中華民國第56屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

030426

共軛三角形與其頂內、邊內三角形之性質探討

學校名稱：桃園市立龍潭國民中學

作者：	指導老師：
國二 林奕心	林廷樂
國二 林湘霖	徐陟岳

關鍵詞：內心、角平分線、共軛

摘要

三角形內心中，我們發現新理論將內心沿角平分線至頂點放大"特定倍率"產生新三角形其重心與原三角形內心共點。內心沿角平分線點放大另一"倍率"產生另一三角形又和原三角形內心共點，並稱為頂內與邊內三角形，兩三角形不僅全等且圖形疊代形成完美心對稱圖形。再利用向量理論創出新三角形通式使原三角形垂心或外心變換成新三角形重心。內心能變重心，重心也能變內心嗎?我們再找出並與原三角形合稱三共軛三角形，討論三者關係。最後在角平分線上找出和原三角形共圓的三角形，發現原三角形內心和新三角形垂心共點且兩三角形外心亦共點的特殊現象，進行重複疊作三角形最終將收斂為正三角形，並修正第 52 屆科展高中組心心相印類似研究的錯誤。

壹、　研究動機

在寒假期間，我們研讀了第54屆中小學科展第一名的作品，他們是以重心作發展，所以我們就想說從內心試試看，於是再參考陳建燁老師”角比例共軛點”這份報告，學到"共軛"的觀念，就開始了我們的研究，一開始我們將原三角形由內心到頂點的距離放大對應邊長倍畫出三點，連線形成放大三角形，發現原三角形與放大三角形內心和重心共點，我們定義為共軛三角形，後來再以代數式證明出任意三角形也是如此，驚喜之餘我們去探討共軛三角形之間的面積比例關係，後來還發展出其頂內與邊內三角形，且此兩三角形呈現完美的心對稱圖形，面積比為$1:1$，不過我們對此仍不滿足，於是又參考了第52屆科展高中組之作品”心心相印”以及有關三角形的各類高中書籍(南一、三民、龍騰出版社)，後來我們利用向量理論作出了一套創新的通式，可以把垂心、外心、內心都換成重心，並且還研究出三共軛三角形彼此內心、重心互換以及面積比例的探討，最後我們還作出了共圓三角形和其重複疊作圖形的性質，不過在交出報告之前，我們終於發現一個一直困擾我們很久的問題的答案，我們找出了第 52 屆科展高中組”心心相印”的錯誤之處，詳細舉出並且訂正，作為一個震撼的結束。

貳、 研究目的

一、以尺規作圖法探討特殊三角形將它放大對應邊長倍後之三角形的重心與內心的關係

(一) 探討邊長為3，4，5單位長之三角形將它放大對應邊長倍後之三角形的重心與原三角形內心的關係。

(二) 探討邊長比1，1，$\sqrt{2}$單位長之三角形將它放大對應邊長倍後之三角形的重心與原三角形內心的關係。

(三) 探討邊長比1，$\sqrt{3}$，2單位長之三角形將它放大對應邊長倍後之三角形的重心與原三角形內心的關係。

(四) 探討任意三角形將它放大對應邊長倍後之三角形的重心與原三角形內心的關係

(五) 由原三角形內心與角平分線延伸，連接至大三角形頂點所切割之三塊三角形中，小三角形與大三角形的面積比探討。

(六)由原三角形內心與角平分線延伸連接至大三角形頂點所切割之三塊大三角形面積比。

(七) 共軛三角形中大三角形和原三角形的面積關係。

二、以代數式證明確認出：任意三角形將它放大對應邊長倍後之三角形的重心與原三角形內心的關係

三、探討任意三角形:頂內三角形與邊內三角形兩者之面積比例關係，並形成完美的心對稱圖形關係

四、共軛三角形之中，大三角形和原三角形的面積關係再論

五、垂心，內心，重心，外心，此四心互換之向量座標研究

六、三共軛三角形彼此之間內心與重心互換性質探討

七、將原三角形做外接圓，並以原三角形三條角平分線延長，和原三角形的外接圓相交所得到的三個交點，再將這 3 個點連線形成另一個三角形，此三角形與原三角形的關係探討

八、重複疊作上述第七點之共圓的三角形彼此之間的性質探討

九、找出第52屆科展高中組"心心相印"類似研究錯誤

參、 研究設備及器材

筆、紙、描圖紙、電腦(AutoCAD，GeoGebra)、三角板、圓規、直尺

肆、研究過程與方法

一、名詞定義：

(一) 共軛三角形：從原三角形內心至三頂點的距離，放大對應邊長的倍率，將其連線形成的三角形(原三角形內心與放大三角形重心共點)，則我們定義此兩三角形為共軛三角形(如圖 1)。

(二)頂內三角形：和原三角形形成共軛三角形的這個三角形，稱為頂內三角形，因為此三角形，係由原三角形內心和原三角形三頂點，向外延伸特定倍率後(註 1)所作成的三角形(如第4頁圖1：$\Delta A'B'C'$)。

(註 1：所謂的特定倍率係指乘上其對應邊長倍數之倍率)

(三)邊內三角形：從原三角形的內心至三個角平分線點的距離，放大兩側邊長相加的倍率，將三點連線形成的三角形，則此三角形為邊內三角形，因為此三角形，係由原三角形內心和三邊(角平分線點)，向外延伸特定倍率(註 2)所作成的三角形，故稱為邊內三角形。

(註2:所謂的特定倍率，係指乘上其兩側邊長相加的倍率)

(四)三共軛三角形：原三角形內心與其放大三角形重心共點，稱為共軛三角形，再加入原三角形的內心至三頂點連線所切割出的三塊三角形中，各重心連線所形成之三角形，此三角形的內心與原三角形重心共點，因為這三個三角形有著內心變重心、重心變內心的互換關係，因此定義此三個三角形為三共軛三角形。

二、尺規作圖法探討特殊三角形與其放大對應邊長倍後之三角形的重心與原三角形內心關係

(一)邊長 3，4，5 的原三角形內心與其放大後三角形之重心共點(圖 1)

△A’B’C’：放大三角形

△ABC：原三角形

D. E. F：角平分線點

D’. E’. F’：中點

I：原三角形內心

G：放大三角形重心

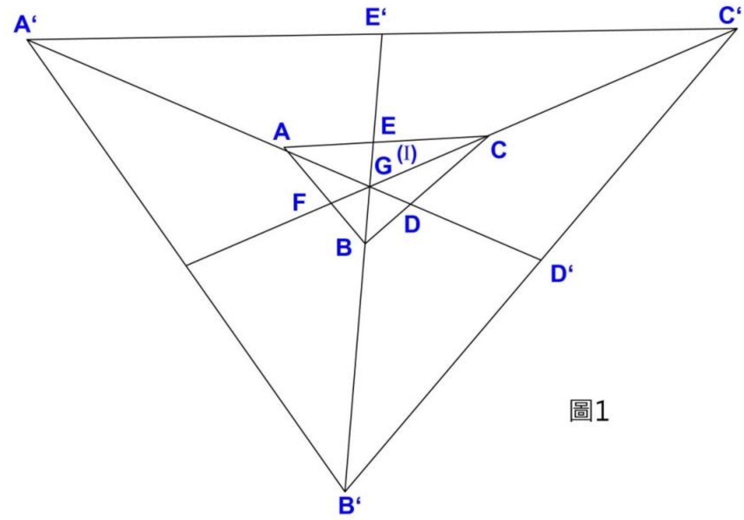
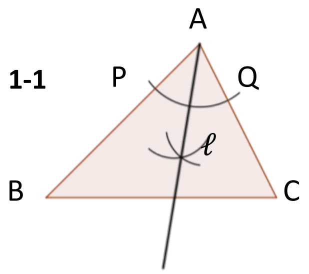


圖1

1.尺規作圖:先作出原三角形的內心

(1) 作出△ABC 之角平分線：

圖 1-1



①以 A 點為圓心，適當的長度為半徑畫弧

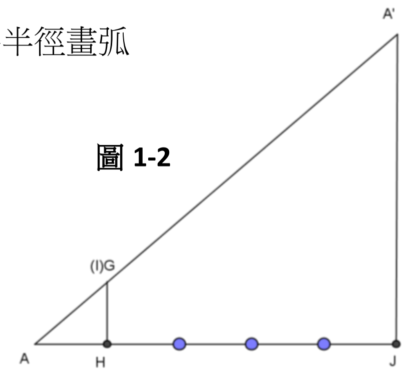
②交角的兩邊於P、Q兩點

③再以P、Q兩點為圓心，大於$\frac{1}{2}$PQ 的弧長為半徑畫弧

④兩弧交於ℓ 點

⑤連接$\overrightarrow{A\ell}$為角平分線

圖 1-2



(2) ∠B、∠C 之角平分線亦可照此法畫出

(5)三條角平分線之交點即為 ABC 之內心 (點 I)

2.由內心至各頂點之長度為基準，並且將此長度放大其所對應的三角形邊長倍，以此稱為"延伸長度"

(1)先作出$\overline{GA'} = \overline{GA} \times 4$

①任意作出一角度，頂點標示為 A，在角的一邊作出1: 4的倍率，分別為

$\overline{AH}$=1 和$\overline{HJ}$=4個單位長

②在角的另一邊，以 A 點為圓心，並以頂點 A 到內心 I 半徑，畫出$\overline{AI}$

③利用平行線截等比例性質，作出$\overline{GA'} = \overline{GA} \times 4$

(2) 內心與 B、C 兩點之距離放大對應邊長倍亦可照此法畫出

(3) 連接 A'、B'、C'，△A'B'C'即為放大對應邊長倍後之三角形(畫完及前頁之圖 1)

