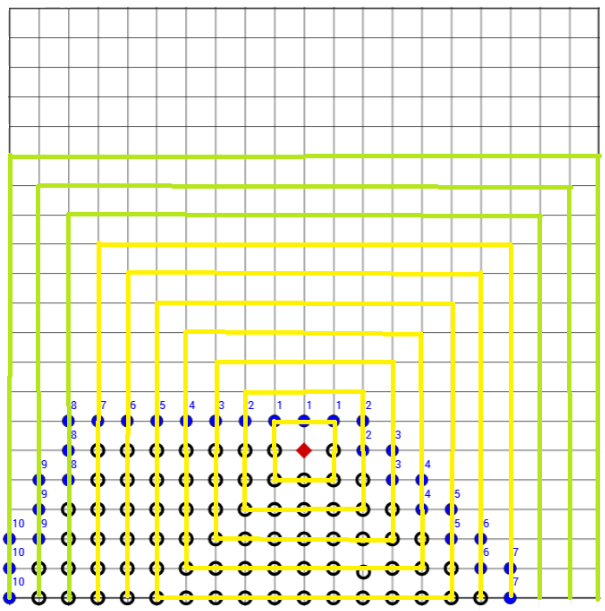
設 t 為(k+2)層之外須討論的層數，

設 r 為(k+2)層之外可能燃燒的數量，

設 a 為(k+2)層之外實際燃燒的總量，

設 u 為(k+2)層之外未燃燒的總數量。

第 k 層	未燃燒數	第(k+2)層外可能燃燒數	第(k+2)層外實際燃燒數
1	3		
2	8		
3	13		
4	18		
5	23		
6	28		
7	33	7	4
8	39	5	2
9	45	3	0
10	51	0	0



以起火點(10,5)為例

s	可能燃燒	實際燃燒
1	$2t+1$	$2(t-1)$
2	$2(t-1)+1$	$2(t-2)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
t-1	5	2
t	3	0

若 k 為奇數時，

$k=2t-1$，

$r=2s+1(1\le s\le t)$，

$a=\sum_{s=1}^{t}2s-2=t(t-1)=t^2-t$，

$u=t^2+6kt+12t$

s	可能燃燒	實際燃燒
1	$2t$	$2(t-1)$-1
2	$2(t-1)$	$2(t-2)$-1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
t-1	4	2
t	2	0

若 k 為偶數時，

$k=2t-2$，

$r=2s(1\le s\le t)$，

$a=\sum_{s=1}^{t}2s-2=(t-1)^2=t^2-2t+1$，

$u=t^2+6kt+13t-1$

將$1\sim(k+2)$層的未燃燒總數及被燃燒的房子總數，

加上在(k+2)層之外的層數中 a 與 u 等於(k+2+t)層內房子總數，故得證。

當 k 為奇數時，

$$\left(\frac{5k^2+21k+22}{2}\right)+\left(\frac{3k^2+11k+8}{2}\right)+(t^2-t)+(t^2+6kt+12t)=\frac{15k^2+51k+42}{2}$$

當 k 為偶數

$$\left(\frac{5k^2+21k+22}{2}\right)+\left(\frac{3k^2+11k+8}{2}\right)+(\,t^2-2t+1)+(t^2+6kt+13t-1)$$

$$=\frac{15k^2+59k+56}{2}$$

再經過觀察後，整理如下：

若 k 為奇數時，在起火點($\frac{3k+5}{2}$,k)，火勢被三面包圍，

b= $\frac{k^2-1}{4}+(k+1)(k+4)+\frac{(1+k)k}{2}=\frac{7k^2+22k+15}{4}$。

若 k 為偶數時，在起火點($\frac{3k+6}{2}$,k)，火勢被三面包圍，

b= $\frac{k^2}{4}+(k+1)(k+4)+\frac{(1+k)k}{2}\ =\frac{7k^2+22k+16}{4}$。

3. d=4

由觀察得到：

若 k=0，起火點在(2,0)，可三面包圍火勢，則被燃燒的房子總數b=2(圖 4-1-1)

若 k=1，起火點在(3,1)，可三面包圍火勢，則被燃燒的房子總數b=6(圖 4-1-2)

