中華民國第 56 屆中小學科學展覽會
作品說明書

高級中等學校組　數學科

050401

拋物線與直線的邂逅

學校名稱：雲林縣私立正心高級中學

作者：	指導老師：
高一 林威成	許清涼

關鍵詞：拋物線、切線、弦

壹、 摘要：

研究拋物線的切線求法，發現拋物線切線的三個有趣定理，再從拋物線的切線求法中，重新思考多項式函數與切線之間的意義，引入切點代表重根的想法，算出切線方程式、極值與反曲點，以此替代微分方法求切線。

接著由切線延伸到弦，以此發展幾個問題，如：弦交角問題、中心轉弦問題 ...。進行更深入的探討，求出問題的解答。

最後焦點放在拋物線的弧長上，希望利用以上探討，與阿基米德的窮盡法，進一步的求出或推估出拋物線的弧長。

貳、研究動機：

國中會考前一、兩個月我和另一位同學決定幫大家出一份模擬考卷,其中我負責出數學，正當我在出有關二次函數的題目，突然覺得很奇怪，參考書總是只叫我們算過頂點的切線方程式，這樣會不會太無聊？難道過任一點的算不出來嗎？開始懷疑的我，第一個簡單的想法就是切線只與二次函數交於一點，沒想到解答出來了！

回到家中，我開始利用網路搜尋有關函數與切線的問題，但這些方法都是用到微積分才有辦法了解的，一直到忙完會考後，閒暇時間碰了一下高中數學，才勾起了這個問題，開始研究，打從國中老師在教二次函數時，我就有點好奇這種特別的曲線，總覺得國中教的不夠深，我使用繪圖軟體來發現更多值得討論的問題，就決定藉由這次的科展好好了解一番。

觀察了一點切線，發現早在阿基米德時，就利用了「窮盡法」來求拋物線的面積，覺得這個方法很妙，於是開始思考有關拋物線弧長的問題，很顯然的，比面積複雜許多，原本想利用弦與切線長度之間的不等式關係來逼近拋物線的弧長，不知不覺的也就發現了幾個很有趣的現象，也衍伸出更多能研究的話題，更開啟了此次科展新的樂章。

參、名詞定義與解釋：

1. 此說明書內的若無特別說明拋物線都置於這樣的座標系中：

   x 軸為過拋物線頂點的切線，y 軸為拋物線的對稱軸

2. 已知二次函數 $y = mx^2$，經計算後得知焦點座標為$(0,\frac{1}{4m})$

3. **弦交角：**

(1) 本說明書若標示$\widehat{AB^P}$，即**拋物線** P **上的** AB **弧**

(2) 拋物線 P 兩弦$\overline{AB}$、$\overline{BC}$且 $B \in \widehat{AC^P}$，則稱$\angle$**ABC為對於 $\widehat{AC^P}$ 或 $\overline{AC}$ 弦的弦交角**

(3) 等角問題：拋物線有一弦$\overline{AB}$，同對$\overline{AB}$弦的所有弦交角中，找出**角度相同**的一組

(4) 極角問題：拋物線有一弦$\overline{AB}$，同對$\overline{AB}$弦的所有弦交角中，找出**最大與最小**的角度

4. **阿基米德三角形：**

(1) 過拋物線兩點 A、B 作其切線，兩切線交於 D，則定義 ΔABC 為**阿基米德三角形**

本說明書內所指**阿基米德三角形的頂點**皆為 **D**

(2) $\overline{AB}$為拋物線的一弦，亦定義為阿基米德三角形的**弦邊**

(3) $\overline{AD}$、$\overline{BD}$為拋物線的切線，亦定義為阿基米德三角形的**切邊**

(4) **弦邊的中位線**即為**切邊中點連線**

5. **中心轉弦：**在拋物線的內部取一點C (C即為中心)，以過 C 的所有弦為弦邊作阿基米德三角形，找出三角形頂點的集合方程式與此集合的性質

6. 本說明書若有使用到定理，可翻閱結論進行對照

肆、研究目的：

一、研究出一些有關拋物線切線與弦的定理

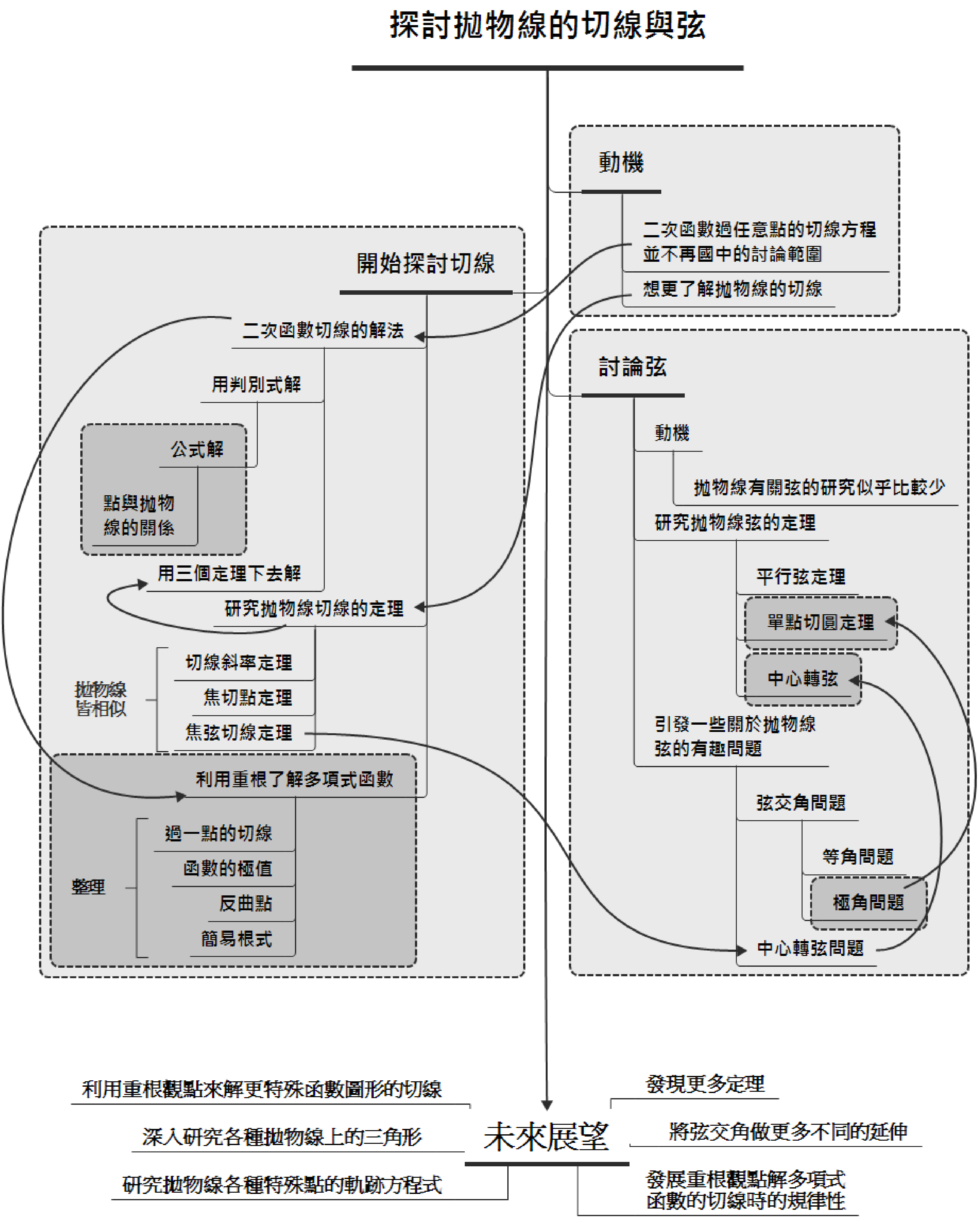
二、不用微積分，求出：

1. 二次函數切線方程式的各種解法
2. 多次函數切線方程式與極值

三、發展延伸問題並解決之：

1. 弦交角的等角與極角問題
2. 中心轉弦問題

※本說明書架構圖：


探討拋物線的切線與弦
動機
二次函數過任意點的切線方程
並不再國中的討論範圍
想更了解拋物線的切線
開始探討切線
二次函數切線的解法
用判別式解
公式解
點與拋物
線的關係
用三個定理下去解
研究拋物線切線的定理
拋物線
皆相似
切線斜率定理
焦切點定理
焦弦切線定理
利用重根了解多項式函數
整理
過一點的切線
函數的極值
反曲點
簡易根式
討論弦
動機
拋物線有關弦的研究似乎比較少
研究拋物線弦的定理
平行弦定理
單點切圓定理
中心轉弦
引發一些關於拋物線
弦的有趣問題
弦交角問題
等角問題
極角問題
中心轉弦問題
未來展望
利用重根觀點來解更特殊函數圖形的切線
深入研究各種拋物線上的三角形
研究拋物線各種特殊點的軌跡方程式
發現更多定理
將弦交角做更多不同的延伸
發展重根觀點解多項式
函數的切線時的規律性

伍、研究過程與內容：

第一部分：談“切線”

一、基本解法：

首先，這是最基本的，我們將由二次函數的切線問題出發：

Qu: $\mathbf{f(x) = y = x^2}$ ，過 $(\mathbf{1,1})$作其切線，求切線方程式為?

