中華民國第56屆中小學科學展覽會
作品說明書

高級中等學校組　數學科

050404

迷途知返

—從組合遊戲的觀點探討序列等角多邊形的解

學校名稱：國立鳳山高級中學

作者：	指導老師：
高二 劉語涵	顏祥益
高二 楊鈞文	連崇馨
高二 黃子軒	

關鍵詞：Serial Isogons、序列等角多邊形、捷徑圖

摘　要

文獻[1]中有一道趣題，作者給出了 $n=5$，$N=n^2=25$ 的 3 組解，及其中一組解所對應的幾何圖形。本文分兩大方向去討論：

(1)n 為奇質數時，將原組合遊戲轉換成捷徑圖，發展出一套策略，找出了文獻[1]的 3 組解及對應的序列等角多邊形，並利用策略解出了 $n=5$，$N=24$、$N=20$；$n=7$，$N=49$ 的解。

(2)n 為偶數時，因不可能滿足各頂帽子的總和均相等，轉而由幾何觀點出發，利用等角多邊形的性質，搭配偶數邊求解的策略，找出偶數邊的序列等角多邊形，並修正文獻[2]中偶數邊序列等角多邊形的觀點，重新賦予偶數邊組合遊戲的意義。最後針對規律解做推廣，求出 n 為奇數，$N=n^2$、$N=n^2-1$ 及 n 為偶數，$N=\frac{n^2}{2}$、$N=\frac{n^2}{2}-1$ 的規律解。

壹、 研究動機

我們在一本書 - **Which Way Did the Bicycle Go?**發現一道數學趣題:『將 1~25 個號碼的球依照號碼順序放入五頂圍成環狀的帽子中，球必須依逆時針或順時針方向放入與前一顆球相鄰的帽子中，則須如何擺放這些球使五個帽子中的數字總和均相同？』, 一開始我們試著想如何用有效的方法去玩這個有趣的組合遊戲，後來發現書中有給出了三組解答(但未說明如何找到)，並提出從幾何的觀點去看這個問題，書中美妙的幾何圖形，也吸引了我們的目光，更激起我們研究的興趣，於是開始進行我們的研究。

貳、研究目的

一、探討組合遊戲與捷徑圖之關係及求解的策略？

二、探討「序列等角多邊形」與組合遊戲的相關性？

三、探討「序列等角多邊形」與「等角多邊形」的關係？

四、序列等角多邊形解的推廣？

參、研究設備及器材

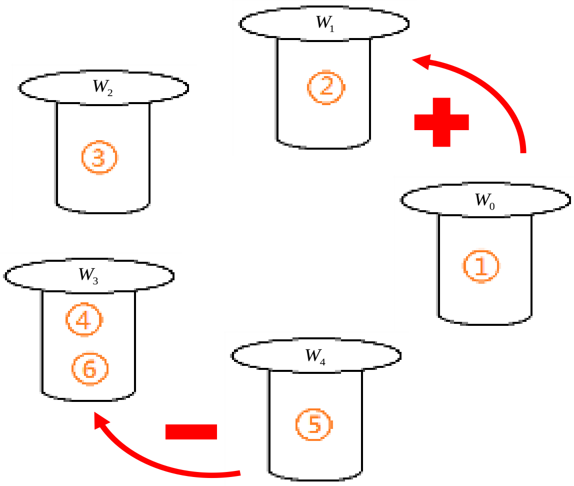
一、紙和筆
二、電腦
三、GeoGebra 軟體
四、Mathematica 軟體

肆、研究過程與方法

一、將組合遊戲問題轉換成平面上的捷徑圖

由參考文獻[1]中所提到的一道數學趣題：『將 1~25 個號碼的球依照號碼順序放入五頂圍成環狀的帽子中，球必須依逆時針或順時針方向放入與前一顆球相鄰的帽子中，則須如何擺放這些球使五頂帽子中的數字總和均相同？』

文章中作者提出了 3 個解並給出了其中一組解的幾何意義，但未說明如何求得解，於是我們針對此組合遊戲及其幾何意義著手研究。



以下是作者給出的其中一組解如(表一)

W_0	W_1	W_2	W_3	W_4
1	2	3	4	5
8	9	10	6	7
15	11	12	13	14
17	18	19	20	16
24	25	21	22	23
總和	總和	總和	總和	總和
65	65	65	65	65

(表一)

W_0	W_1	W_2	W_3	W_4
1(+)	2(+)	3(+)	4(+)	5(−)
8(+)	9(+)	10(−)	6(+)	7(+)
15(−)	11(+)	12(+)	13(+)	14(+)
17(+)	18(+)	19(+)	20(−)	16(+)
24(+)	25(−)	21(+)	22(+)	23(+)

(表二)

針對這一組解我們思考將這組合遊戲轉換成平面上的捷徑圖來操作，以下將詳細說明：

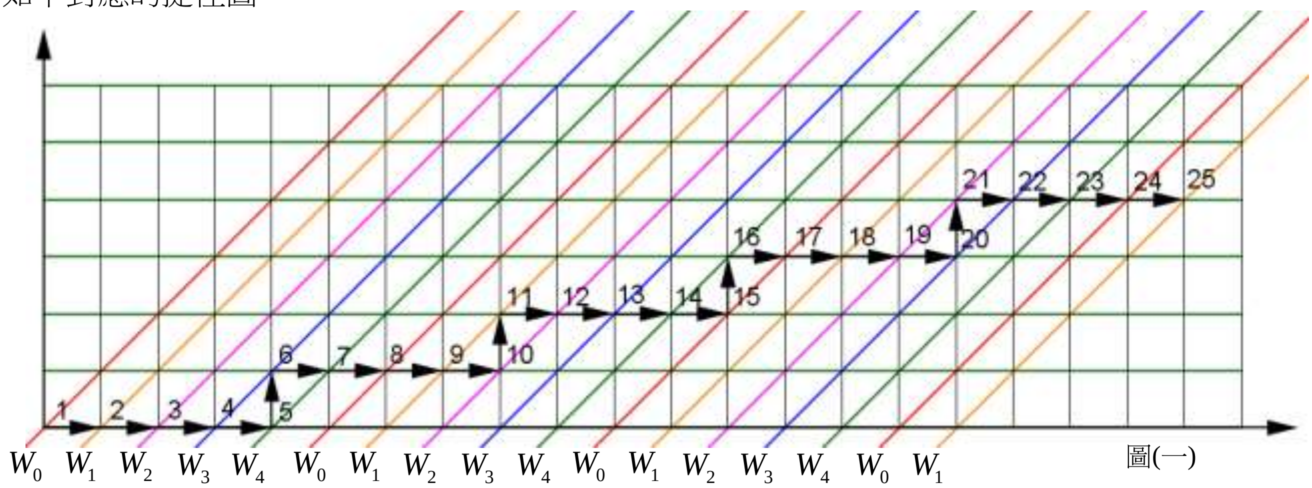
(一) 如果球的擺放是依逆時針方向放入帽子，則以符號“+”表示；
如果球的擺放是依順時針方向放入帽子，則以符號“−”表示。
因此 (表一)可轉換成(表二)，如果只看擺放的順、逆時針方向，則(表二)中的轉動方向

依序為 ＋＋＋＋－＋＋＋＋－＋＋＋＋－＋＋＋＋－＋＋＋＋－

(二) 將組合遊戲轉換成平面上的捷徑圖

1. 以符號“+”表示對應捷徑圖中向右走的方向。
2. 以符號“−”表示對應捷徑圖中向上走的方向。
3. 每一條斜 45°的直線代表一頂帽子，通過原點的直線為 W_0 頂帽子的位置，向右依序為 W_1 頂，W_2 頂，W_3 頂，W_4 頂，W_0 頂，W_1 頂，W_2 頂，W_3 頂，W_4 頂，……。
4. 各頂帽子內的數字總和須相同，即 W_0 ，W_1 ，W_2 ，W_3 ，W_4 線上的數字總和須相同。

故原本的問題可以轉換成把 1~25 號球依序擺在捷徑圖上，使得圖上 W_0 線上，W_1 線上，W_2 線上，W_3 線上，W_4 線上的數字總和各為 65，即為組合遊戲 <u>5 頂帽子 25 顆</u> 的其中一組解。
如下對應的捷徑圖：



圖(一)

W_0 頂的數字總和為 $S_0=(1+8+15+17+24)$ ，W_1 頂的數字總和為 $S_1=(2+9+11+18+25)$ ，
W_2 頂的數字總和為 $S_2=(3+10+12+19+21)$ ，W_3 頂的數字總和為 $S_3=(4+6+13+20+22)$ ，
W_4 頂的數字總和為 $S_4=(5+7+14+16+23)$

至於這組解如何找到，以下我們發展出一系列的策略與方法，成功地找出書上的解，並將結果推廣至其他奇質數頂帽子的情形。

二、利用捷徑圖發展出奇質數頂帽子求解的策略

(一)、$n=5$，五頂帽子求解的策略

步驟流程圖：

步驟 1：確認 W_0 中號碼球的所有可能性。

目的：利用整數的分割將 W_0 中可能的號碼置於捷徑圖上，則可將捷徑圖分割成幾個小區塊，可有效地降低計算量。

⇨

步驟 2：把 $(W_2 \cup W_4)$ 和 $(W_1 \cup W_3)$ 中的號碼球分開成兩部分。

⇨

步驟 3：確認 W_2, W_4：先確認 W_2 ⟹ 再確認 W_4

⇨

步驟 4：確認 W_1, W_3 先找出必留在 W_1, W_3 內的號碼球

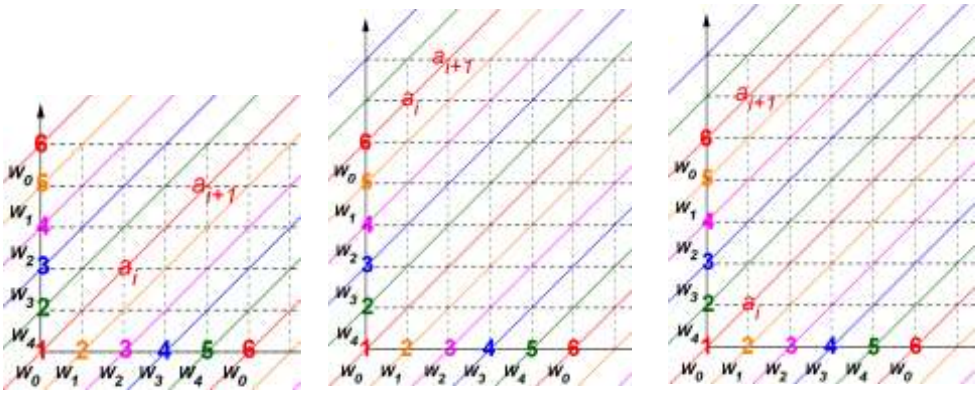
首先確認 W_1 ⟹ 再確認 W_3 的號碼球

步驟 1：確認第 W_0 頂帽子中球號碼的所有可能情形：

如何來確認 W_0 頂帽子中球號碼的所有可能情形呢?

假設 W_0 的球號碼依序為 $\{1, a_2, a_3, a_4, ...\}$

我們將針對球號碼的奇偶性，分成三類去考慮如何表示 $a_2, a_3, a_4, ...$



Case1：若相鄰兩數 a_i, a_{i+1} 同為奇數或同為偶數，則由捷徑圖上可以發現 a_i, a_{i+1} 必在同一條奇數或偶數的 W_0 線上，因此 $a_{i+1} - a_i = 2 + 2k$， $k \in N \cup \{0\}$

Case2：若相鄰兩數 a_i, a_{i+1} 分別為奇數、偶數，則由捷徑圖上可以發現，a_i 在一條奇數的 W_0 線上，而 a_{i+1} 在另一條偶數的 W_0 線上，而且兩條 W_0 線間隔為 5，因此 $a_{i+1} - a_i = 5 + 2k$， $k \in N \cup \{0\}$

Case3：若相鄰兩數 a_i, a_{i+1} 分別為偶數、奇數，則由捷徑圖上可以發現，a_i 在一條偶數的 W_0 線上，而 a_{i+1} 在另一條奇數的 W_0 線上，而且兩條 W_0 線間隔為 5，因此 $a_{i+1} - a_i = 5 + 2k$， $k \in N \cup \{0\}$

當 W_0 中奇數號碼球有 $\boldsymbol{m}$ 個，偶數號碼球有 n 個時，針對 m，n 的限制，我們建立以下的性質：

性質 1： 當 W_0 中的球號碼從 1 號開始，連續 m 個奇數再連續 n 個偶數，即

$W_0=\{1,a_2,\cdots,a_m,b_{m+1},\cdots,b_{m+n}\}$，其中 a_i 為奇數，$2\le i\le m$，b_i 為偶數，

$m+1\le i\le m+n$，則 W_0 中的球號碼總和 S_0 的最小值為 $(m+n)^2+3n$。

[證明]：

因為先連續 m 個奇數再連續 n 個偶數，中間只有一次奇偶變換，

此時 W_0 可表示為

$$\{\overbrace{1\,,\ 3+2k_1\,,\ 5+2(k_1+k_2)\,,\ \cdots\,,\ 2m-1+2\left(k_1+k_2+\cdots+k_{m-1}\right)}^{m\text{個奇數}},$$
$$2m-1+5+2\left(k_1+k_2+\cdots+k_m\right),2m+6+2\left(k_1+k_2+\cdots+k_{m+1}\right),\cdots,2m+2(n+1)+2\left(k_1+k_2+\cdots+k_{m+n-1}\right)\}$$