※此後作圖皆以上述之方法作出，亦不贅述。

本文尺規作圖法，作圖研究後發現”原三角形內心和放大後三角形的重心將重合”。

(二) 探討等腰直角三角形與其放大對應邊長倍之三角形重心與原三角形內心的關係，即邊長為1，1，$\sqrt{2}$單位長的原三角形內心與其放大後三角形重心共點

證明: I 為△ABC的內心，G 為△$A'B'C'$的重心

1. 利用尺規作圖法
2. 根據尺規作圖做出長度為1，1，$\sqrt{2}$單位長(圖 3.4) ，再畫出1，1，$\sqrt{2}$單位長的原三角形△ABC，
3. 再畫出△ABC 之角平分線$\overline{AD}$、$\overline{BE}$、$\overline{CF}$得到點 I 為△ABC之內心，同樣由內心至各頂點之長度為基準，並且將此長度放大其所對應的三角形邊長倍，以此稱為"延伸長度"，作出△$A'B'C'$
4. 經尺規作圖法檢測$\overline{B'C'}$之中點，$\overline{A'C'}$之中點，$\overline{A'B'}$之中點後，發現D'為$\overline{B'C'}$之中點，E'為$\overline{A'C'}$之中點，F'為$\overline{A'B'}$之中點，即點G為△ $A'B'C'$之重心 (圖 2)。

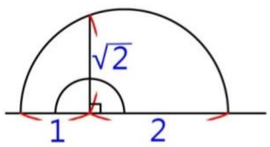


圖 3

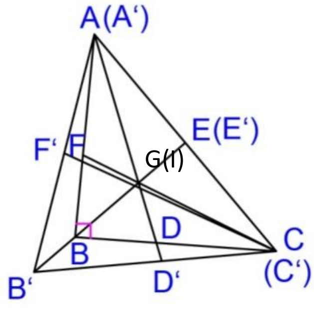


圖 2

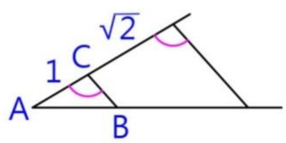


圖 4

(三) **探討邊長為1，$\sqrt{3}$，2單位長之三角形與其放大對應邊長倍後之三角形的重心與原三角形內心的關係(圖 6)**

仍發現邊長為1，$\sqrt{3}$，2 單位長**的原三角形內心與放大三角形重心共點**

證明:

1. G為△ ABC之內心，根據尺規作圖(圖 5.6.7)得:$\overline{BF}$.$\overline{AE}$.$\overline{DC}$ 為△ ABC 之三角平分線，即 G點為△ ABC 之內心，

2. 同理經尺規作圖法檢測$\overline{B'C'}$之中點，$\overline{A'C'}$之中點，$\overline{A'B'}$之中點後，發現D′為$\overline{B'C'}$之中點，E′為$\overline{A'C'}$之中點，F′為$\overline{A'B'}$之中點，即點I為△ A′B′C′之重心，E′為$\overline{B'C'}$

   之中點，D′

   為 $\overline{A'B'}$ 之中點，F′為$\overline{A'C'}$之中點，即I 為 △ A′B′C′之重心。

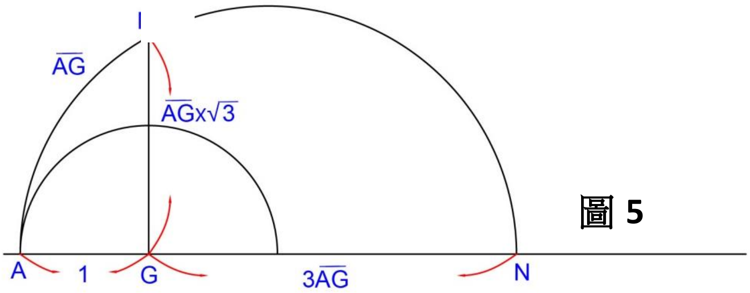


圖 5

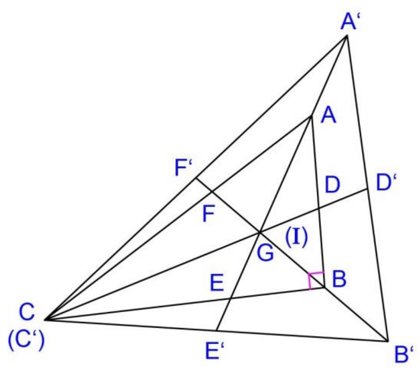


圖 6

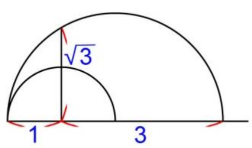


圖 7

△ ABC: 原三角形　　△ A′B′C′: 放大三角形　　D. E. F: 角平分線點

D′. E′. F′: 中點　　I: 內心(原三角形)　　G: 重心(放大三角形)

(四) **探討任意三角形:頂內三角形與邊內三角形兩者之面積比例關係，並形成完美的新對稱圖形**

請參考第11頁 四、

(五) 三角形彼此間的面積比探討

探討由原三角形內心與角平分線延伸，連接至大三角形頂點所切割之三塊三角形中小三角形與大三角形彼此間的面積比

由第 11 頁三、(二)得知△ABC 之內心與△A'B'C'重心共點(圖 8)

在△ABC 與△A'B'C'之中

$\triangle AGB：\triangle A'GB' = \frac{1}{2}k\ell\ \sin\theta：\frac{1}{2}(a\ell)(bk)\sin\theta\ =\ 1：ab$

$\triangle AGC：\triangle A'GC' = \frac{1}{2}\ m\ell\ \sin\delta：\frac{1}{2}\ (a\ell)(cm)\ \sin\delta\ = 1：ac$

$\triangle CGB：\triangle C'GB' = \frac{1}{2}km\ \sin\Phi：\frac{1}{2}(kb)(cm)\ \sin\Phi\ = 1:\ bc$

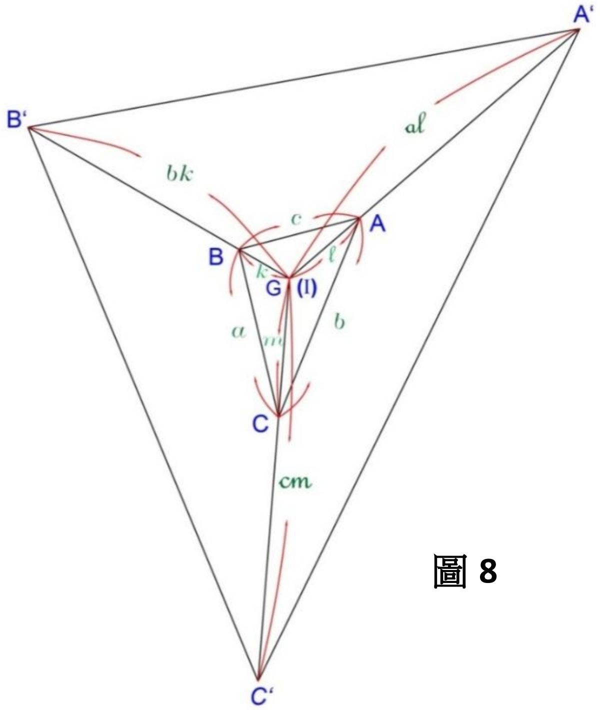


圖 8

得到由原三角形之角平分線延伸連接大三角形頂點所切割之三塊三角形中

小三角形與大三角形面積比為 1：兩側的邊長乘積倍

(六)探討由原三角形內心與角平分線延伸連接至大三角形頂點所切割之三塊大三角形面積比

(圖8)

由(二)的證明中△A'B'C'之中

△A'GC'的面積 =△A'GB'的面積 = B'GC'的面積=1: 1: 1

所以得到△A'B'C'的重心為點 G

所以我們可得到原三角形從內心分別與各角的角平分線延伸出與各對應邊長相等倍數的”延伸長度 ”時可分別在延長線中截出三點，將此三點連接所形成之三角形其重心與原三角形之內心共點，故原內心與連接大三角形頂點所切割之三塊大三角形面積比為**1：1：1**

(七)在共軛三角形中放大三角形和原三角形的面積關係(圖**9**)

$\triangle CGB=\frac{ar}{2}$,$\triangle AGC=\frac{br}{2}$,$\triangle AGB=\frac{cr}{2}$---- ①

(其中 r 為原三角形的內切圓半徑)

由第 7 頁 二、(五)知: $\triangle A'G'B'=ab\times\triangle AGB$,將①式代入，得

$\triangle A'G'B'=ab\times\left(\frac{cr}{2}\right)=\frac{abcr}{2}$同理

$\triangle A'G'C'=ac\times\left(\frac{br}{2}\right)=\frac{abcr}{2}$

$\triangle C'G'B'=bc\times\left(\frac{ar}{2}\right)=\frac{abcr}{2}$

故$\triangle A'G'B'\times\triangle A'G'C'\times\triangle C'G'B'=\frac{a^3b^3c^3r^3}{8}$---- ②

$\triangle AGB\times\triangle AGC\times\triangle CGB=\frac{abcr^3}{8}$ ------③

$\frac{②}{③}=a^2b^2c^2=(abc)^2$

我們得到 3 塊大三角形面積相乘是 3 塊小三角形面積相乘的"原三角形邊長相乘的平方倍”也就是三塊大三角形面積相乘與三塊小三角形面積相乘，僅和原三角形的三邊長相乘的平方有關。

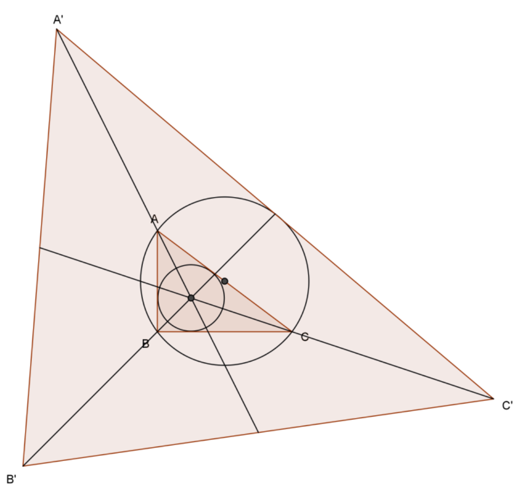
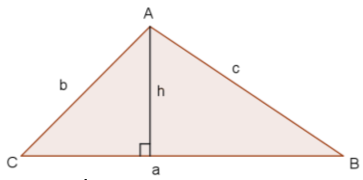


圖 **9**

三、探討任意三角形將它放大對應邊長倍後之三角形的重心與原三角形內心重合：利用數學代數式運算證明之

(一)利用$\triangle ABC$ 面積 $=\frac{ah}{2}=\frac{a\times b\ \sin\angle ACB}{2}$(圖 8)