(一)高三生解法:

在 f(x)上取一點P $(1+k, f(1+k))$

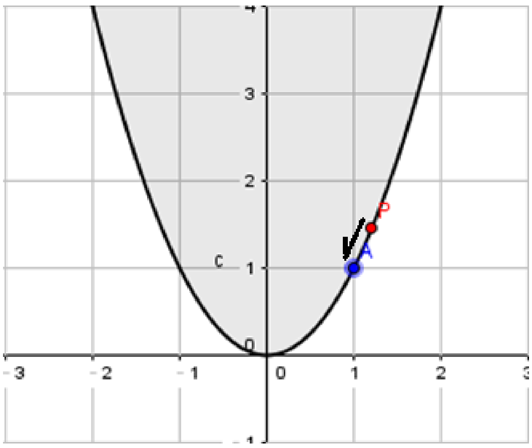
當$k \to 0$ 時，$\overline{AP}$斜率即為過 A 的切線斜率

$\therefore$ 切線方程式斜率為： $\lim\limits_{k\to 0}\dfrac{f(1+k)-f(1)}{(1+k)-1}$

$$= \lim_{k\to 0}\frac{(1+k)^2-1}{k}$$

$$= \lim_{k\to 0}(k+2)$$

$$= 2$$



⇨ 切線方程式為 $y = 2x - 1$

(二)我的解法一：

設切線方程式為 $y = ax + b$

則聯立方程式 : $\begin{cases} y = x^2 \\ y = ax + b \end{cases}$ 的解應只有一組 (此解即為切點)

將上式代入下式得 : $x^2 = ax + b$ 即 : $x^2 - ax - b = 0$

$\because$ 解只有一個 $\therefore x^2 - ax - b = 0$ 中，D *(判別式)* $= 0$

$a^2 + 4b = 0$ ，$b = -\dfrac{1}{4}a^2$——①

又 $y = ax + b$ 也過 A $(1,1)$

$\therefore 1 = a + b$——②

將①代入②解得 $a = 2$，且$b = -1$

⇨ 切線方程式為 $y = 2x - 1$

註：亦可令切線方程式為 $y - 1 = m(x - 1)$ (m 為斜率)

1. 公式解：設二次函數為：$y=mx^2$，一次函數為：$y=ax+b$，兩函數相切於$(x_1, mx_1{}^2)$

$\begin{cases} y=mx^2 \\ y=ax+b \end{cases}$ 應只有一個交點 → $mx_1{}^2-ax_1-b=0$ （∵ $y=ax+b$ 過 $A(x_1, mx_1{}^2)$）

且 $mx^2-ax-b=0$ 中，$D=a^2+4mb=0$（∵ x 只能有一個解）

$b=-\dfrac{a^2}{4m}$ 代入 $mx_1{}^2-ax_1-b=0$

得：$\dfrac{1}{4m}a^2-x_1a+mx_1{}^2=0$

解得：$a=\dfrac{x_1\pm\sqrt{D}}{\frac{1}{2m}}=2mx_1$，$b=-\dfrac{a^2}{4m}=-\dfrac{4m^2x_1{}^2}{4m}=-mx_1{}^2$

→ **過 $y=mx^2$ 上一點 $(x_1, mx_1{}^2)$ 作其切線，則切線方程式為 $y=2mx_1x-mx_1{}^2$** (定理一)

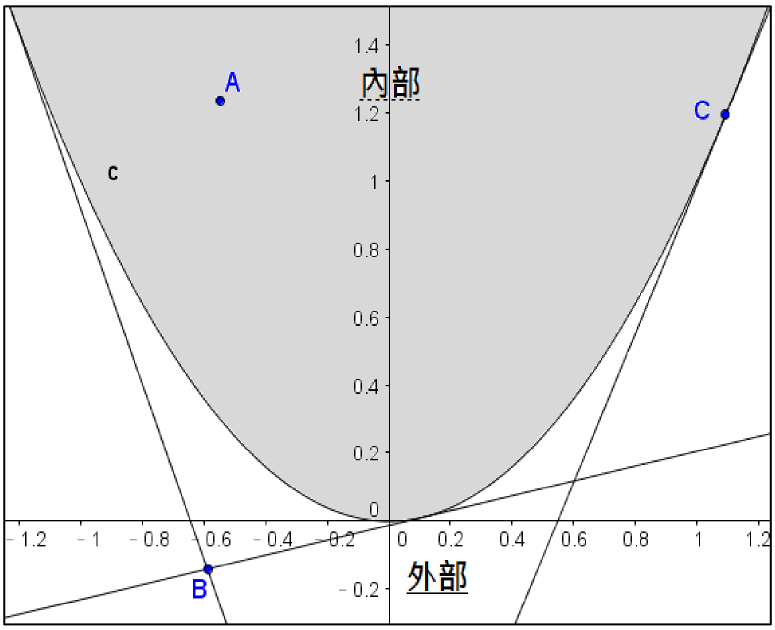
2. 不過若是過 $y=mx^2$ 外一點 (x_1, y_1) 作其切線，其公式就不大一樣了

$b=-\dfrac{a^2}{4m}$ 仍成立，但另一式應將(x_1, y_1)代入 $y=ax+b$

$y_1=ax_1+b$，$b=-\dfrac{a^2}{4m}$ 代入得：$\dfrac{1}{4m}a^2-x_1a+y_1$

解得 $a=\dfrac{x_1\pm\sqrt{x_1{}^2-\frac{y_1}{m}}}{\frac{1}{2m}}=2m\left(x_1\pm\sqrt{x_1{}^2-\frac{y_1}{m}}\right)$，$b=m\left(x_1\pm\sqrt{x_1{}^2-\frac{y_1}{m}}\right)^2$

不過這公式有點太複雜，不夠漂亮，乾脆直接算，值得注意的是它的判別式：



當 $D<0$ 時，$x_1{}^2-\dfrac{y_1}{m}<0$ (如 A)

→ 切線斜率不屬於實數，

因此此點在 $y=mx^2$ 內部

當 $D>0$ 時，$x_1{}^2-\dfrac{y_1}{m}>0$ (如 B)

→ 切線解出來有 2 條，

因此此點在 $y=mx^2$ 外部

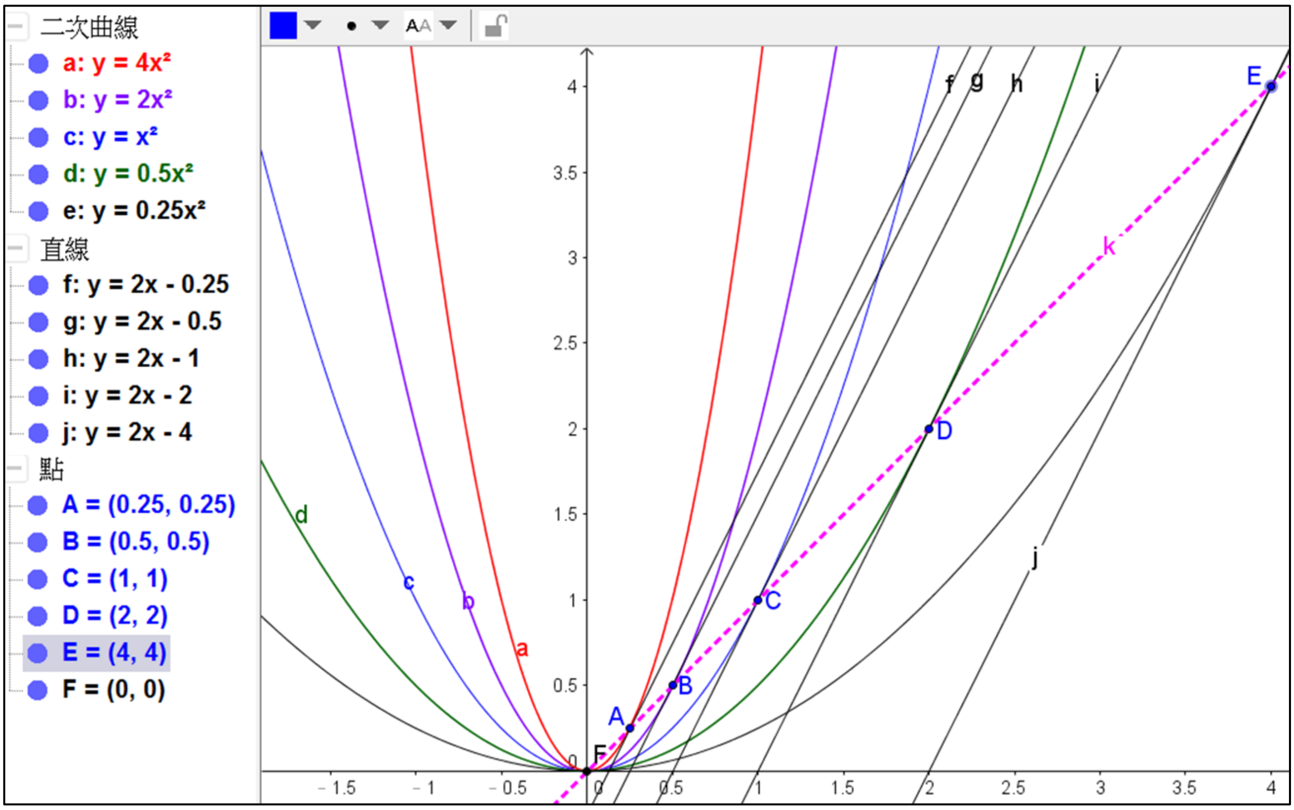
當 $D=0$ 時，$x_1{}^2-\dfrac{y_1}{m}=0$ (如 C)

→ $y_1=mx_1{}^2$，因此 A 在 $y=mx^2$ 上

我們也可以這樣說：$x_1{}^2 - \frac{y_1}{m}$的正負為判斷一點在$y = mx^2$上、內部或外部的根據

二、*難道拋物線長得都一樣？*

(一)討論同切線斜率下的切點關係：



如上圖，A, B, C, D, E分別為a, b, c, d, e上的點，a, b, c, d, e 頂點皆為 F，過A, B, C, D, E分別作a, b, c, d, e的切線f, g, h, i, j，其中f, g, h, i, j切線斜率皆相同