當取 $k_i=0$，$1\le i\le m+n-1$，則 W_0 中的球號碼總和為最小，

$$\begin{aligned}S_0&=(1+3+5+\cdots+2m-1)+\left[2m+4+2m+6+\cdots+2m+2(n+1)\right]\\&=m^2+2mn+\left[4+6+\cdots+2(n+1)\right]\\&=m^2+2mn+n^2+3n\\&=(m+n)^2+3n\end{aligned}$$

針對 5 頂帽子 25 顆球如何確認 W_0 中球號碼的所有可能性？

因為 $S_0+S_1+S_2+S_3+S_4=\sum_{k=1}^{25}k=65\times5$，且 $S_0=S_1=S_2=S_3=S_4=65$，假設 W_0 中有 m 個奇數，n 個偶數號碼球，由性質 1 得知 W_0 中的球號碼總和至少為 $(m+n)^2+3n$，因此 $(m+n)^2+3n\le65$，但 W_0 中必包含 1 號球，且 $S_0=65$，所以 W_0 中至少有 4 顆球且奇數號碼球的個數 m 必為奇數。以下為(m , n)的所有可能性:

m	5	7	3	5	3	5	1	3	1	3	1
n	0	0	1	1	2	2	3	3	4	4	5

我們將以 $(m,n)=(3,2)$ 為例子去說明如何找出 W_0

W_0 中有 3 個奇數及 2 個偶數號碼球，但第一個號碼球為 1 號， 因此球號碼的奇偶性共有六種情形，分別為 {1,奇,奇,偶,偶}，{1,奇, 偶, 奇,偶}，{1,奇,偶,偶,奇}，{1,偶,奇,奇,偶}，{1,偶,奇,偶,奇}，{1,偶,偶,奇,奇}。

接下來針對 W_0 中球號碼的奇偶性，我們將以{1，偶 ，奇 ，奇 ,偶}為例子去說明如何找出W_0中球號碼球。因此W_0中的球號碼可表示為

$\{\ 1,\ 6+2a\ ,\ 11+2a+2b\ ,\ 13+2a+2b+2c\ ,\ 18+2a+2b+2c+2d\ \}$ ， $a,b,c,d\in \mathrm{N}\cup\{0\}$

$$\begin{cases} 49+2(4a+3b+2c+d)=65 \\ 18+2\left(a+b+c+d\right)\le 25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a+3b+2c+d=8 \\ a+b+c+d\le \dfrac{7}{2} \end{cases}$$

a	1	2	1	0
b	1	0	0	2
c	0	0	2	1
d	1	0	0	0

得到四組解分別為

$$W_0=\{1,8,15,17,24\},W_0=\{1,10,15,17,22\},W_0=\{1,8,13,19,24\},W_0=\{1,6,15,19,24\}$$

接下來應該對以上四組解分別討論，因為篇幅有限，我們將針對$W_0=\{1,8,15,17,24\}$為例子去說明以下的步驟。

步驟 2：把$W_2\cup W_4$中的號碼球和$W_1\cup W_3$中的號碼球分別確認出來。

5 頂帽子 25 顆球，如何在已知W_0的情形下確認出$W_2\cup W_4$的號碼球。

已知$W_0=\{1,8,15,17,24\}$

觀察捷徑圖得知 1 號球在過原點W_0線上，8 號球在另外一條偶數的W_0線上，

而 15,17 號球在另外一條奇數的W_0線上，最後 24 號球在另外一條偶數的W_0線上，

從 1 號到 25 號捷徑圖的路徑，被W_0線上的 1, 8, 15,17,24 號球分割成 5 段：

第 1 段：{2,3,4,5,6,7}號球；第 2 段：{9,10,11,12,13,14}號球；
第 3 段：{16}號球　　　　；第 4 段：{18,19,20,21,22,23}號球
第 5 段：{25}號球

$$\begin{array}{cccccccccc} & 3,5,7 & & 9,11,13 & & \times & & 19,21,23 & & 25 \\ 1 & & 8 & & 15 & & 17 & & 24 & \\ & 2,4,6 & & 10,12,14 & & 16 & & 18,20,22 & & \times \end{array}$$

由捷徑圖上所在的區域可以發現三個特性：

特性 1：{2,3,4,5,6,7}號球同在右下區域或同在左上區域，
{9,10,11,12,13,14}號球同在右下區域或同在左上區域，
{16}號球同在右下區域或同在左上區域，
{18,19,20,21,22,23}號球同在右下區域或同在左上區域，
{25}號球同在右下區域或同在左上區域。

特性 2：$W_2 \cup W_4$ 線上的號碼如果在右下區域為奇數，在左上區域則為偶數；

反之如果在右下區域為偶數，在左上區域則為奇數。

特性 3：相同區域第一段：{3,5,7}號球及{2,4,6}號球不可能同在奇數或偶數的

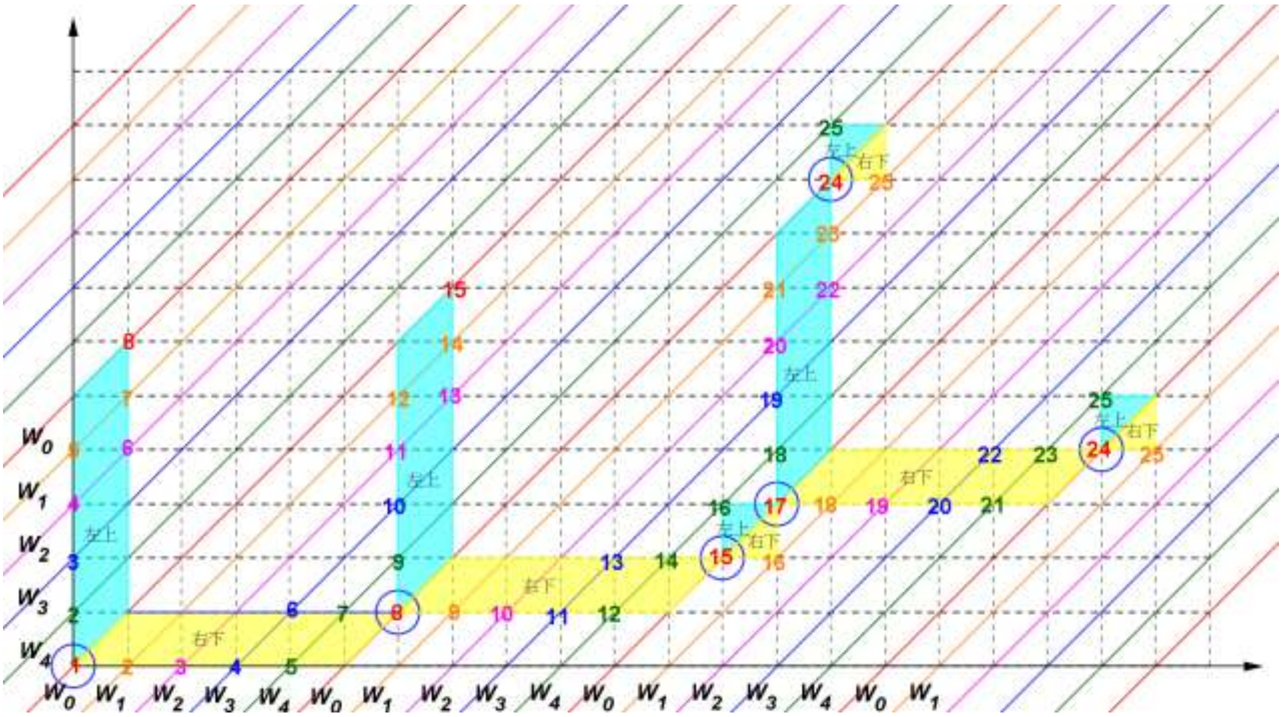
$W_2 \cup W_4$ 線上

相同區域第二段：{9,11,13}號球及{10,12,14}號球不可能同在奇數或偶數的

$W_2 \cup W_4$ 線上。

相同區域第四段: {19,21,23}號球及{18,20,22}號球不可能同在奇數或偶數

的 $W_2 \cup W_4$ 線上



從 1 號到 25 號捷徑圖的路徑，分割成 5 段，有 2^5 種選擇，但每一條完整的捷徑，對稱於**包含 1 號球的 W_0 線**就會得到另外一條完整的捷徑，我們固定討論選擇第一段的右下區域，因此 $W_2 \cup W_4$ 線上的號碼球的可能性有 2^4 種，下列只列出其中五種情形：

	第一段	第二段	第三段	第四段	第五段
區域及相對應的號碼球 W_2，W_4	右下 {3,5,7}	右下 {10,12,14}	右下 ×	右下 {19,21,23}	右下 ×
	右下 {3,5,7}	右下 {10,12,14}	右下 ×	右下 {19,21,23}	左上 {25}
	右下 {3,5,7}	右下 {10,12,14}	右下 ×	左上 {18,20,22}	右下 ×
	右下 {3,5,7}	右下 {10,12,14}	右下 ×	左上 {18,20,22}	左上 {25}
	右下 {3,5,7}	右下 {10,12,14}	左上 {16}	右下 {19,21,23}	右下 ×

步驟 3：確認 W_2,W_4 中各自的號碼球:

延續在步驟 2 中，我們同樣以 <u>5 頂帽子 25 顆球</u>為例子。

已知 $W_0=\{1,8,15,17,24\}$，由步驟 2 得到 $W_2\cup W_4$ 中的號碼球共有 16 種情形，

因為 $S_0+S_1+S_2+S_3+S_4=\sum_{k=1}^{25}k=65\times 5$，且得知 $S_0=S_1=S_2=S_3=S_4=65$，

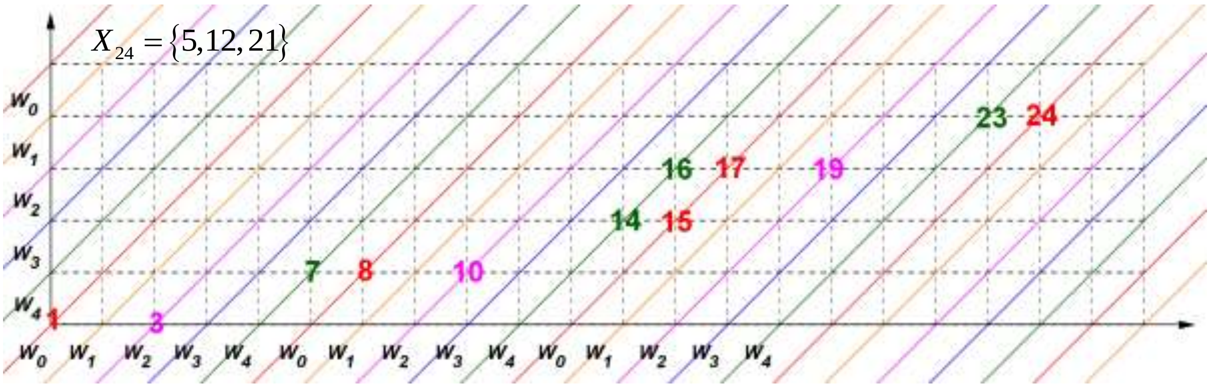
因此去檢查 16 種情形中，哪一種情形 $W_2\cup W_4$ 的號碼總和為 130(即 $S_2+S_4=130$)，

結果只有 $W_2\cup W_4=\{3,5,7,10,12,14,16,19,21,23\}$ 符合號碼總和為 130。

$$\begin{array}{ccccccccc} & \boxed{3,5,7} & & 9,11,13 & \times & & \boxed{19,21,23} & & 25 \\ 1 & & 8 & & 15 & 17 & & 24 & \\ & 2,4,6 & & \boxed{10,12,14} & \boxed{16} & & 18,20,22 & & \boxed{\times} \end{array}$$

接下來分兩個子步驟來確認 W_2 及 W_4 的號碼球

步驟 3-1: $W_2\cup W_4=\{3,5,7,10,12,14,16,19,21,23\}$ 中先確認必留在 W_2 及必留在 W_4 的號碼球



R_{02}：表示與W_0間隔 2 可能落在W_2的號碼球。

R_{03}：表示與W_0間隔 2 可能落在W_3的號碼球。 $R_{02}=R_{03}=\{3, 6, 10, 13, 1$

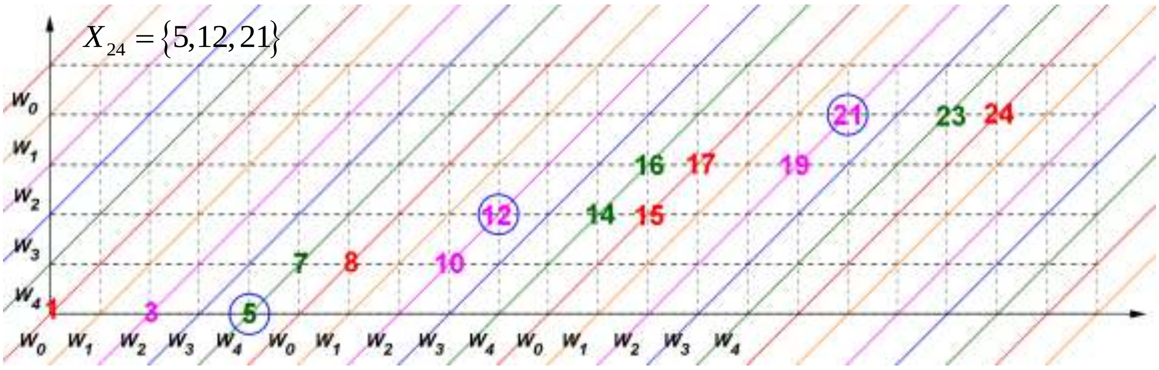
R_{01}：與W_0相鄰可能落在W_1的號碼球 。

R_{04}：與W_0相鄰可能落在W_4的號碼球 。$R_{01}=R_{04}=\{2,7,9,14,16,18,23,25\}$

$R_{02}\cap(W_2\cup W_4)=\{3,10,19\}$必留在$W_2$；$R_{04}\cap(W_2\cup W_4)=\{7,14,16,23\}$必留在$W_4$。