若 k=2，起火點在(3,2)，可三面包圍火勢，則被燃燒的房子總數b=11(圖 4-1-3)

若 k=3，起火點在(4,3)，可三面包圍火勢，則被燃燒的房子總數b=17(圖 4-1-4)

若 k=4，起火點在(5,4)，可三面包圍火勢，則被燃燒的房子總數b=23(圖 4-1-5)

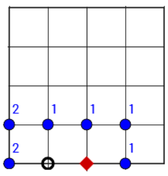
若 k=5，起火點在(5,5)，可三面包圍火勢，則被燃燒的房子總數b=29(圖 4-1-6)

若 k=6，起火點在(6,6)，可三面包圍火勢，則被燃燒的房子總數b=33(圖 4-1-7)

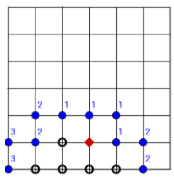
若 k=7，起火點在(7,7)，可三面包圍火勢，則被燃燒的房子總數b=35(圖 4-1-8)

若 k=8，起火點在(8,8)，可四面包圍火勢，則被燃燒的房子總數b=35(圖 4-1-9)

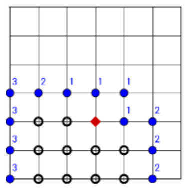
則當$h \wedge k \geq 8$時，包圍方式如(圖 4-1-9)，則被燃燒的房子總數b=35



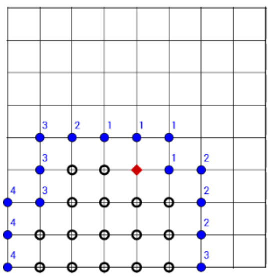
(圖 4-1-1)



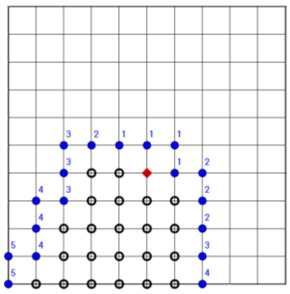
(圖 4-1-2)



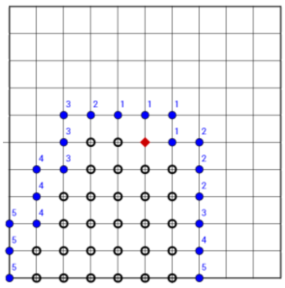
(圖 4-1-3)



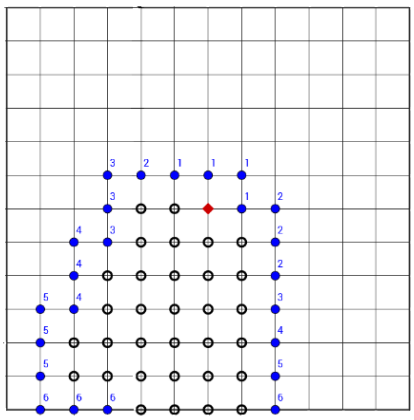
(圖 4-1-4)



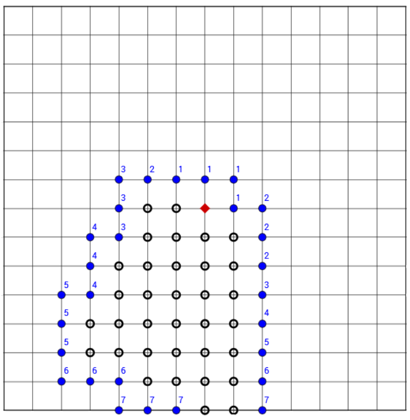
(圖 4-1-5)



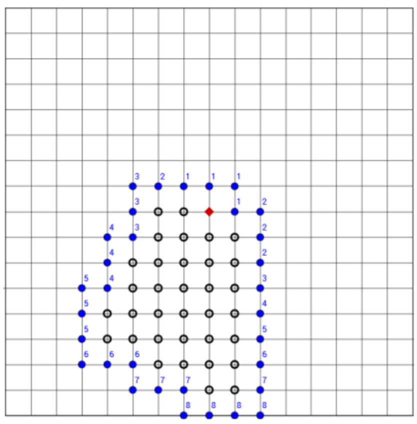
(圖 4-1-6)