則：**A, B, C, D, E, F共線** (定理二)

證法一：

欲證 A, B, C, D, E, F共線，即證$\overline{FA}$、$\overline{FB}$、$\overline{FC}$、$\overline{FD}$、$\overline{FE}$斜率相等

設 $a: y = k_a x^2$，$b: y = k_b x^2$；$A(x_A, k_a x_A{}^2)$，$B(x_B, k_b x_B{}^2)$；

$\overline{FA}$斜率 $= m_{\overline{FA}}$，$\overline{FB}$斜率 $= m_{\overline{FB}}$

$\overline{FA}: y = m_{\overline{FA}}x$，$A(x_A, k_a x_A{}^2)$代入得：$m_{\overline{FA}} = k_a x_A$

同理，$m_{\overline{FB}} = k_b x_B$

又因f, g斜率相等，由定理一知：$2k_a x_A = 2k_b x_B$，即 $\overline{FA}$斜率 $= \overline{FB}$斜率

同理亦可證 $\overline{FA}$、$\overline{FB}$、$\overline{FC}$、$\overline{FD}$、$\overline{FE}$斜率相等

故A, B, C, D, E, F共線

證法二：

欲證 A, B, C, D, E, F共線，即證$\overline{FA}$、$\overline{FB}$、$\overline{FC}$、$\overline{FD}$、$\overline{FE}$斜率相等

根據定理四(見結論)

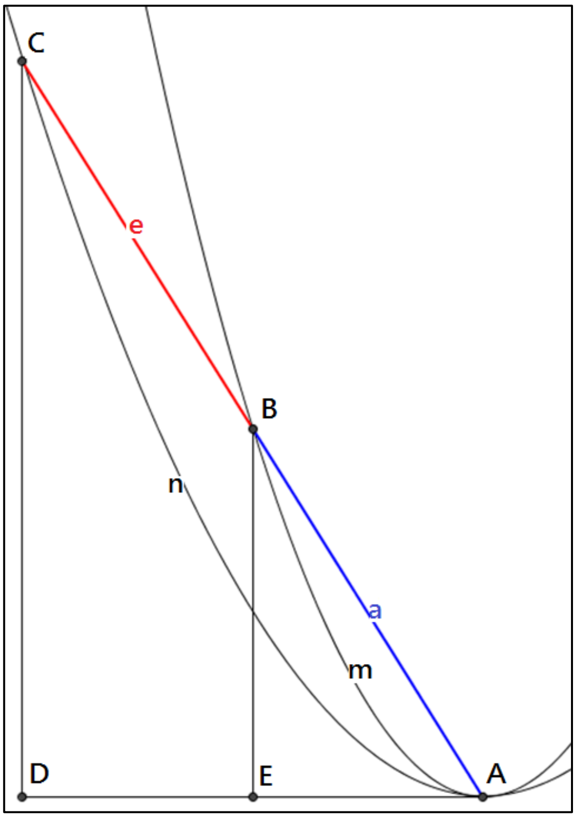
$\overline{FA}$ 斜率 $= 0.5(\text{f 斜率}) = 0.5(\text{g 斜率}) =$ $\overline{FB}$ 斜率

同理可證$\overline{FA}$、$\overline{FB}$、$\overline{FC}$、$\overline{FD}$、$\overline{FE}$斜率相等

故A, B, C, D, E, F共線

(二)新想法：

根據上一點所提的，針對為什麼A, B, C, D, E, F共線進一步的推廣，真的只是如我們所看到的那麼簡單嗎？我大膽的猜測，拋物線都相似



如右圖：$m: y = x^2$，$n: y = ax^2$

A 為 m, n 的頂點，B, C 分別為 m, n 上的點，且

A, B, C 共線，$\overline{BE}, \overline{CD}$皆垂直$\overline{AD}$

則：n 為 m 的 $\frac{1}{a}$倍縮放圖

pf： n 為 m 的 $\frac{1}{a}$倍縮放圖 $\leftrightarrow$

$\overline{AC}$為$\overline{AB}$的$\frac{1}{a}$倍縮放圖 $\leftrightarrow$

$\overline{AC} = \frac{1}{a}\overline{AB} \leftrightarrow \overline{AE}: \overline{AD} = a: 1$

設$C(x_1, ax_1{}^2)$, $D(x_2, x_2{}^2)$，A, B, C 共線 $y = kx$

C, D 代入 $y = kx$分別得：

$k = ax_1 = x_2 \ \rightarrow \ x_1: x_2 = 1: a$

故$\overline{AE}: \overline{AD} = a: 1$　　　　　n 為 m 的 $\frac{1}{a}$倍縮放圖 得證

亦可利用高中的定義簡單的得證：

拋物線定義：給定焦點 F,準線 L(F 不在 L 上)與動點 P，在平面上 P 滿足$d(P, L) = \overline{FP}$，此時 P

所形成的軌跡即為拋物線。利用集合表示：拋物線 $c = \{P|d(P, L) = \overline{FP}, F \notin L\}$。

拋物線簡單的來說就是由 F 和 L 控制開口大小的，將一個拋物線放大就是讓 F 和 L 距離放大，所以要得到任何一個拋物線，我只要將 F 和 L 距離放大或縮小即可

所以拋物線的確都相似　　　　(定理三)

三、拋物線的切線定理：

切線對於拋物線來講實在是很特別，我利用電腦程式和紙筆發現了一些十分有趣的數據，拿來整理一下，便整理出三個有趣的結果。

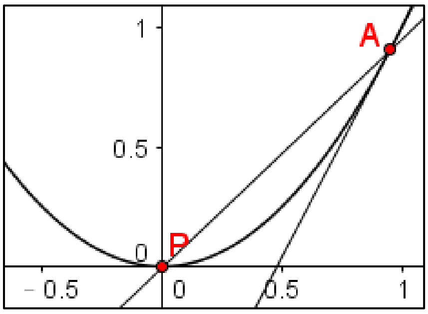
(一) 二次函數的切線斜率定理：

過 $y = mx^2$ 上一點 A (x_1, y_1)作其切線 L，連接 A 與$y = mx^2$的頂點 P 則：**L斜率為$\overline{AP}$斜率的2倍**　　　　(定理四)

Pf: 由定理一知：L 斜率為 $2mx_1$

且 $\overline{AP}$斜率 $= \dfrac{y_1 - 0}{x_1 - 0} = \dfrac{mx_1{}^2}{x_1} = mx_1$

L 斜率為$\overline{AP}$斜率的 2 倍 得證



讓我們回到最到最初的問題

Qu: $\mathbf{f(x) = y = x^2}$，過A $(\mathbf{1, 1})$作其切線，求切線方程式為?

我的解法二：

設其頂點為 P，則$\overline{AP}$斜率 $= 1$

由定理四切線斜率性質知：過 A 的切線斜率 $= 2 \times \overline{AP}$斜率 $= 2$

令切線方程式為$y = 2x + b$

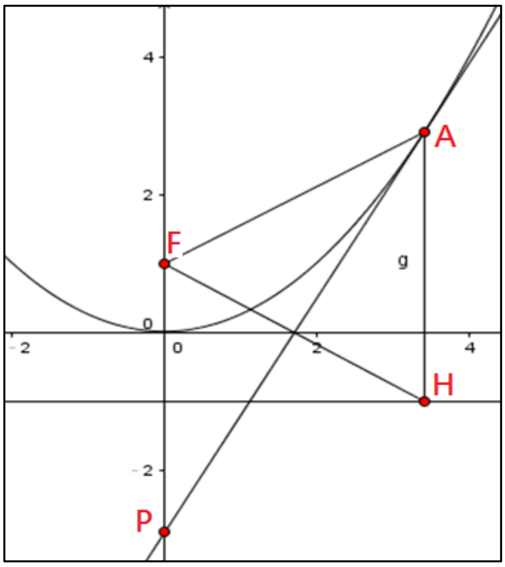
A 代入即可得其切線方程式為 $y = 2x - 1$

(二) 拋物線的焦切點定理：

過 $y = mx^2$ 上一點 A (x_1, y_1)作其切線交其對稱軸於 P，已知 F 為其焦點， 則：$\mathbf{\overline{FA} = \overline{FP}}$　　　　(定理五)

1. Pf: 設$y=mx^2$的準線為 L，且 L 上有一點 H 使 AH 垂直 L

由拋物線定義得知：$\overline{FA}=\overline{AH}\rightarrow \Delta FAH$ 為等腰三角形



$\because$ F 為$y=mx^2$焦點 $\therefore F(0,\frac{1}{4m})$

又$\because$ L 為$y=mx^2$準線 $\therefore L：y=-\frac{1}{4m}$

由此得知 H 座標為：$(x_1,-\frac{1}{4m})$

$\overline{FH}$斜率 $=\dfrac{\frac{1}{4m}-\left(-\frac{1}{4m}\right)}{0-x_1}=-\dfrac{1}{2mx_1}$

又由定理一知：$\overline{AP}$斜率為$2mx_1$

$\rightarrow \overline{AP}$斜率$\times\overline{FH}$斜率$=-1$

以上反推得$\overline{AP}$垂直$\overline{FH}\rightarrow\overline{AP}$平分$\angle FAH$

$\overleftrightarrow{AH}//\overline{FP}$ (AH、FP 同時垂直 y 軸)，由內錯角相等知：$\angle FPA=\angle PAH$

⇨ $\angle FPA=\angle FAP$ $\rightarrow$ $\overline{FA}=\overline{FP}$ 得證，推廣至拋物線得定理五