因此$W_2\cup W_4$的號碼球中剩下 5,12,21 號可以留在W_2或W_4。令$X_{24}=\{5,12,21\}$。

步驟 3-2:確認W_2中的號碼球



X_{24}的子集合為{} , {5} , {12} , {21} , {5,12} ,{ 5,21} , {12,21} , {5,12,21}

檢查子集合中與$R_{02}\cap(W_2\cup W_4)=\{3,10,19\}$的聯集是否元素總和為 65。

結果得到$\{12,21\}$，因此$W_2=\{3,10,19\}\cup\{12,21\}=\{3,10,12,19,21\}$，而

$W_4=(R_{04}\cap(W_2\cup W_4))\cup\{5\}=\{5,7,14,16,23\}$

步驟 4：確認W_1,W_3中各自的號碼球。

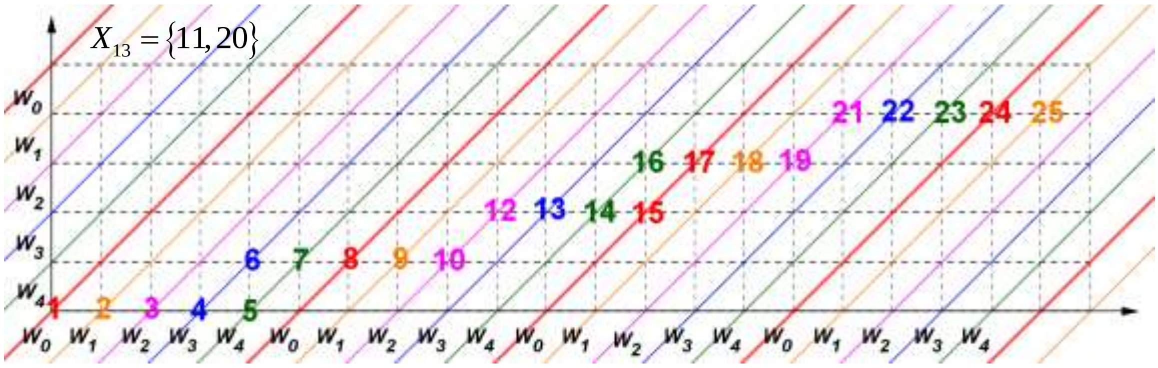
延續步驟 2,3，由步驟 3 得到$W_0=\{1,8,15,17,24\}$，$W_2=\{3,10,12,19,21\}$，

$W_4=\{5,7,14,16,23\}$，

因此$W_1\cup W_3=\{2,4,6,9,11,13,18,20,22,25\}$

接下來分兩個子步驟來確認W_1及W_3的號碼球

步驟 4-1: $W_1 \cup W_3 = \{2,4,6,9,11,13,18,20,22,25\}$ **中先確認必留在** W_1 **及必留在** W_3 **的號碼球**

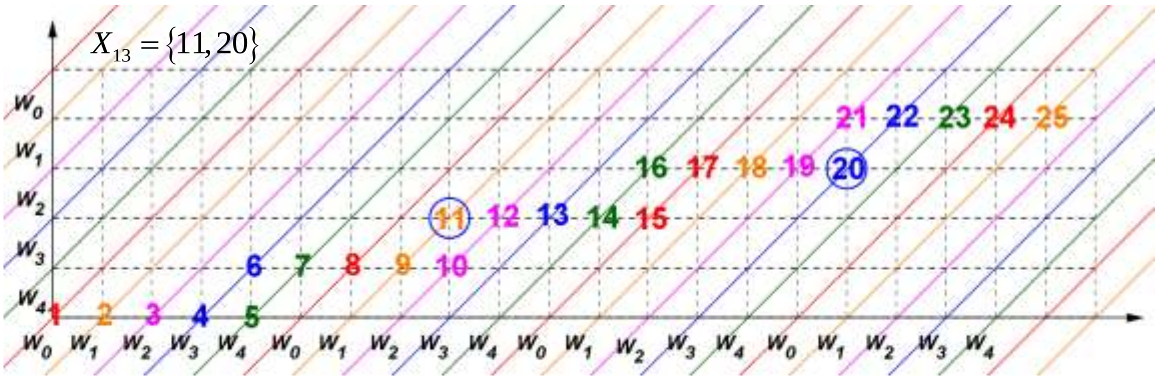


R_{43} ：與 W_4 相鄰可能落在 W_3 的號碼球。 $R_{43} = \{4,6,8,13,15,17,22,24\}$

$R_{01} \cap (W_1 \cup W_3) = \{2,9,18,25\}$ 必留在 W_1；$R_{43} \cap (W_1 \cup W_3) = \{4,6,13,22\}$ 必留在 W_3。

因此 $W_1 \cup W_3$ 的號碼球中剩下 11,20 號可以留在 W_1 或 W_3。令 $X_{13} = \{11,20\}$

步驟 4-2: 確認 W_1 **中的號碼球**



$X_{13} = \{11,20\}$ ，而 X_{13} 的號碼可以在 W_1 ，也可以在 W_3 中，

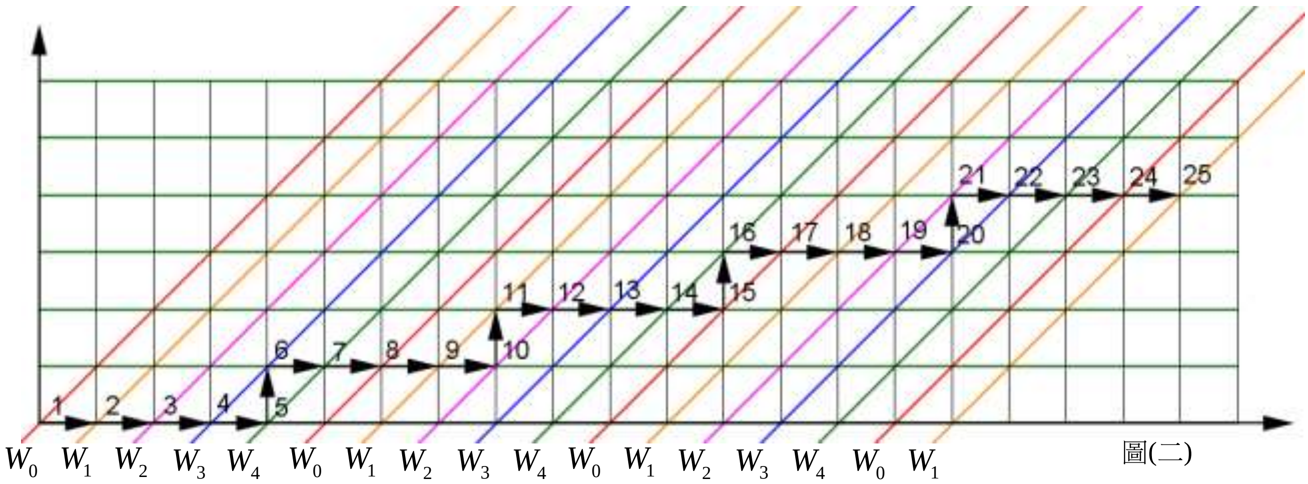
X_{13} 的子集合為{} , {11} , {20} ,{ 11,20}檢查子集合中與

$R_{01} \cap (W_1 \cup W_3) = \{2,9,18,25\}$ 的聯集是否元素總和為 65。結果得到 $\{11\}$ ，

因此 $W_1 = \{2,9,18,25\} \cup \{11\} = \{2,9,11,18,25\}$ ，

而 $W_3 = \{4,6,13,22\} \cup \{20\} = \{4,6,13,20,22\}$，最後考慮 W_3 的元素總和是否為 65。

因此，經由上述策略的操作可得到組合遊戲 <u>5 頂帽子 25 顆球</u> 的其中一組解：如圖(二)



圖(二)

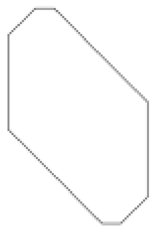
W_0 頂的數字總和為 $S_0=(1+8+15+17+24)=65$，
W_1 頂的數字總和為 $S_1=(2+9+11+18+25)=65$，
W_2 頂的數字總和為 $S_2=(3+10+12+19+21)=65$，
W_3 頂的數字總和為 $S_3=(4+6+13+20+22)=65$，
W_4 頂的數字總和為 $S_4=(5+7+14+16+23)=65$

W_0	W_1	W_2	W_3	W_4
1	2	3	4	5
8	9	10	6	7
15	11	12	13	14
17	18	19	20	16
24	25	21	22	23

接下來我們將探討這一組解所代表的幾何意義，在此我們先給出兩個定義：

定義 1：等角多邊形：一個所有內角均相等的凸多邊形。如下圖(三)、(四)分別為等角六邊形與等角八邊形

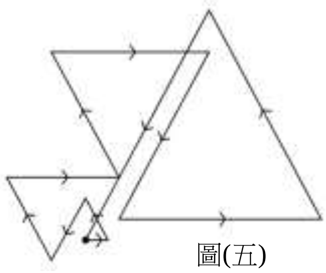

圖(三)等角六邊形

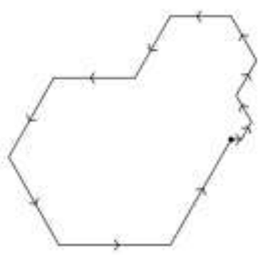

圖(四)等角八邊形

定義 2：序列等角多邊形(Serial Isogons)：我們考慮在平面上有一質點依下列規則運動：

(1)原點出發；
(2)第 k 次走 k 步(即第一次走一步、第二次走二步、第三次走三步、…等)
(3)每次走完後須沿原來前進的方向往逆時針轉 θ 角或順時針轉 θ 角，其中 $\theta=\dfrac{360^\circ}{n}$，

若此質點經上述規則運動 N 次後，能回到原出發點，則其運動的路徑所形成的多邊形，稱為序列等角多邊形，這種序列等角多邊形自身的邊長可以相交，轉角也可以彼此接觸。如下圖(五)、(六)分別為兩個不同的序列等角多邊形。


圖(五)
三邊 60 度序列等角多邊形


圖(六)
六邊 120 度序列等角多邊形

在文獻[1]中 5 頂帽子的組合遊戲，可對應五邊 108 度序列等角多邊形，對應關係說明如下：

在平面上有一質點依下列規則運動，

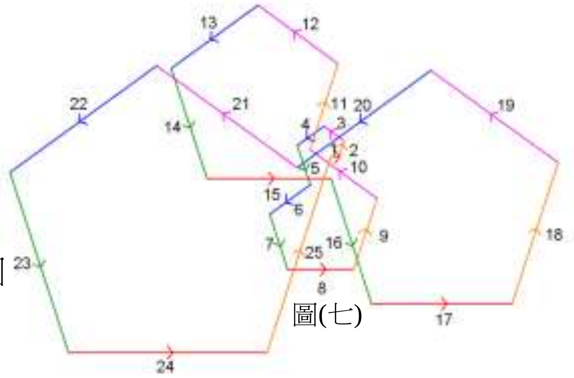
(1)原點出發

(2)第一次走一步、第二次走二步、第 k 次走 k 步、…

(3)每次走完後須往逆時針轉 72° 或往順時針轉 72° 。

此質點運動 $n^2=5^2=25$ 次後能回到原出發點(原點)，

我們將五邊 108 度序列等角多邊形的路徑看成是向量圖，而每個路線的行進方向恰可分成 5 個方向，分別為



圖(七)

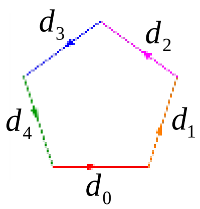
$\overrightarrow{d_0},\overrightarrow{d_1},\overrightarrow{d_2},\overrightarrow{d_3},\overrightarrow{d_4}$ 如圖(八)，而每個向量的方向恰可視為在複數平面上 1 的 5 次方根，分別對應到 $\omega^0,\omega^1,\omega^2,\omega^3,\omega^4$ 的 5 個方向，且將相同方向的向量長度相加，則可以得到 5 個新的向量，

分別為 $\overrightarrow{S_0}=(1+8+15+17+24)\omega^0$ ， $\overrightarrow{S_1}=(2+9+11+18+25)\omega$ ， $\overrightarrow{S_2}=(3+10+12+19+21)\omega^2$ ，

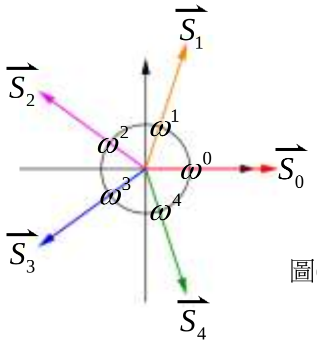
$\overrightarrow{S_3}=(4+6+13+20+22)\omega^3$ ， $\overrightarrow{S_4}=(5+7+14+16+23)\omega^4$ ，如圖(九)

而 $\overrightarrow{S_0}+\overrightarrow{S_1}+\overrightarrow{S_2}+\overrightarrow{S_3}+\overrightarrow{S_4}=65\omega^0+65\omega^1+65\omega^2+65\omega^3+65\omega^4=0$

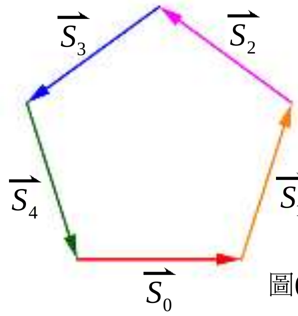
因此 $\overrightarrow{S_0},\overrightarrow{S_1},\overrightarrow{S_2},\overrightarrow{S_3},\overrightarrow{S_4}$ 將形成一個邊長均為 65 的等角五邊形，如圖(十)



