中華民國第56屆中小學科學展覽會

作品說明書

高級中等學校組　數學科

佳作

050403

拉丁「圍」機

學校名稱：國立臺中第一高級中學

作者：	指導老師：
高二 高暐竣	梁勇能

關鍵詞：(1,0)拉丁方陣、組合極值

摘要

每行每列恰有 m 個格子填入 1，其他的格子皆填入 0 的方陣，稱為 m–(1,0)拉丁方陣。本研究要探討以下問題：求最小的非負整數 a，使得所有 n 階的 m–(1,0)拉丁方陣中，都存在一個 $k\times k$ 正方形，其內數字和不超過 a。

藉由程式得到答案之後，再針對不同的 n,k 值討論。k 整除 n 時可經由簡單的估計和構造得到答案，但 k 不整除 n 時，經由估計得到的上界，和構造得到的答案卻不盡相同，因此必須再配合壓界的方式得到最後的精確值。目前解決了 m=1 和 m=2 的情形，未來將繼續著手處理更一般化的結果，也就是當給定任意 n,m,k 時，都能得到答案。

一、　研究動機

本研究發想於 2014 年 *IMO* 的第二題：「求最大的正整數 k，使得所有在每行每列恰有一顆棋子的 $n\times n$ 棋盤中，都有一個 $k\times k$ 正方形，其內沒有任何棋子。」在解完原本的題目後，我聯想到更廣的問題：「求最小的非負整數 a，使得所有在每行每列恰有一顆棋子的 $n\times n$ 棋盤中，都有一個 $k\times k$ 正方形，其內棋子數不超過 a 個。」便從這個問題開始進行我的研究。

二、　名詞定義

1. (1,0)拉丁方陣：每行每列皆有相同數量的"1"和相同數量的"0"的方陣。

　　若是每行每列"1"的數量有 m 個，那就稱為 m–(1,0)拉丁方陣；若要強調方陣的邊長為 n，那就再在前面加上「n 階」二字。如右圖，即為 8 階的 3–(1,0)拉丁方陣。

1	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	1	0
0	0	1	0	1	1	0	0
1	0	0	0	0	0	1	1
0	1	1	0	1	0	0	0
0	0	0	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	1	0	0
0	1	0	0	0	0	1	1

2. 方陣的行與列：在一個 $n\times n$ 的方陣中，行的編號由左到右依序為第 $1,2,\ldots,n$ 行，列的編號由上到下依序為第 $1,2,\ldots,n$ 列。

3. $f_m(n,k)$：k,n,m 為正整數且滿足 $1\le k\le n, 1\le m\le n$。若 a 是最小的非負整數，使得所有 n 階的 m–(1,0)拉丁方陣中，都有一個 $k\times k$ 正方形，其內數字和不超過 a，則記 $f_m(n,k)=a$。而在研究動機中所提到的題目，即為求 $f_1(n,k)$的值。

4. $f_m(n,k)$的基本性質：
   - 基本性質一、$f_m(n,k)\le b$ 的充要條件為：對所有 n 階的 m–(1,0)拉丁方陣，都有一個 $k\times k$ 正方形內，數字和都不超過 b。
   - 基本性質二、$f_m(n,k)\ge b$ 的充要條件為：存在一 n 階的 m–(1,0)拉丁方陣，其中每一個 $k\times k$ 正方形內，數字和都不小於 b。
   - 基本性質一和基本性質二互為等價，只是敘述方式不同而已。

5. $A_m(n,k)$和 $B_m(n,k)$：在證明過程中，將會得到 $f_m(n,k)$的上界和下界，記下界為 $A_m(n,k)$，上界為 $B_m(n,k)$，則有 $A_m(n,k)\le f_m(n,k)\le B_m(n,k)$。

6. 高斯符號的性質：

➢ $a,b\in R,$ 有$[a]+[b]\le[a+b]\le[a]+[b]+1$。

➢ $a,b,c\in N,$ 則$\left[\dfrac{b+c}{a}\right]>\left[\dfrac{b}{a}\right]\Leftrightarrow\exists d\in N$且$d\le c\ s.t.\ a\mid b+d$ 。

7. 文中用到的英文字母：n,k,m,q,r,m_1,m_2 等等。

➢ n 代表(1,0)拉丁方陣的大小，m 代表方陣中每行每列"1"的數量。

➢ 在方陣中要找的是 $k\times k$ 正方形。

➢ q 和 r 分別為 n 除以 k 的商和餘數，即 $n=qk+r,\ 0\le r<k$。

➢ m_1 和 m_2 分別為 m 除以 q 的商和餘數，即 $m=m_1q+m_2,\ 0\le m_2<q$。

三、 研究目的與過程

(一) 求 $f_1(n,k)$的一般式。

1. 由於要直接猜答案比較困難，所以我寫了 C++的程式，把 n 和 k 較小時的 $f_1(n,k)$值求出來(請參考七、附錄)，結果如下表所示：

k \ n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	2	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
3		3	2	2	1	1	1	1	0	0	0
4			4	3	3	2	2	1	1	1	1
5				5	4	4	3	3	2	2	2
6					6	5	5	4	4	3	3
7						7	6	6	5	5	4
8							8	7	7	6	6
9								9	8	8	7
10									10	9	9
11										11	10
12											12

不難發現，$f_1(n,k)$的值隨著 n 變大而遞減，因此可知道有以下性質：

性質 1–1：$f_1(n,k) \le f_1(n-1,k)$。

證明：由基本性質二可知，存在一 n 階的 1–(1,0)拉丁方陣，其中每一個 $k\times k$ 正方形內，數字和都不小於 $f_1(n,k)$。若將這個方陣的第 n 行和第 n 列取走，只剩下$(n-1)$階的方陣。若第 n 行第 n 列的方格內數字是"1"，則剩下的$(n-1)$階方陣仍為一個 1–(1,0)拉丁方陣；若第 n 行第 n 列的方格內數字是"0"，則剩下的方陣中會有一行一列沒有"1"，把該行該列的"0"換成"1"，使方陣變回 1–(1,0)拉丁方陣。

$$
\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}
\hline
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline
\end{array}
\qquad
\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}
\hline
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline
\end{array}
\rightarrow
\begin{array}{|c|c|c|c|c|}
\hline
1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline
0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ \hline
0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline
\end{array}
$$

經過以上的操作後，方陣內每個 $k\times k$ 正方形的數字和不變或增加，因此就得到一個$(n-1)$階的 1–(1,0)拉丁方陣，其中每一個 $k\times k$ 正方形內數字和都不小於 $f_1(n,k)$。由基本性質二可知 $f_1(n-1,k) \ge f_1(n,k)$，證畢。

2. 求 $n=qk$(即 $k|n$)時，$f_1(n,k)$的值

(1) 把 $n\times n$ 的方陣切割成 q^2 個彼此不重疊的 $k\times k$ 正方形，方陣中總共有 n 個"1"，由鴿籠原理可知，對所有的 n 階 1-(1,0)拉丁方陣，至少有一個 $k\times k$ 正方形內的"1"數量不超過$\left\lfloor \frac{n}{q^2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{k}{q} \right\rfloor$個，所以該 $k\times k$ 正方形內的數字和不超過$\left\lfloor \frac{k}{q} \right\rfloor$，由基本性質一可知 $f_1(n,k) \le \left\lfloor \frac{k}{q} \right\rfloor$。

(2) 若在 $n\times n$ 方陣中，第 $1,2,\ldots,q$ 行的"1"分別位於第 $1, k+1, 2k+1,\ldots,n-k+1$ 列，第 $q+1,q+2,\ldots,2q$ 行的"1"分別位於第 $2, k+2, 2k+2,\ldots,n-k+2$ 列，依此類推，直到第 $n-q+1,n-q+2,\ldots,n$ 行的"1"分別位於第 $k,2k,\ldots,n$ 列，形成一 1–(1,0)拉丁方陣。如下圖所示，為 $n=12, k=4$ 時的例子，每一行上方的數字代表該行的"1"所在的列數。

1	5	9	2	6	10	3	7	11	4	8	12

1											
			1								
						1					
									1		
	1										
				1							
							1				
										1	
		1									
					1						
								1			
											1

k=4, q=3, a_0=2, b_0=0
"1"位於第 2,5,7,10 行

此方陣的"1"所在位置，也可用以下方法表示之：

第 i 行第 j 列的數字為"1"$\Leftrightarrow \exists x, y \in N_0,\ x < k,\ y < q\ s.t. \begin{cases} i-1 = xq + y \\ j-1 = yk + x \end{cases}$。

