

中華民國第 56 屆中小學科學展覽會 作品說明書

高級中等學校組 數學科

第三名

050402

點點相應在「格」中

-平面與空間中格子圖形之 探討與推廣

學校名稱：臺北市立成淵高級中學

作者： 高二 范谷瑜	指導老師： 林鳳美
---------------	--------------

關鍵詞：格子圖形、Heron 三角形、

五心與九點圓圓心

摘要

格子圖形是具代數特性的幾何圖形，是解析幾何中一環。首先研究發現格子直線數與法里數列及尤拉函數有關，透過遞迴關係導出其一般式。其次探討形成格子圖形的充要條件，得到

- (1) 坐標平面上有格子正 n 邊形的充要條件為 $n = 4$
- (2) 坐標空間中有格子正 n 邊形的充要條件為 $n = 3, 4$ 或 6
- (3) 恰有三種格子柏拉圖

最後的主軸是找出五心與九點圓圓心皆為格子點的充分條件，成果如下：

- (1) 畢氏三角形內心及旁心皆為格子點；而Heron三角形在某條件下，內心及旁心也是格子點
- (2) 畢氏三角形與Heron三角形三邊長滿足在某條件下，五心與九點圓圓心皆為格子點
- (3) 三角形三邊長為整數比，經伸縮變換後可使五心與九點圓圓心皆為格子點

壹、研究動機

坐標平面上(或空間中)， x 坐標、 y 坐標(及 z 坐標)均為整數的點都稱為「**格子點**」。在閱讀蔡聰明教授[1]所寫的「談求面積的 Pick 公式」這篇文章後，開始感興趣於「**格子圖形**」，它是指每一個頂點均為格子點的圖形，例如：格子三角形、格子正方形與格子立方體等。當我們在研究格子三角形時，就聯想到求五心坐標的答案總是不漂亮，而引發我們深入探究的動力，想找尋格子三角形的五心與九點圓圓心皆為格子點的充分條件。同時，我們也發現一些有趣的推廣定理，而推導出形成格子圖形的充要條件。透過解析幾何的論證方式，並配合我們高中數學課程中學過的重要概念「數列與級數」、「直線與圓」、「平面向量」、「空間向量」、「二階方陣所對應之平面變換」、「立體幾何」等單元來解決研究的問題。

貳、研究目的

一、探討格子正方形與格子正立方體穿過格子點的直線數，及導出其一般式。

- 二、探討形成格子圖形的必要條件，及形成特殊格子圖形的充要條件。
- 三、探討格子三角形滿足內心與旁心皆為格子點的類型，並推論至一般化的性質。
- 四、探討格子三角形滿足五心與九點圓圓心皆為格子點的類型，並推論至一般化的性質。
- 五、應用於連續整數邊的三角形，並探討出一些性質。

參、研究設備與器材

筆、紙、電腦、Geogebra5.0 動態幾何繪圖板、Wolfram Alpha。

肆、研究過程與方法

一、定義與預備知識

為了方便論證，我們透過平移與旋轉可將格子圖形坐標化，且皆放置第一象限(或第一卦限)，如下圖 1 是邊長為 5 的格子正方形，下圖 2 是邊長為 2 的格子立方體。

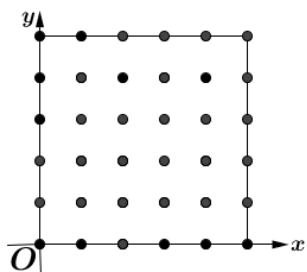


圖 1：格子正方形

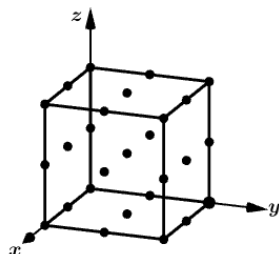


圖 2：格子立方體

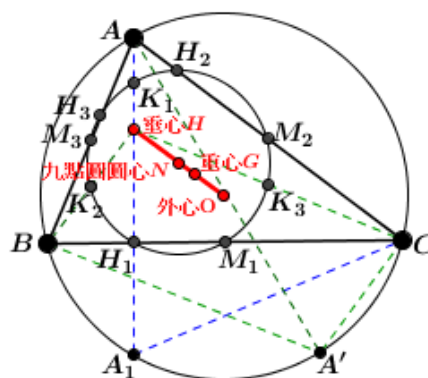


圖 3：九點圓

本研究中，我們將探討格子三角形的五心與九點圓圓心是否為格子點的問題。為了符號方便，三角形的五心分別記為重心 G 、外心 O 、垂心 H 、內心 I 與旁心 I_A, I_B, I_C 。

【註】 外心記為 O ，與原點 O 區別。我們知道：在 $\triangle ABC$ 中，三邊的中點、三高垂足點以及垂心至三頂點所連線段的中點等九個點落在一個圓上，此圓稱為該三角形的「**九點圓** (nine point circle)」如上圖 3，其中九點圓的圓心 N 有兩個美妙的結果：(1) N 是垂心與外心所連線

段的中點，(2) N 在尤拉線上，且 $\overline{HG} = 2\overline{GO}$ ， $\overline{ON} = \overline{NH}$ 。所謂「尤拉線」是指過三角形的垂心、外心、重心和九點圓圓心的一條直線，證明可以參考資料[2]。

若 $\triangle ABC$ 的三邊長 a, b, c 都是整數且滿足 $c^2 = a^2 + b^2$ ，則此三角形稱為「畢氏三角形 (Pythagorean triangle)」，此組正整數 (a, b, c) 稱為一組「畢氏三元數」。其次，若三角形邊長與面積都是有理數，則此三角形稱為「Heron 三角形 (Heronian triangle)」。

以下列出幾個大家熟知的基本定理：

【Euler 定理】 設 $\varphi(n)$ 表示為小於 n 且與 n 互質之正整數個數。若正整數 n 的標準分解式為

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k} \text{ , 其中 } p_1, p_2, \dots, p_k \text{ 為相異質數, 且 } \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \text{ , 則}$$

$$\varphi(n) = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right) \text{ , 此函數稱為「尤拉函數 (Euler function)」。}$$

【Pick 定理】 設 Γ 為坐標平面上以格子點為頂點的單純多邊形，則 Γ 的面積為 $A = \frac{B}{2} + I - 1$ ，

其中 B 為邊界上的格子點數， I 為內部的格子點數。

底下的基礎定理是三角形五心的解析坐標，證明可以參考資料[3]與[4]。

【基礎定理】 若 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$ 為三角形 $\triangle ABC$ 的三頂點，且三邊長為

$$\overline{BC} = a, \overline{AC} = b, \overline{AB} = c \text{ , 則}$$

$$(1) \text{重心 } G \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \right) ;$$

$$(2) \text{內心 } I \left(\frac{ax_1 + bx_2 + cx_3}{a + b + c}, \frac{ay_1 + by_2 + cy_3}{a + b + c} \right) ;$$

$$(3) \text{外心 } O \left(\frac{x_1 \sin 2A + x_2 \sin 2B + x_3 \sin 2C}{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C}, \frac{y_1 \sin 2A + y_2 \sin 2B + y_3 \sin 2C}{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C} \right) ,$$

其中 $\sin 2\angle A : \sin 2\angle B : \sin 2\angle C = a^2(b^2 + c^2 - a^2) : b^2(c^2 + a^2 - b^2) : c^2(a^2 + b^2 - c^2)$;

$$(4) \text{垂心 } H \left(\frac{x_1 \tan A + x_2 \tan B + x_3 \tan C}{\tan A + \tan B + \tan C}, \frac{y_1 \tan A + y_2 \tan B + y_3 \tan C}{\tan A + \tan B + \tan C} \right) ,$$

其中 $\tan A : \tan B : \tan C = \frac{1}{b^2 + c^2 - a^2} : \frac{1}{c^2 + a^2 - b^2} : \frac{1}{a^2 + b^2 - c^2}$;

$$(5) \text{傍心 } I_A \left(\frac{-ax_1 + bx_2 + cx_3}{-a + b + c}, \frac{-ay_1 + by_2 + cy_3}{-a + b + c} \right) , I_B \left(\frac{ax_1 - bx_2 + cx_3}{a - b + c}, \frac{ay_1 - by_2 + cy_3}{a - b + c} \right) ,$$

$$I_C \left(\frac{ax_1 + bx_2 - cx_3}{a + b - c}, \frac{ay_1 + by_2 - cy_3}{a + b - c} \right) .$$

二、探討穿過格子點的數與形

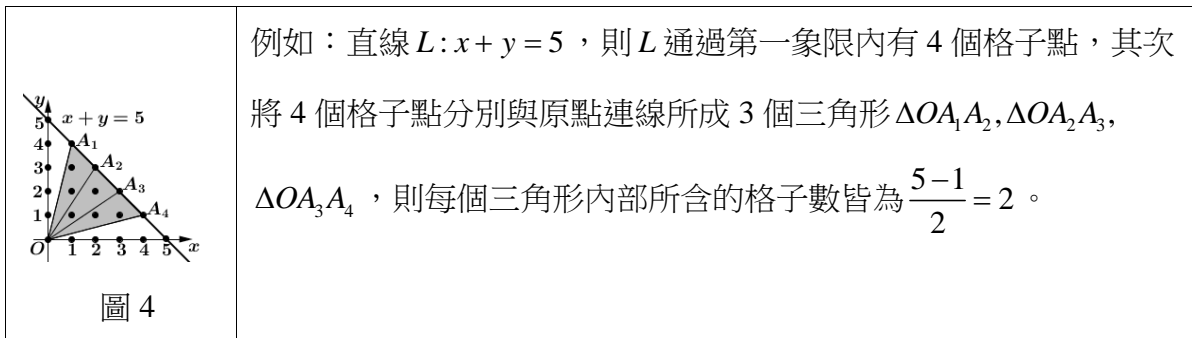
(一)坐標平面上的格子直線數

【性質 1】在坐標平面上，若考慮直線 $L: x + y = p$ ，其中 p 為大於 2 的質數，則

(1) L 恰好通過第一象限內的 $p-1$ 個格子點。

(2) 將 $p-1$ 個格子點分別與原點連線所成 $p-2$ 個三角形，則每個三角形內部所含的

格子數皆為 $\frac{p-1}{2}$ (如下圖 4 為 $p=5$)。



【證明】(1)顯然成立，並設 $p-1$ 個格子點為 A_1, A_2, \dots, A_{p-1} (2)我們知道 $p-2$ 個三角形皆是等

底等高的，又因為 $x + y = p$ 為質數，所以 x 與 y 互質，也就是說點 (x, y) 和原點的連線不

會經過其他格子點。因此每個三角形邊界數 $B = 3$ ， $\Delta OA_i A_{i+1}$ 面積為 $\frac{1}{2} \begin{vmatrix} p-i-1 & i+1 \\ p-i & i \end{vmatrix} = \frac{p}{2}$ ，

再由 **Pick 定理** 得 $\frac{p}{2} = \frac{3}{2} + I - 1$ ，因此， $\Delta OA_i A_{i+1}$ 內部的格子點數 $I = \frac{p-1}{2}$ 。 ■

為了推導坐標平面上格子正方形 $[0, n] \times [0, n]$ 中的格子直線個數，我們引進「 n 階法里數

列 F_n (Farey sequence) [5]」，初始數列 $F_1 = \{\frac{0}{1}, \frac{1}{1}\}$ ，當 $n=2$ 時，數列 $F_2 = \{\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}\}$ ，當 $n=3$ 時，

數列 $F_3 = \{\frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1}\}$ ；如果 $b+d \leq n$ ，則在兩個相鄰分數 $\frac{a}{b}$ 與 $\frac{c}{d}$ 之間增加一個新的分數 $\frac{a+c}{b+d}$ ，

如圖 5 中圓圈的疊代方式而產生的新項，如此下去的數列稱為法里數列 F_n 。

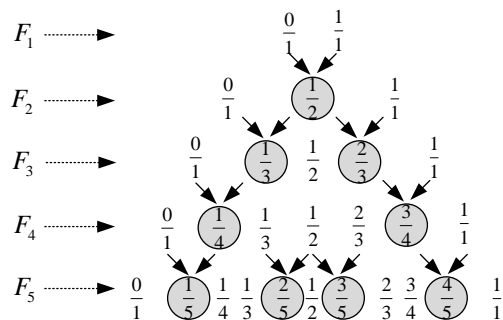


圖 5：法里數列中新產生的項如圓圈內的疊代方式

在坐標平面上，對於邊長 n 的格子正方形 $[0, n] \times [0, n]$ ，我們可以構造出點序列：

$$A_1(x_1, y_1) = (1, 0), \dots, A_{i-1}(x_{i-1}, y_{i-1}), A_i(x_i, y_i), A_{i+1}(x_{i+1}, y_{i+1}), \dots, A_j(x_j, y_j) = (1, 1)$$

$$\text{滿足 } (x_i, y_i) = \left(\frac{x_{i-1} + x_{i+1}}{\gcd(x_{i-1}, x_{i+1})}, \frac{y_{i-1} + y_{i+1}}{\gcd(y_{i-1}, y_{i+1})} \right), \quad (i, j \in \mathbb{N}, 0 \leq x_i \leq y_i, \gcd(x_i, y_i) = 1), \quad (2-1)$$