$\because(\sin\angle ACB=\frac{h}{b}\Rightarrow\ b\ \sin\angle ACB=\ h)$



$\triangle ABC\ =\frac{ah}{2}=\frac{a\times b\ \sin\angle ACB}{2}$

同理$\triangle ABC\ =\frac{1}{2}ab\ \sin\ \angle ACB=\frac{1}{2}bc\ \sin\ \angle CAB=\frac{1}{2}ac\ \sin\ \angle ABC$

$\triangle ABC$：原三角形

$\triangle A'B'C'$：放大三角形

I：原三角形之內心

G：大三角形之重心

ℓ：$\overline{AG}$　　　　k：$\overline{BG}$

m：$\overline{CG}$

θ：$\angle AGB$

Φ：$\angle BGC$

δ：$\angle AGC$

$a\ell$：$\overline{A'G}$

bk：$\overline{B'G}$

cm：$\overline{C'G}$

c：$\overline{AB}$

a：$\overline{BC}$

b：$\overline{AC}$

S$\triangle$AGB：cs

S$\triangle$AGC：bs

S$\triangle$BGC：as

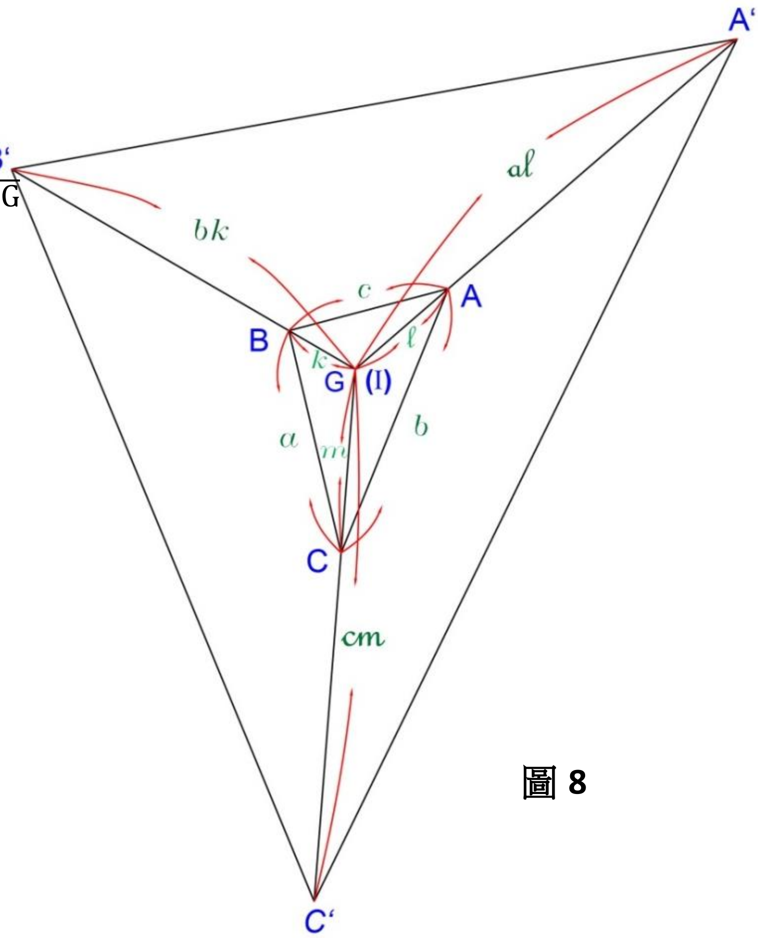


圖 8

(二)∵點 G 為 $\triangle ABC$ 之內心，故點 G到$\triangle ABC$三邊等距離(角平分線定義)

$\therefore \triangle AGB : \triangle AGC : \triangle BGC = \frac{1}{2}ch : \frac{1}{2}bh : \frac{1}{2}ah = c : b : a$

又$\triangle AGB : \triangle A'GB' = \frac{1}{2}k\ell \ \sin\theta : \frac{1}{2}(a\ell)(bk)\sin\theta \ = \ 1 : \ ab = c : \ abc$

$\triangle AGC : \triangle A'GC' = \frac{1}{2} \ m\ell \ \sin\delta : \frac{1}{2} \ (a\ell)(cm) \ \sin\delta \ = 1 : ac = b : \ abc$

$\triangle CGB : \triangle C'GB' = \frac{1}{2}km \ \sin\Phi : \frac{1}{2}(kb)(cm) \ \sin\Phi \ = 1 : bc = a : \ abc$

所以當 $\triangle AGB : \triangle AGC : \triangle BGC = \frac{1}{2}ch : \frac{1}{2}bh : \frac{1}{2}ah = c : b : a$時

則$\triangle A'B'C'$之中$\triangle A'GC'$的面積 :$\triangle A'GB'$的面積：$\triangle B'GC'$的面積 $= 1:1:1$

所以得到$\triangle A'B'C'$的重心為點 G

即$\mathbf{I(G)}$為$\triangle \mathbf{ABC}$的內心，且亦為$\triangle \mathbf{A'B'C'}$的重心，得證。

四、探討任意三角形:頂內三角形與邊內三角形兩者之面積比例關係，並形成完美的心對稱圖形(圖10)

先定義本文所設定之頂內三角形及邊內三角形的名詞定義。

(一) 頂內三角形：和原三角形形成共軛三角形的這個三角形，稱為頂內三角形，因為此三角形，係由原三角形內心和原三角形三點，向外延伸特定倍率後(註 1)所作成的三角形(如第4頁圖1：$\Delta A'B'C'$)。

(註 1：所謂的特定倍率係指乘上其對應邊長倍數之倍率)

(二) 邊內三角形：從原三角形的內心至三個角平分線點的距離，放大兩側邊長相加的倍率，將三點連線形成的三角形，則此三角形為邊內三角形，因為此三角形，係由原三角形內心和三邊(角平分線點)，向外延伸特定倍率(註 2)所作成的三角形，故稱為邊內三角形。

(註2:所謂的特定倍率，係指乘上其兩側邊長相加的倍率)

頂內三角形$\Delta \mathbf{A'B'C'}$面積：邊內三角形$\Delta \mathbf{A''B''C''}$面積 $= \mathbf{1:1}$

求證：$\Delta A'B'C' \cong \Delta A''B''C''$

證明：1.因為$\overline{IA}$：$\overline{ID} = (b+c)$：a(角平分線段分割比例)

令$\overline{IA} = (b+c) \times k$，$\overline{ID} = a \times k$，$k \in R$

$\overline{IA'} = a \times \overline{IA} = a \times (b+c)k -$ ①

$\overline{IA''} = (b+c) \times \overline{ID} = (b+c) \times a \times k -$ ②

① = ②

故$\overline{IA''} = \overline{IA'}$,同理$\overline{IB''} = \overline{IB'}$,又$\angle A'IB' = \angle A''IB''$(對頂角)

所以$\Delta IA'B' \cong \Delta IA''B''$(SAS)

2.同理$\Delta IA'B' \cong \Delta IA''B''$且$\Delta IB'C' \cong \Delta IB''C''$

又 $\Delta A'B'C' = \Delta IA'B' + \Delta IB'C' + \Delta IC'A'$

$\Delta\ A''B''C'' = \Delta IA''B'' + \Delta IB''C'' + \Delta IC''A''$

故$\Delta A'B'C' \cong \Delta A''B''C''$

且我們發現 G 點成為該星形圖形中完美的心對稱點

(∵ A'和A''的中點為 I 且B'和B''的中點為 I 且C'和C''的中點為 I)

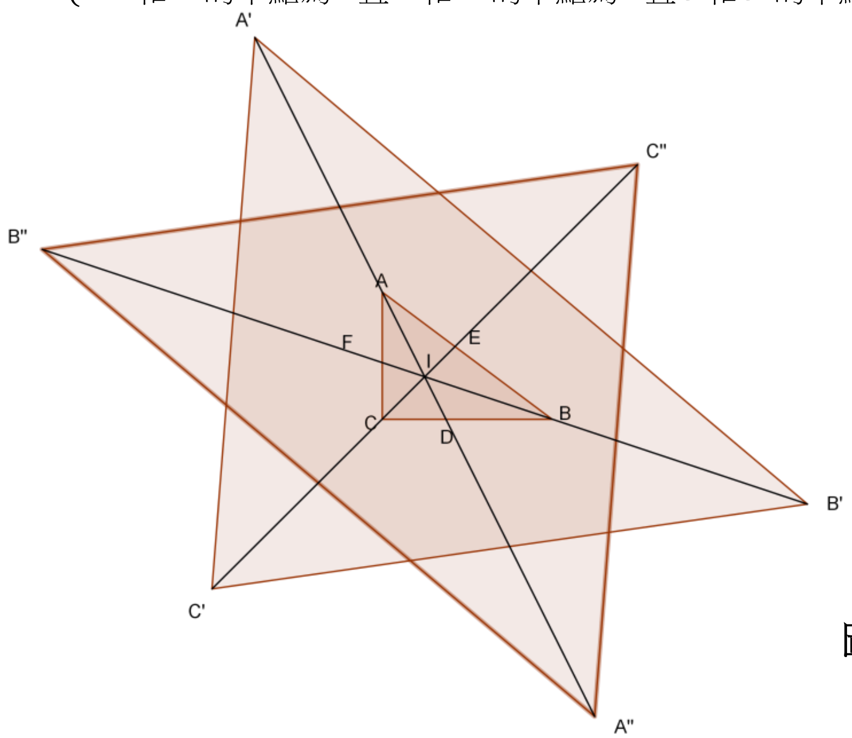


圖 10

伍、研究結果與討論

五、共軛三角形兩者之間的面積比再論(圖 9)

r 代表原三角形的內切圓半徑，R 代表原三角形的外接圓半徑

$\triangle \mathrm{GAB}$： $\triangle \mathrm{GA'B'} = 1$：$\mathrm{ab} \Rightarrow \triangle \mathrm{GA'B'} = \mathrm{ab} \times \triangle \mathrm{GAB} = \mathrm{ab} \times \frac{\mathrm{cr}}{2} = \frac{\mathrm{abcr}}{2}$