2. 討論：**$\overline{AP}$、$\overline{FH}$、x軸是不是恰交於一點？**

$\because\overline{FP}=\overline{FA}=\overline{AH}$ 且 $\overline{FP}//\overline{AH}$ $\therefore$ AFPH 為菱形 $\rightarrow\overline{AP}$平分$\overline{FH}$

$d(F,x軸)=d(準線,x軸)$，又 x 軸與準線平行，是故 x 軸也平分$\overline{FH}$

由此知：**$\overline{AP}$、$\overline{FH}$、x軸恰交於一點，且此點為$\overline{FH}$中點**

3. Qu: **$f(x)=y=x^2$，過$A(1,1)$作其切線，求切線方程式為?**

我的解法三：

F 為其焦點，$F\left(0,\frac{1}{4}\right)$(解釋見參之 2)

則有$\overline{FA}=\sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2+1^2}=\frac{5}{4}=\overline{FP}$ (根據定理五焦切點連線性質)

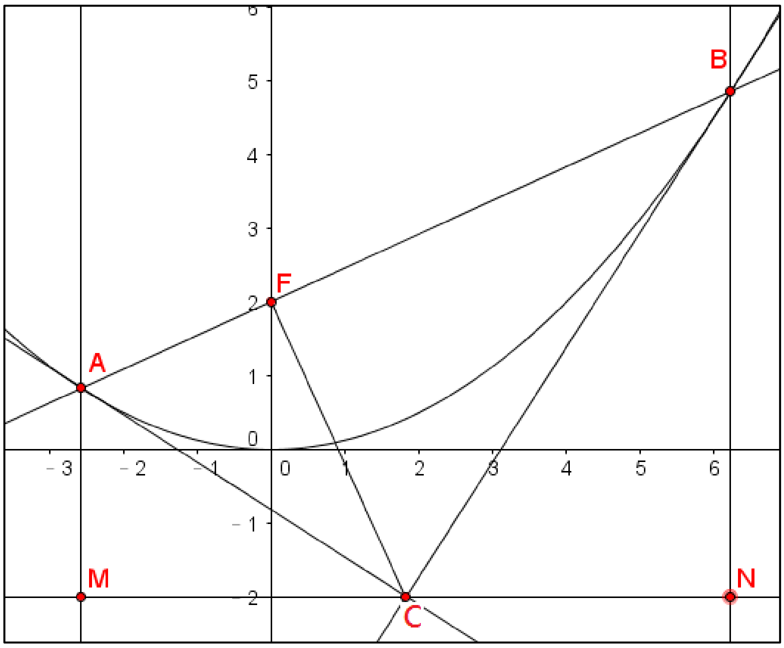
由此可知 P 座標為$(0,-1)$，而$\overline{AP}$即為其切線，

已知直線上相異兩點即可求出切線方程式

(三) 拋物線的焦弦切線定理：

如右下圖，作拋物線 c 的焦弦 A、B$(A、B \in c)$，F 為其焦點，分別過 A、B 做切線 AC、BC

L 為其準線，再過 A、B 作 L 垂線交其於 M、N，則下列四種性質成立：



(1) $\overleftrightarrow{AC}$、$\overleftrightarrow{BC}$、L交於一點

(2) $\angle ACB = \angle CFB$

$= 90°$

(3) $\overleftrightarrow{BC}$平分$\angle FCN$，

且$\overleftrightarrow{AC}$平分$\angle FCM$

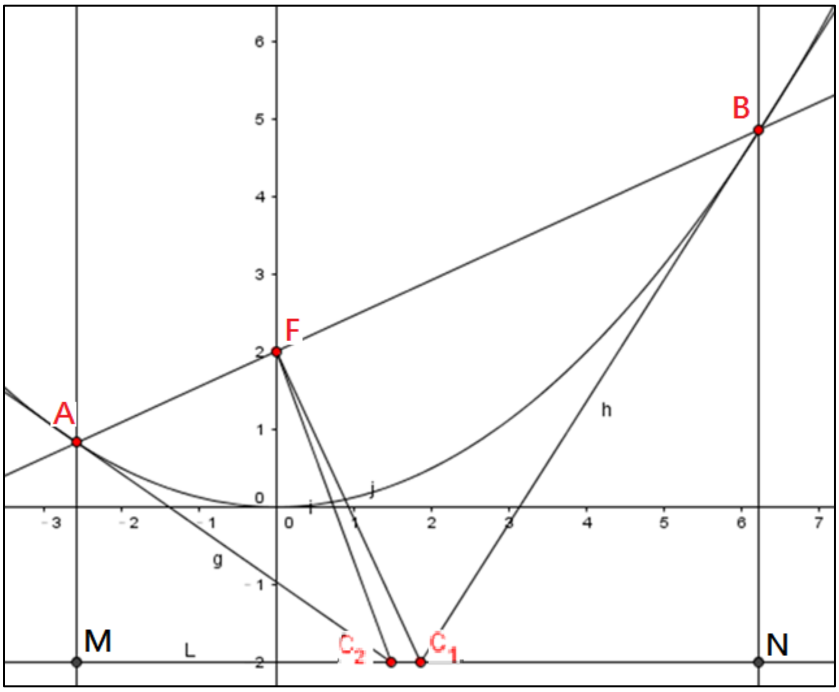
(4) C為$\overline{MN}$中點 (定理六)

證明：

如右下圖，拋物線 c 的焦弦 A、B$(A、B \in c)$，F 為其焦點，

分別過 A、B 做切線$\overleftrightarrow{AC_2}$、$\overleftrightarrow{BC_1}$，L 為其準線，再過 A、B 作 L 垂線交其於 M、N

假設$C_1 \neq C_2$



(1) $\overleftrightarrow{BC_1}$交對稱軸於 P，則：

$\angle C_1BN$

$= \angle C_1PF$ (內錯角相等)

$= \angle FBC_1$ (由定理五得知)

$$\begin{cases} \overline{BN} = \overline{FB} \ (\text{拋物線定義}) \\ \angle C_1BN = \angle FBC_1 \\ \overline{BC_1} = \overline{BC_1} (\text{共用邊}) \end{cases}$$

由SAS知：$\Delta FBC_1 \cong \Delta NBC_1$

⇨ $\overline{BC_1}$平分$\angle FC_1N$ … ①

⇨ $\overline{FC_1}$垂直 AB … ②

⇨ $\overline{C_1N} = \overline{C_1F}$ … ③

(2) $\overline{AC_2}$交對稱軸於 Q，則：

$\angle C_2AM = \angle AQF$ (內錯角相等)

$= \angle QAF$ (由定理五得知)

同理，由SAS知：$\Delta FAC_2 \cong \Delta MAC_2$

⇨ $\overline{AC_2}$平分$\angle FC_2M$ … ④

⇨ $\overline{FC_2}$垂直$\overline{AB}$ … ⑤

⇨ $\overline{C_2M} = \overline{C_2F}$ … ⑥

(3) $\angle AFB = \angle AFC_2 + \angle C_2FC_1 + \angle C_1FB\ (= 180 + \angle C_2FC_1)$

由②⑤知：$\angle AFB > 180°$；但 F 在 AB 上，$\angle AFB$ 應為 180°

∴ 假設錯誤，$C_1 = C_2 (= C) \rightarrow (1)\ \overleftrightarrow{AC}$、$\overleftrightarrow{BC}$、L 交於一點 得證

(4) 結合上述與①④則可得：$\overline{BC}$平分$\angle FCN$ 且$\overline{AC}$平分$\angle FCM$ (3) 得證

(5) $\angle ACB = \angle FCA + \angle FCB$

$$= \frac{1}{2}(\angle FCM + \angle FCN) = 90° \quad (\because \overline{BC}\text{平分}\angle FCN\text{ 且}\overline{AC}\text{平分}\angle FCM)$$

又由②結合上述知：$\overleftrightarrow{FC}$垂直$\overleftrightarrow{AB} \rightarrow (2)\ \angle ACB = \angle CFB = 90°$ 得證

(6) 由③⑥結合上述知：$\overline{CM} = \overline{CN} = \overline{CF} \rightarrow (4)$C 為$\overline{MN}$中點 得證

Qu: $\mathbf{f(x) = y = x^2}$ ，過$\mathbf{A\ (1, 1)}$作其切線，求切線方程式為?

我的解法四：

F 為其焦點，$F\left(0, \frac{1}{4}\right)$ (解釋見參之 2)；$\overleftrightarrow{FA}$：$y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$

$\begin{cases} y = x^2 \\ y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4} \end{cases}$ 上式代入下式後，得$x^2 - \frac{3}{4}x - \frac{1}{4} = 0 \rightarrow (x-1)\left(x - \frac{1}{4}\right) = 0$

→ 其與 $y = x^2$另一交點的 x 座標為 $\frac{1}{4}$

由定理六之(4)：C 的 x 座標 = 兩焦點的 x 座標相加 ÷ 2 = $\frac{3}{8}$

C 在準線 $y = -\frac{1}{4}$上，C 的 y 座標 = $-\frac{1}{4}$

$\overleftrightarrow{AC}$就是過 A 的切線，兩點代入便能求解

五、延伸～多項式函數切線與極值問題：

我們都知道一個多次函數可以拐好幾個彎，但高一卻沒談過這種問題，以重根的觀點探討三、四次函數的切線似乎是可行的，且可再利用切線來探討極值問題。

前論、重新思考切線對於函數的意義：

我們都知道過線上一點作拋物線的切線時，此直線與拋物線只交與一點，但若討論多項式函數的切線交點時並沒有那麼單純，以下是我由三次函數切線的討論所得的結果：

設三次函數切線方程式為$\mathrm{y} = \mathrm{mx} + \mathrm{n}$，三次函數$\mathrm{y} = \mathrm{mx} + \mathrm{n}$