圖(八)



圖(九)

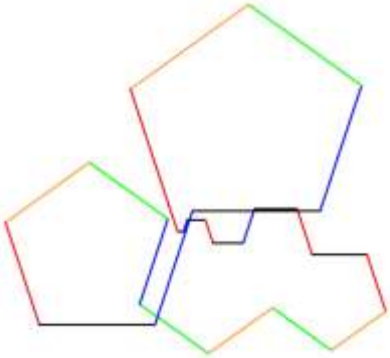


圖(十)

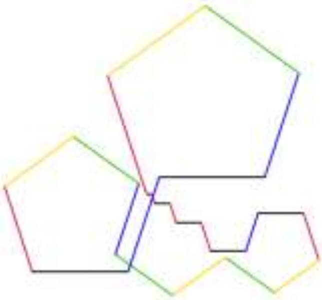
五頂帽子 25 顆球的 組 合 遊 戲 與 幾 何 意 義 之 關 係 對 照 表	
組合遊戲	幾何意義
五頂帽子 25 顆球	五邊 108° 序列等角多邊形
球的擺放方向為逆時針方向 球的擺放方向為順時針方向	行進方向為逆時針轉 72° 行進方向為順時針轉 72°
帽子： W_0 頂、W_1 頂、W_2 頂、W_3 頂、W_4 頂	五個行進方向： $\overrightarrow{d_0}$ 、$\overrightarrow{d_1}$ 、$\overrightarrow{d_2}$ 、$\overrightarrow{d_3}$ 、$\overrightarrow{d_4}$
號碼從 1 號到 25 號	向量長度從 1 到 25 單位長
每一頂帽子內球的號碼總和為 65	$\lvert\overrightarrow{S_0}\rvert=\lvert\overrightarrow{S_1}\rvert=\lvert\overrightarrow{S_2}\rvert=\lvert\overrightarrow{S_3}\rvert=\lvert\overrightarrow{S_4}\rvert=65$ 且 $\overrightarrow{S_0}+\overrightarrow{S_1}+\overrightarrow{S_2}+\overrightarrow{S_3}+\overrightarrow{S_4}=0$ ，即 由原點出發經過運動 25 次後回到原出發點

進而我們利用此一策略將原問題推廣至不同的情形，解出了 $n=5$(5 頂帽子)，$N=25$(顆球)的另外兩組解及 $n=5$(5 頂帽子)，$N=24$(顆球)、$N=20$(顆球)的解。

W_0	W_1	W_2	W_3	W_4
1	2	12	11	4
3	6	14	13	8
5	15	16	17	10
7	20	23	24	18
9	22			25
19				
21				


圖(十一)

W_0	W_1	W_2	W_3	W_4
1	8	12	11	2
3	15	14	13	4
5	20	16	17	6
7	22	23	24	10
9				18
19				25
21				


圖(十二)

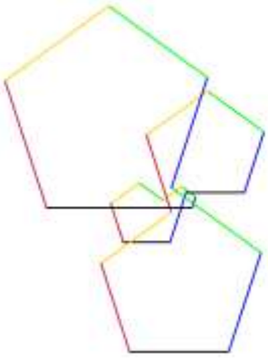
呈現 五頂帽子 20 顆球、及五頂帽子 24 顆球的解：

W_0	W_1	W_2	W_3	W_4
1	2	8	7	6
3	4	16	9	10
5	17	18	11	12
13	19		15	14
20				


五頂帽子 20 顆球所對應的序列等角多邊形

圖(十三)

W_0	W_1	W_2	W_3	W_4
1	2	3	4	7
8	9	5	6	14
10	11	12	13	16
17	18	19	15	23
24	20	21	22	


五頂帽子 24 顆球所對應的序列等角多邊形

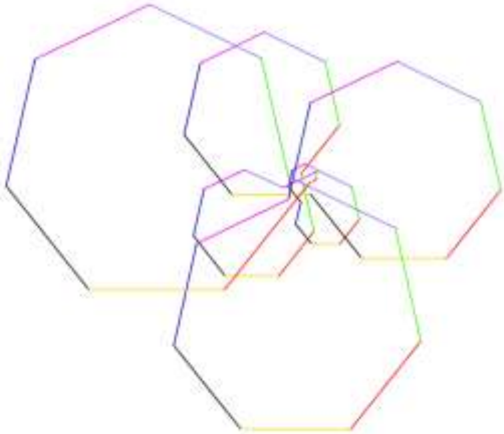
圖(十四)

(二)原組合遊戲做推廣：

『將 1~49 個號碼的球依照號碼順序放入七頂圍成環狀的帽子中，球必須依逆時針或順時針方向放入與前一顆球相鄰的帽子中，則須如何擺放這些球使七頂帽子中的數字總和均相同？』七頂帽子 49 顆球如何求解，由於篇幅有限，詳細的操作過程，置於**附錄一**。

以下為利用策略所求出的一組解：

W_o	W_1	W_2	W_3	W_4	W_5	W_6
1	2	3	4	5	6	7
10	11	12	13	14	8	9
19	20	21	15	16	17	18
28	22	23	24	25	26	27
30	31	32	33	34	35	29
39	40	41	42	36	37	38
48	49	43	44	45	46	47



以下我們歸納組合遊戲、序列等角多邊形與等角多邊形三者之間的關係，並做出對照表：

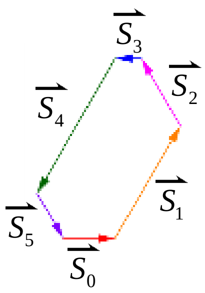
組合遊戲	序列等角多邊形	等角多邊形
五頂帽子 25 顆球的組合遊戲：各頂帽子的總和均為 65	五邊$180°-\dfrac{360°}{5}$序列等角多邊形經運動 25 次回到原出發點	將向量適當平移將形成一個邊長均為 65 的等角五邊形
七頂帽子 49 顆球的組合遊戲：各頂帽子的總和均為 175	七邊$180°-\dfrac{360°}{7}$序列等角多邊形經運動 49 次回到原出發點	將向量適當平移將形成一個邊長均為 175 的等角七邊形
P 頂帽子(P 為奇質數)，n^2 顆球的組合遊戲：各頂帽子和均相等	P 邊$180°-\dfrac{360°}{P}$序列等角多邊形經運動n^2 次回到原出發點	將向量適當平移將形成一個邊長均等長的等角 P 邊形

三、等角多邊形的性質：

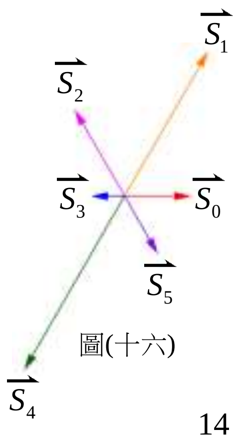
定理 1：若一整數邊長的等角六邊形，邊長依逆時針方向依序為 S_0,S_1,S_2,S_3,S_4,S_5 ，則

對邊長成等差，即 $S_0-S_3=S_4-S_1=S_2-$

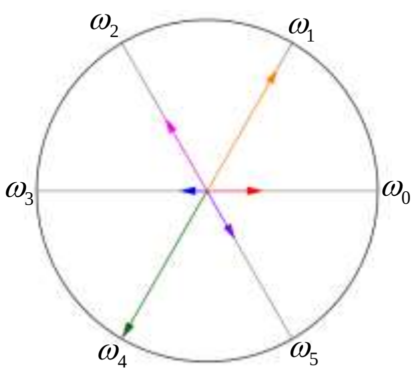
證明：



圖(十五)



圖(十六)



圖(十七)

令 $\omega=\cos\dfrac{2\pi}{6}+i\sin\dfrac{2\pi}{6}$，則 $\omega^3+1=0$， $\omega^0-\omega^1+\omega^2=0$

考慮每一邊為一向量，則依逆時針方向，邊長可形成 $\overrightarrow{S_0},\overrightarrow{S_1},\overrightarrow{S_2},\overrightarrow{S_3},\overrightarrow{S_4},\overrightarrow{S_5}$ ，如圖(十五)

而 $\overrightarrow{S_0}+\overrightarrow{S_1}+\overrightarrow{S_2}+\overrightarrow{S_3}+\overrightarrow{S_4}+\overrightarrow{S_5}=0$，現在平移所有向量，使得他們有相同的原點 O，

如圖(十六)，如果看成複數平面，取 $\overrightarrow{S_0}$ 在正實軸，因此就可以把 $\overrightarrow{S_0},\overrightarrow{S_1},\overrightarrow{S_2},\overrightarrow{S_3},\overrightarrow{S_4},\overrightarrow{S_5}$ 視

為 $S_0\omega^0,S_1\omega^1,S_2\omega^2,S_3\omega^3,S_4\omega^4,S_5\omega^5$ 就可以得到 $S_0\omega^0+S_1\omega^1+S_2\omega^2+S_3\omega^3+S_4\omega^4+S_5\omega^5=0$

$\because\omega^3=-1$，$\therefore(S_0-S_3)\omega^0-(S_4-S_1)\omega^1+(S_2-S_5)\omega^2=0$

$\therefore\omega,\bar{\omega}$ 為 $\begin{cases}(S_0-S_3)-(S_4-S_1)z+(S_2-S_5)z^2=0\\1-z+z^2=0\end{cases}$ 的公共根，故 $\dfrac{S_0-S_3}{1}=\dfrac{S_4-S_1}{1}=\dfrac{S_2-S_5}{1}$

定理 2：已知 P 為奇質數，若整數邊長的等角 P 邊形，邊長依逆時針方向為 $S_0,S_1,....,S_{P-1}$，則

各邊長均相等， $S_0=S_1=S_2=....=S_{P-1}$，**即為正 P 邊形。**

證明：

令 $\omega=\cos\dfrac{2\pi}{P}+i\sin\dfrac{2\pi}{P}$，則 $\omega^p=1$，$1+\omega+\omega^2+......+\omega^{p-1}=0$，考慮如同 [定理 1]

的圖(十五)、圖(十六)、圖(十七)的過程可得到

$S_0\omega^0+S_1\omega^1+S_2\omega^2+...+S_{P-1}\omega^{P-1}=0$，$\therefore\omega$ 為 $\begin{cases}1+z+z^2+...+z^{p-1}=0\\S_0+S_1z+S_1z^2+...+S_{P-1}z^{P-1}=0\end{cases}$ 的公共根

若 $S_0,S_1,....,S_{P-1}$ 兩兩不相等，則 $1+z+z^2+...+z^{p-1}$ 可分解為兩個非常數的有理係數多項式的乘積，但 $1+z+z^2+...+z^{p-1}$ 不可分解為兩個非常數的有理係數多項式的乘積，故

$S_0=S_1=S_2=....=S_{P-1}$

定理 3：已知 P 為奇質數，若整數邊長的等角 $2P$ 多邊形，邊長依逆時針方向為

$S_0,S_1,....,S_{P-1},S_P,S_{P+1},...,S_{2P-1}$，則 **對邊長成等差**，即

$S_0-S_P=-(S_1-S_{P+1})=S_2-S_{P+2}=-(S_3-S_{P+3})=......=(-1)^k(S_k-S_{P+k})=...=(S_{p-1}-S_{2P-1})$

證明：令 $\omega=\cos\dfrac{2\pi}{2P}+i\sin\dfrac{2\pi}{2P}$，則 $\omega^P+1=0$，$1-\omega+\omega^2-......+\omega^{p-1}=0$，考慮如同 [定理 1]

的圖(十五)、圖(十六)、圖(十七)的過程可得到

$$S_0\omega^0+S_1\omega^1+S_2\omega^2+\ldots+S_{P-1}\omega^{P-1}+S_p\omega^P+S_{P+1}\omega^{P+1}+\ldots+S_{2P-1}\omega^{2P-1}=0$$

$\because \omega^P=-1$，$\therefore (S_0-S_P)\omega^0+(S_1-S_{P+1})\omega^1+(S_2-S_{P+2})\omega^2+\ldots..+(S_{P-1}-S_{2P-1})\omega^{P-1}=0$

ω 為 $\begin{cases}1-z+z^2-z^3+\ldots-z^{P-2}+z^{P-1}=0\\(S_0-S_P)+(S_1-S_{P+1})z+(S_2-S_{P+2})z^2+\ldots\ldots+(S_{p-1}-S_{2P-1})z^{P-1}=0\end{cases}$ 的公共根

若 $S_0-S_P=-(S_1-S_{P+1})=S_2-S_{P+2}=\cdots=(-1)^k(S_k-S_{P+k})=\ldots=(S_{p-1}-S_{2P-1})$ 不成立，則

$1-z+z^2-z^3+\ldots-z^{P-2}+z^{P-1}$ 可分解為兩個非常數的有理係數多項式的乘積，但
$1-z+z^2-z^3+\ldots-z^{P-2}+z^{P-1}$ 不可分解為兩個非常數的有理係數多項式的乘積，故

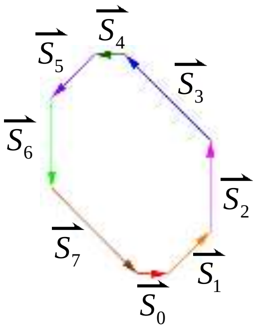
$S_0-S_P=-(S_1-S_{P+1})=S_2-S_{P+2}=\cdots=(-1)^k(S_k-S_{P+k})=\ldots=(S_{p-1}-S_{2P-1})$