觀察第 y_0k+x_0+1 至$(y_0+1)k+(x_0-1)+1$ 列共 k 列($x_0<k$, $y_0+1<q$)，這 k 列的"1"分別位於第 $xq+(y_0+1)+1$ 行($0\le x<x_0$)，或者第 $xq+y_0+1$ 行($x_0\le x<k$)。將這 k 個"1"的行數由小到大排列，每相鄰兩個之間必相差 q 或 $q-1$；而行數最小值和最大值分別為 y_0+2 和$(k-1)q+y_0+1$，由於 $0\le y_0<q-1$，故最左邊的"1"以左，和最右邊的"1"以右，沒有"1"的部分(上圖塗色區域)的行數都少於 q。由以上的推論可以知道：

第 y_0k+x_0+1 至$(y_0+1)k+(x_0-1)+1$ 列中，每連續 q 行必至少有一個"1"。

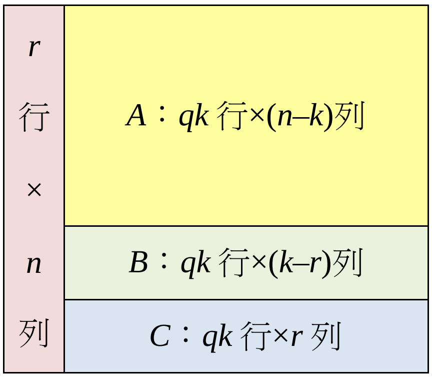
因此，無論 $k\times k$ 正方形位於何處，在正方形的範圍內，每連續 q 行至少有一個"1"，亦即此正方形內至少有$\left[\dfrac{k}{q}\right]$個"1"。故我們構造出一個 n 階的 1–(1,0)拉丁方陣，其中每一個 $k\times k$ 正方形內，數字和都不小於$\left[\dfrac{k}{q}\right]$。由基本性質二可知 $f_1(n,k)\ge\left[\dfrac{k}{q}\right]$。

(3) 綜合以上，有 $f_1(n,k)\le\left[\dfrac{k}{q}\right]$且 $f_1(n,k)\ge\left[\dfrac{k}{q}\right]$，故可得以下結論：

定理 1–2：$n=qk$ 時，$f_1(n,k)=\left[\dfrac{k}{q}\right]$。

3. 得到 $n=qk+r(0<r<k)$時，$f_1(n,k)$的不等式

(1) 若 $f_1(n,k)=a$，則根據基本性質二，存在一 n 階的 1–(1,0)拉丁方陣，其中每一個 $k\times k$ 正方形內，數字和都不小於 a，觀察這一個方陣，如下圖所示：



A 區+B 區可切割成 q^2 個 $k\times k$ 正方形

$\rightarrow A$ 區+B 區數字和$\geq q^2a\cdots(1)$

B 區+C 區可切割成 q 個 $k\times k$ 正方形

$\rightarrow B$ 區+C 區數字和$\geq qa\cdots(2)$

B 區共有 $k–r$ 列$\rightarrow B$ 區數字和$\leq k–r\cdots(3)$

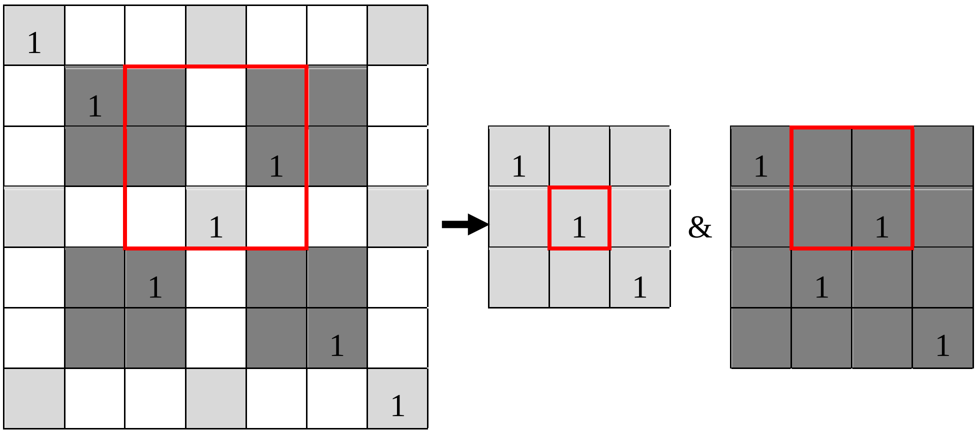
(1)+(2)–(3)有

A 區+B 區+C 區數字和$(=qk)\geq(q^2+q)a+r–k$

$\rightarrow qk\geq(q^2+q)a+r–k$

$\rightarrow a=f_1(n,k)\leq\left[\dfrac{(q+1)k-r}{q(q+1)}\right]$

(2) 另一方面，若將 $n\times n$ 的方陣作塗色，如下圖所示：



淺色區域是$(q+1)^2$ 個 $r\times r$ 正方形，深色區域是 q^2 個$(k–r)\times(k–r)$正方形。若將淺色和深色區域分別挑出來，會形成邊長分別為$(q+1)r$ 和 $q(k–r)$的兩個小方陣。

每一個 $k\times k$ 正方形覆蓋到的淺色區域，都相當於淺色小方陣中的一個 $r\times r$ 正方形；而每一個 $k\times k$ 正方形覆蓋到的深色區域，也相當於深色小方陣中的一個$(k–r)\times(k–r)$正方形。又由定理 1–2 可知道 $f_1((q+1)r,r)=\left[\dfrac{r}{q+1}\right]$及 $f_1(q(k–r),k–r)=\left[\dfrac{k-r}{q}\right]$，若將淺色和深

色小方陣，以及原方陣中對應的格子，依 2–(2)提到的方式放入"1"，則原方陣中每一個 $k\times k$ 正方形內必至少有 $f_1((q+1)r,r)+f_1(q(k-r),k-r)$個"1"，由基本性質二有 $f_1(n,k)\ge$ $\left[\frac{r}{q+1}\right]+\left[\frac{k-r}{q}\right]$。故有以下結果：

引理 1–3：$\left[\frac{r}{q+1}\right]+\left[\frac{k-r}{q}\right]\le f_1(n,k)\le\left[\frac{(q+1)k-r}{q(q+1)}\right]$。

為求簡便，在下文中令 $A_1(n,k)=\left[\frac{r}{q+1}\right]+\left[\frac{k-r}{q}\right]$，$B_1(n,k)=\left[\frac{(q+1)k-r}{q(q+1)}\right]$。

4. 求 $f_1(n,k)$的值

(1) 求 $r=k-1$ 時，$f_1(n,k)$的值

a. $q=1$ 時：$n=2k-1$，

$A_1(n,k)=\left[\frac{k-1}{2}\right]+\left[\frac{k-(k-1)}{1}\right]=\left[\frac{k-1}{2}\right]+1=\left[\frac{k+1}{2}\right]$，

$B_1(n,k)=\left[\frac{2k-(k-1)}{2}\right]=\left[\frac{k+1}{2}\right]$，

故$\left[\frac{k+1}{2}\right]\le f_1(2k-1,k)\le\left[\frac{k+1}{2}\right]$, $f_1(2k-1,k)=\left[\frac{k+1}{2}\right]$。

b. $q>1$ 時：

由引理 1–3 有 $f_1(n,k)\le B_1(n,k)=\left[\frac{(q+1)k-(k-1)}{q(q+1)}\right]=\left[\frac{qk+1}{q(q+1)}\right]$，

由性質 1–1 有 $f_1((n,k)\ge f_1((q+1)k,k)=\left[\frac{k}{q+1}\right]=\left[\frac{qk}{q(q+1)}\right]$，

即$\left[\frac{qk}{q(q+1)}\right]\le f_1(n,k)\le\left[\frac{qk+1}{q(q+1)}\right]$。

若$\left[\frac{qk+1}{q(q+1)}\right]=\left[\frac{qk}{q(q+1)}\right]+1$則$\frac{qk+1}{q(q+1)}$必為整數