經觀察得知，三次函數與切線方程式(不包括過反曲點的切線)必有兩交點∴

$\begin{cases} \mathrm{f(x)} = \mathrm{y} = \mathrm{ax^3} + \mathrm{bx^2} + \mathrm{cx} + \mathrm{d} \\ \mathrm{g(x)} = \mathrm{y} = \mathrm{mx} + \mathrm{n} \end{cases}$ 中，x 有兩解

⇨ $\mathrm{ax^3} + \mathrm{bx^2} + \mathrm{cx} + \mathrm{d} = \mathrm{mx} + \mathrm{n}$ 這方程式中，x 有兩實數解

由虛根成對定理知：其虛根可能有 0 或 2 個(由代數基本定理：三次方程式中根共有三個)

但 $\mathrm{ax^3} + \mathrm{bx^2} + \mathrm{cx} + \mathrm{d} = \mathrm{mx} + \mathrm{n}$ 中 x 有兩實數解(f(x)與 g(x)有兩交點) ∴ 其此方程式無虛根

因此可推知：此方程式有一***雙重根***與***另一實根***

$\mathrm{F(x)}(= \mathrm{f(x)} - \mathrm{g(x)})$是一個三次函數，其與 x 軸切於 $\mathrm{P(x_P, y_P)}$、並交於另一點 $\mathrm{Q(x_Q, y_Q)}$

由勘根定理：P 兩旁的點皆在 x 軸的同一側，代表這兩個點之間有偶數個根使$\mathrm{F(x)} = 0$

∴ $\mathrm{x_P}$*為*$F(x) = 0$ *的**雙重根***

同理：Q 兩旁的點分別在 x 軸的不同側，代表這兩個點之間有其數個根使$\mathrm{F(x)} = 0$

∴ $\mathrm{x_Q}$*為*$F(x) = 0$ *的**另一實根***

推廣：

1. 若多項式函數f(x)的切線g(x)於 $\mathrm{x} = \mathrm{A_1}$時相切，則$\mathrm{A_1}$兩旁的點在 g(x)的同一側

   同理亦可知$\mathrm{A_1}$為 $\mathrm{f(x)} - \mathrm{g(x)} = 0$ 的重根，且為偶數重根(不一定為雙重根)，得：

   一多項式函數f(x)的切線g(x)交其於$A_1(x_{A1}, y_{A1}), A_2(x_{A2}, y_{A2}), A_3(x_{A3}, y_{A3}) \dots A_n(x_{An}, y_{An})$

   且$\mathrm{A_1}$為其切點且不為f(x)的反曲點，則：x_{A1}為 $\mathrm{f(x)} - \mathrm{g(x)} = 0$ 之**偶數**重根

   x_{A2}、$x_{A3} \dots x_{An}$為$\mathrm{f(x)} - \mathrm{g(x)} = 0$ 之另外幾個實根

2. 再利用切線定理討論多項式函數的極值，我們知道若函數在$x = x_A , x_B \dots x_n$時有極值，則過這些出現極值的點作切線時，所有切線皆為水平線

設f(x)過 $A(m, f(m))$的切線方程式為$y = k$，則由推廣 1：m 為$f(x) - k = 0$ 的雙重根

故有：多項式函數 f(x)，若 x = m 時有極值 k，則：**m為$f(x) - k = 0$的偶數重根**

(一) 三次函數的切線方程與極值：

Qu_1：過$A(1,1)$作$f(x) = y = x^3$的切線，求切線方程式？

設$f(x) = y = x^3$，切線方程式 $g(x) = y = ax + b$

由推廣 1：解方程式 $f(x) - g(x) = 0$，其中會有一重根 $x = 1$，還有另一實根 m

→ $x^3 - ax - b = 0$ 有一重根 $x = 1$，還有另一實根 m

設 $x^3 - ax - b = (x-1)^2(x-m)$

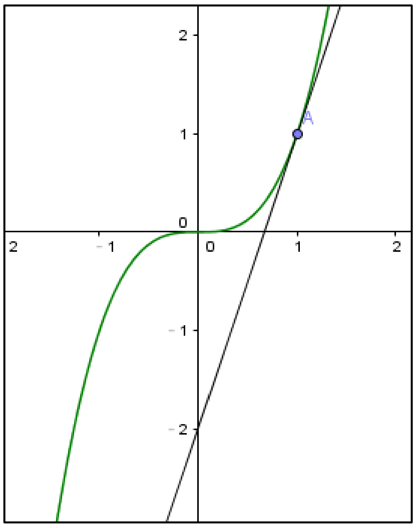
$(x-1)^2(x-m)$乘開得x^2係數：$-m-2$

又 $x^3 - ax - b$ 中x^2係數 $= 0$

$\therefore -m - 2 = 0$，$m = -2$

將 m 代回求得 $b = -2$

又$y = ax + b$ 過$(1,1)$，得切線方程式：$y = 3x - 2$



Qu_2：試求$f(x) = y = x^3 + 2x^2 - 2x - 1$中，在$x$為多少時有極值？

設f(x)在 x = m 時有極值 k，由推廣2：**$x^3 + 2x^2 - 2x - 1 - k = 0$的一重根為$m$**

再設$x^3 + 2x^2 - 2x - 1 - k = (x-m)^2(x-t) = x^3 - 2mx^2 - tx^2 + m^2x + 2mtx + m^2t$

對應係數得：$\begin{cases} -2m - t = 2 \\ m^2 + 2mt = -2 \end{cases}$

上式整理為$-2m - 2 = t$代入下式：$m^2 + 2m(-2m-2) = -2$

$$\rightarrow 3m^2 + 4m - 2 = 0 \text{，解得：} m = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 4 \times 3 \times 2}}{6} = \frac{-2 \pm \sqrt{10}}{3}$$

$x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{10}}{3}$時有極值

(二) 討論反曲點：

切線 g(x)在 x = a 時與多項式函數 f(x)相切，a 象徵著函數相減 = 0 的偶數重根

那 a 若象徵著函數相減 = 0 的奇數重根呢？我們立即想到反曲點。在多項式函數 f(x)凹向變換一次的片段作切線g(x)，切於 A、交於 B，我們若將 A 不斷地靠近 B，使 A、B 重合，則重合的那一點便為f(x)在此片段的反曲點 (因為反曲點為凹向改變的點，因此過反曲點的切線不能與此片段有任何交點)

因此我們可以說：

一多項式函數f(x)的切線g(x)交其於$A_1(x_{A1}, y_{A1}), A_2(x_{A2}, y_{A2}), A_3(x_{A3}, y_{A3}) \dots A_n(x_{An}, y_{An})$

且A_1為其反曲點，則：x_{A1}為 f(x) − g(x) = 0 之**奇數**重根

x_{A2}、x_{A3}、$x_{A4} \dots x_{An}$為f(x) − g(x) = 0 之另外幾個實根

(三) 歸納：

綜合上述進行整理，可得以下結論：

1. f(x)為一多項式函數，g(x)為其在 $x = a_1$時的切線，則f(x) − g(x)均可以此一般式表示：
   $k(x-a_1)^m(x-a_2)(x-a_3)\dots(x-a_n)$ $\left(m \in N \geq 2，k \in R\right)$
2. k 為首係數，k 的值由 f(x)的首係數決定，無特殊意義，只是拿來使一般式合理化
3. 一般式可能有數種寫法，但一種g(x)就只有一種一般式
4. 若m為偶數，則a_1不是反曲點；若 m 為奇數，則a_1必為反曲點；且反之皆成立
5. 若m為偶數，則有兩種情況：(1)解出 g(x)為斜直線，則a_1僅代表兩函數的切點 x 座標
   (2)解出 g(x)為水平線，則代表 f(x)在 $x = a_1$時有極值

(四) 處理簡易根式：

Qu_1：過 $A(8,2)$ 作 $f(x)=y=\sqrt[3]{x}$ 的切線，求切線方程式？

Sol：$y=\sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{3}}$

將 x、y 互換：$x=y^{\frac{1}{3}} \rightarrow y=x^3$

$\therefore y=x^3$ 與 $y=\sqrt[3]{x}$ 互為反函數 → 兩函數對稱於 $y=x$

以 $y=x$ 為對稱軸，A 的對稱點為 $(2,8)$ 過 $(2,8)$ 作 $y=x^3$ 的切線，依據前述歸納：

設 $g(x)$ 為其過 $x=2$ 時的切線，則可再設 $y-g(x)=(x-2)^2(x-a)=x^3-g(x)$

$\rightarrow\ -a-4=0$ (x^2 項相等)，$a=-4$，乘開得：$g(x)=12x-16$

又可知 $g(x)$ 過 $(0,-16),(1,-4)$

以 $y=x$ 為對稱軸，$g(x)$ 的對稱直線即為過 $(0,-16),(1,-4)$ 對稱點的直線

得切線方程式：$y-1=\frac{1}{12}(x+4) \rightarrow y=\frac{1}{12}x+\frac{4}{3}$

第二部分：討論“弦”