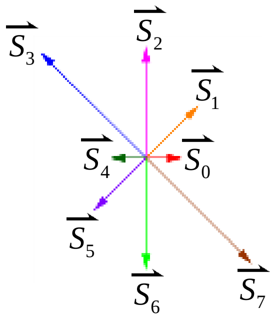
定理 4：整數邊長的等角八邊形，邊長依逆時針方向為 $S_0,S_1,S_2,S_3,S_4,S_5,S_6,S_7$ 的整數，

則 **對邊等長**，即 $S_0=S_4,S_1=S_5,S_2=S_6,S_3=S_7$

證明：

圖(十八)





圖(十九)

考慮如[定理 1]的圖(十五)、圖(十六)過程得到圖(十八)、圖(十九)

$\overrightarrow{S_0}+\overrightarrow{S_1}+\overrightarrow{S_2}+\overrightarrow{S_3}+\overrightarrow{S_4}+\overrightarrow{S_5}+\overrightarrow{S_6}+\overrightarrow{S_7}=0 \qquad \cdots\cdots\cdots \quad (*)$

令 s_0 為 $\overrightarrow{S_0}$ 的單位向量，s_1 為 $\overrightarrow{S_1}$ 的單位向量，s_2 為 $\overrightarrow{S_2}$ 的單位向量，s_3 為 $\overrightarrow{S_3}$ 的單位向量，

又可得 $\overrightarrow{S_0}+\overrightarrow{S_4}=\alpha s_0$，$\overrightarrow{S_1}+\overrightarrow{S_5}=\beta s_1$，$\overrightarrow{S_2}+\overrightarrow{S_6}=\gamma s_2$，$\overrightarrow{S_3}+\overrightarrow{S_7}=\delta s_3$ $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbf{Z}$。

由 $(*)$ 得 $\alpha s_0+\beta s_1+\gamma s_2+\delta s_3=0\cdots(**)$

又 $\because s_0\perp s_2$，$\therefore$ 將 $(**)$ 兩邊同時內積 s_2，得 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\beta+\gamma+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\delta=0$，

又 $\because \alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbf{Z}$，$\therefore \gamma=0$ 同理 $\alpha=\beta=\delta=0$，因此 $S_0=S_4$，$S_1=S_5$，$S_2=S_6$，$S_3=S_7$

四、利用捷徑圖發展出找尋偶數頂帽子解的策略

接下來我們希望將組合遊戲與序列等角多邊形的解，推廣至偶數的情形：

<u>**首先由捷徑圖中可得到在 n 為偶數時各頂帽子的特性**</u>：

特性 1：奇數號碼的球必在 $W_0, W_2, W_4, W_6, \cdots$，偶數號碼的球必在 $W_1, W_3, W_5, W_7, \cdots$

特性 2：W_0 的號碼必為奇數，因此相鄰的兩個號碼 a_i, a_{i+1}，其中 $a_{i+1} - a_i = 2 + 2k, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

特性 3：設 W_0 內有 m 個號碼的球，則 W_0 的號碼球總和最小值為 $[1+3+5+\cdots+(2m-1)] = m^2$

以六頂帽子 18 顆球為例：

如果依照<u>奇數頂帽子</u>的遊戲規則，每頂帽子的球號碼總和均相等是不可能。

因為 W_0, W_2, W_4 的號碼球為奇數 $\{1,3,5,\cdots 17\}$，W_1, W_3, W_5 的號碼球為偶數 $\{2,4,6,\cdots 18\}$。

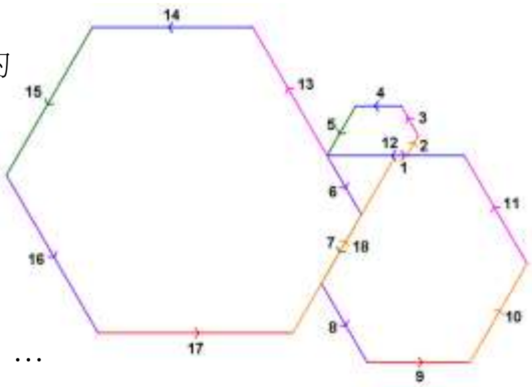
如果每頂帽子的球號碼總和均相等，則 $S_0 = S_2 = S_4 = \frac{1}{3}\frac{(1+17)\times 9}{2} = 27$；

$$S_1 = S_3 = S_5 = \frac{1}{3}\frac{(2+18)\times 9}{2} = 30$$

經上述的觀察發現在偶數頂帽子時，不可能滿足各頂帽子的總和均相等，故原奇數頂帽子的組合遊戲觀點，在 n 為偶數時是行不通的。

因此<u>偶數頂帽子</u>的遊戲規則需要修正，改由幾何的觀點出發，將操作的模式調整如下：

在文獻[2]中六邊 120 度序列等角多邊形，兩者的對應關係說明如下：



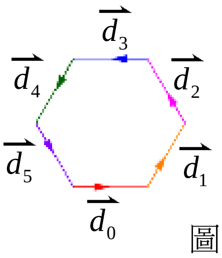
在平面上有一質點依下列規則運動，

(1)原點出發

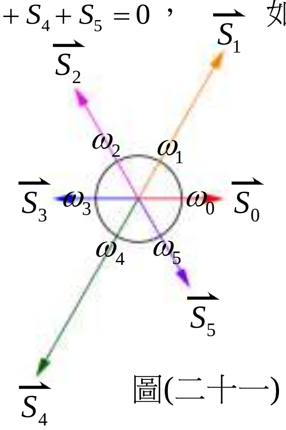
(2)第一次走一步、第二次走二步、第 k 次走 k 步、…

(3)每次走完後須往逆時針轉 60° 或往順時針轉 60°。

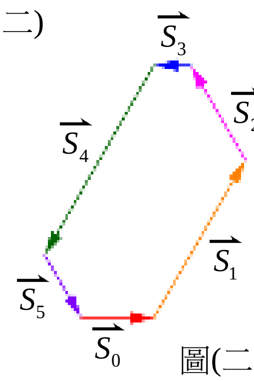
此質點運動 $\frac{n^2}{2} = 18$ 次後能回到原出發點(原點)，我們將六邊 120 度序列等角多邊形的路徑看成是向量圖，而每個路線的行進方向恰可分成 6 個方向，分別為 $\overrightarrow{d_0}, \overrightarrow{d_1}, \overrightarrow{d_2}, \overrightarrow{d_3}, \overrightarrow{d_4}, \overrightarrow{d_5}$ 如圖(二十)，而每個向量的方向恰可視為在複數平面上 1 的 6 次方根，分別對應到 $\omega^0, \omega^1, \omega^2, \omega^3, \omega^4, \omega^5$ 的 6 個方向，且將相同方向的向量長度相加，則可以得到 6 個新的向量，如圖(二十一)，$\overrightarrow{S_0} + \overrightarrow{S_1} + \overrightarrow{S_2} + \overrightarrow{S_3} + \overrightarrow{S_4} + \overrightarrow{S_5} = 0$， 如圖(二十二)



圖(二十)



圖(二十一)



圖(二十二)

先考慮是否存在六邊120°的序列等角多邊形 $\Longrightarrow$ 將問題轉化 $\Longrightarrow$ 若存在六邊120°的序列等角多邊形，將向量適當平移可形成一個等角六邊形 $\Longrightarrow$ 利用[定理 1] $\Longrightarrow$ 等角六邊形的對邊長成等差

六頂帽子 **18** 顆球的組合遊戲與幾何意義之關係對照表	
幾何意義	組合遊戲
六邊120°序列等角多邊形	六頂帽子 18 顆球
行進方向為逆時針轉60° 行進方向為順時針轉60°	球的擺放方向為逆時針方向 球的擺放方向為順時針方向
六個行進方向： $\overrightarrow{d_0}$、$\overrightarrow{d_1}$、$\overrightarrow{d_2}$、$\overrightarrow{d_3}$、$\overrightarrow{d_4}$、$\overrightarrow{d_5}$	帽子： W_0頂、W_1頂、W_2頂、W_3頂、W_4頂、W_5頂
向量長度從 1 到 18 單位長	球號碼從 1 號到 18 號
等角六邊形的<u>對邊長成等差</u> 即$\left\|\overrightarrow{S_0}\right\|-\left\|\overrightarrow{S_3}\right\|=\left\|\overrightarrow{S_4}\right\|-\left\|\overrightarrow{S_1}\right\|=\left\|\overrightarrow{S_2}\right\|-\left\|\overrightarrow{S_4}\right\|=-3$且 $\overrightarrow{S_0}+\overrightarrow{S_1}+\overrightarrow{S_2}+\overrightarrow{S_3}+\overrightarrow{S_4}+\overrightarrow{S_5}=0$即由原點出發經過運動 18 次後回到原出發點	W_0頂、W_1頂、W_2頂、W_3頂、W_4頂、W_5頂 帽子內球號碼總和分別為S_0,S_1,S_2,S_3,S_4,S_5 六頂帽子的球號碼總和必須符合 **<u>對邊成等差</u>** 即 $S_0-S_3=S_4-S_1=S_2-S_5=-3$

(一)六頂帽子，18 顆球，求解的策略：

我們思考六頂帽子的組合遊戲，並求其解：

『將 1~18 個號碼球，依照號碼順序放入六頂圍成環狀的帽子中，球必須依逆時針或順時針方向放入與前一顆球相鄰的帽子中，則須如何擺放這些球使六頂帽子的球號碼總和必須符合**<u>對邊成等差</u>**？』

步驟流程圖：

步驟 1：確認W_0中號碼球的所有可能性。

目的：利用整數的分割將W_0中可能的號碼置於捷徑圖上，則可將捷徑圖分割成幾個小區塊，可有效地降低計算量。

$\Rightarrow$

步驟 2：確認W_2,W_4：先確認W_2 $\Longrightarrow$ 再確認W_4

$\Rightarrow$

步驟 3：確認W_1,W_3,W_5先找出必留在W_1,W_3,W_5內的號碼球

首先確認W_1 $\Longrightarrow$ 再分別確認W_3及W_5的號碼球

以下將過程分成三大步驟，以六頂帽子 18 顆球為例，並且假設

$S_0=29$，$S_1=30$，$S_2=25$，$S_3=32$，$S_4=27$，$S_5=28$ 的情形下，說明求解的過程

步驟 1：確認 W_0 中號碼球的所有可能性

假設 W_0 中有 m 個號碼球，則 W_0 中的球號碼總和 S_0 至少為 m^2，因此 $m^2 \le 29$，但 W_0 必包含 1 號球，且 $S_0=29$，所以 W_0 中至少有 3 顆球，故 $m=3$ 或 5。

我們將以 $m=3$ 為例子去說明如何找出 W_0

W_0 中的號碼球可表示為 $\{1,3+2a,5+2a+2b\}$，$a,b\in \mathrm{N}\cup\{0\}$，

$$\begin{cases}9+2(2a+b)=29\\5+2(a+b)\le 18\end{cases},\quad \begin{cases}2a+b=10\\a+b\le \dfrac{13}{2}\end{cases}$$

a	5	4
b	0	2

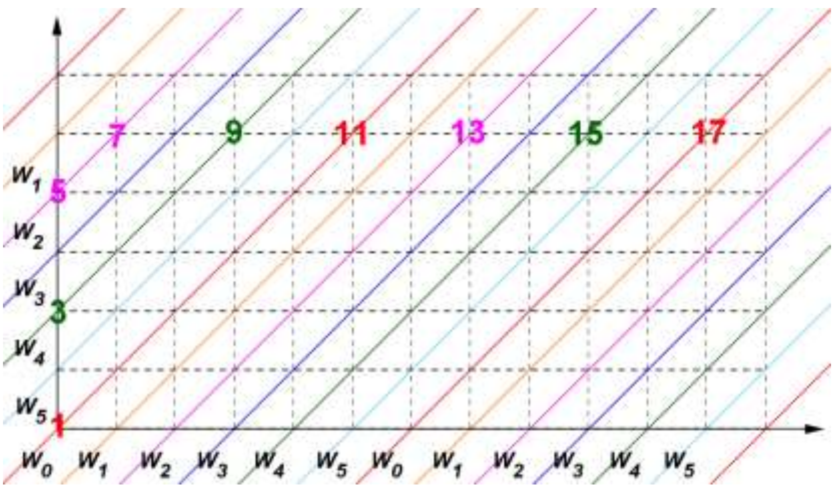
得到 $W_0=\{1,13,15\}$，$W_0=\{1,11,17\}$。 接下來應該對以上兩組解分別討論，

因為篇幅有限，以下我們將針對 $W_0=\{1,11,17\}$ 為例子去說明以下的步驟。

步驟 2：確認 W_2 及 W_4 各自的號碼球: 如何在已知 W_0 的情形下確認出 $W_2\cup W_4$ 的號碼球。

我們將以 $W_0=\{1,11,17\}$ 為例子 ， 則 $W_2\cup W_4=\{3,5,7,9,13,15\}$

考慮 $W_2\cup W_4$ 的子集合是否有元素總和為 $S_2=25$，結果得到三種情形 $W_2=\{3,7,15\}$，$W_2=\{5,7,13\}$，$W_2=\{3,9,13\}$，接下來我們將以 $W_2=\{5,7,13\}$，$W_4=\{3,9,15\}$ 為例子，去說明以下的步驟。