$\rightarrow q(q+1)|qk+1\rightarrow q|qk+1\rightarrow q|1$ 但與 $q>1$ 矛盾，

因此$\left[\frac{qk+1}{q(q+1)}\right]=\left[\frac{qk}{q(q+1)}\right]=f_1(n,k)$。

引理 1–4：$r=k-1$ 時， $f_1(n,k)=B_1(n,k)=\left\lfloor \dfrac{(q+1)k-r}{q(q+1)} \right\rfloor$ 。

(2) 當 $r\neq k-1$ 時：令 n'為最大的正整數，滿足$\begin{cases} n\le n'<(q+1)k \\ B_1(n,k)=B_1(n',k) \end{cases}$ 。

a. 若 $n'=(q+1)k-1$，根據引理 1–4、性質 1–1 和引理 1–3 有

$B_1(n',k)=f_1(n',k)\le f_1(n,k)\le B_1(n,k)$ ，

故 $f_1(n,k)=B_1(n,k)=\left\lfloor \dfrac{(q+1)k-r}{q(q+1)} \right\rfloor$ 。

b. 若 $n'<(q+1)k-1$，則 $B_1(n',k)=B_1(n'+1,k)+1$，

令 $n'=qk+r'$，上式可表為$\left\lfloor \dfrac{(q+1)k-r'}{q(q+1)} \right\rfloor=\left\lfloor \dfrac{(q+1)k-(r'+1)}{q(q+1)} \right\rfloor+1$ ，

故 $\dfrac{(q+1)k-r'}{q(q+1)}\in N \rightarrow \dfrac{k-r'}{q}\in N,\ \dfrac{r'}{q+1}\in N$ ，

所以 $A_1(n',k)=\dfrac{k-r'}{q}+\dfrac{r'}{q+1}=\dfrac{(q+1)k-r'}{q(q+1)}=B_1(n',k),\ f_1(n',k)=B_1(n',k)$ 。

同樣的根據性質 1–1 和引理 1–3，有 $B_1(n',k)=f_1(n',k)\le f_1(n,k)\le B_1(n,k)$ ，

故 $f_1(n,k)=B_1(n,k)=\left\lfloor \dfrac{(q+1)k-r}{q(q+1)} \right\rfloor$ 。

根據以上幾個討論，得知無論 n 和 k 的關係為何，都有 $f_1(n,k)=\left\lfloor \dfrac{(q+1)k-r}{q(q+1)} \right\rfloor$ ，

因此有以下結論：

定理 1–5： $f_1(n,k)=\left\lfloor \dfrac{(q+1)k-r}{q(q+1)} \right\rfloor$ 。

此即為 $f_1(n,k)$的一般式。

(二) $n \geq 2$，求 $f_2(n,k)$的一般式。

1. 同樣的，我們想要證明出 $f_2(n,k) \leq f_2(n-1,k)$，但最後只證明出它的弱化性質。這個性質只有在 $n \geq 4$ 時才有意義，因為 $n \geq 4$ 時，討論 $n-2$ 階的方陣才有意義。

性質 2–1：$f_2(n,k) \leq f_2(n-2,k)$。$(n \geq 4)$

證明：由基本性質二可知，存在一 n 階的 2–(1,0)拉丁方陣，其中每一個 $k \times k$ 正方形內，數字和都不小於 $f_2(n,k)$。令 $f_2(n,k)=a$。

(1) 若此方陣四個角落的格子內數字都是"1"，則將方陣的第 1 行、第 n 行、第 1 列和第 n 列取走，只剩下$(n-2)$階的方陣，這個剩下的方陣仍為一個 2–(1,0)拉丁方陣。過程中每個 $k \times k$ 正方形的數字和不變，因此就得到一個$(n-2)$階的 2–(1,0)拉丁方陣，其中每一個 $k \times k$ 正方形內數字和都不小於 a。

(2) 若此方陣的四個角落，至少有一個格子內的數字是"0"。不妨設該格在第 n 行第 n 列。將方陣的第 n 行和第 n 列取走，剩下的$(n-1)$階方陣中，會有兩行兩列都只有一個"1"。設這兩行兩列分別為第 i_1、i_2 行，第 j_1、j_2 列，則必有第 i_1 行 j_1 列和第 i_2 行 j_2 列的格子內皆為"0"，或者第 i_1 行 j_2 列和第 i_2 行 j_1 列的格子內皆為"0"。把皆為"0"的兩個格子換成"1"，使方陣變回 2–(1,0)拉丁方陣。

1	0	1	0	0	0
0	0	1	0	0	1
0	1	0	0	1	0
0	0	0	1	0	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	0	1	0