一、平行弦定理：

> 作拋物線兩相互平行的弦，並取這兩條弦的中點，則：**其中點連線平行於軸**

設一拋物線方程式為 $y=mx^2$

兩平行弦為 $\overleftrightarrow{AB}: y=ax+b$、$\overleftrightarrow{CD}: y=ax+c$

A、B 為 $y=ax+b$ 與 $y=mx^2$ 之交點

→ A、B 的 x 座標分別為

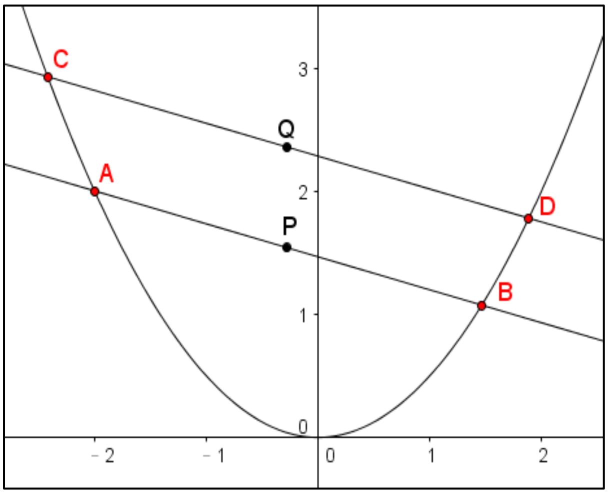
$mx^2-ax-b=0$ 的兩解

由根與係數關係：

A、B 中點 P 之 x 座標為 $\dfrac{\frac{a}{m}}{2}=\dfrac{a}{2m}$

同理：C、D 中點 Q 之 x 座標也為 $\dfrac{a}{2m}$

→ $\overleftrightarrow{QP}$ 平行於對稱軸



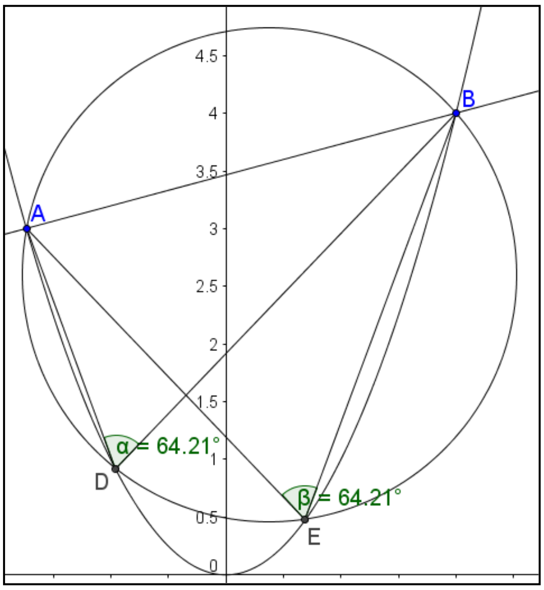
推廣至拋物線得定理七

二、弦交角問題：

若圓周角對到同一個弧，則角度都相等；我將圓周角的概念引入拋物線，新定義一個新的角稱**弦交角**(定義見參之 3)，很顯然的，弦交角不可能遵守這個規律，但他一定有個範圍，此節就以此為中心發展理論。首先，在找出弦交角問題的解法前要先介紹我最初的想法：

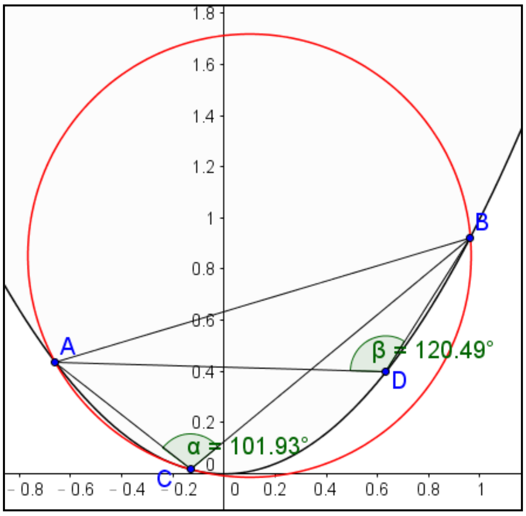
(一) 基本想法：若弦交角與圓扯得上關係，弦交角的大小便可容易的求得

1. 等角問題：(定義見參之 3)



拋物線有弦$\overline{AB}$，作一圓 O 交拋物線於 A、B、D、E，則 $\alpha=\beta=0.5\ \widehat{AB}$

2. 極角問題：(定義見參之 3)



拋物線有弦$\overline{AB}$，作一圓 O 交拋物線於 A、B，切於 C，在拋物線$\widehat{AB}$上取另一點 D，則：$\alpha<\beta$ ($\because$ 同對$\widehat{AB}$但 α 在圓上 β 在圓內)

(二) 等角問題：(定義見參之 3)

1. Qu：有一拋物線 P：$y=0.5x^2$與 $A(-3,4.5)$, $B(2,2)$，$\widehat{AB}^{P}$上有一點 $M(1,0.5)$與另一點 N 其中，$\angle AMB=\angle ANB$，求 N 之座標。

Sol：求過A、B、M 得圓方程式得：$x^2+y^2+1.5x-5.5y=0$

$$\begin{cases} x^2+y^2+1.5x-5.5y=0 \\ y=0.5x^2 \end{cases}$$

$\rightarrow x^2+0.25x^4+1.5x-2.75x^2=0$

$\rightarrow\ x^4-11x^2+6x=0$

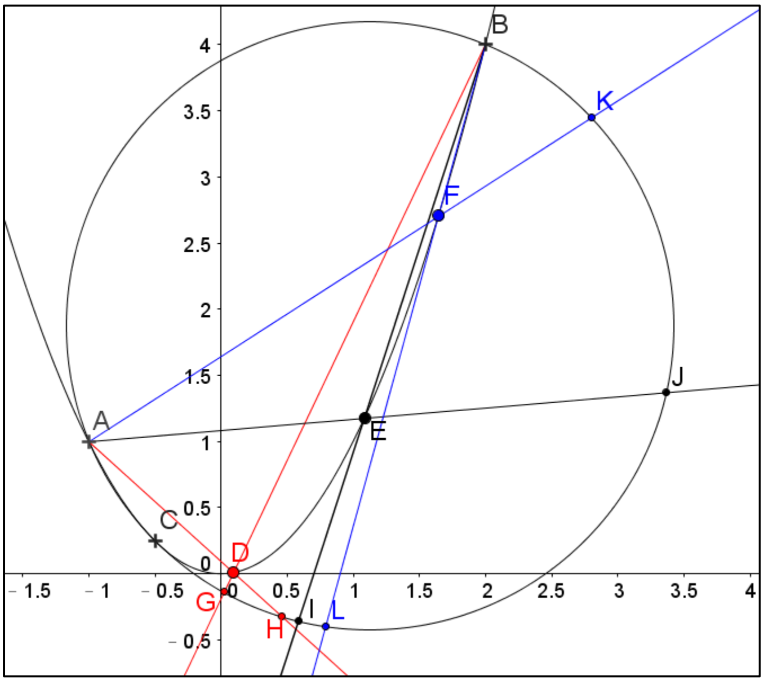
$\because$ A, B, M 皆為其交點 $\therefore x=-3,2,1$ 解為以上方程式之解

$\rightarrow(x+3)(x-2)(x-1)$為 x^4+x^2-5x 的因式

相除易得另一因式為$x\rightarrow N(0,0)$

(三) 極角問題：(定義見參之 3)

1. 用切線解最大值：



如圖：$\overline{AB}$為拋物線 $y = x^2$的一弦

$\angle ACB$ 為同對$\widehat{AB}^P$的最小弦交角

$\angle ADB$、$\angle AEB$、$\angle AFB$ 皆為對$\widehat{AB}^P$的弦交角

隨著弦交角頂點越遠離C，弦交角的角度似乎就跟著變大

所以若要找最大弦交角的頂點座標的話，就是找同對$\widehat{AB}^P$的弦交角中的頂點，距離最小弦交角頂點最遠的，但又不能違背定義，因此最大弦交角的頂點應該極接近B

那角度呢？如果F 極接近 B 的話，$\overleftrightarrow{FB}$不就可視為拋物線過 B 點的切線？

故切線就是解最大值的關鍵

2. 單點切圓定理：

一拋物線，作圓 O 使其交拋物線於 A、B，切於 C，作$\overline{AB}$中垂線，交圓 O 於 M、N，連接$\overleftrightarrow{CM}$、$\overleftrightarrow{CN}$，則兩直線之中：**其中一條垂直對稱軸，另一條平行對稱軸** (定理八)

證明：

(1)引理：圓切拋物線切於相異兩點，則此兩點連線垂直於對稱軸

引理證明：

拋物線方程為 $y = mx^2$，設兩切點座標為$A(a, ma^2), B(b, mb^2)$，

兩切線分別為L、M 且交於 P → L、M同時是圓也是拋物線的切線

則由定理一，$L：y = 2max - ma^2$，$G：y = 2mbx - mb^2$

求 L、M 交點得 $P\left(\frac{a+b}{2}, mab\right)$ ∵ 圓切線段等長 ∴ $AP = BP$

$$\left(a - \frac{a+b}{2}\right)^2 + (ma^2 - mab)^2 = \left(b - \frac{a+b}{2}\right)^2 + (mb^2 - mab)^2$$