$\triangle \mathrm{GBC}$： $\triangle \mathrm{GB'C'} = 1$：$\mathrm{bc} \Rightarrow \triangle \mathrm{GB'C'} = \mathrm{bc} \times \triangle \mathrm{GBC} = \mathrm{bc} \times \frac{\mathrm{ar}}{2} = \frac{\mathrm{abcr}}{2}$

$\triangle \mathrm{GCA}$： $\triangle \mathrm{GC'A'} = 1$：$\mathrm{ac} \Rightarrow \triangle \mathrm{GC'A'} = \mathrm{ac} \times \triangle \mathrm{GCA} = \mathrm{ac} \times \frac{\mathrm{br}}{2} = \frac{\mathrm{abcr}}{2}$

$\frac{\mathrm{abcr}}{2} + \frac{\mathrm{abcr}}{2} + \frac{\mathrm{abcr}}{2} = \triangle \mathrm{A'B'C'} = \frac{3}{2}\mathrm{abcr} \Rightarrow \frac{2\triangle \mathrm{A'B'C'}}{3\mathrm{r}} = \mathrm{abc}$

$\triangle \mathrm{ABC} = \frac{\mathrm{abc}}{4\mathrm{R}} \Rightarrow \triangle \mathrm{ABC} \times 4\mathrm{R} = \mathrm{abc}$

$\frac{2\triangle \mathrm{A'B'C'}}{3\mathrm{r}} = \triangle \mathrm{ABC} \times 4\mathrm{R} = \mathrm{abc}$

$\triangle \mathrm{ABC} \times 4\mathrm{R} = \frac{2\triangle \mathrm{A'B'C'}}{3\mathrm{r}}$

$\triangle \mathrm{ABC} \times 12\mathrm{Rr} = 2 \triangle \mathrm{A'B'C'}$

$6\mathrm{Rr} = \frac{\triangle \mathrm{A'B'C'}}{\triangle \mathrm{ABC}}$ (R 代表外接圓半徑，r 代表內切圓半徑)

得到:$\boldsymbol{\triangle \mathrm{A'B'C'} : \triangle \mathrm{ABC} = 6\mathrm{Rr} : 1}$

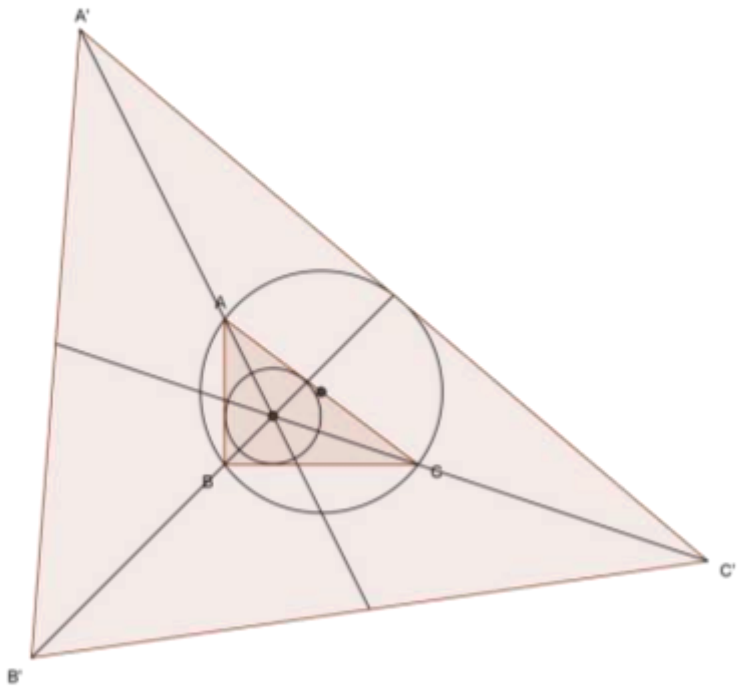


圖 9

我們發現:共軛三角形的這兩者三角形，面積之間的關係，僅和原三角形的外接圓半徑以及內切圓半徑相乘有關。

六、垂心，內心，外心，重心，此四心互換之向量座標理論研究

在偶然的機會中，我們有幸地發現將三角形中三條角平分線部分長度(內心到三頂點線段長，乘上對邊的邊長倍後)，即可將原三角形內心轉換成另一個三角形的重心，那麼三角形中其他的心(垂心、外心)是否也有機會，運用此方法轉換成另一個三角形的重心呢？要推導出此種關係，我們先尋找有關垂心與外心的資料後，發現在高中第三冊第三章—平面向量理論，其中有詳細說明，於是我們開始研究並引入外心與垂心的向量及向量的座標表示法:

- 垂心 H:在三角形中，三條高的交點，稱為垂心。(圖 11)
- 外心 O:在三角形中三條垂線的交點，稱為外心。(圖 12)

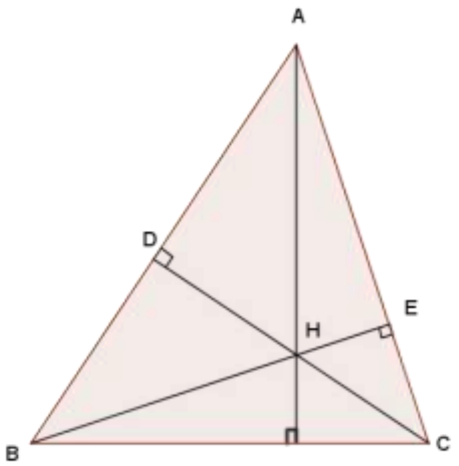


圖 11

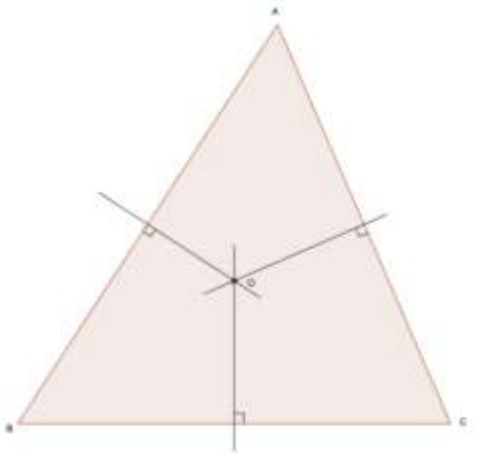


圖 12

目前各類書籍，僅止於將重心及內心以直角坐標寫出重心$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}，\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$，及內心$\left(\frac{ax_1+bx_2+cx_3}{3}，\frac{ay_1+by_2+cy_3}{3}\right)$座標，重心向量:$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$ 且 $\overrightarrow{0}=\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}$，內心向量:$\overrightarrow{OI}=\frac{a}{a+b+c}\overrightarrow{OA}+\frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{OB}+\frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{OC}$且$\overrightarrow{0}=a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OC}$，如果我們能夠將垂心 H 調整成某一個$\triangle A'B'C'$的重心，那麼必然會出現$\overrightarrow{HA'}+\overrightarrow{HB'}+\overrightarrow{HC'}=\overrightarrow{0}$ 那麼這個時候，原$\triangle ABC$的垂心 H 就是另一個$\triangle A'B'C'$的重心了，還有如果能夠將外心 O 調整成$\triangle A'B'C'$的重心，則同樣也會出現$\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OB'}+\overrightarrow{OC'}=\overrightarrow{0}$那麼這個時候原$\triangle ABC$的外心就是

另一個$\triangle A'B'C'$的重心了。

所以接下來我們試著推導出三角形外心、垂心向量座標:

(一)為了探討三角形的垂心，如何仿照內心延伸的方法，變成另一個三角形的重心，首先先導入垂心的向量表示法: (垂心：三條高的交點，並假設$\overline{BC} = a, \overline{CA} = b, \overline{AB} = c$)

1.

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| \times |\overrightarrow{AC}| \times \cos\theta$$

$$= c \times b \times \left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)$$

$$= \frac{b^2+c^2-a^2}{2}$$

2.

三角形的餘弦定理知(圖 13)

$$\cos\theta = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

代回左式

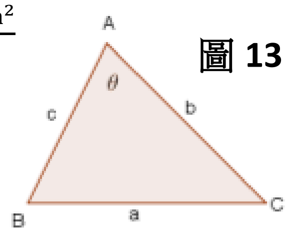


圖 13

3.

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}| \times |\overrightarrow{AB}| \times \cos 0° = |\overrightarrow{AB}|^2$$ (圖 14)

故 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}|^2$

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AC}| \times |\overrightarrow{AC}| \times \cos 0° = |\overrightarrow{AC}|^2$$

故 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AC}|^2$

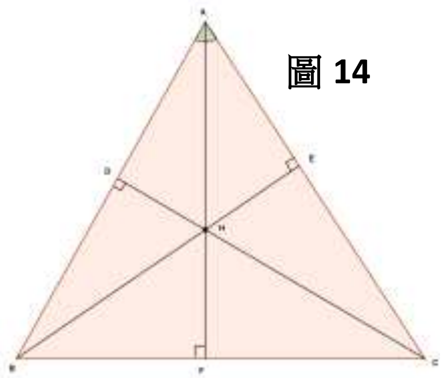


圖 14

$$\begin{cases} \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}| \times |\overrightarrow{AH}| \times \cos\angle BAH = |\overrightarrow{AB}| \times |\overrightarrow{AD}| \\ \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| \times |\overrightarrow{AC}| \times \cos\theta = |\overrightarrow{AB}| \times |\overrightarrow{AD}| \end{cases}$$

故 $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ 同理 $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

設垂心為 H，令$\overrightarrow{AH} = \mathcal{X}\overrightarrow{AB} + \mathcal{Y}\overrightarrow{AC}$

$$\begin{cases} \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AB} = (\mathcal{X}\overrightarrow{AB} + \mathcal{Y}\overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AB} = \mathcal{X}|\overrightarrow{AB}|^2 + \mathcal{Y}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{b^2+c^2-a^2}{2} \\ \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AC} = (\mathcal{X}\overrightarrow{AB} + \mathcal{Y}\overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AC} = \mathcal{X}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \mathcal{Y}\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{b^2+c^2-a^2}{2} \end{cases}$$