則每一點 $A_i(x_i, y_i)$ 對應於一個有理數 $\frac{y_i}{x_i}$ ，我們將這些有理數由小到大排列所成有理數數列，

會發現恰好是法里數列，如下圖 6 中依序得到法里數列 F_1, F_2, F_3, F_4 。

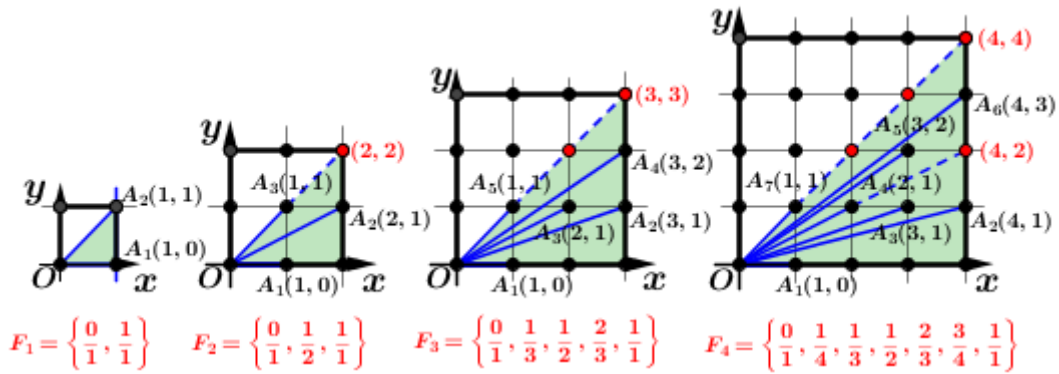


圖 6：有理數數列對應法里數列 F_1, F_2, F_3, F_4

自然產生我們所好奇的問題：「隨著 n 變大，此數列皆為法里數列嗎？」很幸運的，這答案是肯定的，證明如下。

【性質 2】 若 $A_i(x_i, y_i)$ 為邊長 n 的格子正方形中之格子點，且滿足 (2-1) 的條件，則

(1) 每一個點 $A_i(x_i, y_i)$ 對應於一個有理數 $\frac{y_i}{x_i}$ ，所成的數列恰為法里數列 F_n 。

(2) 每一格子三角形 $\Delta OA_i A_{i+1}$ 內部都沒有格子點，其面積都等於 $\frac{1}{2}$ 。

【證明】 (1) 依照我們建構 $A_i(x_i, y_i)$ 使之對應於一個有理數 $\frac{y_i}{x_i}$ ，因為要滿足 (2-1) 的條件下，

自然就符合法里數列的定義，因此，此有理數數列必為法里數列。

(2) 滿足 (2-1) 的條件下，三角形 $\Delta OA_i A_{i+1}$ 除了三個頂點之外，三邊及內部皆不含格子

點，且 $\Delta OA_i A_{i+1}$ 面積為 $\frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} x_i & y_i \\ x_{i+1} & y_{i+1} \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} |x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i| = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$ 。 ■

【定理 1】 若 $A_i(x_i, y_i)$ 為邊長 n 的格子正方形 $[0, n] \times [0, n]$ 內之格子點，並且滿足 (2-1) 的條件，則直線 OA_i 的個數即為法里數列 F_n 的項數，且全體直線 OA_i 通過正方形之右下三角形的所有格子點 (如下圖 7 中綠色的三角形 ΔOBC)。

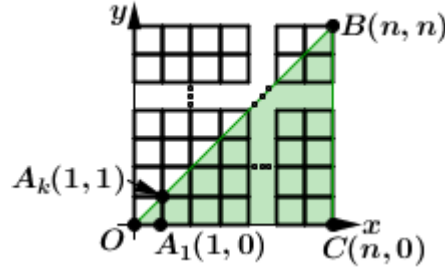


圖 7

【證明】 因為 $A_i(x_i, y_i)$ 要滿足 (2-1) 條件，很顯然 $A_i(x_i, y_i)$ 會在格子正方形的右下三角形，而且會發現為 $\gcd(x_i, y_i) = 1$ 的所有點。其次考慮 $A_i(x_i, y_i)$ 對應於一個有理數 $\frac{y_i}{x_i}$ ，由性質 2 得到有理數 $\frac{y_i}{x_i}$ 所成數列為法里數列。因為 $\frac{y_i}{x_i}$ 是直線 OA_i 的斜率，斜率可寫成

$$\frac{y_i}{x_i} = \frac{2y_i}{2x_i} = \frac{3y_i}{3x_i} = \dots = \frac{ny_i}{nx_i}$$

以上的有理數均可對應於 $(x_i, y_i), (2x_i, 2y_i), (3x_i, 3y_i), (4x_i, 4y_i), \dots, (nx_i, ny_i)$ ，這些點代表都在同一直線上，除了點 (x_i, y_i) 外，其餘的點均屬於 $\gcd(x_i, y_i) \neq 1$ 的點，因此，僅要考慮直線 OA_i ，就可以包含右下三角形的所有格子點。 ■

【性質 3】 若 F_n 為法里數列，則 $|F_n| = |F_{n-1}| + \varphi(n)$ 。

【證明】 因為法里數列 F_n 包含 F_{n-1} 的全部項以及與 n 互質的每個數的相對分數。

例如： F_2 包含 F_1 的全部項以及相對分數 $\frac{1}{2}$ ，即 $|F_2| = |F_1| + \varphi(2)$ ；

F_3 包含 F_2 的全部項以及相對分數 $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$ ，即 $|F_3| = |F_2| + \varphi(3)$ ；

F_4 包含 F_3 的全部項以及相對分數 $\frac{1}{4}, \frac{3}{4}$ ，即 $|F_4| = |F_3| + \varphi(4)$ ；

F_5 包含 F_4 的全部項以及相對分數 $\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}$ ，即 $|F_5| = |F_4| + \varphi(5)$ 。

以此類推，可以觀察出從 F_{n-1} 到 F_n 相對增加的分數個數即是尤拉函數 $\varphi(n)$ ，因此，

$$|F_n| = |F_{n-1}| + \varphi(n) \quad \blacksquare$$

【定理 2】在邊長 n 的格子正方形 $[0, n] \times [0, n]$ 中，格子直線數為 $1 + 2 \sum_{m=1}^n \varphi(m)$ 。

【註】過原點與格子正方形內的格子點連線之直線，稱為「格子直線」。

【證明】設 a_n 為所求的格子直線數，利用圖形對稱性，即可得到 $a_n = 2|F_{n-1}| - 1$ ，又由性質 3

可以進一步可推導出

$$\begin{aligned} |F_2| &= |F_1| + \varphi(2) \\ |F_3| &= |F_2| + \varphi(3) \\ &\vdots \\ |F_{n-1}| &= |F_n| + \varphi(n-1) \\ |F_n| &= |F_{n-1}| + \varphi(n) \quad (+) \\ |F_n| &= |F_1| + \varphi(2) + \varphi(3) + \cdots + \varphi(n) \end{aligned}$$

又因為 $|F_1| = 1, \varphi(1) = 0$ ，於是， $|F_n| = 1 + \sum_{m=1}^n \varphi(m)$ 。因此，

$$a_n = 2(1 + \sum_{m=1}^n \varphi(m)) - 1 = 1 + 2 \sum_{m=1}^n \varphi(m). \quad \blacksquare$$

(二)坐標空間的格子直線數

前面提到格子正方形中，格子直線個數有一般式，若考慮在坐標空間中，格子正立方體 $[0, n] \times [0, n] \times [0, n]$ 是否也有規律的一般式呢？空間中直線有方向向量，但沒有斜率的，因此，無法使用法里數列的性質類推至空間中求格子直線數。然而我們歸納發現其格子直線數仍與尤拉函數 $\varphi(n)$ 有關，說明如下：

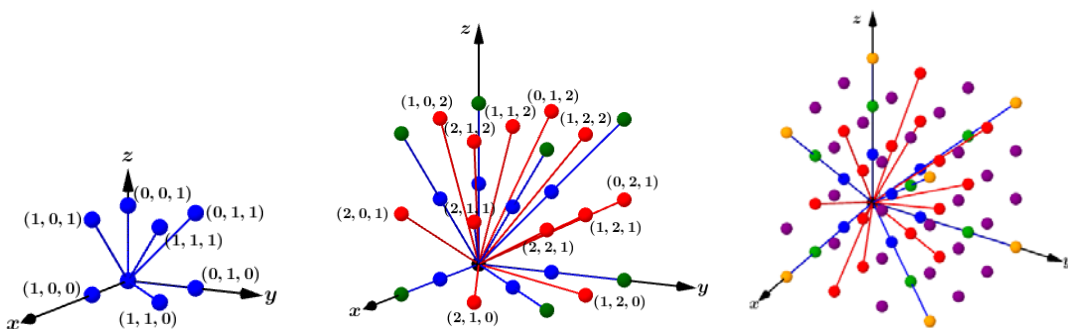


圖 8

設 a_n 為過原點與另一格子點連線之直線個數，先從 $n = 1$ 時如上圖 8，我們觀察到邊長為 1 的格子正立方體中之格子點，除了原點外，還有另外七個點 $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0)$

$(0,0,1), (1,1,0), (1,1,0), (1,0,1), (0,1,1), (1,1,1)$ ，因此直線個數 $a_1 = 7$ 。接著考慮 $n = 2$ 時，除了原點外分成二種：(1)與 $n = 1$ 的情形相同直線；(2)新增加直線，分析如下表 1：

表 1

分類	格子點的情形	直線個數
$(n, 0, 0)$	$(2, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 0, 2)$ - 3 個點	共有 7 條直線 與 $n = 1$ 的情形相同為 a_1
$(n, n, 0)$	$(2, 2, 0), (2, 0, 2), (0, 2, 2)$ - 3 個點	
(n, n, n)	$(2, 2, 2)$ - 1 個點	
$(n, t, 0)$	$(2, 1, 0), (2, 0, 1), (1, 2, 0), (1, 0, 2), (0, 1, 2), (0, 2, 1)$ - 6 個點	有 12 條直線
(n, t, t)	$(2, 1, 1), (1, 2, 1), (1, 1, 2)$ - 3 個點	
(n, n, t)	$(2, 1, 1), (2, 1, 2), (1, 2, 2)$ - 3 個點	

因此直線個數 $a_2 = a_1 + 12 = 7 + 12 = 19$ 。再考慮 $n = 3$ 時，邊長為 3 的格子正立方體中之格子點，除了原點外，仍可以分成與 $n = 2$ 的情形相同直線，或者新增加直線，如下表 2：

表 2

分類	格子點的情形	直線個數
$(n, 0, 0)$	$(3, 0, 0), (0, 3, 0), (0, 0, 3)$ - 3 個點	共有 7 條直線 與 $n = 2$ 的情形相同為 a_2
$(n, n, 0)$	$(3, 3, 0), (3, 0, 3), (0, 3, 3)$ - 3 個點	
(n, n, n)	$(3, 3, 3)$ - 1 個點	
$(n, t, 0)$	$(3, 1, 0)$ 與 $(3, 2, 0)$ - 考慮排列各 6 個點，共 12 個點	有 24 條直線
(n, t, t)	$(3, 1, 1)$ 與 $(3, 2, 2)$ - 考慮排列各 3 個點，共 6 個點	
(n, n, t)	$(3, 3, 1)$ 與 $(3, 3, 2)$ - 考慮排列各 3 個點，共 6 個點	
(n, s, t)	$(3, 2, 1)$ - 考慮排列有 6 個點	有 6 條直線

因此，直線個數 $a_3 = a_2 + 30 = 19 + 30 = 49$ 。

依照上述方式類推至邊長為 n 的格子正立方體的情形，得到以下的**定理 3**。

【定理 3】 考慮邊長 n 的格子正立方體 $[0, n] \times [0, n] \times [0, n]$ 中，若 $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ ，其中

p_1, p_2, \dots, p_k 為相異質數， $\varphi(n)$ 為尤拉函數，而

$$N(n) = [(n+1)^3 - n^3] - 7 - 12[n-1 - \varphi(n)] - 6 \sum_{j=1}^k (-1)^{j+1} C_2^{\{1 \leq i_1 < \dots < i_j \leq k\}} \left(\frac{n}{p_{i_1} p_{i_2} \cdots p_{i_j}} - 1 \right) \quad (n \geq 2),$$