化簡得 $a^2 = b^2 \rightarrow a = \pm b$(正不合)，$ma^2 = mb^2$，故 AB 垂直於對稱軸　得證

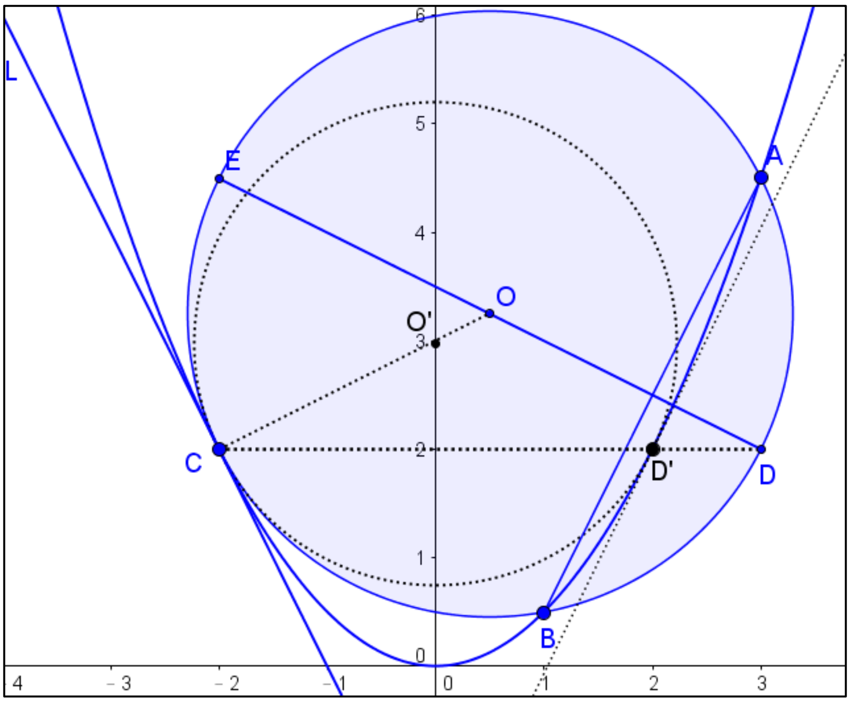
延伸性質：圓的圓心 O(因 OA = OB)與 P(因 $\frac{a+b}{2} = 0$)皆在對稱軸上

(2) 如右圖，圓O切拋物線於C，交於A、B，L為拋物線過C的切線，H為AB上一點，且OH為AB中垂線，$\overrightarrow{OH}$交圓O於D，$\overrightarrow{HO}$交圓於E，則

∵ 圓 O 切拋物線於 C

∴ L 也為圓 O 過 C 的切線

→ 切圓圓心必在垂直L且通過C的直線上



(3) 以C為中心縮小圓O，得圓O′(O′ ∈ OC)使$\overline{AB} \rightarrow 0$，

此時 D 被縮小至D′ (d(D′, AB) ← 0) → 可視拋物線切於另一異於 C 的點 D′

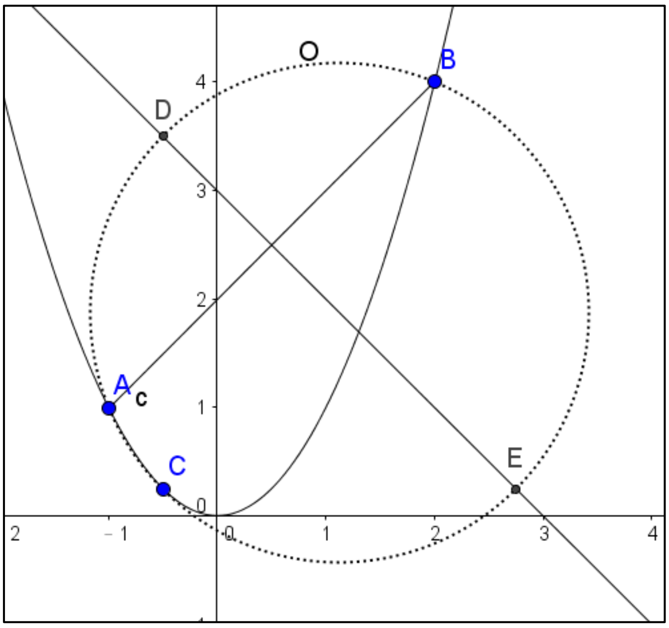
由引理：CD′垂直對稱軸　→ 即 CD 垂直對稱軸

又∠DCE = 0.5∠DAE = 90°， ∴ CE 平行對稱軸　　命題得證

3. 用單點切圓定理解最小值：

Qu：如圖，$\overline{AB}$為拋物線 $y = x^2$的一弦$\left(A(-1,1), B(2,4)\right)$，$\angle ACB$ 為同對$\widehat{AB}^P$

弦交角中的最小角，求 C 座標？



Sol：

(1) 求$\overline{AB}$中垂線方程式得：

$\overleftrightarrow{DE}$：$y = -x + 3$

令 $C(x, x^2)$，則由單點切圓定理知：

$D(x, -x+3)$、$E(-x^2+3, x^2)$

易得圓 O 圓心 O 座標：

$$\left(\frac{x - x^2 + 3}{2}, \frac{-x + 3 + x^2}{2}\right)$$

(2) $\because \overline{OA}(=\overline{OB}) = \overline{OC}$

$$\therefore \sqrt{\left(\frac{x - x^2 + 3}{2} + 1\right)^2 + \left(\frac{-x + 3 + x^2}{2} - 1\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{x - x^2 + 3}{2} - x\right)^2 + \left(\frac{-x + 3 + x^2}{2} - x^2\right)^2}$$

$$\rightarrow \left(\frac{x^2 - x - 5}{2}\right)^2 + \left(\frac{x^2 - x + 1}{2}\right)^2 = \left(\frac{x^2 + x - 3}{2}\right)^2 + \left(\frac{x^2 + x - 3}{2}\right)^2$$

$$\rightarrow (x^2 - x - 5)^2 + (x^2 - x + 1)^2 = (x^2 + x - 3)^2 + (x^2 + x - 3)^2$$

$$\rightarrow 2x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 8x + 26 = 2x^4 + 4x^3 - 10x^2 - 12x + 18$$

$$\rightarrow 8x^3 - 4x^2 - 20x - 8 = 0$$

$$\rightarrow (x+1)(x-2)(2x+1) = 0$$

故得 $x = -\frac{1}{2}$ $\quad\rightarrow\quad C\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$

也就是當 C 在$\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$時，$\angle ACB$ 即為同對$\widehat{AB}^P$的最小弦交角

三、*中心轉弦問題：* (定義見肆之 5)

1. 發現：

定理六告訴我們過焦點做拋物線的弦，並以此為弦邊做阿基米德三角形，則三角形頂點必在準線上，那把焦點變成任意一個拋物線內部的點呢？我們發現阿基米德三角形的頂點軌跡永遠在一直線上，這條直線將受拋物線的縮放與點(中心)位置的改變影響，值得好奇的是這條直線有什麼特殊的性質，方程式又是什麼？

2. 性質：

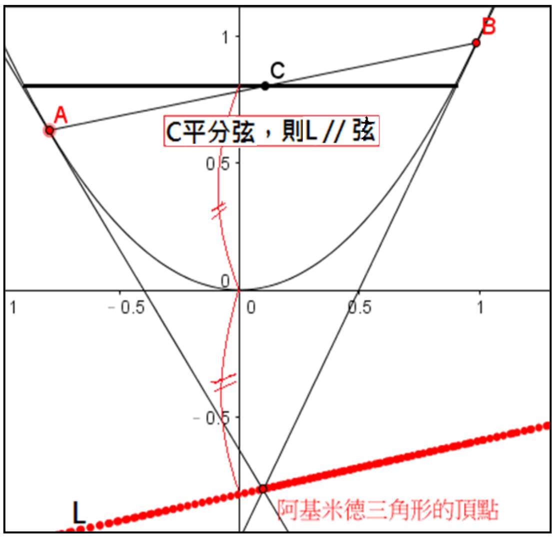
拋物線上有兩動點 A、B，連接得弦$\overline{AB}$並在上面取一定點C，已知以$\overline{ACB}$為弦邊的所有阿基米德三角形(定義見參之 4)頂點集合為一直線(L)：(定理九)

(1) 其中必有一弦垂直於對稱軸：

d(此弦, 拋物線頂點) =

d(L 與對稱軸的交點, 拋物線頂點)

(2) 其中必有一弦被 C 平分：此弦平行於 L



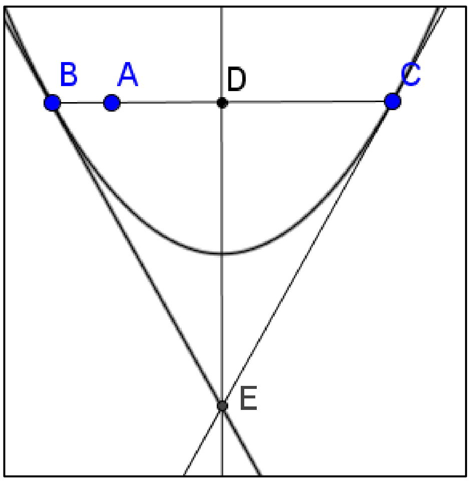
3. 性質證明：

(1) 由定理十之(2)、(3)可推得：阿基米德三角形弦邊的中點與頂點的連線被拋物線所平分------ ①

如右圖，∵ BC 垂直對稱軸 ∴ BC 中點 D 在對稱軸上

E 為阿基米德三角形的頂點，由定理十之(1)：

E 也在對稱軸上 → DE 交對稱軸於拋物線頂點



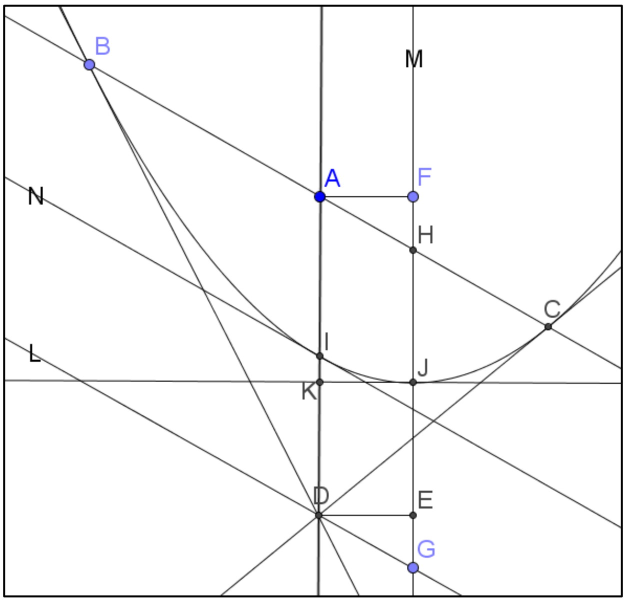
$\mathrm{d}(\mathrm{BC}, \text{拋物線頂點}) = \mathrm{d}(\mathrm{D}, \text{拋物線頂點})$