→

1	0	1	0	0
0	0	1	0	**1**
0	1	0	0	1
0	**1**	0	1	0
1	0	0	1	0

	i_1	i_2
j_1	0	0
j_2	0	0

1	0
0	0

1	0
0	1

0	1
1	0

↓

1	0
0	**1**

1	**1**
1	0

1	**1**
1	1

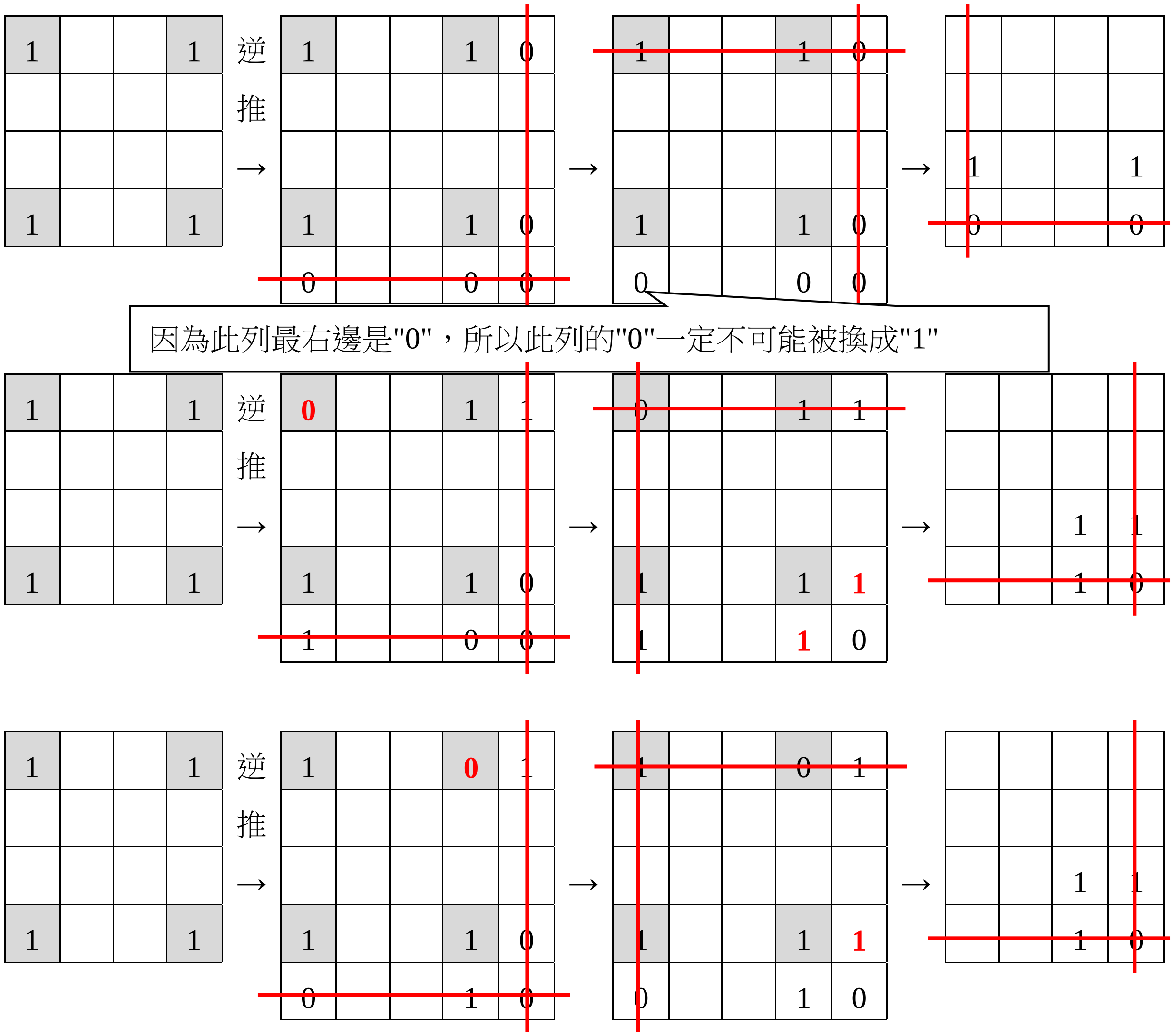
1	1
1	**1**

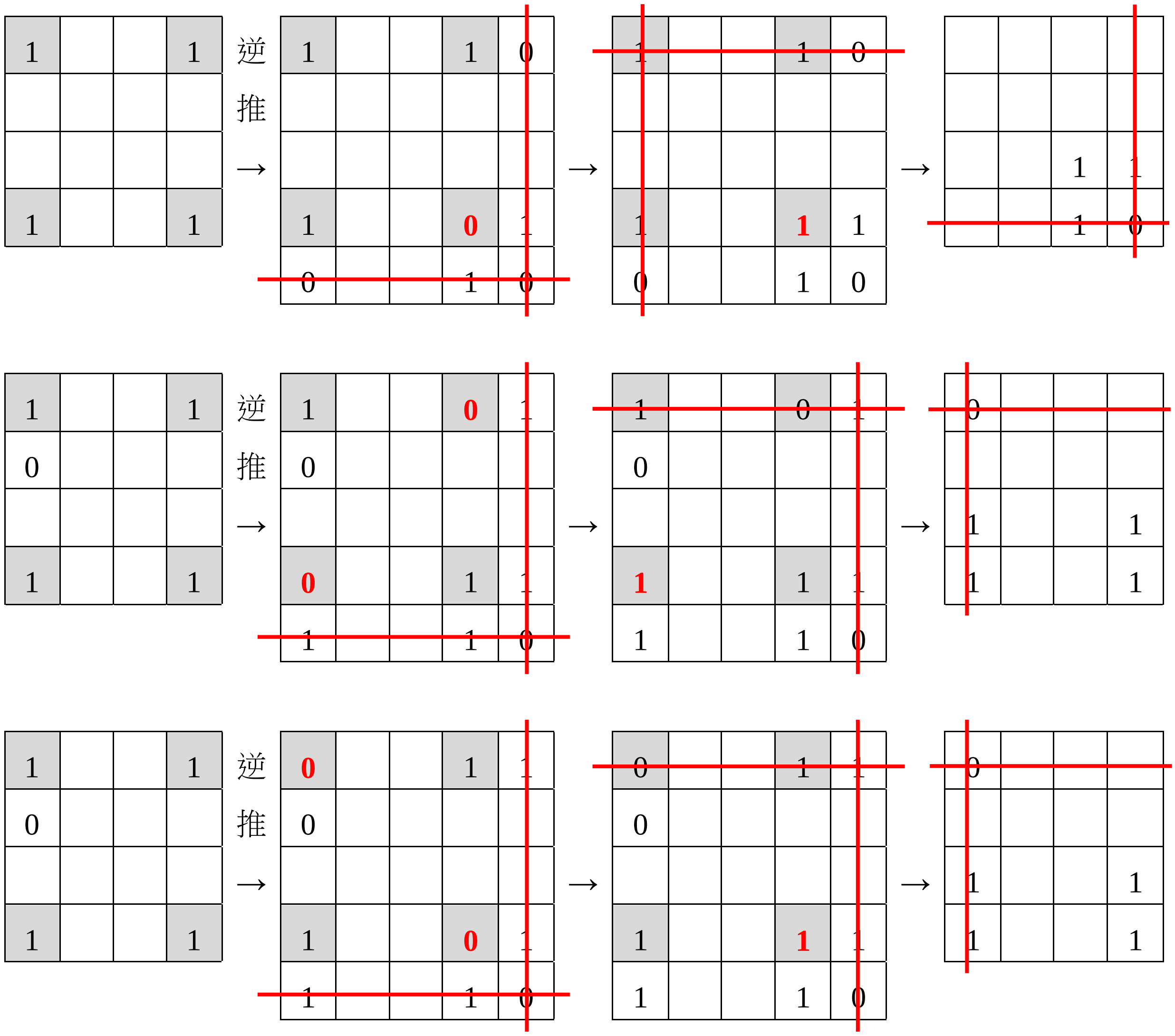
經過以上的操作後，方陣內每個 $k\times k$ 正方形的數字和不變或增加，因此就得到一個$(n-1)$階的 2–(1,0)拉丁方陣，其中每一個 $k\times k$ 正方形內數字和都不小於 a。

若這個$(n-1)$階方陣的其中一個角落內數字是"0"，就可以再移去一行一列，補上兩個"1"，剩下的$(n-2)$階 2–(1,0)拉丁方陣中，每一個 $k\times k$ 正方形內數字和仍不小於 a。

(3)　若這個$(n-1)$階方陣的四個角落內數字都是"1"，再把取走的第 n 行和第 n 列放回來，將補上的"1"換回"0"，考慮原本的 n 階方陣。在底下的例圖中，代表$(n-1)$階方陣四個角落的格子，將以塗色表示。

塗色區域可能有一個或兩個格子原本是"0"，是在補"1"的過程後才變成都是"1"；但是無論是何種情況，都可以從原 n 階方陣得到一個$(n-2)$階 2–(1,0)拉丁方陣，其中每一個 $k\times k$ 正方形內數字和都不小於 a。底下為所有情況的例圖。在圖中沒有填入數字的格子，代表該格不論是"1"還是"0"都不會有影響。



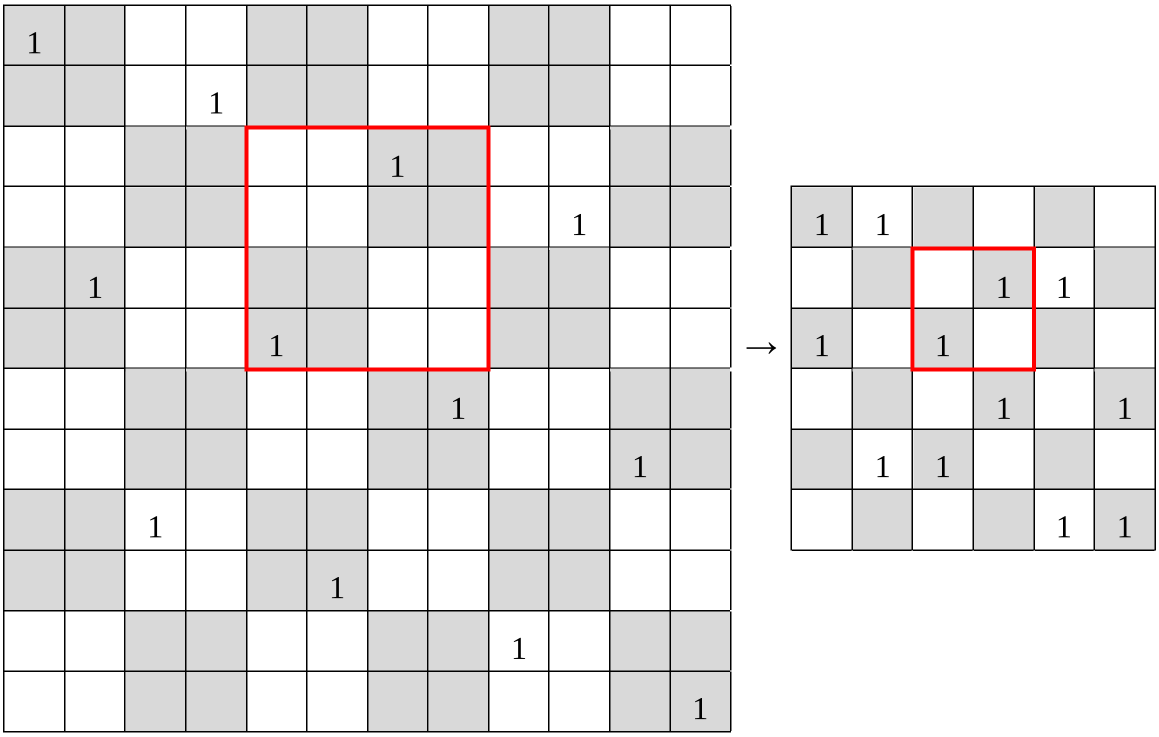


經由以上的討論可以發現，無論原本的 n 階方陣內數字如何排列，都一定可以產生出一個$(n-2)$階 2–(1,0)拉丁方陣，其中每一個 $k\times k$ 正方形內數字和都不小於 a，由基本性質二可知 $f_2(n-2,k)\geq a=f_2(n,k)$。證畢。