則格子直線數 a_n 滿足： $a_1 = 7$ ，且當 $n \geq 2$ 時， $a_n = 7 + \sum_{m=2}^n N(m)$ 。

【證明】 直接計算得知 $a_1 = 7$ 。當比較 $[0, n-1] \times [0, n-1] \times [0, n-1]$ 與 $[0, n] \times [0, n] \times [0, n]$ 格子正立方體中的所有格子點時，我們知道會多出 $(n+1)^3 - n^3$ 個格子點，因此，格子直線最多只會增加 $(n+1)^3 - n^3$ 條。但因為增加的格子直線有些會與之前格子直線重複，必須要扣除。首先，我們將多出的格子點分類成以下七種：

$(n, 0, 0), (n, n, 0), (n, n, n), (n, t, 0), (n, t, t), (n, n, t), (n, s, t)$ ，其中 $t, s < n$ 且 $t, s \in N$ ，

要注意的是各類型中 x, y, z 坐標均要考慮互換。現在就來討論當 $2 \leq n \leq 17$ 時，這七種情形必須要刪除的個數：

(1)當 $(n, 0, 0)$ 時有 3 個；(2)當 $(n, n, 0)$ 時有 3 個；(3)當 (n, n, n) 時有 1 個，共有 7 個格子點，故以上情形的格子點會通過前一層的直線，因此要扣除共 7 條直線。(4)當 $(n, t, 0)$ 時有 6 個；(5)當 (n, t, t) 時有 3 個；(6)當 (n, n, t) 時有 3 個等等，共有 12 個格子點，故以上情形的格子點會通過前一層的直線。特別地，當 $(n, t) \neq 1$ 時，每個連續變化的格子點可形成 $n-1-\varphi(n)$ 個條格子直線，因此，一共要扣除 $12[n-1-\varphi(n)]$ 條直線。

(7)當 (n, t, s) 時有 6 個，此種的格子點可形成格子直線數比較複雜，討論如下：

過格子點 (n, t, s) 的格子直線也必過格子點 $(\frac{n}{p_1}, \frac{t}{p_1}, \frac{s}{p_1})$ 或 $(\frac{n}{p_2}, \frac{t}{p_2}, \frac{s}{p_2})$ 或 \dots 或

$(\frac{n}{p_k}, \frac{t}{p_k}, \frac{s}{p_k})$ ，這顯然是與前某層格子正方體中的直線重複，然而會產生重複個數有 $C_2^{\frac{n-1}{p_1}}$

或 $C_2^{\frac{n-1}{p_2}}$ 或 \dots 或 $C_2^{\frac{n-1}{p_k}}$ ，因此這種情形的重複總條數為 $6(C_2^{\frac{n-1}{p_1}} + C_2^{\frac{n-1}{p_2}} + C_2^{\frac{n-1}{p_3}} + \dots + C_2^{\frac{n-1}{p_k}})$ 。

綜合(1)~(7)，因此，當 $2 \leq n \leq 17$ 時，格子點直線數 a_n 滿足遞迴關係：

$$a_n = a_{n-1} + [(n+1)^3 - n^3] - 7 - 12[n-1-\varphi(n)] - 6(C_2^{\frac{n-1}{p_1}} + C_2^{\frac{n-1}{p_2}} + C_2^{\frac{n-1}{p_3}} + \dots + C_2^{\frac{n-1}{p_k}}) \quad (2-2)$$

可得 $a_1 = 7, a_2 = 19, a_3 = 49, \dots, a_{17} = 4813$ ，當 $n \geq 18$ 時，透過取捨原理導出遞迴式

$$a_n = a_{n-1} + [(n+1)^3 - n^3] - 7 - 12[n-1-\varphi(n)] - 6 \sum_{j=1}^k (-1)^{j+1} C_2^{\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_j \leq k} \left(\frac{n}{p_{i_1} p_{i_2} \dots p_{i_j}} - 1 \right)} \quad (2-3)$$

(2-3) 式當 $2 \leq n \leq 17$ 時與 (2-2) 式一致，由此可得到一般式

$$a_n = a_1 + \sum_{m=2}^n N(m) = 7 + \sum_{m=2}^n N(m) \quad \blacksquare$$

三、探討形成格子圖形的充要條件

【性質 4】在坐標平面上形成格子多邊形的必要條件為 $\tan \theta$ 為有理數，其中 θ 為任一內角。

【證明】設 $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ 為格子多邊形的頂點如下圖 9，若給定 $i \in N, 1 \leq i \leq n$ ，移動任三頂

點 A_{i-1}, A_i, A_{i+1} 使 A_i 為原點 O ，並且內角 $\angle A_{i-1}A_iA_{i+1} = \angle A'_{i-1}OA'_{i+1} = \theta$ ，因為 A_{i-1}, A_i, A_{i+1} 都是格子點，所以 A'_{i-1}, A'_{i+1} 必為格子點，若 $\overline{OA'_{i+1}}$ 與 x 軸的夾角為 ϕ ，並且 $\tan(\phi + \theta) = \frac{q}{p}$

($p, q \in Z, (|p|, |q|) = 1$)，於是我們就有 $\tan \phi, \tan(\phi + \theta)$ 都為有理數，化簡

$$\frac{\tan \phi + \tan \theta}{1 - \tan \phi \tan \theta} = \frac{q}{p} \text{ 得 } \tan \theta = \frac{q - p \tan \phi}{p + q \tan \phi}, \text{ 因此 } \tan \theta \text{ 為有理數。} \quad \blacksquare$$

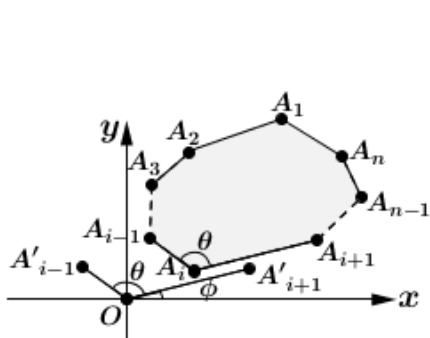


圖 9

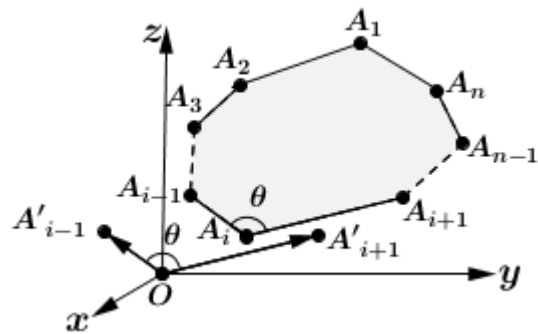


圖 10

【性質 5】在坐標空間中形成格子多邊形必要條件為對任一內角 θ ，其正切值 $\tan \theta = \sqrt{q}$ ，

其中 q 是有理數。

【證明】令 $\overline{u_1} = \overline{OA'_{i+1}}, \overline{u_2} = \overline{OA'_{i-1}}$ 如上圖 10，可由 $\cos \theta = \frac{\overline{u_1} \cdot \overline{u_2}}{\|\overline{u_1}\| \|\overline{u_2}\|}$ 得到 $\cos \theta = \sqrt{r}$ ，其中 r 是有

理數，於是 $\tan \theta = \frac{\sqrt{1-r}}{\sqrt{r}} = \sqrt{\frac{1-r}{r}}$ ，可令 $q = \frac{1-r}{r}$ ，則 $\tan \theta = \sqrt{q}$ ，其中 q 是有理數。 \blacksquare

坐標平面上或空間中，有多少種格子正多邊形呢？以下是我們獲得的結果。

【定理 4】坐標平面上，存在格子正 n 邊形的充要條件是 $n = 4$ 。

【證明】當 $n = 3$ 時，由 Pick 定理得到格子圖形的面積必為有理數，考慮邊長為 a 的正三角

形的面積為 $\frac{\sqrt{3}}{4} a^2$ ，面積卻是無理數，顯然就不成立，因此沒有格子正三角形。當 $n = 4$

時，很容易找到格子正方形是存在的。最後，證明當 $n \geq 5$ 時，都沒有格子正 n 邊形。假

設格子正 n 邊形存在，則一定有邊長最小的一個，其 n 個頂點記作 $A_1A_2A_3 \cdots A_n$ 。現在以 A_1 為中心，將 A_2 逆時鐘旋轉 90 度得到 B_1 如下圖 11，顯然 B_1 是格子點。同樣地，再以 A_2 為中心，將 A_3 逆時鐘旋轉 90 度得到 B_2 ，顯然 B_2 也是格子點，如此類推得到 $B_3, B_4, B_5, \dots, B_n$ 也都是格子點，且 n 邊形 $A_1A_2A_3 \cdots A_n$ 與 $B_1B_2B_3 \cdots B_n$ 是相似，因為 n 邊形 $A_1A_2A_3 \cdots A_n$ 是正 n 邊形，經過逆時鐘旋轉 90 度後，得到四邊形 $A_1B_1B_2A_2$ 、 $A_2B_2B_3A_3$ 、 $A_3B_3B_4A_4$ 、 \dots 均全等，使得 $\overline{B_1B_2} = \overline{B_2B_3} = \dots = \overline{B_nB_1}$ ， $\angle B_nB_1B_2 = \angle B_1B_2B_3 = \dots = \angle B_{n-1}B_nB_1$ ，所以多邊形 $B_1B_2B_3 \cdots B_n$ 也是正 n 邊形，因此就證出有 smaller 正 n 邊形而產生矛盾，因此只有 $n=4$ 時，存在格子正 n 邊形。 ■

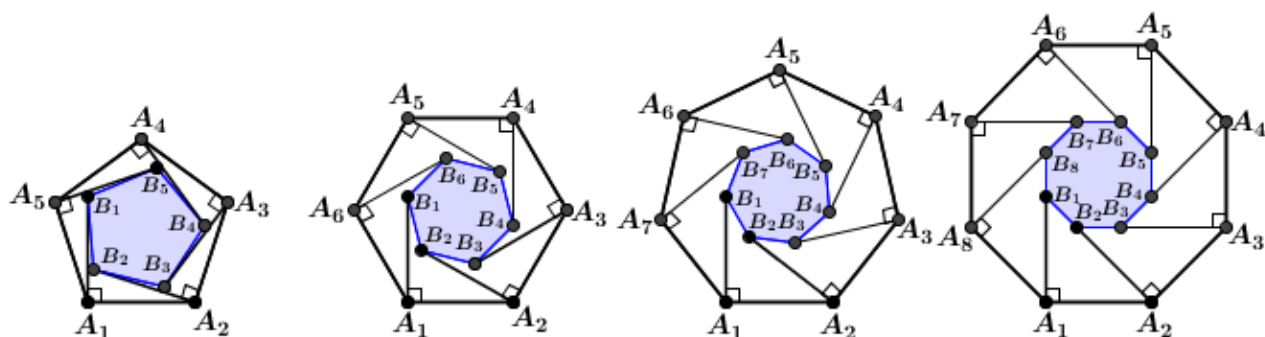


圖 11

【定理 5】 坐標空間中，存在格子正 n 邊形的充要條件是 $n=3, 4, 6$ 。

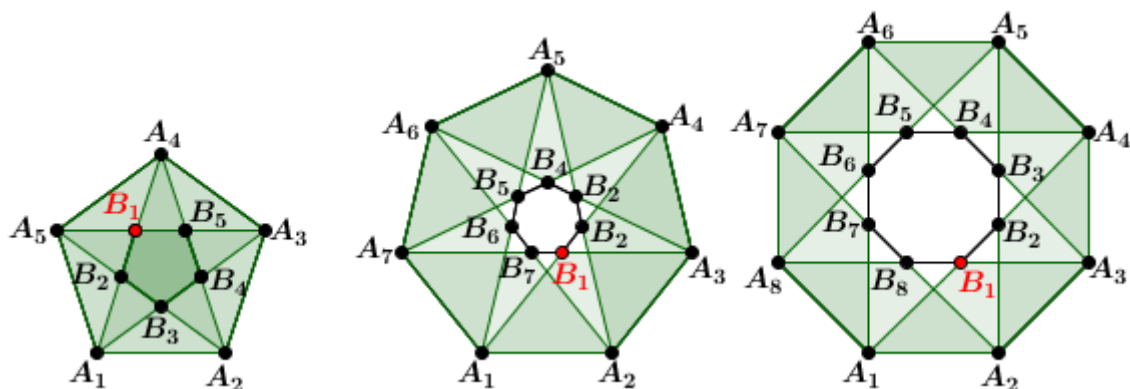


圖 12

【證明】 我們知道正立方體裡就存有格子正三角形、正方形、正六邊形，那麼現在就來證明當 $n \neq 3, 4, 6$ 的情形。設格子正 n 邊形存在，則一定有邊長最小的一個，其 n 頂點記作 $A_1A_2A_3 \cdots A_n$ 。如上圖 12 的五邊形、七邊形以及八邊形，都可以以 A_1, A_2, A_3 三點向內作菱