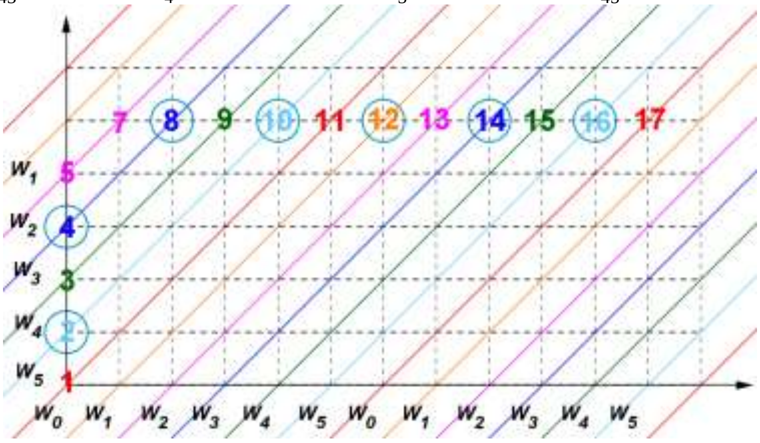
步驟 3：確認W_1,W_3,W_5各自的號碼球，接下來分三個子步驟來分別確認W_1及W_3,W_5

步驟 3-1：先找出必留在W_1,W_3,W_5內的號碼球

R_{01}：表示與W_0相鄰可能落在W_1的號碼球。 R_{05}：表示與W_0相鄰可能落在W_5的號碼球。

R_{21}：表示與W_2相鄰可能落在W_1的號碼球。 R_{23}：表示與W_2相鄰可能落在W_3的號碼球。

R_{43}：表示與W_4相鄰可能落在W_3的號碼球。 R_{45}：表示與W_4相鄰可能落在W_5的號碼球。



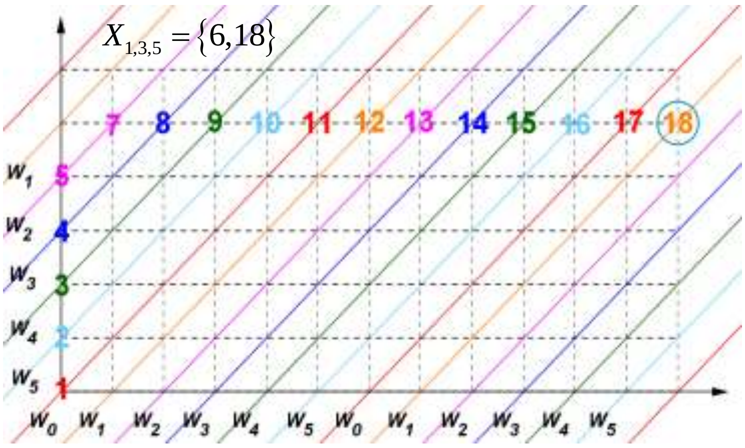
$R_{01}=R_{05}=\{2,10,12,16,18\}$ ， $R_{21}=R_{23}=\{4,6,8,12,14\}$ ， $R_{43}=R_{45}=\{2,4,8,10,14,16\}$

因此必留在W_1的號碼球為$R_{01}\cap R_{21}=\{12\}$；必留在W_3的號碼球為$R_{23}\cap R_{43}=\{4,8,14\}$；

必留在W_5的號碼球為$R_{05}\cap R_{45}=\{2,10,16\}$

令$X_{1,3,5}=(W_1\cup W_3\cup W_5)\setminus((R_{01}\cap R_{21})\cup(R_{23}\cap R_{43})\cup(R_{05}\cap R_{45}))$得到$\mathrm{X}_{1,3,5}=\{6,18\}$

步驟 3-2：確認W_1的號碼球

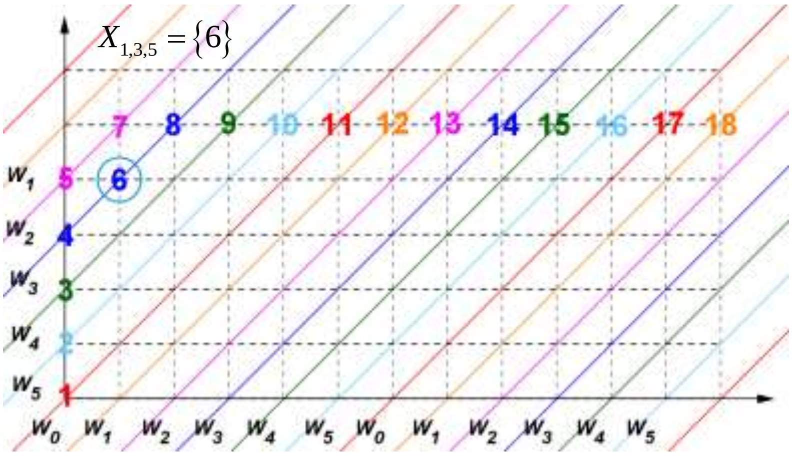


令 $X_1 = X_{1,3,5} \cap \left(R_{01} \cup R_{21}\right) = \{6,18\}$

考慮 X_1 的子集合 $\{\ \}$ $\{6\}$ $\{18\}$ $\{6,18\}$ 分別與 $R_{01} \cap R_{21} = \{12\}$ 聯集的元素和是否為 $S_1 = 30$，

結果得到 $W_1 = \{12,18\}$ ，令 $X_{3,5} = X_{1,3,5} \setminus W_1 = \{6\}$

步驟 3-3：分別確認 W_3 及 W_5 的號碼球



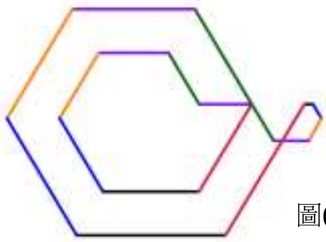
令 $X_3 = X_{3,5} \cap \left(R_{23} \cup R_{43}\right) = \{6\}$

考慮 X_3 的子集合 $\{\ \}$ ，$\{6\}$ 分別與 $R_{23} \cap R_{43} = \{4,8,14\}$ 聯集的元素和是否為 $S_3 = 32$ ，

結果得到 $W_3 = \{4,6,8,14\}$ ，因此 $W_5 = \{2,10,16\}$ 。最後考慮 W_5 的元素總和是否為 $S_5 = 28$ 。

因此，經由上述策略的操作可得到組合遊戲 6 頂帽子 18 顆球 的其中一組解

W_5	W_0	W_1	W_2	W_3	W_4
2	1		5	4	3
10	11	12	7	6	9
16	17	18	13	8	15
				14	



圖(二十三)

$n = 6$，18 顆球所對應的序列等角多邊形

(二)偶數頂帽子($n = 2p$， p 為奇質數)，求解的策略：

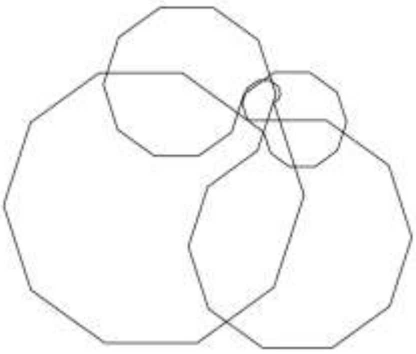
先考慮是否存在 **$2P$ 邊** $180° - \dfrac{360°}{2P}$ 的序列等角多邊形 $\xrightarrow{\text{將問題轉化}}$ 若存在 $2P$ 邊 $180° - \dfrac{360°}{2P}$ 的序列等角多邊形，將向量適當平移可形成一個等角 $2P$ 邊形 $\xrightarrow{\text{利用[定理 3]}}$ 等角 $2P$ 邊形的 **<u>對邊長成等差</u>**

偶數頂帽子($n=2p$， p 為奇質數)的組合 遊 戲 與 幾 何 意 義 之 關 係 對 照 表	
幾何意義	組合遊戲
$2P$ 邊 $180° - \dfrac{360°}{2P}$ 序列等角多邊形	$2P$ 頂帽子 $\dfrac{(2P)^2}{2}$ 顆球
行進方向為逆時針轉 $\dfrac{360°}{2P}$ 行進方向為順時針轉 $\dfrac{360°}{2P}$	球的擺放方向為逆時針方向 球的擺放方向為順時針方向
$2P$ 個行進方向： $\vec{d_0}$ 、 $\vec{d_1}$ 、 $\vec{d_2} \dots \vec{d}_{2p-1}$	帽子： W_0 頂、 W_1 頂、 W_2 頂 $\dots W_{2p-1}$ 頂
向量長度從 1 到 $\dfrac{(2P)^2}{2}$ 單位長	球號碼從 1 號到 $\dfrac{(2P)^2}{2}$ 號
等角 $2P$ 邊形的<u>對邊長成等差</u> 且 $\vec{S_0}+\vec{S_1}+\vec{S_2}+\cdots+\vec{S}_{2p-1}=0$ 即由原點 出發經過運動 $\dfrac{(2P)^2}{2}$ 次後回到原出發點	W_0 頂、W_1 頂、W_2 頂 $\dots W_{2p-1}$ 頂帽子內球號碼總和 分別為 $S_0, S_1, S_2 \cdots S_{2p-1}$ $2P$ 頂帽子的球號碼總和必須符合**<u>對邊成等差</u>**即 $S_0 - S_P = -(S_1 - S_{P+1}) = S_2 - S_{P+2} = \dots\dots$ $= (-1)^k (S_k - S_{P+k}) = \dots = (S_{p-1} - S_{2P-1}) = -P$

(三) 偶數頂帽子($n=2p$， p 為奇質數) $\dfrac{(2P)^2}{2}$ 顆球，針對 W_0 ， W_1 ，…， W_{2P-1} 各頂帽子內

<u>球的個數相同</u>時，快速求解的方法：

『將 1~50 個號碼球，依照號碼順序放入 10 頂圍成環狀的帽子中，球必須依逆時針或順時針方向放入與前一顆球相鄰的帽子中，**且 10 頂帽子內球的個數相同時**，則須如何擺放這些球使 10 頂帽子的球號碼總和必須符合**對邊成等差**？』詳細的求解操作過程，置於**附錄二**。



	W_0	W_1	W_2	W_3	W_4	W_5	W_6	W_7	W_8	W_9
第一輪	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
第二輪	13	14	15	16	17	18	19	20	11	12
第三輪	27	26	25	24	23	22	21	30	29	28
第四輪	35	36	37	38	39	40	31	32	33	34
第五輪	47	48	49	50	41	42	43	44	45	46
和	123	126	129	132	125	128	121	134	127	130

(四) 偶數頂帽子($n \neq 2p$， p 為奇質數) ，只針對 $n=8$ 時做討論：

先考慮是否存在八邊135°的序列等角多邊形 ⟹（將問題轉化）⟹ 若存在八邊135°的序列等角多邊形，將向量適當平移可形成一個等角八邊形 ⟹（利用[定理 4]）⟹ 等角八邊形的**對邊長相等**

『將 1~24 個號碼球，依照號碼順序放入八頂圍成環狀的帽子中，球必須依逆時針或順時針方向放入與前一顆球相鄰的帽子中，則須如何擺放這些球使八頂帽子的球號碼總和必須符合**對邊相等**？』

以下僅先列出流程圖，詳細的求解操作過程，置於**附錄三**。

步驟流程圖：

步驟 1：確認 W_0 中號碼球的所有可能性。

目的：利用整數的分割將 W_0 中可能的號碼置於捷徑圖上，則可將捷徑圖分割成幾個小區塊，可有效地降低計算量。

⟹

步驟 2：確認 W_2, W_4, W_6 ：先確認 W_4

再分別確認 W_2 及 W_6

⟹

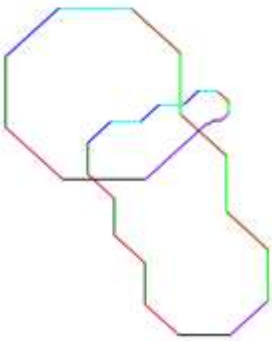
步驟 3：確認 W_1, W_3, W_5, W_7 ：先找出必留在 W_1, W_3, W_5 內的號碼球

首先確認 W_1 ⟹ 再確認 W_5 ⟹ 最後分別確認 W_3 及 W_7 的號碼球

1．另外 當 n=8，有 32 顆球，我們<u>利用偶數解八頂帽子的策略</u>，找出其他解，以下呈現兩種不同解的情形如下：

(1)已知 $S_0=54$ ， $S_1=58$ ， $S_2=74$ ， $S_3=78$ ， $S_4=54$ ， $S_5=58$ ， $S_6=74$ ， $S_7=78$ 的情形下：

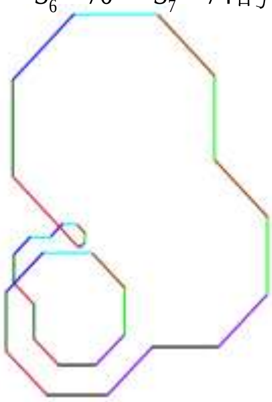
W_5	W_6	W_7	W_0	W_1	W_2	W_3	W_4
8	13	14	1	2	5	6	7
10	15	16	3	4	21	22	9
12	17	18	19	20	23	24	11
28	29	30	31	32	25	26	27
58	74	78	54	58	74	78	54



圖(二十四)

(2)已知 $S_0=58$ ， $S_1=62$ ， $S_2=70$ ， $S_3=74$ ， $S_4=58$ ， $S_5=62$ ， $S_6=70$ ， $S_7=74$的情形下：

W_5	W_6	W_7	W_0	W_1	W_2	W_3	W_4
6	9	10	1	2	3	4	5
8	11	12	13	14	15	16	7
18	19	20	21	22	25	26	17
30	31	32	23	24	27	28	29
62	70	74	58	62	70	74	58



圖(二十五)

五、序列等角多邊形規律解的推廣

W_0	W_1	W_2	W_3	W_4
1	2	3	4	5
8	9	10	6	7
15	11	12	13	14
17	18	19	20	16
24	25	21	22	23

在 5 頂帽子 25 顆球，得到的一組解中，其行進的轉動方向依序為(+ + + + −) (+ + + + −) (+ + + + −) (+ + + + −) (+ + + + −)，我們稱為五邊 108 度序列等角多邊形的規律解，如右表。