2.　求 $n=qk$(即 $k|n$)時，$f_2(n,k)$的值

(1)　把 $n\times n$ 的方陣切割成 q^2 個彼此不重疊的 $k\times k$ 正方形，方陣中總共有 $2n$ 個"1"，由鴿籠原理可知，對所有的 n 階 2-(1,0)拉丁方陣，至少有一個 $k\times k$ 正方形內的"1"數量不超過$\left\lfloor \frac{2n}{q^2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2k}{q} \right\rfloor$個，所以該 $k\times k$ 正方形內的數字和不超過$\left\lfloor \frac{2k}{q} \right\rfloor$，由基本性質一可知 $f_2(n,k)\leq\left\lfloor \frac{2k}{q} \right\rfloor$。

(2) 觀察到$\left\lceil \frac{2k}{q} \right\rceil$=$f_1(2n,2k)$，因此我們可以藉由 $f_1(2n,2k)$的構造，得到 $f_2(n,k)$的構造。先依照(一)–2–(2)的方法，構造出一個 $2n$ 階的 1–(1,0)拉丁方陣，其中每一個 $2k\times 2k$ 正方形內，數字和都不小於$\left\lceil \frac{2k}{q} \right\rceil$。接著把這個 $2n$ 階方陣分成 n^2 個彼此不重疊的 2×2 正方形，每一個正方形合併成一個小方格。若原本 2×2 正方形內有"1"，則合併成的方格中也填入"1"，否則填入"0"，如下圖所示。



根據(一)–2–(2)所提到的，上圖左邊的 $2n$ 階 1–(1,0)拉丁方陣，

第 i 行第 j 列的數字為"1"$\Leftrightarrow \exists x, y \in N_0,\ x < 2k,\ y < q\ s.t. \begin{cases} i-1 = xq + y \\ j-1 = 2yk + x \end{cases}$。

令 x_1 和 x_2 為 x 除以 2 的商和餘數，即 $x=2x_1+x_2$ $(0\le x_1<k,\ x_2=0$ 或 $1)$；令 $y'=x_2q+y$ $(0\le y'<2q)$。一組 x 和 y 的值，唯一對應一組 x_1 和 y'的值。

利用 x_1 和 y'，可以計算$\left\lceil \frac{i}{2} \right\rceil$和$\left\lceil \frac{j}{2} \right\rceil$的值如下：

$$\left\lceil \frac{i}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{xq+y+1}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{(2x_1+x_2)q+y+1}{2} \right\rceil = x_1 q + \left\lceil \frac{y'+1}{2} \right\rceil ;$$

$$\left\lceil \frac{j}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{2yk+x+1}{2} \right\rceil = yk + \left\lceil \frac{2x_1+x_2+1}{2} \right\rceil = yk + x_1 + 1 \equiv y'k + x_1 + 1 \ (\mathrm{mod}\ qk) 。$$

接著展開以下推論：

在 n 階方陣中，第 i'行第 j'列的數字為"1"

$\Leftrightarrow$存在 i,j 滿足$i'=\left\lceil \frac{i}{2} \right\rceil, j'=\left\lceil \frac{j}{2} \right\rceil$，且在 $2n$ 階 1–(1,0)拉丁方陣中，第 i 行第 j 列的數字為"1"(根據最初在 n 階方陣中填入"1"和"0"的規則)

$\Leftrightarrow$存在 x,y 滿足$i'=\left\lceil \frac{xq+y+1}{2} \right\rceil, j'=\left\lceil \frac{2yk+x+1}{2} \right\rceil$

$\Leftrightarrow$存在 x_1,y'滿足$i'=x_1q+\left\lceil \frac{y'+1}{2} \right\rceil, j'\equiv y'k+x_1+1 \pmod{qk}$ 。

(3)　若分別以 $x_1=\alpha_1, y'=\beta_1$，以及 $x_1=\alpha_2, y'=\beta_2$ 代入，使得得到的 i'和 j'值相同。

由於 i'相同且$1\le\left\lceil \frac{y'+1}{2} \right\rceil\le q$ ，故$\alpha_1=\alpha_2$，且$|\beta_1-\beta_2|<2$；

又由於 j'相同，故$\beta_1k\equiv\beta_2k \pmod{qk}$，即$\beta_1\equiv\beta_2 \pmod{q}$。

$q\ge2$ 時，$|\beta_1-\beta_2|<2$ 和$\beta_1\equiv\beta_2 \pmod{q}$矛盾，代表最初分割的每一個 2×2 正方形中，都只有一個"1"，則合併成的 n 階方陣為一 2–(1,0)拉丁方陣。由於 $2n$ 階方陣中每一個 $2k\times2k$ 正方形內，數字和都不小於$\left[\frac{2k}{q}\right]$，故 n 階方陣中每一個 $k\times k$ 正方形內，數字和都不小於$\left[\frac{2k}{q}\right]$，由基本性質二可知 $f_2(n,k)\ge\left[\frac{2k}{q}\right]$。

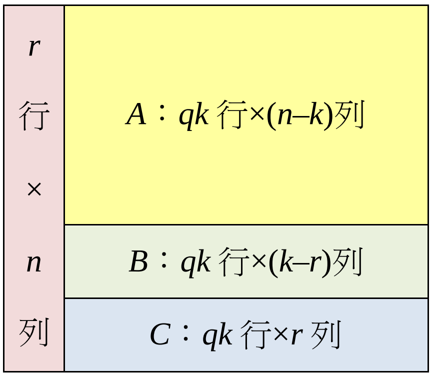
$q=1$ 時即 $k=n$，當然有每個 $k\times k$ 正方形內，數字和不小於 $2n=\left[\frac{2k}{q}\right]$，由基本性質二可知 $f_2(n,k)\ge\left[\frac{2k}{q}\right]$。

(4)　綜合以上，無論何種情況都有 $f_2(n,k)\le\left[\frac{2k}{q}\right]$且 $f_2(n,k)\ge\left[\frac{2k}{q}\right]$，故可得以下結論：

定理 2–2：$n=qk$ 時，$f_2(n,k)=\left[\frac{2k}{q}\right]$。

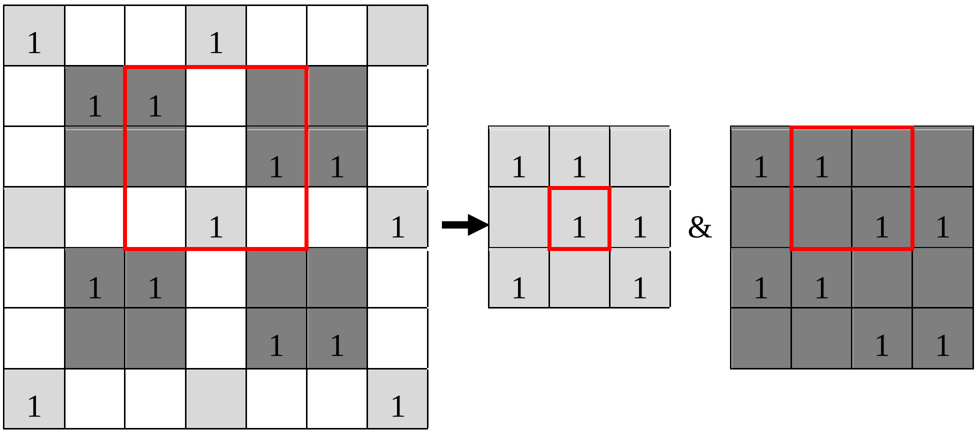
3.　得到 $n=qk+r(0<r<k)$時，$f_2(n,k)$的不等式

(1)　若 $f_2(n,k)=a$，則根據基本性質二，存在一 n 階的 2–(1,0)拉丁方陣，其中每一個 $k\times k$ 正方形內，數字和都不小於 a，觀察這一個方陣，如下圖所示：



A 區+B 區可切割成 q^2 個 $k\times k$ 正方形
→A 區+B 區數字和≥q^2a…(1)
B 區+C 區可切割成 q 個 $k\times k$ 正方形
→B 區+C 區數字和≥qa…(2)
B 區共有 $k–r$ 列→B 區數字和≤$2(k–r)$…(3)
(1)+(2)–(3)有
A 區+B 區+C 區數字和$(=2qk)\geq(q^2+q)a+2(r–k)$
→$2qk\geq(q^2+q)a+2(r–k)$
→$a=f_2(n,k)\leq\left[2\times\dfrac{(q+1)k-r}{q(q+1)}\right]$