形就得到 B_1 ，同樣地繼續做菱形就得到 $B_2, B_3, B_4, \dots, B_n$ 。顯然 $B_2, B_3, B_4, \dots, B_n$ 也都是格子點，且 n 邊形 $A_1A_2A_3 \dots A_n$ 與 $B_1B_2B_3 \dots B_n$ 是相似，考慮 $n=5$ 時，因為五邊形 $B_1B_2B_3B_4B_5$ 內的菱形 $A_1A_2A_3B_1$ 與 $A_2A_1A_5B_5$ 或 $A_4A_3A_2B_2$ ，再加上正五邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ 的對稱性，得到 $\overline{B_1B_5} = \overline{B_1B_2}$ ，同樣方法也可得到 $\overline{B_1B_5} = \overline{B_2B_3} = \overline{B_3B_4} = \overline{B_4B_5}$ ，所以五邊形 $B_1B_2B_3B_4B_5$ 為正五邊形，同理可得當 $n \geq 6$ 時， n 邊形 $B_1B_2B_3 \dots B_n$ 也是正 n 邊形，因此就證出有更小的正 n 邊形產生矛盾，故得證。 ■

【推論】坐標空間中，格子柏拉圖多面體恰有三種：正四面體、正六面體、正八面體。

【證明】我們知道柏拉圖多面體有五種如下圖 13，由定理 5 得空間中不存在正五邊形，因為正十二面體是由正五邊形所組成，又正二十面體很容易找到正五邊形的五個頂點如下圖 13 中正五邊形 A_1, A_2, \dots, A_5 ，所以必不存在正十二面體與正二十面體，剩下的柏拉圖多面體三種是由正三角形與正方形所組成，是存在格子頂點的，因此格子柏拉圖多面體恰有三種。 ■

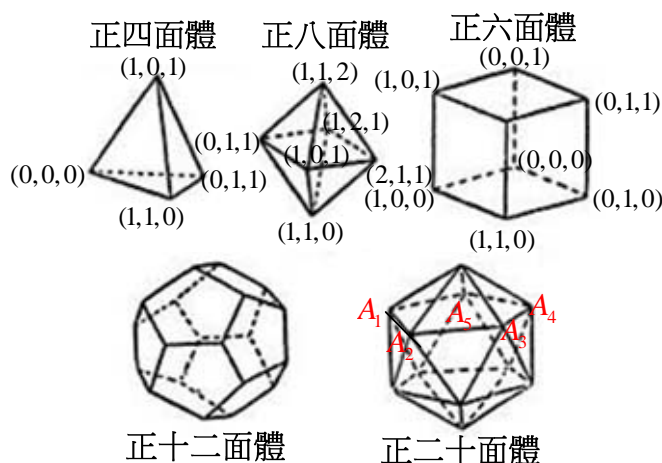
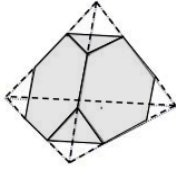
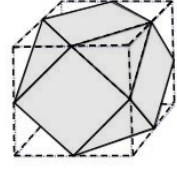
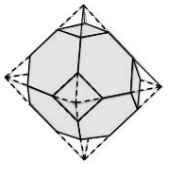
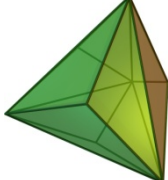
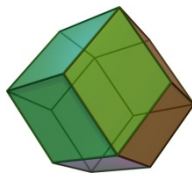
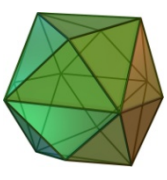


圖 13：柏拉圖多面體

值得一問：我們發現阿基米德多面體(共有 13 種，可參考資料[6])，且它們的對偶多面體(稱之卡塔蘭立體)是否也是格子圖形呢？經過我們檢驗結果發現各恰有三種如下表 3：

【說明】上述三種阿基米德多面體是由正四面體、正六面體與正八面體截角中點或截角三等分而得，由於正四面體、正六面體與正八面體均為格子圖形，因此三種均為格子圖形，而對偶多面體每個頂點對應格子阿基米德多面體的每個面的中心，顯然也是格子圖形。

表 3

阿基米德多面體	<p>截角四面體</p>  <p>對偶後多面體如下</p>	<p>截半立方體</p>  <p>對偶後多面體如下</p>	<p>截角八面體</p>  <p>對偶後多面體如下</p>
卡塔蘭立體	<p>三角化四面體</p> 	<p>菱形十二面體</p> 	<p>四角化六面體</p> 

四、探討五心與九點圓圓心皆為格子點的充要條件

為了方便討論格子三角形五心是否為格子點，就從畢氏三角形與 Heron 三角形著手，為了方便論證，將它們坐標化分成二種基本型：

(I) 畢氏三角形 (II) Heron 三角形 (即由兩畢氏三角形相拼或相剪而得)

其中三邊長為 a, b, c ，並且 $\alpha, \beta \in N, \gamma \in Z$ ，如下圖 14。

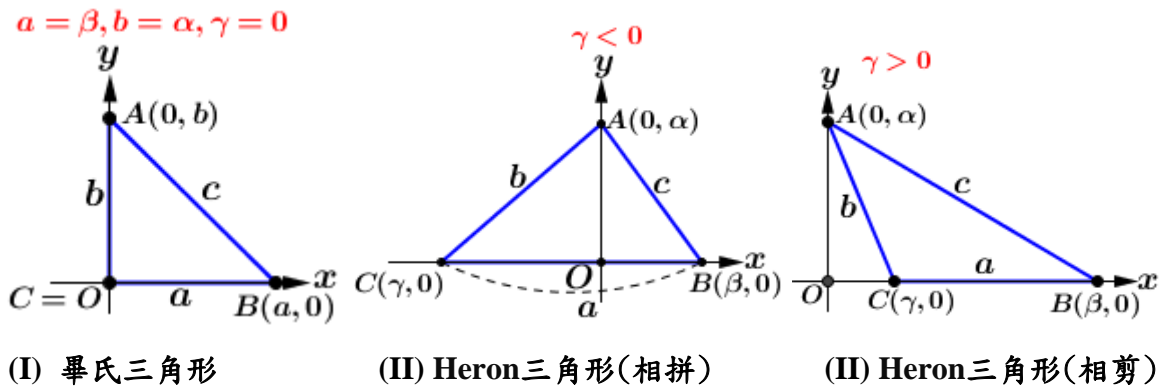


圖 14：基本型(I)與(II)

(一)特殊的格子三角形

在探討畢氏三角形時，是採用歐幾里得(Euclid)在《幾何原本》中補題所給的畢氏三元數必有形式： $m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2$ ($m, n \in N, m > n$)。

【性質 6】設 a, b, c 為畢氏三角形的三邊長，其中 $a = m^2 - n^2, b = 2mn, c = m^2 + n^2$

$(m, n \in \mathbb{N}, m > n)$ ，則存在 $m_1, n_1 \in \mathbb{R}, m_1 > n_1$ 使得 $a = 2m_1n_1, b = m_1^2 - n_1^2, c = m_1^2 + n_1^2$ 。

【證明】設二組畢氏三元數分別為 $m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2$ 與 $2m_1n_1, m_1^2 - n_1^2, m_1^2 + n_1^2$ 滿足

$$\begin{cases} 2m_1n_1 = m^2 - n^2 & \dots(1) \\ m_1^2 - n_1^2 = 2mn & \dots(2) \\ m_1^2 + n_1^2 = m^2 + n^2 & \dots(3) \end{cases}, \text{ 則 } \begin{cases} (1)+(3) \\ (3)-(1) \end{cases} \begin{cases} 2m^2 = (m_1 + n_1)^2 \\ 2n^2 = (m_1 - n_1)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = \frac{m_1 + n_1}{\sqrt{2}} \\ n = \frac{m_1 - n_1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

同樣地，也可求出 $m_1 = \frac{m+n}{\sqrt{2}}, n_1 = \frac{m-n}{\sqrt{2}}$ ，使得

$$a = 2m_1n_1 = m^2 - n^2, b = m_1^2 - n_1^2 = 2mn, c = m_1^2 + n_1^2 = m^2 + n^2 \quad \blacksquare$$

性質 6 給了我們一個漂亮的結果：從一組畢氏三元數 $(m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2)$ 就能轉換成另一組的畢氏三元數 $(2m_1n_1, m_1^2 - n_1^2, m_1^2 + n_1^2)$ 。

【注意】性質 6 的證明中取 $m_1 = \frac{m+n}{\sqrt{2}}, n_1 = \frac{m-n}{\sqrt{2}}$ ，都不是正整數，但應用於例子時，可以改

為 $m_1 = m+n, n_1 = m-n$ ，如考慮畢氏三元數 $(a, b, c) = (3, 4, 5)$ ，此時 $m = 2, n = 1$ ，就得

到 $m_1 = m+n = 3, n_1 = m-n = 1$ 。代入 $(m_1^2 - n_1^2, 2m_1n_1, m_1^2 + n_1^2) = (8, 6, 10)$ ，就得到另一

組畢氏三元數 $(8, 6, 10)$ 。

若考慮基本型(I)時，畢氏三元數會產生兩種如下圖 15，但由性質 6 得知它們都可以相互轉換而得，故論證畢氏三角形時，僅以 $a = m^2 - n^2, b = 2mn, c = m^2 + n^2$ ($m, n \in \mathbb{N}, m > n$) 如下圖 15(左)形式來論證。

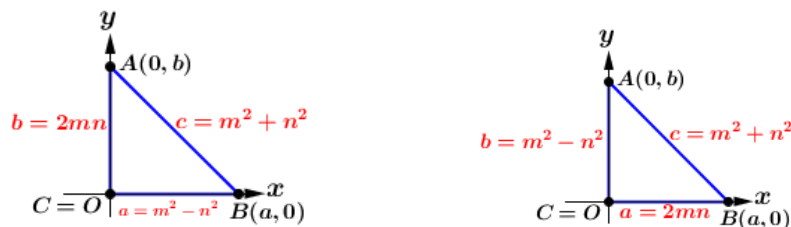


圖 15：畢氏三元數會產生兩種

接著討論基本型(II)時，畢氏三元數會產生四種如下表 4，但由性質 6 得知它們都可以相互轉換而得，因此論證 Heron 三角形時，僅考慮一種如下表 4 中紅色的一列，即是 Heron 三角

形為兩畢氏三角形有共同高為 $2m_1n_1s = 2m_2n_2t$ ，及底邊為 $(m_1^2 - n_1^2)s$ 與 $(m_2^2 - n_2^2)t$ 的形式來論證，如下圖 16，其中 m_1, m_2, n_1, n_2, s, t 為正整數且 $m_1 > n_1, m_2 > n_2$ 。

表 4

Heron三角形	\overline{OA}	\overline{OB}	\overline{OC}
相拼或相剪	$2m_1n_1s = 2m_2n_2t$	$(m_1^2 - n_1^2)s$	$(m_2^2 - n_2^2)t$
	$(m_1^2 - n_1^2)s = (m_2^2 - n_2^2)t$	$2m_1n_1s$	$2m_2n_2t$
	$(m_1^2 - n_1^2)s = 2m_2n_2t$	$2m_1n_1s$	$(m_2^2 - n_2^2)t$
	$2m_1n_1s = (m_2^2 - n_2^2)t$	$(m_1^2 - n_1^2)s$	$2m_2n_2t$

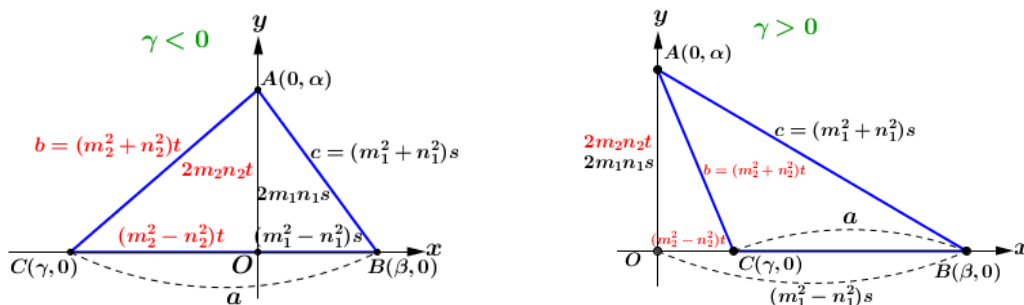


圖 16：(左) 相拼的Heron三角形(當 $\gamma < 0$ 時) (右) 相剪的Heron三角形(當 $\gamma > 0$ 時)

【註】為了有更完備的性質，規定 $(m_1, n_1) = 1, (m_2, n_2) = 1$ ，如此取出的 s 與 t 是最小值。

現在將基本型 $\triangle ABC$ 以原點為中心逆時鐘旋轉 ϕ 得到 $\triangle A'B'C'$ 來討論，為了方便，稱為旋轉型如下圖 17。發現除了原點外，另兩頂點不一定為格子點，那麼還要甚麼條件呢？