所以 (由 1. 可知)

$$\begin{cases} c^2\mathcal{X} + \left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2}\right)\mathcal{Y} = \frac{b^2+c^2-a^2}{2} \\ \left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2}\right)\mathcal{X} + b^2\mathcal{Y} = \frac{b^2+c^2-a^2}{2} \end{cases}$$ 解聯立並求出

$\mathcal{X}=\frac{(b^2+c^2-a^2)(b^2+a^2-c^2)}{2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-(a^4+b^4+c^4)}$

$\mathcal{Y}=\frac{(b^2+c^2-a^2)(a^2+c^2-b^2)}{2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-(a^4+b^4+c^4)}$

4.我們姑且先以$\mathcal{X},\mathcal{Y}$來表示$\overrightarrow{AB}$和$\overrightarrow{AC}$前方的係數，即$\overrightarrow{AH}=\mathcal{X}\overrightarrow{AB}+\mathcal{Y}\overrightarrow{AC}$，再調整向量起始點，改以 O 為起點

則 $\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OA}=\mathcal{X}(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+\mathcal{Y}(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})$

$\overrightarrow{OH}=(1-\mathcal{X}-\mathcal{Y})\overrightarrow{OA}+\mathcal{X}\overrightarrow{OB}+\mathcal{Y}\overrightarrow{OC}$ 再將 O 代號，改成 H 為代號

∴ $\overrightarrow{HH}=\vec{0}=(1-\mathcal{X}-\mathcal{Y})\overrightarrow{HA}+\mathcal{X}\overrightarrow{HB}+\mathcal{Y}\overrightarrow{HC}$

再假設

$\overrightarrow{HA'}=(1-\mathcal{X}-\mathcal{Y})\overrightarrow{HA}$

$\overrightarrow{HB'}=\mathcal{X}\overrightarrow{HB}$

$\overrightarrow{HC'}=\mathcal{Y}\overrightarrow{HC}$ 得 $\overrightarrow{HA'}+\overrightarrow{HB'}+\overrightarrow{HC'}=\vec{0}$，並連接 A'B'C'，形成ΔA'B'C'

5. 此時我們就可將 H 點看成另一 $\triangle A'B'C'$的重心了

因為在$\triangle A'B'C'$，只有重心到三頂點之向量和為 $\vec{0}$

即$\overrightarrow{HA'}+\overrightarrow{HB'}+\overrightarrow{HC'}=\vec{0}$(若 H 為 $\triangle A'B'C'$的重心)

6.因此只要給定任一三角形的邊長，我們即可計算出$\mathcal{X}$和$\mathcal{Y}$，還有$(1-\mathcal{X}-\mathcal{Y})$的值，套入向量之中，形成$(1-\mathcal{X}-\mathcal{Y})\overrightarrow{HA'}+\overrightarrow{HB'}+\mathcal{Y}\overrightarrow{HC'}=\vec{0}$，再將

- $\overrightarrow{HA}$延伸$(1-\mathcal{X}-\mathcal{Y})$ 倍，得到A'
- $\overrightarrow{HB}$延伸$\mathcal{X}$倍得到 B'，$\overrightarrow{HC}$延伸$\mathcal{Y}$倍得到C'，最後$\overrightarrow{HA'}+\overrightarrow{HB'}+\overrightarrow{HC'}=\vec{0}$

此時 H 即可看成$\Delta A'B'C'$的重心了

7.例如:假設$\triangle ABC$的三邊長為 a=3,b=3,c=4，則由$\triangle ABC$的垂心延長”邊長的特定倍率”後，垂心也能變成重心了。(如下頁圖 15)代入通式之中，

得: $\mathcal{X}=\frac{1}{10}$,$\mathcal{Y}=\frac{1}{10}$, $(1-\mathcal{X}-\mathcal{Y})=\frac{8}{10}$ ，即$\frac{8}{10}\overrightarrow{HA'}+\frac{1}{10}\overrightarrow{HB'}+\frac{1}{10}\overrightarrow{HC'}=\vec{0}$

同乘 10，得$8\overrightarrow{HA'}+1\overrightarrow{HB'}+1\overrightarrow{HC'}=\vec{0}$ 再將$\overrightarrow{HA}$延伸 8 倍，得到A'，

$\overrightarrow{HB}$延伸 1 倍得到B'，$\overrightarrow{HC}$延伸 1 倍得到C'，最後$\overrightarrow{HA'}+\overrightarrow{HB'}+\overrightarrow{HC'}=\vec{0}$，因此原

$\triangle ABC$的垂心即變換成$\triangle A'B'C'$的重心了!

代入以尺規作圖法，得出:垂心與重心共點

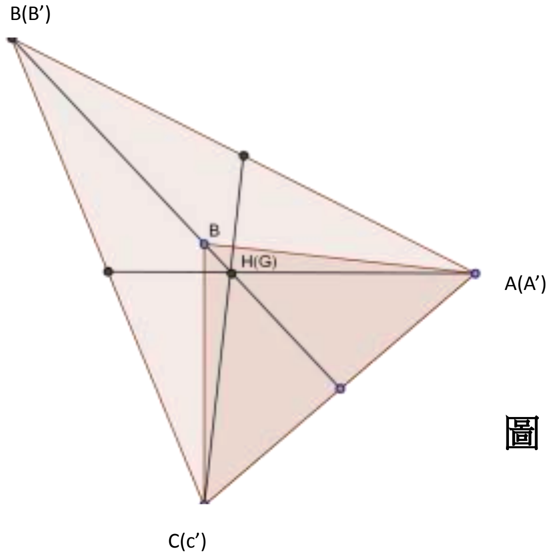


圖 15

8.但是若是原三角形為直角三角形，則因為垂心恰好落在三角形的頂點上，

故形成零向量，將導致乘上“倍率”也會失效，而無法變化需捨棄。

9.若原三角形為鈍角三角形，則因為垂心會落在原三角形外部，在放大倍率

上仍可使用，只不過根據向量的定義，乘上“負的倍率”將改成與原向量

相反方向放大即可。

(二)再來探討三角形的外心如何仿照內心的方法變換成另一三角形的重心

1.外心:三條中垂線的交點(設 K 為垂心)

設$\overrightarrow{AK}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{AB}=\left(x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}|AB|^2$

$\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{AC}=\left(x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}|AC|^2$

$$\Rightarrow\begin{cases}c^2x+\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2}\right)y=\frac{1}{2}c^2\\ \left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2}\right)x+b^2y=\frac{1}{2}b^2\end{cases}$$ 解聯立並求出

$$\mathcal{X} = \frac{b^2 \cdot (a^2 + c^2 - b^2)}{4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2} \qquad \mathcal{Y} = \frac{c^2 \cdot (a^2 + b^2 - c^2)}{4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}$$

2.我們姑且先以$\mathcal{X}, \mathcal{Y}$來表示係數

即$\overrightarrow{AK} = \mathcal{X}\overrightarrow{AB} + \mathcal{Y}\overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{OK} - \overrightarrow{OA} = \mathcal{X}(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) + \mathcal{Y}(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA})$

$\overrightarrow{OK} = (1 - \mathcal{X} - \mathcal{Y})\overrightarrow{OA} + \mathcal{X}\overrightarrow{OB} + \mathcal{Y}\overrightarrow{OC}$，再將 O 代號，改成 K 代號

$\therefore \overrightarrow{KK} = \vec{0} = (1 - \mathcal{X} - \mathcal{Y})\overrightarrow{KA} + \mathcal{X}\overrightarrow{KB} + \mathcal{Y}\overrightarrow{KC}$

作 $\overrightarrow{KA'} = (1 - \mathcal{X} - \mathcal{Y})\overrightarrow{KA}$ $\quad \overrightarrow{KB'} = \mathcal{X}\overrightarrow{KB}$ $\quad \overrightarrow{KC'} = \mathcal{Y}\overrightarrow{KC}$

得 $\overrightarrow{KA'} + \overrightarrow{KB'} + \overrightarrow{KC'} = \vec{0}$

3. 則此時 K 點就變成三角形$A'B'C'$的重心了

4.例如:假設$\triangle ABC$的三邊長為 a=3,b=3,c=4，則由$\triangle ABC$的外心延長”邊長的特定倍率”後，外心也能變成重心了。(如下頁圖 16)

代入通式之中，得: $\mathcal{X} = \frac{9}{20}$，$\mathcal{Y} = \frac{9}{20}$，$(1 - \mathcal{X} - \mathcal{Y}) = \frac{18}{20}$，同乘以 20

代入以尺規作圖法，得出:外心與重心共點

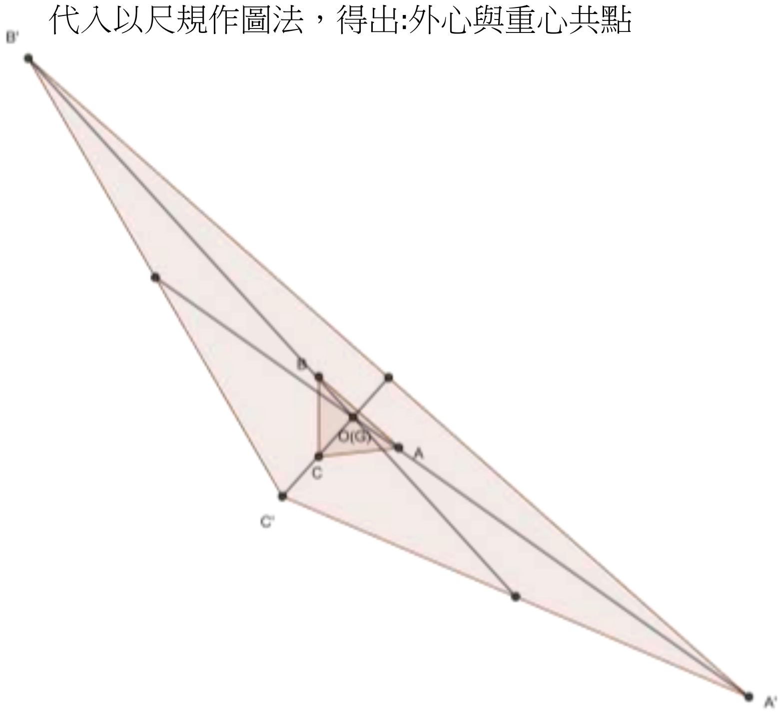


圖 16

5.但是若是原三角形為直角三角形，則因為外心的三邊長代入後，特定倍率為0，將導致乘上0倍率也會失效，而無法變化需捨棄。

6.若原三角形為鈍角三角形，則因為外心會落在原三角形外部，在放大倍率上仍可使用，只不過根據向量的定義，乘上“負的倍率”將改成與原向量

相反方向放大即可。

六、三共軛三角形內心與重心互換性質探討

利用內心與重心互換方法，推廣垂心與重心及外心與重心互換方法後，我們希望能收回觸角，改成共軛三角形內心與重心概念的深入探討，於是我們想說內心與重心能夠共點，那麼是否有另一個三角形的內心和原三角形的重心能夠共點呢？於是我們將共軛三角形開創成三共軛三角形