定義 3：「序列等角多邊形」的規律解

若一序列等角多邊形，經規則運動 N 次後，能回到原出發點，所得的解行進的轉動方向依序為

$$\left(\overbrace{+\ \ +\ \ \cdots\ \ +\ \ -}^{n個}\right)\left(\overbrace{+\ \ +\ \ \cdots\ \ +\ \ -}^{n個}\right)\cdots\cdots\left(\overbrace{+\ \ +\ \ \cdots\ \ +\ \ -}^{n個}\right)$$

，本文中將如此規律的運動形式所得的解稱為「序列等角多邊形」的規律解。

從捷徑圖的觀察中發現了序列等角多邊形在行進的過程中，每轉一個負號(順時針旋轉 $\frac{360^\circ}{n}$)的動作，即捷徑圖上向上走的動作，從捷徑圖上發現此動作對各頂帽子的號碼數產生了以下的改變：將下個號碼數的位置往前移動兩個位置，如下的例子：

負號數為 0 時(表示在捷徑圖行進的過程中向上走 0 次)，可發現捷徑圖中無向上走之路徑，表格中球只往單一方向擺放。負號數為 1 時(表示在捷徑圖行進的過程中向上走 1 次)，可發現表格內球號碼的變化：1 到 7 號球都不動，在 8 號球之後的改變，可將 6 到 23 號球均加 2 得到(如下表中，共有完整的 3 輪須加上 2)，再將 W_0,W_1 分別加上 6、7， W_3,W_4 分別減去 24、25。

負號數為 2 時(表示在捷徑圖行進的過程中向上走 2 次)，此時路徑在 7 號與 8 號球之間向上走，及在 14 號與 15 號球之間向上走，可發現表格內球號碼的變化：對照負號數為 1 時，將 13 到 23 號球均加 2 得到(如下表中，共有完整的 2 輪須加上 2)，再將 W_0,W_1 分別加上 13、14，W_1,W_2 分別減去 24、25。

負號數為 0

W_0	W_1	W_2	W_3	W_4
1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

負號數為 1

W_0	W_1	W_2	W_3	W_4
1	2	3	4	5
6	7			
8	9	10	11	12
13	14	15	16	17
18	19	20	21	22
23	24	25		

3 輪

負號數為 2

W_0	W_1	W_2	W_3	W_4
1	2	3	4	5
6	7			
8	9	10	11	12
13	14			
15	16	17	18	19
20	21	22	23	24
25				

2 輪

根據上表，整理出各頂帽子之總和計算方式：

負號數為 0

W_0	W_1	W_2	W_3	W_4
55	60	65	70	75

負號數為 1

W_0	W_1	W_2	W_3	W_4
55	60	65	70	75
+2×4	+2×4	+2×4	+2×3	+2×3
			–24	–25
+6	+7			

負號數為 2

W_0	W_1	W_2	W_3	W_4
55	60	65	70	75
+2×4	+2×4	+2×4	+2×3	+2×3
+6	+7		–24	–25
+2×3	+2×2	+2×2	+2×2	+2×2
	–24	–25		
+13	+14			

在之前的討論，我們思考『將 1~25 個號碼的球依照號碼順序放入五頂圍成環狀的帽子中，球必須依逆時針或順時針方向放入與前一顆球相鄰的帽子中，則須如何擺放這些球使五個帽子中的數字總和均相同？』，因此，希望利用捷徑圖上的變化求出各頂帽子內的總和，並進而求出解。我們以負號數為 0 時，各頂帽子的總和為基準，利用**插值多項式**的概念，找到一個方式去計算負號數增加時各頂帽子的總和。

符號定義：$a_k-(2k-1)\equiv h_k \pmod 5$ ，$0\le h_k\le 4$ ，其中
a_k 表示路徑在第 k 個負號(第 k 次向上走)的前一個號碼；
h_k 表示第 k 個負號時，a_k 所在的帽子之編號；
$t_k=\left[\dfrac{25-a_k}{5}\right]$，表示第 k 個負號時，a_k 後連續五個數字為一輪，完整的輪數。

因 a_k 在不同頂帽子時，各頂帽子之總和會有一些不同的變化，為同時呈現這些變化，則 l_0^k 、l_1^k 、l_2^k 、l_3^k 、l_4^k 其中一個必為 1，其餘的必為 0，(如上述之討論中，$a_1=7$ ，則 $a_1-(2\times1-1)\equiv h_1 \pmod 5$ ，因此 a_1 在 W_1 ，此時 $l_0^1=0$ ，$l_1^1=1$ ，$l_2^1=0$ ，$l_3^1=0$ ，$l_4^1=0$)，利用插值法，詳細定義如下：

$$l_0^k=\frac{(h_k-1)(h_k-2)(h_k-3)(h_k-4)}{(0-1)(0-2)(0-3)(0-4)}\text{，}l_1^k=\frac{h_k(h_k-2)(h_k-3)(h_k-4)}{(1-0)(1-2)(1-3)(1-4)}\text{，}$$

$$l_2^k=\frac{h_k(h_k-1)(h_k-3)(h_k-4)}{(2-0)(2-1)(2-3)(2-4)}\text{，}l_3^k=\frac{h_k(h_k-1)(h_k-2)(h_k-4)}{(3-0)(3-1)(3-2)(3-4)}\text{，}l_4^k=\frac{h_k(h_k-1)(h_k-2)(h_k-3)}{(4-0)(4-1)(4-2)(4-3)}$$

因此，我們針對負號數去討論解的存在性：

當負號數為 1(即在行進間有向上走 1 次)，各頂帽子的球數總和：

W_0	W_1	W_2	W_3	W_4
$55+l_1^1(a_1-1)$ $+l_0^1a_1$ $+2(t_1+l_0^1+l_1^1)$	$60+l_2^1(a_1-1)$ $+l_1^1a_1$ $+2(t_1+l_0^1+l_1^1+l_2^1)$	$65+l_3^1(a_1-1)$ $+l_2^1a_1$ $+2(t_1+l_0^1+l_1^1+l_2^1+l_3^1)$	$70+l_4^1(a_1-1)$ $+l_3^1a_1$ $+2t_1-24$	$75+l_0^1(a_1-1)$ $+l_4^1a_1$ $+2(t_1+l_0^1)-25$

當負號數為 2(即在行進間有向上走 2 次)，各頂帽子的球數總和：

W_0	W_1	W_2	W_3	W_4
$55+l_1^1(a_1-1)$	$60+l_2^1(a_1-1)$	$65+l_3^1(a_1-1)$	$70+l_4^1(a_1-1)$	$75+l_0^1(a_1-1)$
$+l_0^1a_1$	$+l_1^1a_1$	$+l_2^1a_1$	$+l_3^1a_1$	$+l_4^1a_1$
$+2(t_1+l_0^1+l_1^1)$	$+2(t_1+l_0^1+l_1^1+l_2^1)$	$+2(t_1+l_0^1+l_1^1+l_2^1+l_3^1)$	$+2t_1-24$	$+2(t_1+l_0^1)-25$
$+l_1^2(a_2-1)$	$+l_2^2(a_2-1)$	$+l_3^2(a_2-1)$	$+l_4^2(a_2-1)$	$+l_0^2(a_2-1)$
$+l_0^2a_2$	$+l_1^2a_2$	$+l_2^2a_2$	$+l_3^2a_2$	$+l_4^2a_2$
$+2(t_2+l_3^2+l_4^2+l_0^2+l_1^2)$	$+2t_2-24$	$+2\left(t_2+l_3^2\right)-25$	$+2\left(t_2+l_3^2+l_4^2\right)$	$+2(t_2+l_3^2+l_4^2+l_0^2)$

當負號數為 3(即在行進間有向上走 3 次)，各頂帽子的球數總和：

W_0	W_1	W_2	W_3	W_4
$55+l_1^1(a_1-1)$	$60+l_2^1(a_1-1)$	$65+l_3^1(a_1-1)$	$70+l_4^1(a_1-1)$	$75+l_0^1(a_1-1)$
$+l_0^1a_1$	$+l_1^1a_1$	$+l_2^1a_1$	$+l_3^1a_1$	$+l_4^1a_1$
$+2(t_1+l_0^1+l_1^1)$	$+2(t_1+l_0^1+l_1^1+l_2^1)$	$+2(t_1+l_0^1+l_1^1+l_2^1+l_3^1)$	$+2t_1-24$	$+2(t_1+l_0^1)-25$
$+l_1^2(a_2-1)$	$+l_2^2(a_2-1)$	$+l_3^2(a_2-1)$	$+l_4^2(a_2-1)$	$+l_0^2(a_2-1)$
$+l_0^2a_2$	$+l_1^2a_2$	$+l_2^2a_2$	$+l_3^2a_2$	$+l_4^2a_2$
$+2(t_2+l_3^2+l_4^2+l_0^2+l_1^2)$	$+2t_2-24$	$+2\left(t_2+l_3^2\right)-25$	$+2\left(t_2+l_3^2+l_4^2\right)$	$+2(t_2+l_3^2+l_4^2+l_0^2)$
$+l_1^3(a_3-1)$	$+l_2^3(a_3-1)$	$+l_3^3(a_3-1)$	$+l_4^3(a_3-1)$	$+l_0^3(a_3-1)$
$+l_0^3a_3$	$+l_1^3a_3$	$+l_2^3a_3$	$+l_3^3a_3$	$+l_4^3a_3$
$+2\left(t_3+l_1^3\right)-25$	$+2(t_3+l_1^3+l_2^3)$	$+2(t_3+l_1^3+l_2^3+l_3^3)$	$+2(t_3+l_1^3+l_2^3+l_3^3+l_4^3)$	$+2t_3-24$

當負號數為 1 到 3 時，我們發現要讓各頂帽子的總和相等，均無法找到滿足的條件，故無解。

當負號數為 4(即在行進間有向上走 4 次)，各頂帽子的球數總和：

W_0	W_1	W_2	W_3	W_4
$55+l_1^1(a_1-1)$	$60+l_2^1(a_1-1)$	$65+l_3^1(a_1-1)$	$70+l_4^1(a_1-1)$	$75+l_0^1(a_1-1)$
$+l_0^1a_1$	$+l_1^1a_1$	$+l_2^1a_1$	$+l_3^1a_1$	$+l_4^1a_1$
$+2(t_1+l_0^1+l_1^1)$	$+2(t_1+l_0^1+l_1^1+l_2^1)$	$+2(t_1+l_0^1+l_1^1+l_2^1+l_3^1)$	$+2t_1-24$	$+2(t_1+l_0^1)-25$
$+l_1^2(a_2-1)$	$+l_2^2(a_2-1)$	$+l_3^2(a_2-1)$	$+l_4^2(a_2-1)$	$+l_0^2(a_2-1)$
$+l_0^2a_2$	$+l_1^2a_2$	$+l_2^2a_2$	$+l_3^2a_2$	$+l_4^2a_2$
$+2(t_2+l_3^2+l_4^2+l_0^2+l_1^2)$	$+2t_2-24$	$+2\left(t_2+l_3^2\right)-25$	$+2\left(t_2+l_3^2+l_4^2\right)$	$+2(t_2+l_3^2+l_4^2+l_0^2)$
$+l_1^3(a_3-1)$	$+l_2^3(a_3-1)$	$+l_3^3(a_3-1)$	$+l_4^3(a_3-1)$	$+l_0^3(a_3-1)$
$+l_0^3a_3$	$+l_1^3a_3$	$+l_2^3a_3$	$+l_3^3a_3$	$+l_4^3a_3$
$+2\left(t_3+l_1^3\right)-25$	$+2(t_3+l_1^3+l_2^3)$	$+2(t_3+l_1^3+l_2^3+l_3^3)$	$+2(t_3+l_1^3+l_2^3+l_3^3+l_4^3)$	$+2t_3-24$
$+l_1^4(a_4-1)$	$+l_2^4(a_4-1)$	$+l_3^4(a_4-1)$	$+l_4^4(a_4-1)$	$+l_2^4(a_4-1)$
$+l_0^4a_4$	$+l_1^4a_4$	$+l_2^4a_4$	$+l_3^4a_4$	$+l_1^4a_4$
$+2(t_4+l_4^4+l_0^4+l_1^4)$	$+2(t_4+l_4^4+l_0^4+l_1^4+l_2^4)$	$+2t_4-24$	$+2(t_4+l_4^4)-25$	$+2(t_4+l_4^4+l_0^4)$

當各頂帽子之總和相等，以下我們簡寫為$W_0=W_1=W_2=W_3=W_4$，我們由此列出五條等式

$$\begin{cases}(1)W_0=W_1:(l_0^1-l_2^1)a_1+(l_0^2-l_2^2)a_2+(l_0^3-l_2^3)a_3+(l_0^4-l_2^4)a_4=l_1^1+l_2^1+l_1^2+l_2^2+l_1^3+l_2^3+l_1^4+l_2^4+4>0\\(2)W_1=W_2:(l_1^1-l_3^1)a_1+(l_1^2-l_3^2)a_2+(l_1^3-l_3^3)a_3+(l_1^4-l_3^4)a_4=l_2^1+l_3^1+l_2^2+l_3^2+l_2^3+l_3^3+l_2^4+l_3^4-22<0\\(3)W_2=W_3:(l_2^1-l_4^1)a_1+(l_2^2-l_4^2)a_2+(l_2^3-l_4^3)a_3+(l_2^4-l_4^4)a_4=l_3^1+l_4^1+l_3^2+l_4^2+l_3^3+l_4^3+l_3^4+l_4^4+3>0\\(4)W_3=W_4:(l_3^1-l_0^1)a_1+(l_3^2-l_0^2)a_2+(l_3^3-l_0^3)a_3+(l_3^4-l_0^4)a_4=l_4^1+l_5^1+l_4^2+l_5^2+l_4^3+l_5^3+l_4^4+l_5^4+3>0\\(5)W_4=W_0:(l_4^1-l_1^1)a_1+(l_4^2-l_1^2)a_2+(l_4^3-l_1^3)a_3+(l_4^4-l_1^4)a_4=l_0^1+l_1^1+l_0^2+l_1^2+l_0^3+l_1^3+l_0^4+l_1^4+4>0\end{cases}$$