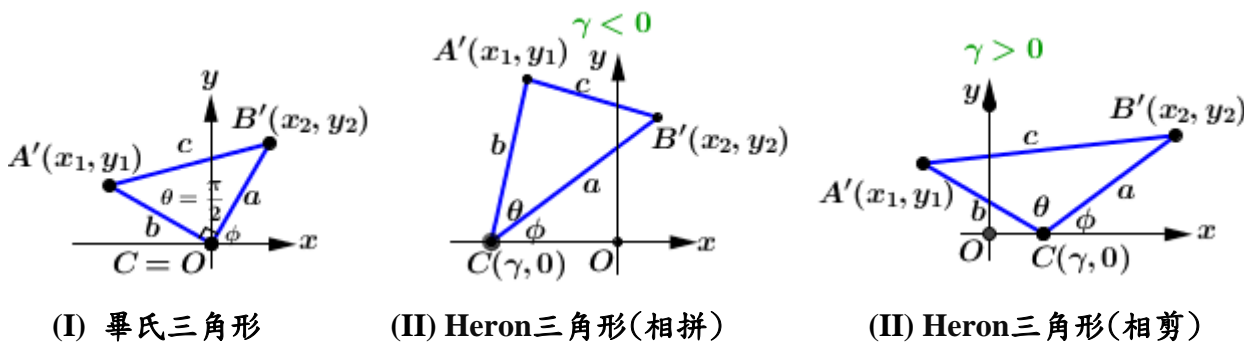


圖 17：旋轉型(I)與(II)

【定理 6】給定 $\triangle ABC$ 如上圖 17，其中 $A(0, \alpha), B(\beta, 0), C(\gamma, 0)$ ，若 $\tan \phi = \frac{q}{p}$ 為有理數，其中

$\gcd(p, q) = 1$ ，則 $\triangle A'B'C'$ 為格子三角形的充分條件是旋轉 ϕ 後，再對三邊長伸縮變換，

其伸縮倍率皆為 $\sqrt{p^2 + q^2}$ 。

【證明】(1) 如上圖 17(I)，若 $A'(x_1, y_1), B'(x_2, y_2)$ ，則經過計算得到 A', B' 坐標分別為

$$(x_1, y_1) = \left(\frac{-bq}{\sqrt{p^2 + q^2}}, \frac{bp}{\sqrt{p^2 + q^2}} \right), (x_2, y_2) = \left(\frac{ap}{\sqrt{p^2 + q^2}}, \frac{aq}{\sqrt{p^2 + q^2}} \right)$$

因此可將邊長伸縮 $\sqrt{p^2 + q^2}$ 倍，即可得到 A', B' 皆為格子點。

(2) 如上圖 17(II)，則經過計算得到 A', B' 坐標分別為

$$(x_1, y_1) = \left(\frac{b(\gamma p - \alpha q)}{\sqrt{\alpha^2 + \gamma^2} \sqrt{p^2 + q^2}}, \frac{b(\alpha p - \gamma q)}{\sqrt{\alpha^2 + \gamma^2} \sqrt{p^2 + q^2}} \right), (x_2, y_2) = \left(\frac{ap}{\sqrt{p^2 + q^2}}, \frac{aq}{\sqrt{p^2 + q^2}} \right)$$

由於 b 為 $\sqrt{\alpha^2 + \gamma^2}$ 的整數倍，因此可將邊長伸縮 $\sqrt{p^2 + q^2}$ 倍，即可得到 A', B' 皆為格子點。 ■

(二) 內心與旁心皆為格子點

【定理 7】設 a, b, c 為格子畢氏三角形的三邊長，則其內心與旁心皆為格子點。

【證明】(1) 先證明基本型(I)，由基礎定理求得三角形內心 I 與旁心 I_A, I_B, I_C 坐標分別為

$$I \left(\frac{ab}{a+b+c}, \frac{ab}{a+b+c} \right), I_A \left(\frac{ab}{-a+b+c}, \frac{-ab}{-a+b+c} \right), I_B \left(\frac{-ab}{a-b+c}, \frac{ab}{a-b+c} \right), I_C \left(\frac{ab}{a+b-c}, \frac{ab}{a+b-c} \right)$$

令 $a = (m^2 - n^2)s, b = 2mns, c = (m^2 + n^2)s$ ($m, n \in \mathbb{N}, m > n, s \in \mathbb{N}$)，則可得內心坐標

$I(n(m-n)s, n(m-n)s)$ ，以及傍心坐標為 $I_A(m(m-n)s, -m(m-n)s)$ 、 $I_B(-n(m+n)s, n(m+n)s)$ 、

$I_C(m(m+n)s, m(m+n)s)$ 。又因為 $m, n \in \mathbb{N}$ ，因此，內心與旁心皆為格子點。

(2) 接著證明旋轉型(I)，由定理 6 得到旋轉 ϕ 後，再對三邊長伸縮 $\sqrt{p^2 + q^2}$ 倍，三頂點皆

為格子點，所以只要再證明旋轉 ϕ 後的內心 $I'(x', y')$ 與旁心 I'_A, I'_B, I'_C 皆為格子點。

令存在旋轉矩陣 $M = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix}$ 與伸縮矩陣 $N = \begin{bmatrix} \sqrt{p^2 + q^2} & 0 \\ 0 & \sqrt{p^2 + q^2} \end{bmatrix}$ ，則

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = MN \begin{bmatrix} n(m-n)s \\ n(m-n)s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{p^2+q^2} \cdot n(m-n)(\cos\phi - \sin\phi)s \\ \sqrt{p^2+q^2} \cdot n(m-n)(\cos\phi + \sin\phi)s \end{bmatrix}$$

所以內心 I' 坐標為 $(\sqrt{p^2+q^2} \cdot n(m-n)(\cos\phi - \sin\phi)s, \sqrt{p^2+q^2} \cdot n(m-n)(\cos\phi + \sin\phi)s)$ 。

同理推導旁心 I'_A, I'_B, I'_C 坐標分別為

$$I'_A(m(m-n)(\cos\phi - \sin\phi)\sqrt{p^2+q^2}s, -m(m-n)(\cos\phi + \sin\phi)\sqrt{p^2+q^2}s)$$

$$I'_B(-n(m+n)(\cos\phi - \sin\phi)\sqrt{p^2+q^2}s, n(m+n)(\cos\phi + \sin\phi)\sqrt{p^2+q^2}s)$$

$$I'_C(m(m+n)(\cos\phi - \sin\phi)\sqrt{p^2+q^2}s, m(m+n)(\cos\phi + \sin\phi)\sqrt{p^2+q^2}s)$$

因為 $\sin\phi = \frac{q}{\sqrt{p^2+q^2}}, \cos\phi = \frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}}$ ，因此，內心 I' 與旁心 I'_A, I'_B, I'_C 皆為格子點。 ■

關於格子 Heron 三角形的內心與旁心，分類討論如下：

【定理 8】 給定格子 Heron 三角形 $\triangle ABC$ 中**基本型(II)**，其中 $A(0, \alpha), B(\beta, 0), C(\gamma, 0)$ ，且

m_1, n_1, m_2, n_2 如 P.15 圖 16，若 $\gcd(m_1n_1, m_2n_2) \mid \gcd(\alpha, \beta, \gamma)$ ，則其內心與旁心皆為格子點。

【證明】 考慮**基本型(II)**，由**基礎定理**求得三角形內心 I 與旁心 I_A, I_B, I_C 坐標分別為

$$I\left(\frac{b\beta+c\gamma}{a+b+c}, \frac{a\alpha}{a+b+c}\right), I_A\left(\frac{b\beta+c\gamma}{-a+b+c}, \frac{-a\alpha}{-a+b+c}\right), I_B\left(\frac{-b\beta+c\gamma}{a-b+c}, \frac{a\alpha}{a-b+c}\right), I_C\left(\frac{b\beta-c\gamma}{a+b-c}, \frac{a\alpha}{a+b-c}\right)$$

(1)先證明 Heron 三角形**基本型(II)**相拼的情形，此時因 $\gamma < 0$ ，所以代入時要加負號。

令 $\alpha = 2m_1n_1s = 2m_2n_2t$ ， $\beta = (m_1^2 - n_1^2)s$ ， $\gamma = (m_2^2 - n_2^2)t$ ($m_1, m_2, n_1, n_2, s, t \in N$)，則內心坐標為

$$I\left(\frac{\beta \cdot (m_2^2 + n_2^2)t + \gamma(m_1^2 + n_1^2)s}{2m_1^2s + 2m_2^2t}, \frac{\alpha \cdot [(m_1^2 - n_1^2)s - (m_2^2 - n_2^2)t]}{2m_1^2s + 2m_2^2t}\right)$$

化簡中 $s = \frac{m_2n_2}{m_1n_1}t$ 代入

其中內心的 x 坐標為 $\frac{sn_1(m_1n_2 - m_2n_1)}{m_2}$ ， y 坐標為 $\frac{sn_1(m_1m_2 - n_1n_2)}{m_2}$ 。

所以得到 $I\left(\frac{sn_1(m_1n_2 - m_2n_1)}{m_2}, \frac{sn_1(m_1m_2 - n_1n_2)}{m_2}\right)$ 。

同樣地，化簡旁心 I_A 坐標為 $I_A\left(\frac{\beta \cdot (m_2^2 + n_2^2)t - \gamma(m_1^2 + n_1^2)s}{2n_1^2s + 2n_2^2t}, \frac{-\alpha \cdot [(m_1^2 - n_1^2)s + (m_2^2 - n_2^2)t]}{2n_1^2s + 2n_2^2t}\right)$ ，

化簡中 $s = \frac{m_2 n_2}{m_1 n_1} t$ 代入，其中傍心 I_A 的 x 坐標為 $\frac{sm_1(m_1 n_2 - n_1 m_2)}{n_2}$ 、 y 坐標為

$$\frac{-sm_1(m_1 m_2 - n_2 n_1)}{n_2}。所以得到傍心 I_A 的坐標為 $I_A \left(\frac{sm_1(m_1 n_2 - n_1 m_2)}{n_2}, \frac{-sm_1(m_1 m_2 - n_2 n_1)}{n_2} \right)。$$$

同樣方法化簡傍心 I_B, I_C 坐標為

$$I_B \left(\frac{-sn_1(m_1 m_2 + n_1 n_2)}{n_2}, \frac{sn_1(m_1 n_2 + m_2 n_1)}{n_2} \right), I_C \left(\frac{sm_1(m_1 m_2 + n_1 n_2)}{m_2}, \frac{sm_1(m_1 n_2 + m_2 n_1)}{m_2} \right)$$

綜合以上解析出的坐標，若要皆為格子點，則三邊長要伸縮 $m_2 n_2$ 倍，即 $m_2 n_2 | \gcd(\alpha, \beta, \gamma)$ 時，

則內心與旁心坐標皆為格子點。

但是化簡中若改成 $t = \frac{m_1 n_1}{m_2 n_2} s$ 代入，同樣可得到內心 I 與旁心 I_A, I_B, I_C 坐標分別為

$$I \left(\frac{tn_2(m_1 n_2 - m_2 n_1)}{m_1}, \frac{sn_2(m_1 m_2 - n_1 n_2)}{m_1} \right), I_A \left(\frac{tm_2(m_1 n_2 - n_1 m_2)}{n_1}, \frac{-tm_2(m_1 m_2 - n_2 n_1)}{n_1} \right)$$

$$I_B \left(\frac{-tm_2(m_1 m_2 + n_1 n_2)}{m_1}, \frac{tm_2(m_1 n_2 + m_2 n_1)}{m_1} \right), I_C \left(\frac{tn_2(m_1 m_2 + n_1 n_2)}{n_1}, \frac{tn_2(m_1 n_2 + m_2 n_1)}{n_1} \right)$$

上面坐標若要皆為格子點，則三邊長要伸縮 $m_1 n_1$ 倍，即 $m_1 n_1 | \gcd(\alpha, \beta, \gamma)$ ，因此滿足格子點

的充分條件就是 $m_1 m_2 n_1 n_2 | \gcd(\alpha, \beta, \gamma)$ ，但這伸縮倍率並不是最小，因為 $\gcd(m_1, n_1) = 1$,

$\gcd(m_2, n_2) = 1$ ，所以取邊長伸縮最小倍率為 $\gcd(m_1 n_1, m_2 n_2) | \gcd(\alpha, \beta, \gamma)$ ，使得皆為格子點。