(圖 4-1-7)



(圖 4-1-8)



(圖 4-1-9)

4. d=5：

由觀察得到：

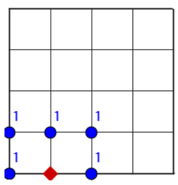
若 k=0，起火點在(1,0)，可三面包圍火勢，則被燃燒的房子總數b=1(圖 4-1-10)

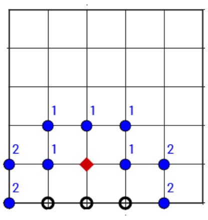
若 k=1，起火點在(2,1)，可三面包圍火勢，則被燃燒的房子總數b=4(圖 4-1-11)

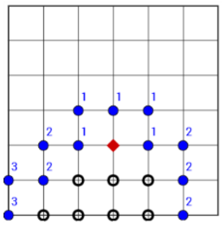
若 k=2，起火點在(3,2)，可三面包圍火勢，則被燃燒的房子總數b=8(圖 4-1-12)

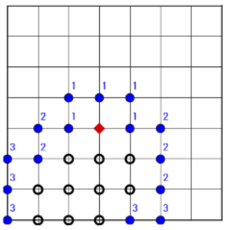
若 k=3，起火點在(3,3)，可三面包圍火勢，則被燃燒的房子總數b=11(圖 4-1-13)

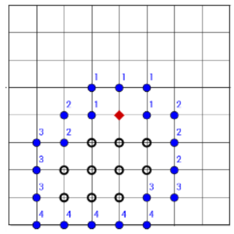
若 k=4，起火點在(4,4)，可四面包圍火勢，則被燃燒的房子總數b=11(圖 4-1-14)


(圖 4-1-10)


(圖 4-1-11)


(圖 4-1-12)


(圖 4-1-13)


(圖 4-1-14)

伍、 研究結果

一、 當 f=1 時($k \le h \le \frac{1}{2}n$)

(一) d=1：若起火點為(h ,k)則 $b = h(n-h) + (n+1)(k+1)$

(二) d=2： $b = \begin{cases} 1\text{ ,當起火點為}(0,0) \\ 4\text{ ,當起火點為}(1,1) \\ 3k+2 \quad\text{ ,當 } k \le 5 \\ 18 \quad\text{ ,當 } k \ge 6 \end{cases}$

二、 當 f=2(兩相鄰起火點為(h,k)(h+1,k))時

(一) d=1：$b = \begin{cases} (h+1)(n-h) + (k+1)(n+1)\text{ ,當 } k < h+1 \\ k(n-k) + (h+2)(n+1) \quad\text{ ,當 } k \ge h+1 \end{cases}$

(二) d=2：$b = k(k+2) + \left(9 - \left[\frac{k}{2}\right]\right)\left[\frac{k}{2}\right] + \left(4 - \left[\frac{k}{2}\right]\right)\left[\frac{k+1}{2} - \left[\frac{k}{2}\right]\right] + 1$

三、 當 f=3(三相鄰起火點為(h,k)(h+1,k)(h+2,k))時

(一) d=1：

1. 若 $h+2>k$，則$b = \begin{cases} \frac{(2n-h)(h+3)}{2} + (n+1)k & ,\text{當 } n-k+1 > h+3 \\ \frac{(n+k+2)(n-k+1)}{2} - (n-h-2) + (n+1)k & ,\text{當 } n-k+1 \le h+3 \end{cases}$

2. 若 $h+2 \le k$，則 $b = k(n-k) + (h+3)(n+1)$

(二) d=2: $b = k(k+3) + \left(13 - \left[\frac{k}{2}\right]\right)\left[\frac{k}{2}\right] + \left(6 - \left[\frac{k}{2}\right]\right)\left[\frac{k+1}{2} - \left[\frac{k}{2}\right]\right] + 3$

四、 當 f=4(四相鄰起火點為(h,k)(h+1,k)(h+2,k)(h+3,k))時

(一) d=1：

1. 若 $h+3>k$，則 $b = \begin{cases} \frac{(2n-h-1)(h+4)}{2} + (n+1)k & ,\text{當 } n-k+1 > h+4 \\ \frac{(n+k+2)(n-k+1)}{2} - (n-h-3) + (n+1)k & ,\text{當 } n-k+1 \le h+4 \end{cases}$