(2)　另一方面，若將 $n\times n$ 的方陣作塗色，如下圖所示：



淺色區域是$(q+1)^2$個 $r\times r$ 正方形，深色區域是 q^2 個$(k–r)\times(k–r)$正方形。若將淺色和深色區域分別挑出來，會形成邊長分別為$(q+1)r$ 和 $q(k–r)$的兩個小方陣。但方陣邊長≥2 才有意義，故$(q+1)r=1$ 或 $q(k–r)=1$ 時不在討論範圍內。只有 $q=1$, $r=k–1$, 即 $n=2k–1$ 時不在討論範圍內。

每一個 $k\times k$ 正方形覆蓋到的淺色區域，都相當於淺色小方陣中的一個 $r\times r$ 正方形；而每一個 $k\times k$ 正方形覆蓋到的深色區域，也相當於深色小方陣中的一個$(k–r)\times(k–r)$正方形。又由定理 2–2 可知道 $f_2((q+1)r,r)=\left[\dfrac{2r}{q+1}\right]$及 $f_2(q(k–r),k–r)=\left[\dfrac{2(k-r)}{q}\right]$，若將淺色和深色小方陣，以及原方陣中對應的格子，依 2–(2)提到的方式放入"1"，則原方陣中每一個 $k\times k$ 正方形內必至少有 $f_2((q+1)r,r)+f_2(q(k–r),k–r)$個"1"，由基本性質二有 $f_2(n,k)\geq$ $\left[\dfrac{2r}{q+1}\right]+\left[\dfrac{2(k-r)}{q}\right]$。故有以下結果：

引理 2–3： $f_2(n,k)\le\left[2\times\dfrac{(q+1)k-r}{q(q+1)}\right]$；$n\ne 2k-1$ 時， $f_2(n,k)\ge\left[\dfrac{2r}{q+1}\right]+\left[\dfrac{2(k-r)}{q}\right]$。

為求簡便，在下文中令 $A_2(n,k)=\left[\dfrac{2r}{q+1}\right]+\left[\dfrac{2(k-r)}{q}\right]$，$B_2(n,k)=\left[2\times\dfrac{(q+1)k-r}{q(q+1)}\right]$。

4. 求 $f_2(n,k)$的值

(1) 求 $f_2(2k-1,k)$的值($k\ge 2$)

a. 若 $f_2(2k-1,k)=a$，則根據基本性質二，存在一 $2k-1$ 階的 2–(1,0)拉丁方陣，其中每一個 $k\times k$ 正方形內，數字和都不小於 a，觀察這一個方陣，如下圖所示：

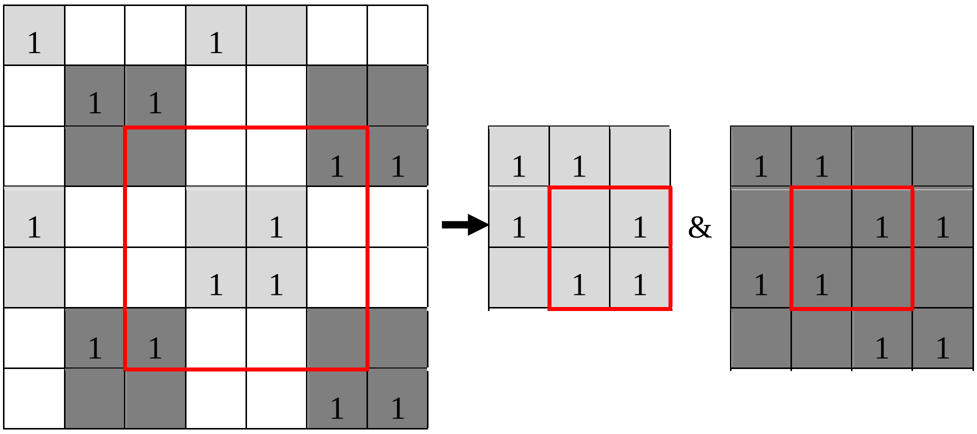
(k-1)行	1 行	(k-1)行	
A	*B*	*C*	(k-1)列
D	*E*	*F*	1 列
G	*H*	*I*	(k-1)列

$A+B+D+E$ 為一 $k\times k$ 正方形
$\to A+B+D+E$ 數字和$\ge a\cdots(1)$
同理 $D+E+G+H$ 數字和$\ge a\cdots(2)$
$A+B+D+E+G+H$ 為完整的 k 行
$\to A+B+D+E+G+H$ 數字和$=2k\cdots(3)$
(1)+(2)–(3)有 $D+E$ 數字和$\ge 2a-2k\cdots(4)$
同理有 $E+F$ 數字和$\ge 2a-2k\cdots(5)$
$D+E+F$ 為完整的 1 行
$\to D+E+F$ 數字和$=2\cdots(6)$
(4)+(5)-(6)有 $E\ge 4a-4k-2$，又 $E\le 1$
$\to a=f_2(2k-1,k)\le\left[\dfrac{4k+3}{4}\right]=k$

b. $k=2$ 時，$f_2(3,2)=2$，構造如下圖所示。

1	1	
1		1
	1	1

c. $k>2$ 時，若將$(2k-1)\times(2k-1)$的方陣作塗色，如下圖所示：



淺色區域是 9 個 1×1 正方形，深色區域是 4 個$(k-2)\times(k-2)$正方形。若將淺色和深色區域分別挑出來，會形成邊長分別為 3 和 $2(k-2)$的兩個小方陣。每一個 $k\times k$ 正方形覆蓋到的淺色區域，都相當於淺色小方陣中的一個 2×2 正方形；而每一個 $k\times k$ 正方形覆蓋到的深色區域，也相當於深色小方陣中的一個$(k-2)\times(k-2)$正方形。前面已經說明 $f_2(3,2)=2$，又由定理 2–2 可知道 $f_2(2(k-2),k-2)=\left\lceil \dfrac{2(k-2)}{2} \right\rceil=k-2$，若將淺色和深色小方陣，以及原方陣中對應的格子，分別依 *b.*和 2–(2)提到的方式放入"1"，則原方陣中每一個 $k\times k$ 正方形內，必至少有 $f_2(3,2)+f_2(2(k-2),k-2)$個"1"，由基本性質二有 $f_2(2k-1,k)\geq k$。

d. 經由上述討論可得 $f_2(2k-1,k)=k$。

(2) 求 $q>1$, $r=k-1$ 時，$f_2(n,k)$的值

a. $q=2$ 時：$n=3k-1$，

$$A_2(n,k)=\left\lceil \frac{2(k-1)}{3} \right\rceil+\left\lceil \frac{2}{2} \right\rceil=\left\lceil \frac{2k+1}{3} \right\rceil,$$

$$B_2(n,k)=\left\lceil 2\times\frac{3k-(k-1)}{6} \right\rceil=\left\lceil \frac{2k+1}{3} \right\rceil,$$

故$\left\lceil \dfrac{2k+1}{3} \right\rceil\leq f_2(n,k)\leq\left\lceil \dfrac{2k+1}{3} \right\rceil$, $f_2(n,k)=\left\lceil \dfrac{2k+1}{3} \right\rceil$。

b. $q>2$ 時：

由引理 2–3 有 $f_2(n,k)\leq B_2(n,k)=\left\lceil 2\times\dfrac{(q+1)k-(k-1)}{q(q+1)} \right\rceil=\left\lceil \dfrac{2qk+2}{q(q+1)} \right\rceil$，

而 2–(2)所給出的 $f_2((q+1)k,k)$構造中，必有其中一個角落內數字是"0"，

由性質 2–1 的討論過程可知 $f_2(n,k) \geq f_2((q+1)k,k) = \left[\dfrac{2k}{q+1}\right] = \left[\dfrac{2qk}{q(q+1)}\right]$，

即 $\left[\dfrac{2qk}{q(q+1)}\right] \leq f_2(n,k) \leq \left[\dfrac{2qk+2}{q(q+1)}\right]$。

若 $\left[\dfrac{2qk+2}{q(q+1)}\right] > \left[\dfrac{2qk}{q(q+1)}\right]$，則 $\dfrac{2qk+1}{q(q+1)}$ 為整數，或者 $\dfrac{2qk+2}{q(q+1)}$ 為整數