(一)先定義本文所設定之三共軛三角形的名詞定義

1.三共軛三角形：原三角形內心與其放大三角形重心共點，稱為共軛三角形，再加入原三角形的內心至三頂點連線所切割出的三塊三角形中，各重心連線所形成之三角形，此三角形的內心與原三角形重心共點，因為這三個三角形有著內心變重心、重心變內心的互換關係，因此定義此三個三角形為三共軛三角形。

ΔABC的內心與$\Delta A'B'C'$重心共點$\Longrightarrow$此兩三角形為上述之"共軛三角形"，我們又研究出ΔABC的重心與$\Delta A''B''C''$內心共點，所以定義ΔABC 及$\Delta A'B'C'$及$\Delta A''B''C''$為三共軛三角形。

(二)三共軛三角形中各三角形面積比例(圖 17)

$\boldsymbol{\Delta A'B'C'：\Delta ABC = 6Rr：1}$**(參考第 13 頁 五、)**

$\boldsymbol{\Delta ABC：\Delta A''B''C'' = 1：\frac{1}{9}}$ $\boldsymbol{(\Delta A''B''C'' \sim \Delta ABC,}$**且**$\boldsymbol{\Delta A''B''C''}$**邊長** $\boldsymbol{= \frac{1}{3}\Delta ABC}$**的邊長)**

$\boldsymbol{\Delta A'B'C'：\Delta ABC：\Delta A''B''C'' = 6Rr：1：\frac{1}{9} = 54Rr：9：1}$

(其中 R 為原三角形外接圓半徑，r 為原三角形內切圓半徑)

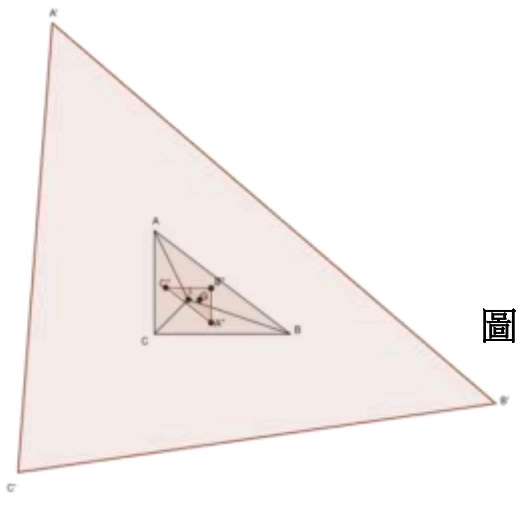


圖 17

七、 **共圓三角形：**將原三角形作外接圓，並以原三角形的三條角平分線延長，和原三角形的外接圓相交所得到的三個交點，再將這 3 個點連線形成另一個三角形，此三角形和原三角形將會形成共圓三角形。(圖 18)

(一)說明兩三角形的外心同點:兩三角形因為外接圓共圓，故兩三角形的外心共點，皆為外接共圓的圓心

(二)說明原三角形的內心是新三角形的垂心

$\because \triangle \mathrm{ABC} = 2\mathcal{X} + 2\mathcal{Y} + 2\mathcal{Z} = 180°$ ，故$\mathcal{X} + \mathcal{Y} + \mathcal{Z} = 90°$(如下圖)

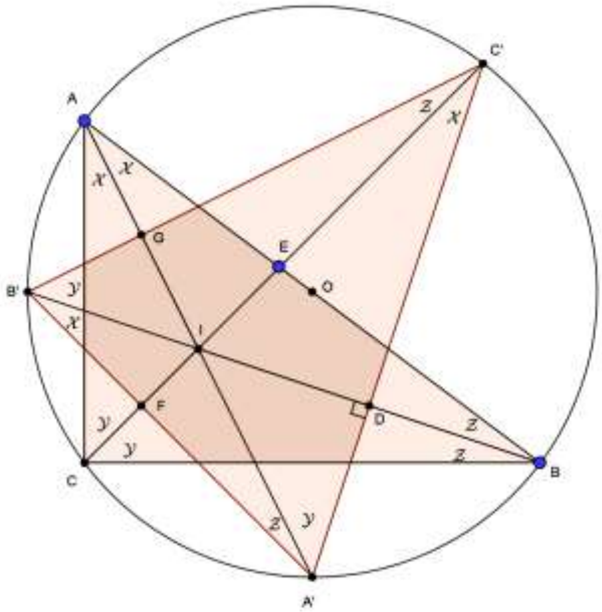


圖 18

$\angle \mathrm{A'B'D} = \frac{1}{2}\widehat{\mathrm{A'B}} = \angle \mathrm{A'AB} = \mathcal{X}$ — ①

$\angle \mathrm{B'A'A} = \frac{1}{2}\widehat{\mathrm{AB'}} = \angle \mathrm{ABB'} = \mathcal{Z}$ — ②

$\angle \mathrm{AA'C'} = \frac{1}{2}\widehat{\mathrm{AC'}} = \angle \mathrm{ACC'} = \mathcal{Y}$ — ③

① + ② + ③ = 90°

故在$\Delta \mathrm{A'B'D}$中$\angle \mathrm{A'B'D} + \angle \mathrm{B'A'D} = 90°$，所以$\angle \mathrm{B'DA'} = 90°$，

換句話說$\overline{\mathrm{B'D}} \perp \overline{\mathrm{A'C'}}$，故$\overline{\mathrm{B'D}}$為$\Delta \mathrm{A'B'C'}$在$\overline{\mathrm{A'C'}}$邊上的高

同理 $\overline{\mathrm{C'F}} \perp \overline{\mathrm{B'A'}}$，故$\overline{\mathrm{C'F}}$為$\Delta \mathrm{A'B'C'}$在$\overline{\mathrm{B'A'}}$邊上的高

$\overline{\mathrm{A'G}} \perp \overline{\mathrm{B'C'}}$，故$\overline{\mathrm{A'G}}$為$\Delta \mathrm{A'B'C'}$在$\overline{\mathrm{B'C'}}$邊上的高

故I點形成$\Delta A'B'C'$的三條高的交點，即I 為$\Delta A'B'C'$的垂心

又I為原ΔABC的內心

$\therefore$ **ΔABC的內心和$\Delta A'B'C'$的垂心共點**

八、共圓三角形彼此關係的深入探討，共圓三角形的重覆疊作(圖 20)

在共圓三角形的觀念中，可知不斷地重覆疊作三角形，其所得三角形彼此都會共圓，因此我們想研究這一系列的三角形之間會有什麼關聯性！

(一)計算共圓三角形的角度

1.可用代數式直接計算

設原ΔABC中$\angle A = \mathcal{X}$，$\angle B = \mathcal{Y}$，$\angle C = \mathcal{Z}$

第1個共圓$\Delta A_1B_1C_1$中(圖 18)

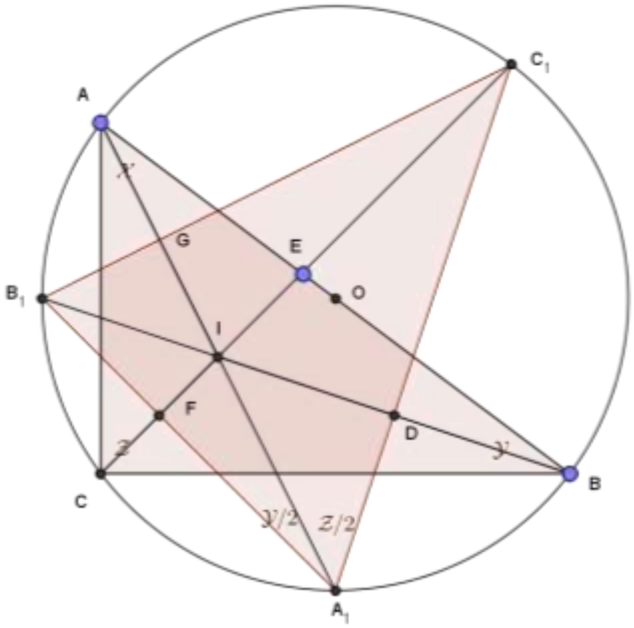


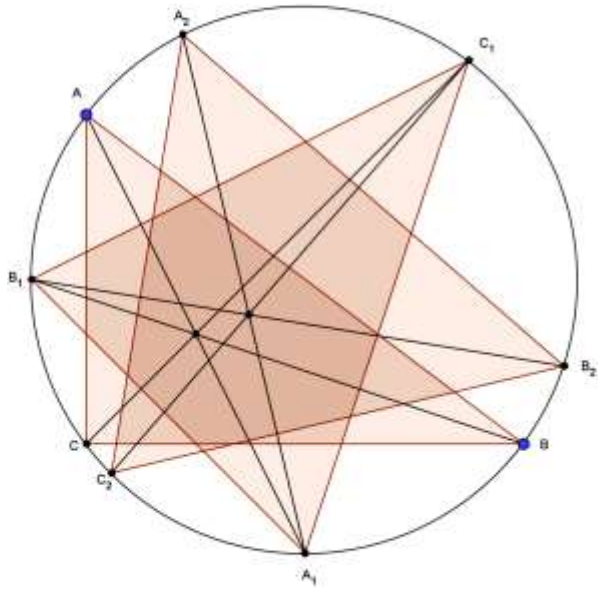
圖 18

$\angle A_1 = \frac{1}{2}(\angle B + \angle C) = \frac{1}{2}(\mathcal{Y} + \mathcal{Z})$