(2)對於Heron三角形**基本型(II)相剪**的情形，所以同樣可求得內心與旁心坐標為

$$I \left(\frac{sn_1(m_1 m_2 - n_1 n_2)}{n_2}, \frac{sn_1(m_1 n_2 - m_2 n_1)}{n_2} \right), I_A \left(\frac{sm_1(m_1 m_2 - n_1 n_2)}{m_2}, \frac{-sm_1(m_1 n_2 - m_2 n_1)}{m_2} \right)$$

$$I_B \left(\frac{-sn_1(m_1 n_2 + n_1 m_2)}{m_2}, \frac{sn_1(m_1 m_2 + n_1 n_2)}{m_2} \right), I_C \left(\frac{sm_1(m_1 n_2 + n_1 m_2)}{n_2}, \frac{sm_1(m_1 m_2 + n_1 n_2)}{n_2} \right)$$

或者

$$I \left(\frac{tm_2(m_1 m_2 - n_1 n_2)}{m_1}, \frac{tm_2(m_1 n_2 - m_2 n_1)}{m_1} \right), I_A \left(\frac{tn_2(m_1 m_2 - n_1 n_2)}{n_1}, \frac{-tn_2(m_1 n_2 - m_2 n_1)}{n_1} \right)$$

$$I_B \left(\frac{-tn_2(m_1n_2 + n_1m_2)}{m_1}, \frac{tn_2(m_1m_2 + n_1n_2)}{m_1} \right), I_C \left(\frac{tm_2(m_1n_2 + n_1m_2)}{n_1}, \frac{tm_2(m_1m_2 + n_1n_2)}{n_1} \right)$$

同樣地，上面坐標若要滿足格子點的充分條件，就是取邊長伸縮最小倍率為

$\gcd(m_1n_1, m_2n_2) | \gcd(\alpha, \beta, \gamma)$ ，使得皆為格子點。 ■

【定理 9】 給定 $\triangle ABC$ 為格子 Heron 三角形中旋轉型(II)，其中 m_1, n_1, m_2, n_2 如 P.15 圖 16，且

$\triangle ABC$ 旋轉 ϕ 後再對三邊長伸縮得到格子三角形 $\triangle A''B''C''$ ，若 $\triangle A''B''C''$ 以 C'' 為伸縮中心，邊長 $\overline{C''A''}, \overline{C''B''}$ 伸縮 $\gcd(m_1n_1, m_2n_2)$ 倍後得 $\triangle A'''B'''C'''$ ，則 $\triangle A'''B'''C'''$ 的內心與旁心皆為格子點。

【證明】 當 Heron 三角形 $\triangle ABC$ 旋轉 ϕ 後，三頂點 A, B, C 不全為格子點，由定理 6 得到 $\triangle ABC$ 旋轉 ϕ 後，再對邊長伸縮 $\sqrt{(p^2 + q^2)}$ 倍，如此 $\triangle A''B''C''$ 的三頂點 A'', B'', C'' 皆為格子點，再由定理 8 將 $\triangle A''B''C''$ 以 C'' 為伸縮中心，邊長 $\overline{C''A''}, \overline{C''B''}$ 伸縮 $\gcd(m_1n_1, m_2n_2)$ 倍後得 $\triangle A'''B'''C'''$ ，因此 $\triangle A'''B'''C'''$ 的內心與旁心皆為格子點。 ■

由以上論述得到三邊長為有理數可使內心與旁心皆為格子點，但三邊長為無理數，是否也能成立呢？事實上，只要三邊長為整數比證明如下：

【定理 10】 任何格子三角形中，事實上若三邊長比為整數比，則此三角形經過伸縮變換後，可使得新三角形的內心與旁心皆為格子點。

【證明】 設格子三角形三頂點為 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$ 且三邊長為 a, b, c ，則由基礎定理得到內心坐標為

$$\left(\frac{x_1 \sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2} + x_2 \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2} + x_3 \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}}{\sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2} + \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2} + \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}}, \right. \\ \left. \frac{y_1 \sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2} + y_2 \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2} + y_3 \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}}{\sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2} + \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2} + \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}} \right)$$

$$\left(\frac{x_1 \sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2} + x_2 \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2} + x_3 \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}}{\sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2} + \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2} + \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}}, \right. \\ \left. \frac{y_1 \sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2} + y_2 \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2} + y_3 \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}}{\sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2} + \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2} + \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}} \right)$$

令內心 $I(u, v)$ 為格子點，則有

$$\begin{cases} (x_1 - u)\sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2} + (x_2 - u)\sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2} + (x_3 - u)\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = 0 \\ (y_1 - v)\sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2} + (y_2 - v)\sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2} + (y_3 - v)\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = 0 \end{cases} (*)$$

現在分三種情形討論：

(1) 若 $\sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2}, \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2}, \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ 皆為不同類方根，則由(*)式得 $u = x_1 = x_2 = x_3, v = y_1 = y_2 = y_3$ ，如此三頂點代表同一點，產生矛盾。

(2) 若 $\sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2}, \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2}$ 為同類方根，但 $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ 不同類方根，則由(*)式必得 $x_3 = u, y_3 = v$ ，同時可令

$$\sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2} = \delta\sqrt{\omega}, \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2} = \delta'\sqrt{\omega}, \text{ 其中 } \delta, \delta' \in N, \text{ 且 } \omega \text{ 為不是}$$

大於 1 的完全平方數，則(*)式化簡成

$$\begin{cases} (x_1 - u) \cdot \delta\sqrt{\omega} + (x_2 - u) \cdot \delta'\sqrt{\omega} = 0 \\ (y_1 - v) \cdot \delta\sqrt{\omega} + (y_2 - v) \cdot \delta'\sqrt{\omega} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x_1 - u) \cdot \delta + (x_2 - u) \cdot \delta' = 0 \\ (y_1 - v) \cdot \delta + (y_2 - v) \cdot \delta' = 0 \end{cases}$$

我們得到 $u = \frac{x_1\delta + x_2\delta'}{\delta + \delta'}, v = \frac{y_1\delta + y_2\delta'}{\delta + \delta'}$ ，如此三點 A, B, I 會共線，產生矛盾。不失一般

性，只要是任二個同類方根但另一個不同類方根的情形都會產生矛盾。同樣方法也可證明若旁心 I_A, I_B, I_C 為格子點時，同樣地(1)與(2)會產生矛盾。

(3) 若 $\sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2}, \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2}, \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ 皆為同類方根，

即為三邊長比為整數比，由**定理 9**得格子三角形經過伸縮變換後，就可使得新三角形的內心與旁心皆為格子點。 ■

(三)五心與九點圓圓心皆為格子點

我們已證明出三角形內心與旁心皆為格子點條件是**三邊長為整數比**，那麼若加上重心、垂心、外心與九點圓圓心皆為格子點的條件為何呢？底下就來討論與證明。

【定理 11】若格子三角形的九點圓圓心為格子點，則三角形的外心與垂心皆為格子點。

【證明】由**定義 2**可知九點圓圓心 N 是垂心與外心所連線段中點，先考慮 Heron 三角形 ΔABC

如 P.13 圖 14，由**定義與預備知識**得到 $N\left(\frac{\beta+\gamma}{4}, \frac{\alpha}{4} - \frac{\beta\gamma}{4\alpha}\right)$ 、 $O\left(\frac{\beta+\gamma}{2}, \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta\gamma}{2\alpha}\right)$ 與

$H\left(0, -\frac{\beta\gamma}{\alpha}\right)$ ，若九點圓圓心 $N(u, v)$ 為格子點，則 $O(2u, \alpha - 2v)$ 與 $H(0, 4v - \alpha)$ 很顯然皆為格子點。接著證明旋轉 ϕ 如 P.15 中圖 17 的情形，若 $\tan \phi = \frac{q}{p}$ ($q, p \in \mathbb{Z}$)， ΔABC 旋轉

ϕ 後，再對三邊長伸縮 $\sqrt{(p^2 + q^2)}$ 倍，則由矩陣變換得

$$M' = \begin{bmatrix} \sqrt{(p^2 + q^2)} & 0 \\ 0 & \sqrt{(p^2 + q^2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & -q \\ q & p \end{bmatrix}$$

如此三角形三頂點皆格子點。同樣地 $N\left(\frac{\beta+\gamma}{4}, \frac{\alpha}{4} - \frac{\beta\gamma}{4\alpha}\right)$ 、 $O\left(\frac{\beta+\gamma}{2}, \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta\gamma}{2\alpha}\right)$ 與 $H\left(0, -\frac{\beta\gamma}{\alpha}\right)$ 都會經過變換矩陣 M' 得到新坐標為

$$H'\left(\frac{\beta\gamma q}{\alpha}, -\frac{\beta\gamma p}{\alpha}\right) O'\left(\frac{\beta p + \gamma p - \alpha q}{2} - \frac{\beta\gamma q}{2\alpha}, \frac{\beta q + \gamma q}{2} + \frac{\alpha p}{2} + \frac{\beta\gamma p}{2\alpha}\right)$$

$$N'\left(\frac{\beta p + \gamma p - \alpha q}{4} + \frac{\beta\gamma q}{4\alpha}, \frac{\beta q + \gamma q}{4} + \frac{\alpha p}{4} - \frac{\beta\gamma p}{4\alpha}\right)$$

若九點圓圓心 $N(u', v')$ 為格子點，則 $O(-2u' + \beta p + \gamma p - \alpha q, -2v' + \beta q + \gamma q + \alpha p)$ 與

$H(4u' - \beta p - \gamma p + \alpha q, 4v' - \beta q - \gamma q - \alpha p)$ 顯然皆為格子點，得證。 ■

【定理 12】若格子畢氏三角形的三邊長 a, b, c ，滿足 $a^2 + b^2 = c^2$ 且 $12 \mid \gcd(a, b)$ ，則此三角形五心與九點圓圓心皆為格子點。

【證明】可設三頂點 $C(0, 0), A(0, b), B(a, 0)$ 的畢氏三角形，則由**定理 9**得到不論**基本型(I)**或**旋轉型(I)**中內心與傍心皆為格子點，再由重心坐標得到若 $3 \mid a$ 且 $3 \mid b$ 時，重心為格子點。剩下證明垂心、外心與九點圓圓心皆為格子點，由**定理 11**只要再證明九點圓圓心為格子點就得證。

由定義與預備知識已得到基本型(I)的九點圓圓心 $N\left(\frac{a}{4}, \frac{b}{4}\right)$ ，與慮旋轉型(I)，經過變換矩

陣 $M = \begin{bmatrix} \sqrt{p^2+q^2} & 0 \\ 0 & \sqrt{p^2+q^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & -q \\ q & p \end{bmatrix}$ ，就得到九點圓圓心

$N\left(\frac{ap-bq}{4}, \frac{aq+bp}{4}\right)$ ，由上坐標可得到不論哪一種情形，垂心、外心與九點圓圓心為格子

點的條件皆為 $4|a$ 且 $4|b$ 。因此若 $12|\gcd(a,b)$ ，即得到五心與九點圓圓心皆為格子點。 ■

【定理 13】 設 $\triangle ABC$ 為格子Heron三角形，其中 $A(0, \alpha), B(\beta, 0), C(\gamma, 0)$ ，且 m_1, n_1, m_2, n_2 如P.15

圖 16。若 $12|\alpha, 12|\beta+\gamma, 4\alpha|\beta\gamma$ ，且滿足 $\gcd(m_1n_1, m_2n_2)|\gcd(\alpha, \beta, \gamma)$ ，則此三角形五心

與九點圓圓心皆為格子點。

【證明】由定義與預備知識得到基本型(II)或旋轉型(II)， $\triangle ABC$ 三邊伸縮 $\gcd(m_1n_1, m_2n_2)$ 倍後，

內心與傍心皆為格子點，再由重心坐標得到若 $3|\alpha$ 且 $3|\beta+\gamma$ 時，重心為格子點。剩下

證明垂心、外心與九點圓圓心皆為格子點，由定理 11 只要再證明九點圓圓心為格子點

就得證。由定義與預備知識已得到基本型(II)的九點圓圓心 $N\left(\frac{\beta+\gamma}{4}, \frac{\alpha}{4} - \frac{\beta\gamma}{4\alpha}\right)$ ，與旋轉

型(II)經過矩陣變換

$$M' = \begin{bmatrix} \sqrt{(p^2+q^2)} & 0 \\ 0 & \sqrt{(p^2+q^2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & -q \\ q & p \end{bmatrix}$$

於是九點圓圓心 $N\left(\frac{\beta p + \gamma p}{4} - \frac{\alpha q}{4} + \frac{\beta\gamma q}{4\alpha}, \frac{\beta q + \gamma q}{4} + \frac{\alpha p}{4} - \frac{\beta\gamma p}{4\alpha}\right)$ ，由上坐標可得到不論哪一

種情形，只要 $12|\alpha, 12|\beta+\gamma, 4\alpha|\beta\gamma$ ，且 $\gcd(m_1n_1, m_2n_2)|\gcd(\alpha, \beta, \gamma)$ ，則九點圓圓心必為