$\rightarrow q(q+1)|2qk+1 \rightarrow q|2qk+1 \rightarrow q|1$，或者 $q(q+1)|2qk+2 \rightarrow q|2qk+2 \rightarrow q|2$ 但皆與 $q>2$ 矛盾，

因此 $\left[\dfrac{2qk+2}{q(q+1)}\right] = \left[\dfrac{2qk}{q(q+1)}\right] = f_2(n,k)$。

引理 2–4：$q>1$, $r=k-1$ 時，$f_2(n,k) = B_2(n,k) = \left[2 \times \dfrac{(q+1)k-r}{q(q+1)}\right]$。

(3) 求 $r=k-2$ 時，$f_2(n,k)$的值

a. 經由計算可知，$q=1\sim4$ 時，皆有 $A_2(n,k)=B_2(n,k)$，

故都有 $f_2(n,k) = B_2(n,k) = \left[2 \times \dfrac{(q+1)k-r}{q(q+1)}\right]$。

b. $q>4$ 時：

由引理 2–3 有 $f_2(n,k) \leq B_2(n,k) = \left[2 \times \dfrac{(q+1)k-(k-2)}{q(q+1)}\right] = \left[\dfrac{2qk+4}{q(q+1)}\right]$，

由性質 2–1 可知 $f_2(n,k) \geq f_2((q+1)k,k) = \left[\dfrac{2k}{q+1}\right] = \left[\dfrac{2qk}{q(q+1)}\right]$，

即 $\left[\dfrac{2qk}{q(q+1)}\right] \leq f_2(n,k) \leq \left[\dfrac{2qk+4}{q(q+1)}\right]$。

若 $\left[\dfrac{2qk+4}{q(q+1)}\right] > \left[\dfrac{2qk}{q(q+1)}\right]$，則 $\dfrac{2qk+1}{q(q+1)}, \dfrac{2qk+2}{q(q+1)}, \dfrac{2qk+3}{q(q+1)}, \dfrac{2qk+4}{q(q+1)}$ 至少有一個為整數，但

皆與 $q>4$ 矛盾，因此 $\left[\dfrac{2qk+4}{q(q+1)}\right] = \left[\dfrac{2qk}{q(q+1)}\right] = f_2(n,k)$。

引理 2–5：$r=k-2$ 時，$f_2(n,k)=B_2(n,k)=\left\lceil 2\times\frac{(q+1)k-r}{q(q+1)}\right\rceil$。

(4) 當 $r\neq k-1$ 且 $r\neq k-2$ 時：

若 $q=1$，$A_2(n,k)=2k-r=B_2(n,k),\ f_2(n,k)=B_2(n,k)$；

若 $q=2$，$A_2(n,k)=\left\lceil\frac{3k-r}{3}\right\rceil=B_2(n,k),\ f_2(n,k)=B_2(n,k)$；

若 $q>2$：令 n' 為最大的正整數，滿足$\begin{cases} n\le n'<(q+1)k \\ B_2(n,k)=B_2(n',k)\end{cases}$。

a. 若 $n'=(q+1)k-1$，且 $n\equiv n'(\mathrm{mod}\ 2)$：

根據引理 2–4、性質 2–1 和引理 2–3 有

$B_2(n',k)=f_2(n',k)\le f_2(n,k)\le B_2(n,k)$，

故 $f_2(n,k)=B_2(n,k)=\left\lceil 2\times\frac{(q+1)k-r}{q(q+1)}\right\rceil$。

b. 若 $n'=(q+1)k-1$，且 $n\equiv n'-1(\mathrm{mod}\ 2)$：

易知 $B_2(n,k)=B_2(n',k)=B_2(n'-1,k)$，

根據引理 2–5、性質 2–1 和引理 2–3 有

$B_2(n'-1,k)=f_2(n'-1,k)\le f_2(n,k)\le B_2(n,k)$，

故 $f_2(n,k)=B_2(n,k)=\left\lceil 2\times\frac{(q+1)k-r}{q(q+1)}\right\rceil$。

c. 若 $n'<(q+1)k-1$，且 $n\equiv n'(\mathrm{mod}\ 2)$，則 $B_2(n',k)=B_2(n'+1,k)+1$，

令 $n'=qk+r'$，上式可表為$\left\lceil 2\times\frac{(q+1)k-r'}{q(q+1)}\right\rceil=\left\lceil 2\times\frac{(q+1)k-(r'+1)}{q(q+1)}\right\rceil+1$，

故 $2\times\frac{(q+1)k-r'}{q(q+1)}\in N\rightarrow\frac{2(k-r')}{q}\in N,\ \frac{2r'}{q+1}\in N$，

所以 $A_2(n',k)=\frac{2(k-r')}{q}+\frac{2r'}{q+1}=2\times\frac{(q+1)k-r'}{q(q+1)}=B_2(n',k),\ f_2(n',k)=B_2(n',k)$。

同樣的根據性質 2–1 和引理 2–3，有 $B_2(n',k)=f_2(n',k)\le f_2(n,k)\le B_2(n,k)$，

故 $f_2(n,k)=B_2(n,k)=\left[2\times\dfrac{(q+1)k-r}{q(q+1)}\right]$。

d. 若 $n'<(q+1)k-1$，且 $n\equiv n'-1 \pmod 2$，同樣有 $f_2(n',k)=B_2(n',k)$。

在 3–(2)所給出的 $f_2(n',k)$構造中，必有其中一個角落內數字是"0"，

由性質 2–1 的討論過程和引理 2–3，可知

$B_2(n',k)=f_2(n',k)\le f_2(n'-1,k)\le f_2(n,k)\le B_2(n,k)$，

故 $f_2(n,k)=B_2(n,k)=\left[2\times\dfrac{(q+1)k-r}{q(q+1)}\right]$。

根據以上幾個討論，得知除了 $n=2k-1$ 以外，都有 $f_2(n,k)=\left[2\times\dfrac{(q+1)k-r}{q(q+1)}\right]$，

因此有以下結論：

定理 2–6：$\forall n\ge 2,\ f_2(n,k)=\begin{cases}\left[2\times\dfrac{(q+1)k-r}{q(q+1)}\right] & ,if\ \ n\ne 2k-1\\ \left[2\times\dfrac{(q+1)k-r}{q(q+1)}\right]-1, & if\ \ n=2k-1\end{cases}$。

此即為 $f_2(n,k)$的一般式。

四、　研究結果

(一) $m=1$ 時，即求 $f_1(n,k)$的值：令 $n=qk+r$，其中 $0\le r<k$。

1. 性質 1–1：$f_1(n,k)\le f_1(n-1,k)$。
2. 定理 1–2：$r=0$(即 $k|n$)時，$f_1(n,k)=\left[\dfrac{k}{q}\right]$。
3. 引理 1–3：$r>0$ 時，$\left[\dfrac{r}{q+1}\right]+\left[\dfrac{k-r}{q}\right]\le f_1(n,k)\le\left[\dfrac{(q+1)k-r}{q(q+1)}\right]$。
4. 引理 1–4：$r=k-1$ 時，$f_1(n,k)=\left[\dfrac{(q+1)k-r}{q(q+1)}\right]$。
5. 定理 1–5：$f_1(n,k)=\left[\dfrac{(q+1)k-r}{q(q+1)}\right]$。

(二) $n \geq m=2$ 時，即求 $f_2(n,k)$的值：令 $n=qk+r$，其中 $0 \leq r<k$。

1. 性質 2–1：$n \geq 4$, $f_2(n,k) \leq f_2(n-2,k)$。

2. 定理 2–2：$r=0$(即 $k|n$)時，$f_2(n,k)=\left\lceil \frac{2k}{q} \right\rceil$。

3. 引理 2–3：$r>0$ 時，$f_2(n,k) \leq \left\lceil 2\times\frac{(q+1)k-r}{q(q+1)} \right\rceil$；

$n \neq 2k-1$ 時還有 $f_2(n,k) \geq \left\lceil \frac{2r}{q+1} \right\rceil + \left\lceil \frac{2(k-r)}{q} \right\rceil$。

4. 引理 2–4：$q>1$, $r=k-1$ 時，$f_2(n,k) = \left\lceil 2\times\frac{(q+1)k-r}{q(q+1)} \right\rceil$。

5. 引理 2–5：$r=k-2$ 時，$f_2(n,k) = \left\lceil 2\times\frac{(q+1)k-r}{q(q+1)} \right\rceil$。