$\angle B_1 = \frac{1}{2}(\angle A + \angle C) = \frac{1}{2}(\mathcal{X} + \mathcal{Z})$

$\angle C_1 = \frac{1}{2}(\angle B + \angle A) = \frac{1}{2}(\mathcal{X} + \mathcal{Y})$

第2個共圓$\Delta A_2B_2C_2$中(圖 19)



$\angle A_2 = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(\mathcal{X} + \mathcal{Z})\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(\mathcal{X} + \mathcal{Y})\right] = \frac{1}{2}\mathcal{X} + \frac{1}{4}\mathcal{Y} + \frac{1}{4}\mathcal{Z}$

圖 19

$\angle B_2 = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{4}z$

$\angle C_2 = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{2}z$

由第一個共圓$\Delta A_1B_1C_1$，再進行重複疊作三角形，因為這些三角形都被困在同一個共圓的圓之中，如果我們不斷地進行重複疊作後，大角將不斷地被平均降低化，而小角將不斷地被平均增加化，以平均化的概念來看，似乎重複疊作的最終結果，將演變成正三角形，也就是三角形三個角的所有的角度將會呈現一樣，而形成穩定，如同馬可夫鍊矩陣中的穩定狀態(參考高中第四冊第三章—矩陣) 。

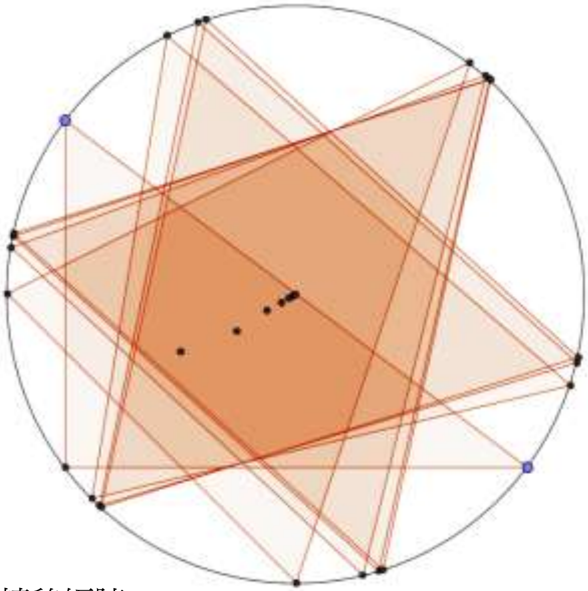


圖 20

2.也可用轉移矩陣

設作 n 次共圓三角形之名稱為$\Delta A_nB_nC_n$

$$\begin{bmatrix} \text{下一個} \\ \text{三角形度數} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{轉移矩陣} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \text{前一個} \\ \text{三角形度數} \end{bmatrix}$$

(1)利用轉移矩陣運算時，也可得$\angle A_1$，$\angle B_1$，$\angle C_1$

$$\begin{bmatrix} \angle A_1 \\ \angle B_1 \\ \angle C_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \angle A \\ \angle B \\ \angle C \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \angle A_1 = \frac{1}{2}\angle B + \frac{1}{2}\angle C \\ \angle B_1 = \frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle C \\ \angle C_1 = \frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle B \end{cases}$$

(2)利用轉移矩陣運算時，也可得$\angle A_2$，$\angle B_2$，$\angle C_2$

$$\begin{bmatrix}\angle A_2\\\angle B_2\\\angle C_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}\angle A_1\\\angle B_1\\\angle C_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\angle B+\frac{1}{2}\angle C\\\frac{1}{2}\angle A+\frac{1}{2}\angle C\\\frac{1}{2}\angle A+\frac{1}{2}\angle B\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\angle A+\frac{1}{4}\angle B+\frac{1}{4}\angle C\\\frac{1}{4}\angle A+\frac{1}{2}\angle B+\frac{1}{4}\angle C\\\frac{1}{4}\angle A+\frac{1}{4}\angle B+\frac{1}{2}\angle C\end{bmatrix}$$

(3)利用轉移矩陣運算時，也可得$\angle A_3$，$\angle B_3$，$\angle C_3$

$$\begin{bmatrix}\angle A_3\\\angle B_3\\\angle C_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\angle A+\frac{1}{4}\angle B+\frac{1}{4}\angle C\\\frac{1}{4}\angle A+\frac{1}{2}\angle B+\frac{1}{4}\angle C\\\frac{1}{4}\angle A+\frac{1}{4}\angle B+\frac{1}{2}\angle C\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{4}\angle A+\frac{3}{8}\angle B+\frac{3}{8}\angle C\\\frac{3}{8}\angle A+\frac{1}{4}\angle B+\frac{3}{8}\angle C\\\frac{3}{8}\angle A+\frac{3}{8}\angle B+\frac{1}{4}\angle C\end{bmatrix}$$

(4)利用轉移矩陣運算時，也可得$\angle A_4$，$\angle B_4$，$\angle C_4$

$$\begin{bmatrix}\angle A_4\\\angle B_4\\\angle C_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}\frac{1}{4}\angle A+\frac{3}{8}\angle B+\frac{3}{8}\angle C\\\frac{3}{8}\angle A+\frac{1}{4}\angle B+\frac{3}{8}\angle C\\\frac{3}{8}\angle A+\frac{3}{8}\angle B+\frac{1}{4}\angle C\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{3}{8}\angle A+\frac{5}{16}\angle B+\frac{5}{16}\angle C\\\frac{5}{16}\angle A+\frac{3}{8}\angle B+\frac{5}{16}\angle C\\\frac{5}{16}\angle A+\frac{5}{16}\angle B+\frac{3}{8}\angle C\end{bmatrix}$$

(5)利用轉移矩陣運算時，也可得$\angle A_5$，$\angle B_5$，$\angle C_5$

$$\begin{bmatrix}\angle A_5\\\angle B_5\\\angle C_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}\frac{6}{16}\angle A+\frac{5}{16}\angle B+\frac{5}{16}\angle C\\\frac{5}{16}\angle A+\frac{6}{16}\angle B+\frac{5}{16}\angle C\\\frac{5}{16}\angle A+\frac{5}{16}\angle B+\frac{6}{16}\angle C\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{10}{32}\angle A+\frac{11}{32}\angle B+\frac{11}{32}\angle C\\\frac{11}{32}\angle A+\frac{10}{32}\angle B+\frac{11}{32}\angle C\\\frac{11}{32}\angle A+\frac{11}{32}\angle B+\frac{10}{32}\angle C\end{bmatrix}$$

(6)利用轉移矩陣運算時，也可得$\angle A_6$，$\angle B_6$，$\angle C_6$

$$\begin{bmatrix}\angle A_6\\\angle B_6\\\angle C_6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}\frac{10}{32}\angle A+\frac{11}{32}\angle B+\frac{11}{32}\angle C\\\frac{11}{32}\angle A+\frac{10}{32}\angle B+\frac{11}{32}\angle C\\\frac{11}{32}\angle A+\frac{11}{32}\angle B+\frac{10}{32}\angle C\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{22}{64}\angle A+\frac{21}{64}\angle B+\frac{21}{64}\angle C\\\frac{21}{64}\angle A+\frac{22}{64}\angle B+\frac{21}{64}\angle C\\\frac{21}{64}\angle A+\frac{21}{64}\angle B+\frac{22}{64}\angle C\end{bmatrix}$$

(7)利用轉移矩陣運算時，也可得$\angle A_7$，$\angle B_7$，$\angle C_7$

$$\begin{bmatrix}\angle A_7\\\angle B_7\\\angle C_7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}\frac{22}{64}\angle A+\frac{21}{64}\angle B+\frac{21}{64}\angle C\\\frac{21}{64}\angle A+\frac{22}{64}\angle B+\frac{21}{64}\angle C\\\frac{21}{64}\angle A+\frac{21}{64}\angle B+\frac{22}{64}\angle C\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{42}{128}\angle A+\frac{43}{128}\angle B+\frac{43}{128}\angle C\\\frac{43}{128}\angle A+\frac{42}{128}\angle B+\frac{43}{128}\angle C\\\frac{43}{128}\angle A+\frac{43}{128}\angle B+\frac{42}{128}\angle C\end{bmatrix}$$

由第 52 屆高中組”心心相印”報告中，他們在不斷地重覆疊作時，(雖然他們的數列討論過程有明顯錯誤)，求出$\angle A_n,\angle B_n,\angle C_n$的一般式並利用數列極限與算幾不等式，求出收斂於正三角形，但是我們覺得在重覆疊作過程中似乎用馬可夫鍊轉移矩陣，更能夠傳神地表達轉移的精神與變化結果，因此我們創新改用轉移矩陣的穩定狀態來探討不斷重覆疊作後$\angle A_n,\angle B_n$, $\angle C_n$的結果作為結束。

(8)穩定狀態時:

1.$\mathcal{X}+\mathcal{Y}+\mathcal{Z}=180°$

2.前一個三角形內角度度數為$\begin{bmatrix}\mathcal{X}\\\mathcal{Y}\\\mathcal{Z}\end{bmatrix}$，轉移後下一個三角形內角度數仍然為$\begin{bmatrix}\mathcal{X}\\\mathcal{Y}\\\mathcal{Z}\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}\mathcal{X}\\\mathcal{Y}\\\mathcal{Z}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}\mathcal{X}\\\mathcal{Y}\\\mathcal{Z}\end{bmatrix}$ 矩陣乘法運算後，得到:

$\mathcal{X}=\frac{1}{2}\mathcal{Y}+\frac{1}{2}\mathcal{Z}$ ----- ①, $\mathcal{Y}=\frac{1}{2}\mathcal{X}+\frac{1}{2}\mathcal{Z}$, $\mathcal{Z}=\frac{1}{2}\mathcal{X}+\frac{1}{2}\mathcal{Y}$

$\mathcal{X}+\mathcal{Y}+\mathcal{Z}=180°$，$\frac{1}{2}\mathcal{X}+\frac{1}{2}\mathcal{Y}+\frac{1}{2}\mathcal{Z}=90°$