格子點。於是，五心與九點圓圓心皆為格子點。 ■

【定理 14】 若格子三角形的三邊長比為整數比，則此三角形經過伸縮變換後，可得新三角形

的五心與九點圓圓心皆為格子點。

【證明】 當三邊長皆為整數時，如定理 12~13 就得證。再推至無理數邊但三邊是同類方根，

即三邊長比為整數比，由定理 10 即得到若經過伸縮變換後，仍使得新三角形的五心與九

點圓圓心皆為格子點。 ■

五、探討五心皆為格子點應用

首先舉兩組畢氏三元數(9,12,15)與(5,12,13)相拼與相剪的 Heron三角形為例說明。它相拼就得到邊長為13,14,15的連續整數之Heron三角形如下圖 18 (左)，且相剪就得到4,13,15的Heron三角形如下圖 18 (右)。

【說明】第一步驟： $\triangle ABC$ 旋轉 $\phi = \frac{\pi}{4}$ 後得 $\triangle A'B'C'$ ， A', B' 不為格子點如下圖 18。

第二步驟：再對三邊長伸縮 $13\sqrt{2}$ 倍，其中 $\tan \frac{\pi}{4} = \frac{1}{1} = \frac{q}{p}$ ，若 $A''(x, y), B''(x', y')$ ，存在旋轉矩

$$\text{陣 } M = \begin{bmatrix} \cos \frac{\pi}{4} & -\sin \frac{\pi}{4} \\ \sin \frac{\pi}{4} & \cos \frac{\pi}{4} \end{bmatrix} \text{ 與伸縮矩陣 } N = \begin{bmatrix} 13\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 13\sqrt{2} \end{bmatrix}, \text{ 則}$$

$$\text{(相拼)} \begin{bmatrix} x+5 \\ y \end{bmatrix} = MN \begin{bmatrix} 14 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 182 \\ 182 \end{bmatrix} \Rightarrow A''(177, 182); \begin{bmatrix} x'+5 \\ y' \end{bmatrix} = MN \begin{bmatrix} 5 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -91 \\ 221 \end{bmatrix} \Rightarrow B''(-96, 221)$$

$$\text{(相剪)} \begin{bmatrix} x-5 \\ y \end{bmatrix} = MN \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 52 \\ 52 \end{bmatrix} \Rightarrow A''(57, 52); \begin{bmatrix} x-5 \\ y \end{bmatrix} = MN \begin{bmatrix} -5 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -221 \\ 91 \end{bmatrix} \Rightarrow B''(-226, 91)$$

得到頂點 A'', B'' 皆為格子點。

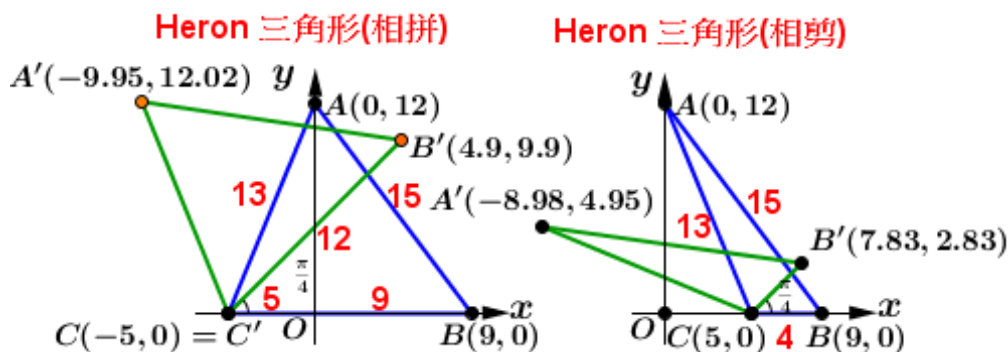


圖 18

第三步驟：再以 C'' 為伸縮中心，邊長 $\overline{C''A''}, \overline{C''B''}$ 伸縮 $\gcd(m_1n_1, m_2n_2) = 2$ 倍得 $\triangle A'''B'''C'''$ 的

內心 I 與旁心 I_A, I_B, I_C 坐標分別為

(1) (相拼) $I(21, 130)$, $I_A(255, -52)$, $I_B(-196, 91)$, $I_C(86, 455)$ 皆為格子點。

(2) (相剪) $I(-8, 65)$, $I_A(-203, 1040)$, $I_B(-515, -104)$, $I_C(135, 26)$ 皆為格子點。

第四步驟：再考慮 $12|\alpha, 12|\beta+\gamma, 4\alpha|\beta\gamma$ ，因此 $\alpha=12, \beta=9, \gamma=-5$ 代入條件得到最小倍率為 48 倍，換言之，三邊長要再伸縮 48 倍後，就得到新三角形 $\triangle A'B'C'$ 的五心與九點圓圓心

皆為格子點如下圖 19。

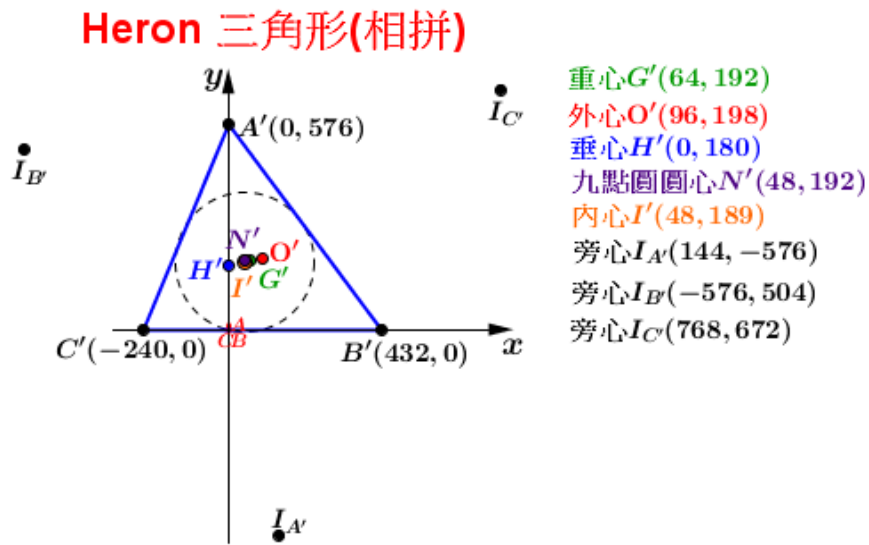


圖 19

其次，考慮連續整數邊三角形 $\triangle ABC$ ，若其面積為正整數，則

- (1) 存在一個高把 $\triangle ABC$ 分成的兩個畢氏三角形，同時高把底邊分成長度相差4的兩線段。
- (2) 此三角形的三邊長可以表成 $x + y - 1, x + y, x + y + 1$ ，其中 $x = (2 + \sqrt{3})^{n+1}, y = (2 - \sqrt{3})^{n+1}$ ， n 為非負整數。

證明如下：

- (1) 設 $\triangle ABC$ 三邊長為 a, b, c 如下圖 20，則其面積公式為 $\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ ，其中

$$s = \frac{a+b+c}{2}。又三邊為連續整數，可令三邊為 $\overline{AB} = a-1, \overline{BC} = a, \overline{AC} = a+1$ ，其中 $s = \frac{3a}{2}$ 。$$

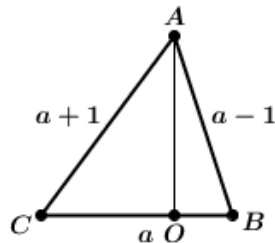


圖 20

$$\text{代入面積公式得 } \Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{\frac{3a}{2} \left(\frac{a}{2}\right) \left(\frac{a+2}{2}\right) \left(\frac{a-2}{2}\right)} = \frac{a}{4} \sqrt{3(a+2)(a-2)}。 \quad (5-1)$$

因為面積 Δ 為正整數，所以 a 為偶數，令 $a = 2u$ ($u \in \mathbb{N}$) 代入 (5-1) 式，化簡為

$$\Delta = u\sqrt{3(u+1)(u-1)} = u\sqrt{3(u^2-1)} \quad (5-2)$$

而高 $\overline{AO} = \frac{2s}{BC} = \frac{2u\sqrt{3(u^2-1)}}{2u} = \sqrt{3(u^2-1)}$ 為有理數，又

$$\overline{BO} = \sqrt{AB^2 - \overline{AO}^2} = u-2, \quad \overline{CO} = \sqrt{AC^2 - \overline{AO}^2} = u+2。$$

(2) 因為面積 Δ 為正整數，若令 $\sqrt{3(u^2-1)} = v$ ，則由 (5-2) 式得 $v = \frac{\Delta}{u}$ 是一有理數。但因 u 為

正整數，此有理數 $v = \sqrt{3(u^2-1)}$ 必為整數。因此， u, v 都是正整數且滿足不定方程式

$u^2 - 3v^2 = 1$ ，現在就來計算不定方程式的解，如下表 5：

表 5

u	$u_0 = 2$	$u_1 = 7$	$u_2 = 26$	$u_3 = 97$	$u_4 = 362$	$u_5 = 1351$
v	1	4	15	56	209	780
$a-1$	3	13	51	193	723	2701
a	4	14	52	194	724	2702
$a+1$	5	15	53	195	725	2703

由表 5 可觀察到數列 $\langle u_n \rangle$ 與 $\langle v_n \rangle$ 會滿足二階遞迴數列：

$$\begin{cases} u_0 = 2, u_1 = 7 \\ u_n = 4u_{n-1} - u_{n-2}, n \geq 2 \end{cases} \quad \text{且} \quad \begin{cases} v_0 = 1, v_1 = 4 \\ v_n = 4v_{n-1} - v_{n-2}, n \geq 2 \end{cases}。$$

上面遞迴式可由 $u^2 - 3v^2 = 1$ 及數學歸納法證得。利用特徵方程式 $x^2 - 4x + 1 = 0$ ，可求得特徵

根為 $2 + \sqrt{3}$ 及 $2 - \sqrt{3}$ 。於是，可令 $u_n = \kappa_1(2 + \sqrt{3})^{n+1} + \kappa_2(2 - \sqrt{3})^{n+1}$ ，則由

$$\begin{cases} u_0 = \kappa_1(2 + \sqrt{3}) + \kappa_2(2 - \sqrt{3}) = 2 \\ u_1 = \kappa_1(2 + \sqrt{3})^2 + \kappa_2(2 - \sqrt{3})^2 = 7 \end{cases}, \text{ 得到 } \kappa_1 = \kappa_2 = \frac{1}{2}。$$

所以，一般項 $u_n = \frac{1}{2}[(2 + \sqrt{3})^{n+1} + (2 - \sqrt{3})^{n+1}]$ ，又因為 $a = 2u_n$ ，因此此三角形的三邊長為

$[(2 + \sqrt{3})^{n+1} + (2 - \sqrt{3})^{n+1}] - 1, (2 + \sqrt{3})^{n+1} + (2 - \sqrt{3})^{n+1}, [(2 + \sqrt{3})^{n+1} + (2 - \sqrt{3})^{n+1}] + 1。$ ■

【定理 15】 給定連續整數邊的格子三角形 $\triangle ABC$ ，若其面積為正整數，則

(1) 內心必為格子點。

(2) 存在 $n \in \mathbb{N}$ 使得三邊長為 $x+y-1, x+y, x+y+1$ ，其中 $x = (2+\sqrt{3})^{n+1}, y = (2-\sqrt{3})^{n+1}$ 。

(3) 若邊長伸縮 $H_n = \frac{6(x-y)}{\sqrt{3}}$ 倍時，五心除了旁心外與九點圓圓心皆為格子點。

(4) 若邊長伸縮倍率符合遞迴關係為 $\begin{cases} K_0 = 1, K_1 = 2, K_2 = 15 \\ K_n = K_{n-1} + 7K_{n-2} - K_{n-3}, n \geq 3 \end{cases}$ ，則旁心為格子點。

(5) 若邊長伸縮倍率為 $\text{lcm}(H_n, K_n)$ ，則五心與九點圓圓心皆為格子點。

【證明】 前面已得到任意連續整數邊的三角形 $\triangle ABC$ 中，三邊長的一般式為

$$x+y-1, x+y, x+y+1, \text{ 其中 } x = (2+\sqrt{3})^{n+1}, y = (2-\sqrt{3})^{n+1},$$

我們就有高 $\overline{AO} = \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{(x^2+y^2-2)} = \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{(x^2+y^2-2xy)} = \frac{\sqrt{3}}{2} (x-y)$ ，而

$$\overline{CO} = u_n + 2 = \frac{x+y}{2} + 2 \text{ 以及 } \overline{BO} = u_n - 2 = \frac{x+y}{2} - 2。$$