2. 若 $h+3 \le k$，則 $b = k(n-k) + (h+4)(n+1)$

(二) d=2：$b = k(k+4) + \left(17 - \left[\frac{k}{2}\right]\right)\left[\frac{k}{2}\right] + \left(8 - \left[\frac{k}{2}\right]\right)\left[\frac{k+1}{2} - \left[\frac{k}{2}\right]\right] + 6$。

五、 改變火勢蔓延方式一九宮格

(一) d=2:$b = \begin{cases} 2 + \frac{(5+h)h}{2} & ,\text{當起火點為}(h,0) \\ \frac{(n+k+2)(n-k+1)}{2} - (n-h-3) + (n+1)k & ,\text{當 } h \ge k \end{cases}$

(二) d=3：

1. 若 k 為奇數，在起火點($\frac{3k+5}{2}$,k)，火勢被三面包圍 b= $\frac{7k^2+22k+15}{4}$。

2. 若 k 為偶數，在起火點($\frac{3k+6}{2}$,k)，火勢被三面包圍 b= $\frac{7k^2+22k+16}{4}$。

陸、 討論

一、 在平面棋盤方格中，當 d=1、起火點個數為任意正整數時，因單位時間內搶救數的限制，只能阻擋一方的火勢，故最佳的搶救方法皆相同，不同火距間房子的燃燒規律、總燃燒數也有相關性。

二、 在平面棋盤方格中，當 d=2、起火點個數為任意大於 1 的正整數時，最佳搶救方法相同，不同火距間房子的燃燒規律、總燃燒數也有相關性。

柒、 結論

一、 在平面棋盤方格中，當 d=1，起火點為(h,k)(h+1,k)…(h+s-1,k)，共 s 個時，若$k \geq h+(s-1)$，因單位時間內搶救數的限制，只能阻擋一方的火勢，故最佳搶救方法皆相同則
$b=k(n-k)+(n+1)(h+s)$。

二、 在平面棋盤方格中，當 d=1，起火點為(h,k)(h+1,k)…(h+s-1,k)，共 s 個，且$s \geq 3$時，若$k \leq h+(s-1)$，最佳搶救方法皆相同， 且

若$(n-k+1)>(h+s)$，則$b=\frac{(2n-h-s+3)(h+s)}{2}+(n+1)k$；

若$(n-k+1) \leq (h+s)$，則$b=\frac{(n+k+2)(n-k+1)}{2}-n+h+s+(n+1)k-1$。

三、 在平面棋盤方格中，當 d=2，起火點為(h,k)(h+1,k)…(h+s-1,k)，共 s 個，且$s \geq 2$,

四、 $h \geq k+s+1$時，最佳搶救方法皆相同，火勢被三面包圍時

$b=k(k+s)+\left(4s+1-\left[\frac{k}{2}\right]\right)\left[\frac{k}{2}\right]+\left(2s-\left[\frac{k}{2}\right]\right)\left[\frac{k+1}{2}-\left[\frac{k}{2}\right]\right]+\frac{s^2-s}{2}$。

五、 在平面棋盤方格中，若火勢蔓延方式為九宮格，目前已完成一個起火點的討論；希望未來找出在更多起火點的條件下，搶救方法是否與之有相關性，再求出起火點總數 s 與 b 的關係式。

六、 針對空間坐標的研究，目前已開始進行，希望未來找出在更多起火點的條件下，搶救方法是否與之有相關性，再求出起火點總數 s 與 b 的關係式。

七、 完成此研究後，希望能將此搶救策略應用在處理森林大火或病毒防治問題上，以利於消防單位加速搶救速度，或是抑制病毒傳染擴散的機制。

捌、 參考資料及其他

一、傅承德、洪文良(2005)‧第 17 屆亞太數學競賽試題與參考解答‧科學教育月刊，277，50-520

二、陳浩銘、朱子豪、劉俊宏、吳聖強(2005)‧科展作品 (打火英雄)。

【評語】050405

作品從一個生活化的問題出發，立意相當良好，建議多增加一些變因。例如：風向、燃燒速度…等，會更貼近實際情形。