$= \mathrm{d}(\mathrm{E}, \text{拋物線頂點})$ (∵ ①)

$= \mathrm{d}(\mathrm{L}(\text{頂點集合})\text{與對稱軸的交點}, \text{拋物線頂點})$ 命題得證

(2) 如右圖，拋物線有弦$\overline{BC}$，A 平分此弦，以$\overline{BC}$為弦邊的阿基米德三角形頂點為 D L 為「頂點集合」，M 為拋物線對稱軸，

$\overline{AF}$、$\overline{DE}$垂直M，M、B交於H，拋物線頂點為J，$\overleftrightarrow{KJ}$亦垂直 M，$\overleftrightarrow{AD}$交拋物線於 I，M、L 交於 G，N 為拋物線過 I 的切線：



A. 由定理十知：

$AI = ID(①)$，$FJ = JG(②)$，$N//BC(③)$

由定理四知：N 斜率為 IJ 的兩倍

結合③ → BC 斜率為 IJ 的兩倍 → $-\frac{FH}{AF} = 2\left(-\frac{IK}{KJ}\right)$ → $FH = 2IK$ (④)

B. $EG = FG - AD = 2FJ - 2AI$ (由①、②得知) $= 2IK = FH$ (由④得知)

C. 綜合上述：$AD = FH + HE = HE + EG = HG$

又由定理十之(1)：$AD//HG$

故ADGH 為平行四邊形，命題得證

4. 找出頂點集合的方程式：

Qu：拋物線$y = 0.5x^2$上有兩動點 A、B，連接得弦$\overline{AB}$，並在上面取一定點$C(1,1)$，已知以$\overline{ACB}$為弦邊的所有阿基米德三角形頂點集合為一直線，求此直線的方程式：

Sol：我們當然可以用軌跡的方法進行處理，但算式太過複雜，這條直線的性質變成了解題工具，

剛才在證明第二個性質時，我們就發現BC 斜率為 IJ 的兩倍(圖請見此節 3 − (2))

現在又知道 $L//BC$，L 斜率便為 IJ 的兩倍，應用在此題：

直線的斜率為$(1,0.5)$與頂點$(0,0)$連線斜率的 2 倍，即此直線斜率為 $0.5 \times 2 = 1$

又由定理九之(1)知：直線也通過 $(0,-1)$

如此一來，我們便可簡便的算出此直線的方程式為 $y = x - 1$

陸、結論：

一、定理研究

定理一　過 $y = mx^2$ 上一點 A $(x_1, m{x_1}^2)$作其切線，則：**切線方程式為 $\mathbf{y = 2mx_1x - m{x_1}^2}$**

定理二　A, B, C, D, E分別為二次函數 a, b, c, d, e上的點，a, b, c, d, e 頂點皆為 F，過A, B, C, D, E分別作a, b, c, d, e的切線f, g, h, I, j，其中f, g, h, I, j斜率皆相同，

則：**$\mathbf{A, B, C, D, E, F}$共線**

定理三　**所有拋物線都相似**

定理四　過二次函數上一點 A 作其切線 L，連接 A 與二次函數的頂點 P，

則：**L斜率為$\mathbf{\overline{AP}}$斜率的2倍**

定理五　過拋物線上一點 A 作其切線交其對稱軸於 P，已知 F 為其焦點，

則：$\mathbf{\overline{FA} = \overline{FP}}$

定理六　作拋物線 c 的焦弦$\overline{AB}\left(A、B \in c\right)$，F 為其焦點，分別過 A、B 做切線$\overleftrightarrow{AC}$、$\overleftrightarrow{BC}$，

L 為其準線，再過 A、B 作 L 垂線交其於 M、N，則有下列四種性質：

(1)$\mathbf{C \in L}$　　　　**(2)$\mathbf{\angle ACB = \angle CFB = 90°}$**

(3)BC平分$\mathbf{\angle FCN}$，且AC平分$\mathbf{\angle FCM}$　　　　**(4)C為MN中點**

定理七　作拋物線兩相互平行的弦，並取這兩條弦的中點，則：**中點連線平行於軸**

定理八　一拋物線，作圓 O 使其交拋物線於 A、B，切於 C，作$\overline{AB}$中垂線，交圓 O 於 M、N，連接$\overleftrightarrow{CM}$、$\overleftrightarrow{CN}$，則兩直線之中：**其中一條垂直對稱軸，另一條平行對稱軸**

定理九　拋物線上有兩點 A、B，連接得弦$\overline{AB}$ 並在上面取一定點C，

以$\overline{ACB}$為弦邊的所有阿基米德三角形中：

(1) 滿足上述條件的所有阿基米德三角形頂點的集合為一直線(L)

(2) d(通過 C 垂直於對稱軸的弦, 頂點) = d(L 與對稱軸的交點, 頂點)

(3) $\overline{ACB}$若平行於 L，則**C平分弦 $\mathbf{\overline{AB}}$**

定理十　阿基米德三角形三大定理：(本說明書之參考定理，證明略)

(1) 阿基米德三角**弦邊的中線平行拋物線的軸**

(2) 阿基米德三角形**弦邊的中位線為拋物線的切線**

(3) 阿基米德三角弦邊的**中線、拋物線與弦邊的中位線交於一點**

二、點與拋物線的位置關係：

已知 $y = mx^2$與一點 (x_1, y_1)，則：$x_1{}^2 - \dfrac{y_1}{m}\begin{cases} < 0 \rightarrow \text{點在 } y = mx^2 \text{內部} \\ = 0 \rightarrow \text{點在 } y = mx^2 \text{上} \\ > 0 \rightarrow \text{點在 } y = mx^2 \text{外部} \end{cases}$

三、重根觀點看切線：

(1) $f(x)$為多項式函數，$g(x)$為其在 $x = a_1$時的切線，則$f(x) - g(x)$均可以此一般式表示：

$$k(x - a_1)^m(x - a_2)(x - a_3)\ldots(x - a_n) \quad \left(m \in N \geq 2，k \in R\right)$$

(2) k 為首係數，k 的值由 $f(x)$的首係數決定，無特殊意義，只是拿來使一般式合理化

(3) 一般式可能有數種寫法，但一種$g(x)$就只有一種一般式

(4) 若m為偶數，則a_1不是反曲點；若 m 為奇數，則a_1必為反曲點；且反之皆成立

(5) 若m為偶數，則有兩種情況：(1)解出 $g(x)$為斜直線，則a_1僅代表兩函數的切點 x 座標

(2)解出 $g(x)$為水平線，則代表 $f(x)$在 $x = a_1$時有極值

四、問題與解決：

1. 弦交角等角問題：關鍵在於作圓，並觀察是否符合弦交角的定義
2. 弦交角極角問題：最小角頂點座標可利用單點切圓定理找出，但仍需觀察是否符合弦交角的定義，最大角頂點座標則找距離最小角頂點座標最遠且仍符合定義者(若欲找出角度，則可利用反三角函數)
3. 中心轉弦問題：利用直線的性質可以非常簡便的算出此直線的方程式，進而避免許多經由軌跡而產生的複雜運算

柒、未來展望：

一、發展出更多有關拋物線的定理

二、利用重根觀點來解更特殊函數圖形的切線，如指數函數、對數函數與三角函數…等

三、發展重根觀點解多項式函數的切線時的規律性，統整後使其更為好用

四、將弦交角做更多不同的延伸使其在拋物線上更為實用

五、研究拋物線各種特殊點的軌跡方程式，歸納並整理之

六、深入研究各種拋物線上的三角形

七、利用窮盡法求拋物線的長

捌、參考資料：

資料名	作者	出版社	出版/編寫日期
https://zh.wikipedia.org/wiki/%E6%8A%9B%E7%89%A9%E7%BA%BF	未知	無	2015.02.08 (2015.08 閱)
一百個著名初等數學問題歷史與解答： 第 51、56、58 題	海因里希‧德里	凡異出版	2001.08 (2015.09.08 閱)
http://mathcenter.ck.tp.edu.tw/MCenter/Ctrl/OpenFileContent.ashx?id=B3CTDD3T4R6T844TGTB3Q3DR3QQD6QTQ4HG4BTQBRD36QTRR84F666BWQ2DD364T	李政豐老師、 陳昭地老師	無	未知 (2015.09.26 閱)
http://blog.xuite.net/wilson890801/blog/345990498 選擇第 27 題	自己	無	2015.09.28 (2015.09.28 閱)
http://wenku.baidu.com/view/d875cb07bed5b9f3f90f1c73.html	未知	無	2012.08.29 (2015.10.22 閱)
數學傳播 34 卷 2 期, pp. 76-81 http://w3.math.sinica.edu.tw/math_media/d342/34205.pdf	蘇化明、黃有度	未知	未知 (2016.01.01 閱)

【評語】050401

這篇文章從研究拋物線的切線開始，它未使用微積分的知識，直接由切線與拋物線恰好交於一點的方法進入，推導出切線方程式，之後並探討焦弦切線定理。

接著將思路延伸到多項式函數的切線，以重根解讀水平切線並討論極值問題。甚至處理開立方函數的切線方程式。這些部分已經有微積分初步的想法，將來有機會學習微積分，必能更深入地了解其用意。

這篇論文另有第二部分，討論拋物線的平行弦、弦交角、單點切圓、中心轉弦等相關性質、極其用心。整體來說是一篇用心的作品，日後累積更多數學知識之後，應該可以深入數學殿堂。