，且$a_1<a_2<a_3<a_4$，因此等式中$\begin{cases}l_0^1,l_0^2,l_0^3,l_0^4 \text{ 中至少有一不為0}\\l_3^1,l_3^2,l_3^3,l_3^4 \text{ 中至少有一不為0}\\l_2^1,l_2^2,l_2^3,l_2^4 \text{ 中至少有一不為0}\\l_3^1,l_3^2,l_3^3,l_3^4 \text{ 中至少有一不為0}\\l_4^1,l_4^2,l_4^3,l_4^4 \text{ 中至少有一不為0}\end{cases}$。若要使其有解，需使上列所有等式(1)~(5)皆能合理成立，則負號分別出現在第 0、2、3、4 頂帽子的位置，則由等式(1)可得$l_0^{i_0}=1,l_2^{i_2}=1,1\le i_2<i_0\le 4$，意即負號在出現第 0 頂帽子的次序必須在第 2 頂帽子之後，同理：由等式(3)可得$l_2^{i_2}=1,l_4^{i_4}=1,1\le i_4<i_2\le 4$，由等式(4)可得$l_3^{i_3}=1,l_0^{i_0}=1,1\le i_0<i_3\le 4$

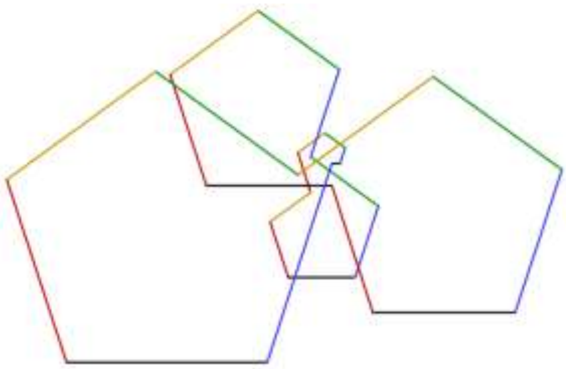
因為$1\le i_4<i_2<i_0<i_3\le 4$，將上述關係整理並排序得：$l_4^1,l_2^2,l_0^3,l_3^4$，且此為唯一之排序法，代回上列等式：

$(1)W_0=W_1\Rightarrow -a_2+a_3=5$，$(2)W_1=W_2\Rightarrow -a_4=-20$，$(3)W_2=W_3\Rightarrow -a_1+a_2=5$，

$(4)W_3=W_4\Rightarrow -a_3+a_4=5$，$(5)W_4=W_0\Rightarrow a_1=5$

整理得：$a_1=5$，$a_2=10$，$a_3=15$，$a_4=20$，皆為合理之數，故 4 負時存在唯一之解。
將此解製成表格與圖形，如下：

W_0	W_1	W_2	W_3	W_4
1	2	3	4	5
8	9	10	6	7
15	11	12	13	14
17	18	19	20	16
24	25	21	22	23



我們將上述的討論方法推廣至一般情形，可得以下的定理：

定理 5：在 n 為奇數時，號碼為 1 ~ n^2 時，存在 $(180^\circ-\frac{360^\circ}{n})$ –序列等角多邊形的規律解。

引理 5-1：在 n 為奇數時，號碼為 1 ~ n^2-1 時，存在 $(180^\circ-\frac{360^\circ}{n})$–序列等角多邊形的規律解。

證明：

已知 n 頂帽子 n^2 顆球在 $(n-1)$ 個負號時有一規律解，此解負號位置如下：

$a_1=n, a_2=2n, a_3=3n, \cdots, a_{n-2}=(n-2)n, a_{n-1}=(n-1)n$

其中各頂帽子的數字和皆為 $\frac{1}{2}n(n^2+1)$，且各頂帽子中球數皆為 n 個。現在若要證明：

n 頂帽子 (n^2-1) 顆球在 $(n-1)$ 個負號時也有一解，則要使各頂帽子的數字和為 $\frac{1}{2}n(n^2-1)$

作法：由將 n 頂帽子 n^2 顆球在 $(n-1)$ 個負號時的規律解，在各頂帽子中每顆球的編號都減 1 得到 (n^2-1) 顆球的排列，此時第 0 頂帽子中 $(n-1)$ 顆球，其餘各頂帽子均為 n 顆球，總球數共有 $(n-1)+n(n-1)=n^2-1$ 顆，且各頂帽子和為

$\frac{1}{2}n(n^2+1)-n=\frac{1}{2}n(n^2-1)$ ，符合所求。

故 (n^2-1) 顆球 $(n-1)$ 個負號也存在解，其負號位置如下：

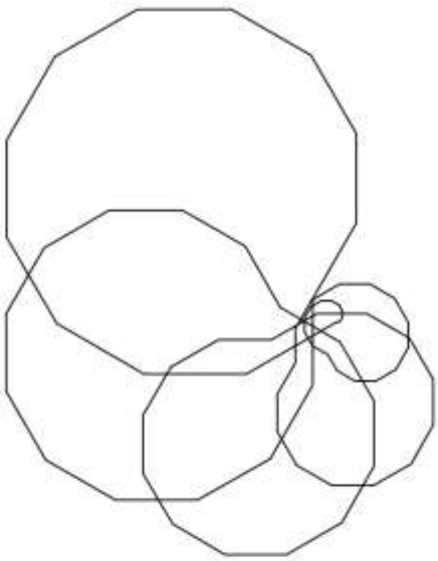
$a_1=n-1, a_2=2n-1, a_3=3n-1, \cdots, a_{n-2}=(n-2)n-1, a_{n-1}=(n-1)n-1$

定理 6：在 n 為偶數時，號碼為 1 ~ $\frac{n^2}{2}$ 時，存在 $(180^\circ-\frac{360^\circ}{n})$–序列等角多邊形的規律解。

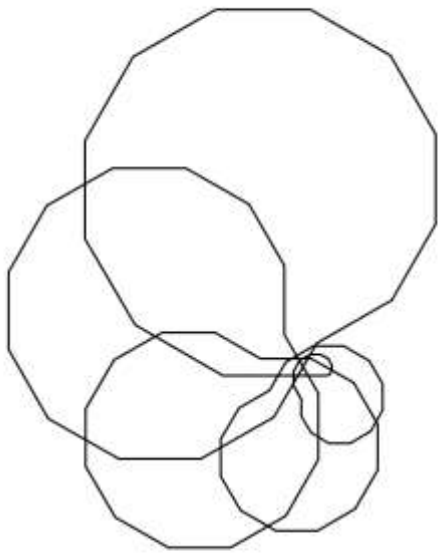
[說明]：如下圖(二十六)所呈現的解

引理 6-1：在 n 為偶數時，號碼為 1 ~ $\frac{n^2}{2}-1$ 時，存在 $(180^\circ-\frac{360^\circ}{n})$–序列等角多邊形的規律解。

[說明]：如下圖(二十七)所呈現的解



n=12，$\frac{12^2}{2}$ 顆球的規律解圖(二十六)



n=12，$\frac{12^2}{2}-1$ 顆球的規律解圖(二十七)

伍、研究結果

一、由組合遊戲的觀點出發，利用捷徑圖的操作，針對 n 為奇質數時發展出一套求解的策略，並找出序列等角多邊形的其他解。

二、找出序列等角多邊形與等角多邊形的關係，我們發現要形成一序列等角多邊形的解，若將同方向的向量做適當的平移，所得到新的凸多邊形必為等角多邊形。

三、由幾何觀點出發，利用等角多邊形的性質，在 n 為偶數($n=2p$, p 為奇質數)時發展出一套求解的策略，並修正原文獻[2]中偶數頂帽子的遊戲意義，重新賦予其與序列等角多邊形相對應的組合遊戲規則。

四、在 n 為偶數($n=2p$, p 為奇質數)且各頂帽子內球數均相等時，發展出一套迅速求解的推算法。

五、利用捷徑圖的操作，針對規律解的情形，我們將此問題推廣得到兩個結果：

(一)、n 為奇質數時，$N=n^2$ 及 $N=n^2-1$ 的「$(180^\circ-\frac{360^\circ}{n})$-序列等角多邊形」均存在一組規律解。

(二)、n 為偶數時，$N=\frac{n^2}{2}$ 及 $N=\frac{n^2}{2}-1$ 的「$(180^\circ-\frac{360^\circ}{n})$-序列等角多邊形」均存在一組規律解。

陸、結論與討論

一、結論與討論：

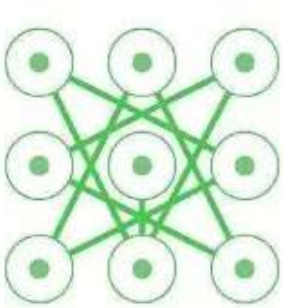
在序列等角多邊形的研究過程中，我們能找到的參考文獻很有限，真正討論到這個議題的只有文獻[1]、[2]，而且文獻中的一些結果，作者僅交待是藉由電腦跑出來的，沒有論證的方法可參考，因此研究的路走得相當辛苦，後來我們先發現了等角多邊形與序列等角多邊形的關係才突破了僵局，進而發展出求解的方法與策略。

相較於所參考的文獻，我們雖然在序列等角多邊形的研究上有了一些不錯的進展與突破，但仍有不少的疑問在心中，如序列等角多邊形最小解的數目為何？如何更有效的確定解的個數？相關的一些問題，我們也嘗試的去探討，目前已確定在 $n=5$ 時，$N=20$ 為最小解；在 $n=6$ 時，$N=12$ 為最小解；但其他的情形，仍未有完整的答案，希望未來有機會可以朝著這個有趣的議題繼續研究。

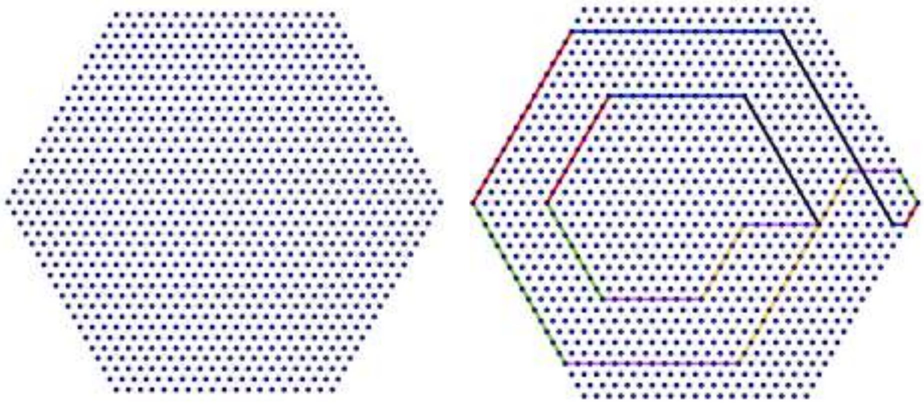
二、應用 – 資料加密與圖形鎖：

(1)參考文獻中的一些結果，是藉由電腦跑出來的，研究初期我們也嘗試以電腦試著去 run 看看，但發覺若沒有數學的思考與結構，在 $n=5$，$N=n^2=25$，可能性就有 2^{25} 種；在 $n=7$，$N=n^2=49$，可能性就有 2^{49} 種，…，隨著 n 與 N 的數目越大，要找出解，有如大海撈針，後來我們加入了數學策略的判斷，才有效地降低計算量。我們思考在現今網路資訊發達個人與企業的資料保密相對顯得重要許多，因此試想序列等角多邊形是否能應用於資料的加密上。

(2)在研究過程中，繪製了許多序列等角多邊形的解，有次恰巧看見同學在使用智慧型手機，手機在使用前設有圖形鎖，讓我們想到現今智慧型手機普遍與網路發達的時代，個人資料的加密與保護相對的也變得很重要，我們也上網查了一下圖形鎖的資料下圖中的圖形鎖，就是一個網路上號稱相當不易破解的圖形鎖，但對於學數理的人而言，這種八角星的圖形應是相當規律易解的，因此我們希望可將序列等角多邊形設計成一種有規律但不易破解的圖形鎖，如下圖所示，未來用於保險箱或金庫的防護上。



手機 – 圖形鎖　　圖(二十六)
註：本圖片自網路



圖(二十七)　序列等角多邊形 - 六邊 120 度之圖形鎖

柒、參考資料

1．Which Way Did the Bicycle Go?: And Other Intriguing Mathematical Mysteries (Dolciani Mathematical Expositions, Throw Your Rings into the Hat(pp.55&pp.208-210)

2．Lee C.F. Sallows(1992), New Pathways in Serial Isogons,The Mathematical Intelligencer 14:2 pp.55-67

3． Sallows,L. , Gardner,M. , Guy, R. , Knuth, D. “Serial Isogons of 90 Degrees ”, Mathematics Magazine, Vol.64,No.5 Dec. 1991, pp.315-324

4．Martin Gardner 葛登能 著作 胡守仁譯 打開魔數箱 (2004) pp.217 第 30 章 90 度序列等角多邊形 遠流出版社

5．Derek Ball ,Equiangular Polygons ,The Mathematical Gazette, Vol.86. No 507(Nov,2002),pp.396-407

6．張伯豐，第九屆旺宏科學獎成果報告書(銀牌)，等角序列多邊形，(2010)

【評語】050404

這是一個有趣的數學問題，從組合的問題出發轉換到幾何問題，建議如果能將偶數問題探討完整會更完備。