所以可解析為如下圖 21，由**基礎定理**得到

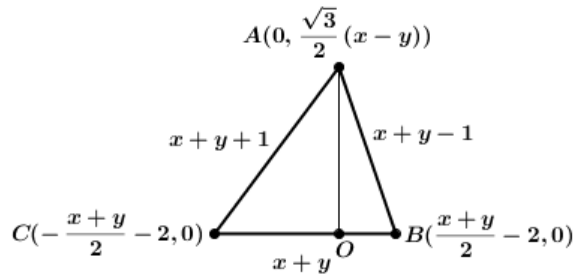


圖 21

重心 $G\left(-\frac{4}{3}, \frac{x-y}{2\sqrt{3}}\right)$ 、外心 $O\left(-2, \frac{x-y}{2\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{2(x-y)}\right)$ 、垂心 $H\left(0, \frac{x-y}{2\sqrt{3}} - \frac{2\sqrt{3}}{x-y}\right)$ 、

九點圓圓心 $N\left(-1, \frac{x-y}{2\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{2(x-y)}\right)$ 、內心 $I\left(-1, \frac{x-y}{2\sqrt{3}}\right)$ 、

旁心 $I_A\left(-6, \frac{-(x-y)\sqrt{3}}{2}\right)$ 、 $I_B\left(-2(x+2y+4), \frac{\sqrt{3}(x^2-y^2)}{2(x+y-2)}\right)$ 、 $I_C\left(2(x+2y-4), \frac{\sqrt{3}(x^2-y^2)}{2(x+y+2)}\right)$ 。

由於 $x-y$ 是 $2\sqrt{3}$ 的整數倍，所以內心必為格子點，且重心要為格子點的條件是邊長伸縮 3 倍，接著證明垂心、外心與九點圓圓心皆為格子點，由 **定理 11** 得到只要證明九點圓圓心為格子點就得證，所以當邊長伸縮 $\frac{2(x-y)}{\sqrt{3}}$ 倍，九點圓圓心 N 就會是格子點。令 $H_n = \frac{2(x-y)}{\sqrt{3}}$ ，而旁心部分條件直觀上是邊長伸縮 $\frac{2(x+y-2)}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2(x+y+2)}{\sqrt{3}}$ 倍。實際上這伸縮倍率不是最小值，因為 $x^2 - y^2$ 是 $2^\ell \sqrt{3}$ 的整數倍，且 $2^{\ell'} \mid x+y \pm 2$ ，其中 ℓ, ℓ' 為正整數，利用 Wolfram Alpha 計算實際伸縮倍率如下表 6，表中是令 k_n, l_n 分別為 $x+y-2$ 與 $x+y+2$ 的數列，且 K_n 為實際伸縮倍率的數列 ($K_n = k_n \cdot l_n$)，經過觀察可求得 $\begin{cases} K_0 = 1, K_1 = 2, K_2 = 15 \\ K_n = K_{n-1} + 7K_{n-2} - K_{n-3}, n \geq 3 \end{cases}$ ，即邊長伸縮 K_n 倍時，旁心也會為是格子點。

表 6

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
k_n	1	1	5	4	19	15	71	56	265	209	989
l_n	1	2	3	7	11	26	41	97	153	362	571
K_n	1	2	15	28	209	390	2911	5432	40545	75658	564719

由(3)(4)就得到當邊長伸縮倍率為 $lcm(H_n, K_n)$ 時，即可使五心與九點圓圓心皆為格子點。 ■

伍、研究結果

我們探討坐標平面與坐標空間中格子圖形的主要定理如下：

- 一、(1)在坐標平面上，我們建構在邊長 n 的格子正方形之右下三角形的格子點 $A_i(x_i, y_i)$ ，且對應於一個有理數 $\frac{y_i}{x_i}$ ，則此有理數數列會形成 n 階法里數列 F_n 。直線 OA_i 的個數即為法里數列 F_n 的項數，最後透過圖形對稱性質，推導出過原點的格子正方形格子點連線之直線個數為 $1 + 2 \sum_{m=1}^n \varphi(m)$ ，其中 $\varphi(n)$ 為尤拉函數。
- (2)在坐標空間中，考慮邊長 n 的格子正立方體，論證出過原點的正立方體格子點連線之格子直線數 a_n 滿足： $a_1 = 7$ ，且當 $n \geq 2$ 時， $a_n = 7 + \sum_{m=2}^n N(m)$ ，其中

$$N(n) = [(n+1)^3 - n^3] - 7 - 12[n-1 - \varphi(n)] - 6 \sum_{j=1}^k (-1)^{j+1} C_2^{\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_j \leq k} \left(\frac{n}{p_{i_1} p_{i_2} \dots p_{i_j}} - 1 \right)} \quad (n \geq 2)。$$

二、(1)在坐標平面中，論證出形成格子多邊形的必要條件是 $\tan \theta$ 為有理數，其中 θ 為任一內角。另外，存在格子正 n 邊形的充要條件是 $n = 4$ 。

(2)在坐標空間中，論證出形成格子多邊形的必要條件是 $\tan \theta = \sqrt{q}$ ，其中 q 是有理數且 θ 為任一內角。另外，存在格子正 n 邊形的充要條件是 $n = 3, 4, 6$ 。特別地，推論出存在格子柏拉圖多面體、格子阿基米德多面體與格子卡塔蘭立體均各有三種。

格子柏拉圖多面體	正四面體	正六面體	正八面體
格子阿基米德多面體	截角四面體	截半立方體	截角八面體
格子卡塔蘭立體	三角化四面體	菱形十二面體	四角化六面體

三、論證出探討三角形五心與九點圓圓心皆為格子點的充分條件是三邊長比為整數比，包含三邊長為同類方根的無理數的情形，但還要對三邊長伸縮 $\gcd(m_1 n_1, m_2 n_2)$ 倍後必成立，因此成功地論證出更一般化的情形。

四、論證出三角形五心與九點圓圓心皆為格子點的充分條件，且類型僅有三種情形：

(1) 畢氏三角形 (不論基本型與旋轉型)：條件為三邊長為 12 的倍數。

(2) 三頂點 $A(0, \gamma), B(\beta, 0), C(\gamma, 0)$ 的 **Heron** 三角形 (不論基本型與旋轉型)：

條件為 $12 \mid \alpha, 12 \mid \beta + \gamma, 4\alpha \mid \beta\gamma$ ，同時 $\gcd(m_1 n_1, m_2 n_2) \mid \alpha, \beta, \gamma$ ，其中 $\gcd(m_1 n_1, m_2 n_2)$ 是最小倍率。

(3) 三邊長比為整數比 (含三邊長為同類方根的無理數) 的格子三角形：

條件為 $12 \mid \alpha, 12 \mid \beta + \gamma, 4\alpha \mid \beta\gamma$ ，同時 $\gcd(m_1 n_1, m_2 n_2) \mid \gcd(\alpha, \beta, \gamma)$ ，其中 $\gcd(m_1 n_1, m_2 n_2)$ 是最小倍率。

五、最後應用於連續整數邊的三角形，論證出五心與九點圓圓心皆為格子點的充分條件。

陸、結論與未來展望

關於這次科展的主題，推導出穿過格子點的直線個數之一般式，驚喜的是論證結果與尤拉函數或法里數列有關，這是數與形的具體表現。在研究出形成格子圖形的充要條件，找到存在格子正多邊形、格子柏拉圖多面體、格子阿基米德多面體與格子卡塔蘭立體的充要條件，這推廣性質是巧妙的，但未完備論證，更期待能夠完備嚴謹論證。

探究三角形五心與九點圓圓心皆為格子點的充分條件，成功的論證得到結果，得到符合此類型三角形有三種，這論證方法功於笛卡兒創立的「解析解何」，引進了坐標後就變成代數問題，因此寬廣了格子三角形的視野，再加上幾何變換使得能延伸至一般化，過程中不斷簡化再簡化，這是最難得的經驗。

在論證過程中，令人驚奇的是畢氏三元數 $(m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2)$ 可轉換成另一組的畢氏三元數(性質 6)，這性質將Heron三角形在解析上原本會出現八種圖形如P.14表 4最後變成僅二種，使得內心與旁心解析出最簡潔的結果，因此得到更完美的推論。從此可感受到「畢氏定理」的不平凡之處。最後將我們的結果應用於連續整數邊三角形，發現這些三角形是有著巧妙的性質，值得再深入研究，期盼未來更廣泛應用。

這次研究探討坐標平面與空間的格子圖形的性質，最期待的是否還有哪些推廣性質呢？如下兩個結果，都是值得我們繼續研究的方向。

【1】設 Γ 為在坐標平面上以整數格子點為頂點的多邊形，並且 Γ 的內部的格子點為 I ，同時若 Γ 的內部含有有理數格子點 $(\frac{\text{整數}}{n}, \frac{\text{整數}}{n})$ 為 I_n ，則其面積為 A ，對任意整數 $n > 0$ ，

$$n(n-1)A = (I_n - nI) + (n-1) \text{ 均成立。}$$

【2】設 Π 為在坐標空間中以整數格子點為頂點的凸多面體，並且 Π 的內部的格子點為 I 與表面上的格子點為 B ，同時若 Π 的內部含有的有理數格子點 $(\frac{\text{整數}}{n}, \frac{\text{整數}}{n})$ 為 I_n 與表面上的有理數格子點為 B_n ，則其體積 V ，對任意整數 $n > 0$ ， $2n(n^2 - 1)V = 2(I_n - nI) + (B_n - nB)$ 均成立。

(參考資料[9])

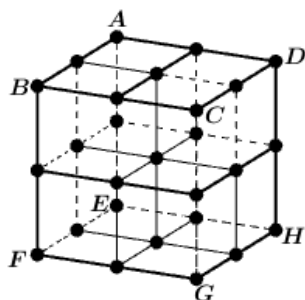


圖 22

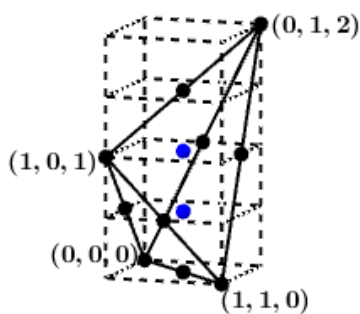


圖 23

【例子說明 1】考慮單位正立方體如上圖 22，若 $n=2$ ，則 $I=0, B=8, I_2=1, B_2=26$ ，代入

$$2n(n^2-1)V = 2(I_n - nI) + (B_n - nB) \text{ 得 } 2 \cdot 2(2^2-1)V = 2(1-2 \cdot 0) + (26-2 \cdot 8)$$

所以 $V=1$ ，因此正立方體體積為 1。

【例子說明 2】考慮以 $(0,0,0), (1,1,0), (1,0,1), (0,1,2)$ 為頂點的四面體如上圖 23，

若 $n=2$ 時，則 $I=0, B=4, I_2=2, B_2=10$ ，代入

$$2n(n^2-1)V = 2(I_n - nI) + (B_n - nB)$$

得 $2 \cdot 2(2^2-1)V = 2(2-2 \cdot 0) + (10-2 \cdot 4)$ ，因此四面體體積為 $\frac{1}{2}$ 。

柒、參考資料

- [1] 蔡聰明(2010)。數學拾貝。台北市：三民。
- [2] 張海潮(2009)。從旋轉與縮放看尤拉線與九點圓。數學傳播，33(2)，48-51。
- [3] 阮瑞泰(2010)。三角形的四心之向量關係式。數學傳播，34(1)，29-34。
- [4] 劉俊傑(2006)。換個觀點看三角形的四心。數學傳播，30(2)，28-39。
- [5] 維基百科自由的百科全書-法里數列
<https://zh.wikipedia.org/zh-tw/%E6%B3%95%E9%87%8C%E6%95%B8%E5%88%97>。
- [6] 彭君智(2001)。3D立體變變變。數學傳播，25(3)，68-80。
- [7] 楊媛甯(2007)。海倫家族三代同堂大蒐秘。中華民國第四十七屆中小學科學展覽會國中組數學科。
- [8] 杜冠慧(2008)。格子點上的三角形。臺灣二〇〇八年國際科學展覽會高中組數學科。
- [9] 前原 闊/桑田孝泰(2012)。知っておきたい幾何の定理。日本東京：共立出版株式會社。

【評語】 050402

這篇論文用格子點為中心，研究了三個方向。

第一個方向，討論格子正方形和格子正方體內，穿過格子點的直線數，並導出一般公式。海報上說並推廣到高維度正方體。

第二個部分在討論形成格子圖形的條件，重要的是，任一內角的正切是有理數。依此推出格子正多邊形的條件，格子正多面體的條件以及一些其他特殊格子多面體的條件。

最後討論五心與九點圓圓心都是格子點的充分條件，成果包含：畢氏三角形內心及旁心皆為格子點，海龍三角形在某條件下內心及旁心也是格子點...等等。整體來說，結果多方向，也不少。比較不好的感覺是，各個方向看來都是獨立個案，互相之間沒有關係。可以考慮的是，選擇其中一個方向，更深入的研究下，得到一套比較相關的系統知識。