6. 定理 2–6：$f_2(n,k) = \begin{cases} \left\lceil 2\times\frac{(q+1)k-r}{q(q+1)} \right\rceil & , if\ \ n \neq 2k-1 \\ \left\lceil 2\times\frac{(q+1)k-r}{q(q+1)} \right\rceil -1, & if\ \ n = 2k-1 \end{cases}$。

五、 討論與未來展望

1. $f_2(n,k)$有一個特例：$n=2k-1$ 的情況。若要在 $n=2k-1$ 時，構造出一個$(2k-1)$階的 2–(1,0)拉丁方陣，其中每一個 $k\times k$ 正方形內，數字和都不小於$\left\lceil 2\times\frac{(q+1)k-r}{q(q+1)} \right\rceil = k+1$，則必須在正中央的格子內放入兩個"1"才有可能辦到。每個格子內只能放最多 1 個"1"，正是特例出現的最大原因。相信在 m 更大的時候，也會因為這個原因而產生出更多的特例。

2. $m=1$ 時，f_1 關於 n 的單調性(即性質 1–1)看似非常簡單，卻在最後一步的證明發揮重要作用；同時它看起來也顯然能夠成立，但是在 $m=2$ 的時候，竟然要花好大一番工夫，才能證明出它的弱化性質(性質 2–1)。若要往更大的 m 值邁進，這個性質的證明勢必會成為最大的瓶頸。

3. 接下來我想要探討的，是更一般化的結果，亦即當給定 n,m,k 時，能夠有公式求出 $f_m(n,k)$的值。但是這個目標難以實現，我能夠做的只有繼續下一個特殊化的情形，也就是 $f_3(n,k)$，但在證明遞減這個部份(未來的性質 3–1?)遇到瓶頸。

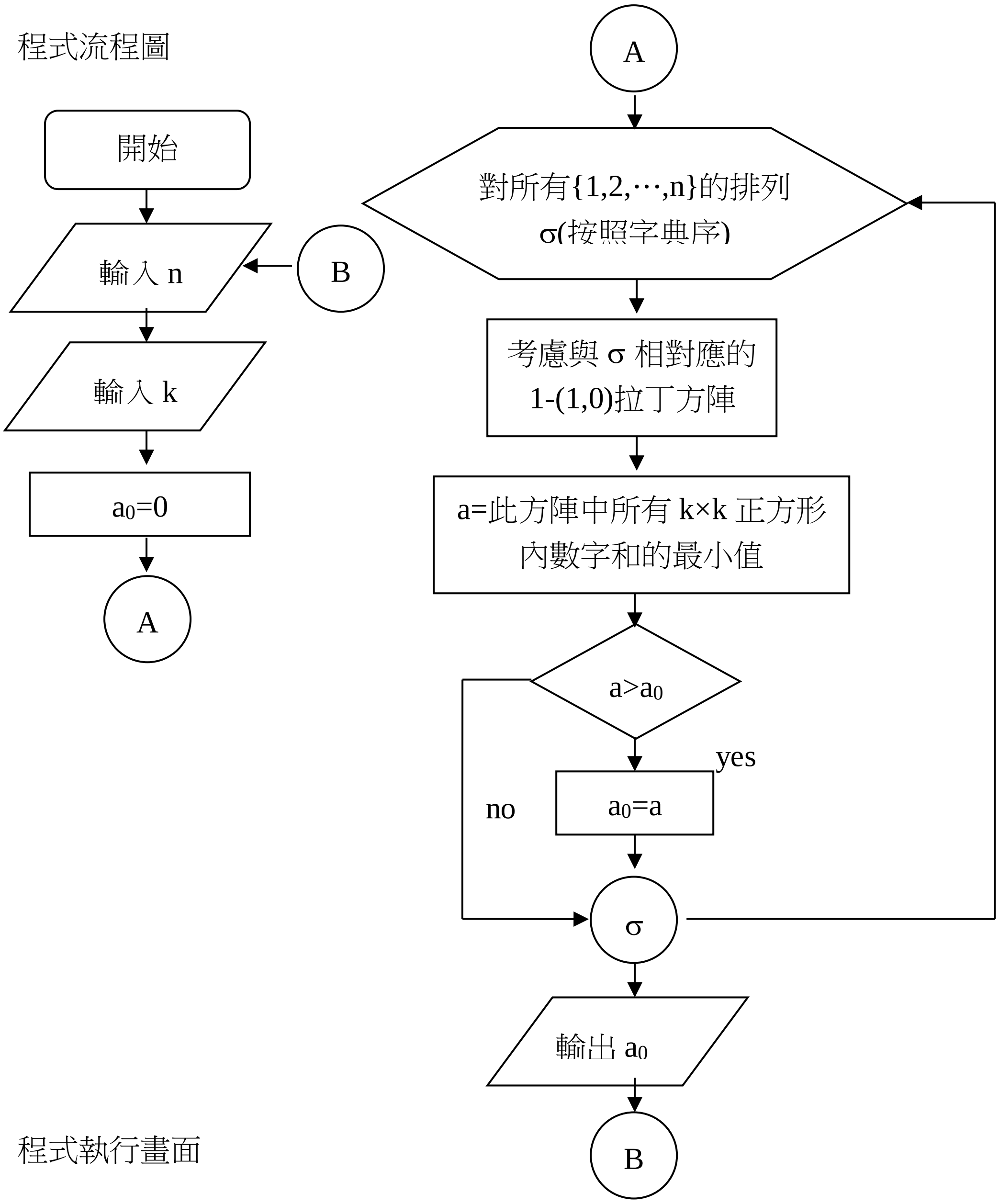
六、 參考資料

1. 題目靈感──2014 年 *IMO* 第二題

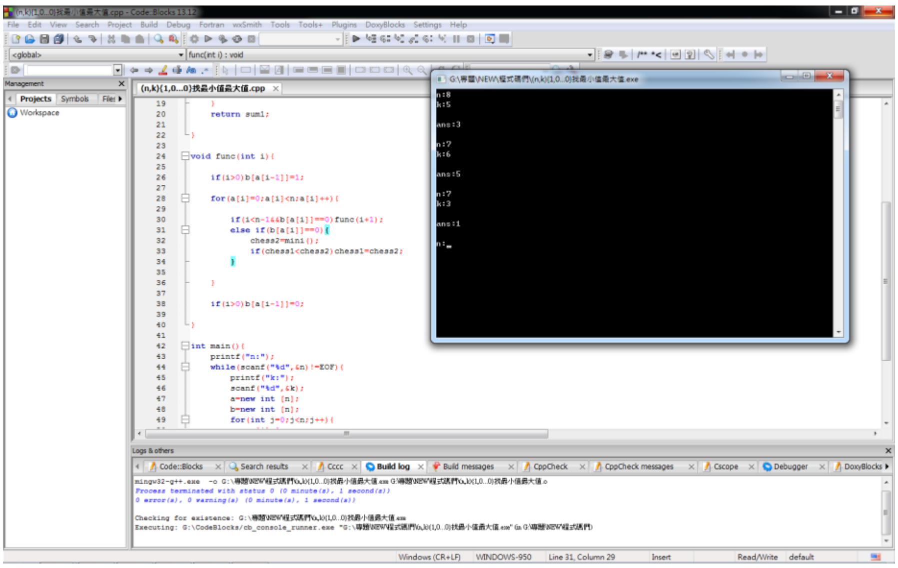
題目參考網址：*https://www.imo-official.org/problems.aspx*

七、　附錄

1. 程式流程圖



2. 程式執行畫面



【評語】050403

這個研究是從 2014 年 IMO 的一個題目出發，做了推廣。原來的題目是:「求最大的正整數 k，使得所有在每行每列恰有一顆棋子的 nxn 棋盤中，都有一個 kxk 正方形，其內沒有任何棋子。」

推廣後，本論文在研究:「求最小的非負整數 a，使得所有在每行每列恰有 m 顆棋子的 nxn 棋盤，都有一個 kxk 正方形，其內棋子數不超過 a。」

論文的主要結果包括，m=1 時的答案、m=2 時的答案、一般 m 的一些上下界等。整體的推導有一定的深度，是一篇不錯的佳作。

建議不要使用(1,0)拉丁方陣的名稱，因為拉丁方陣另外有大家熟知的定義。例如，可以直接稱為(0,1)方陣。如果為了說明各行各列恰有 m 個 1，或許可以叫做 m-和-(0,1)方陣或是 m-(0,1)方陣等詞。