所以$\frac{1}{2}\mathcal{Y}+\frac{1}{2}\mathcal{Z}=90°-\frac{1}{2}\mathcal{X}$ 代回 ---- ①

$\frac{3}{2}\mathcal{X}=90°, \mathcal{X}=60°$

同理 $\mathcal{Y}=60°, \mathcal{Z}=60°$

故最後穩定狀態下，

$\mathcal{X}=\mathcal{Y}=\mathcal{Z}=60°$

最終轉移穩定後的三角形，

將出現正三角形。

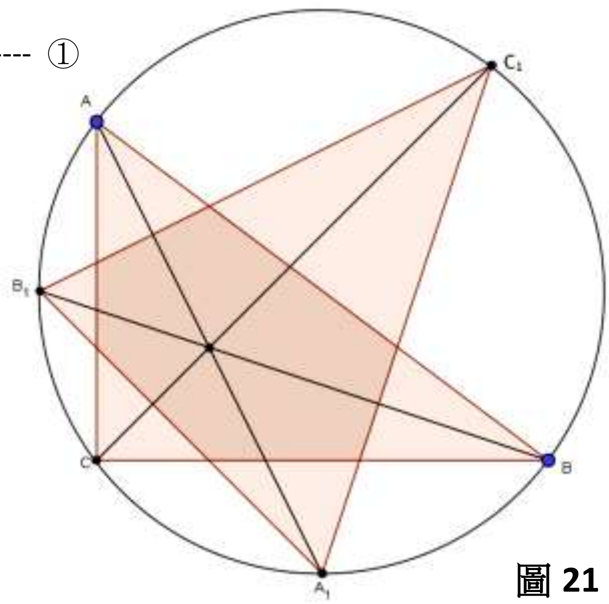


圖 21

3.再假設正三角形外接圓半徑 R，可反求正三角形面積，所以我們就可得到

正三角形面積=$\frac{3\sqrt{3}}{4}\times$(外接圓半徑)^2

九、分析第 52 屆科展高中組”心心相印”類似研究的錯誤

心心相印第 17.18 頁原文:

為研究方便，我們將原三角形定義為$\Delta A_0B_0C_0$，設$\angle A_0=\alpha$、$\angle B_0=\beta$、$\angle C_0=\gamma$， $\Delta A_nB_nC_n$為做 n次內心的外心三角形。 設$\angle A_0=a_n\times\alpha+b_n\times\beta+c_n\times\gamma$我們將其一連串生成的三角形角度寫成一個數列的

話可得下表

	a_n	b_n	c_n
$\angle A_0$	1	0	0
$\angle A_1$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\angle A_2$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
$\angle A_3$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$
$\angle A_4$	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{5}{16}$

將「α 的係數」表成一個數列稱之為數列$\{a_n\}$，則我們發現恆有 $2a_{n+1} = 1 - a_n$，利用此關係是可推得此數列的一般項：$a_{n+1} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}(-\frac{1}{2})^{n-1}$，$n \geq 0$ 且 $n \in N$，同理推得$\{b_n\}$及$\{c_n\}$的一般項：

$b_{n+1} = \frac{1}{3} - \frac{1}{6}(-\frac{1}{2})^{n-1}$，$n \geq 0$ 且 $n \in N$，$c_{n+1} = \frac{1}{3} - \frac{1}{6}(-\frac{1}{2})^{n-1}$，$n \geq 0$ 且 $n \in N$

由此可知$\angle A_n = a_n \times \alpha + b_n \times \beta + c_n \times \gamma$ 且 $\lim_{n\to\infty} \angle A_n = \frac{1}{3}(\alpha + \beta + \gamma) = 60°$

錯誤: $a_{n+1} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}(-\frac{1}{2})^{n-1}$，$n \geq 0$ 且 $n \in N$，

錯誤點(1)心心相印第 18 頁第 1 行

$b_{n+1} = \frac{1}{3} - \frac{1}{6}(-\frac{1}{2})^{n-1}$，$n \geq 0$ 且 $n \in N$，$c_{n+1} = \frac{1}{3} - \frac{1}{6}(-\frac{1}{2})^{n-1}$，$n \geq 0$ 且 $n \in N$

錯誤點(2)心心相印第 18 頁第 3 行　　**錯誤點(3)心心相印第 18 頁第 3 行**

修正:(1) $a_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ (必須將原先的a_{n+1}改成a_n才對)

同理推得b_n及c_n應重新計算並驗證

(2) $b_n=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}(-\frac{1}{2})^{n-1}$ (原先b_{n+1}必須改成b_n且" − "必須改成" + ")

(3) $c_n=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}(-\frac{1}{2})^{n-1}$ (原先c_{n+1}必須改成c_n且" − "必須改成" + ")

(詳見下面解析)

解析: 藉由他們研究出的通式:

(4) $b_{n+1}=\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$，$c_{n+1}=\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$，算出的答案與他們所列之表格的答案完全不同!(通式錯誤，且不符合他們自己原先所列出之答案)

(5)由我們轉移矩陣之後的結果，可歸納出:

$$\begin{cases}2a_{n+1}=1-a_n(\text{和他們相同})\\ 2b_n=1-a_n(\text{我們修正})\\ 2c_n=1-a_n(\text{我們修正})\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_n=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}(-\frac{1}{2})^{n-1}\\ b_n=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}(-\frac{1}{2})^{n-1}\\ c_n=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}(-\frac{1}{2})^{n-1}\end{cases}$$

重新代回數字小心作驗證

(6)驗證測試依照他們所研究出的通式，$n=2$ 代入，求出a_3,b_3,c_3

$$\begin{cases}a_3=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^1=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}\\ b_3=\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^1=\frac{1}{3}+\frac{1}{12}=\frac{5}{12}\\ c_3=\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^1=\frac{1}{3}+\frac{1}{12}=\frac{5}{12}\end{cases}$$ 錯誤!

(和上述他們表格所列之答案根本不同!)

再用我們所修正之通式，$n=3$ 代入，求出a_3,b_3,c_3

$$\begin{cases}a_3=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{3}-\frac{1}{12}=\frac{1}{4}\\ b_3=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{3}+\frac{1}{24}=\frac{9}{24}=\frac{3}{8}\\ c_3=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{3}+\frac{1}{24}=\frac{9}{24}=\frac{3}{8}\end{cases}$$ 正確!

(7)驗證測試依照他們所研究出的通式，n=3 代入，求出a_4,b_4,c_4

$$\begin{cases}a_{n+1}=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\\ b_{n+1}=\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\\ c_{n+1}=\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_4=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{3}-\frac{1}{12}=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}\\ b_4=\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{3}-\frac{1}{24}=\frac{7}{24}\\ c_4=\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{3}-\frac{1}{24}=\frac{7}{24}\end{cases}$$ 錯誤!

(和上述他們表格所列之答案根本不同!)

再用我們所修正之通式，n=4 代入，求出a_4, b_4, c_4

$$\begin{cases} a_4 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{3} + \frac{1}{24} = \frac{9}{24} = \frac{3}{8} \\ b_4 = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{3} - \frac{1}{48} = \frac{15}{48} = \frac{5}{16} \\ c_4 = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{3} - \frac{1}{48} = \frac{15}{48} = \frac{5}{16} \end{cases}$$ 正確!

由於他們在推導出$2a_{n+1} = 1 - a_n$通式所得到: $a_{n+1} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}(-\frac{1}{2})^{n-1}$ (錯誤的)後，我們猜想他們應該是順勢就認定b_n及c_n的通式就是如此，而沒有重新代入驗算，進行驗證，確認一般式正確與否，所以讓我們在研究的過程中浪費了無數時間與精力，所幸我們堅信指導老師一直提醒我們的數學核心態度:凡事思考，推理邏輯，小心求證，最後終於在交出報告前發現了這個震驚的結果，並將它完全的呈現給評審以及世人們知道!

陸、結論

一、特殊三角形與其放大對應邊長倍後之三角形的重心與原三角形的內心關係

(一)邊長比$3:4:5$的原三角形內心與其放大三角形之重心共點。

(二)等腰三角形(邊長比$1:1:\sqrt{2}$)的原三角形內心與其放大三角形之重心共點。

(三)邊長比$1:\sqrt{3}:2$的原三角形內心與其放大三角形之重心共點。

二、任意三角形與其放大對應邊長倍後之三角形的重心與原三角形的內心共點

(一)由原三角形之角平分線延伸連接大三角形頂點所切割之三塊三角形中小三角形與大三角形面積比

任意三角形之小三角形面積：大三角形面積$=1$：原三角形兩側的邊長乘積倍。

(二)由原三角形角平分線延伸，連接大三角形頂點所切割之三塊三角形面積比

原三角形內心與大三角形重心共點，則三塊大三角形面積比為$1:1:1$。

(三)共軛三角形中被角平分線所切割之小三角形與大三角形的面積關係

3個小三角形面積相乘再乘上三邊長相乘平方倍$=$ 3個大三角形面積相乘。

三、探討任意三角形：頂內三角形與邊內三角形兩者之面積比例關係

頂內與邊內三角形全等且面積比為$1:1$，此疊置圖形以原三角形的內心成為完美的心對稱圖形。

四、垂心變換成重心向量座標理論(不包含直角三角形，詳見第 17 頁、8.)

在垂心到三角形各頂點長度，所乘上的”特定倍率”通式為

$$\boldsymbol{x}=\frac{(\mathbf{b}^2+c^2-a^2)(\mathbf{b}^2+a^2-c^2)}{2(a^2\mathbf{b}^2+\mathbf{b}^2c^2+c^2\mathbf{a}^2)-(a^4+\mathbf{b}^4+c^4)}$$

$$\boldsymbol{y}=\frac{(\mathbf{b}^2+c^2-a^2)(a^2+c^2-\mathbf{b}^2)}{2(a^2\mathbf{b}^2+\mathbf{b}^2c^2+c^2\mathbf{a}^2)-(a^4+\mathbf{b}^4+c^4)}$$ 以及$(1-x-y)$，

使得$(1-x-y)\overrightarrow{\mathrm{HA}}+x\overrightarrow{\mathrm{HB}}+y\overrightarrow{\mathrm{HC}}=\vec{0}$變成$\overrightarrow{\mathrm{HA'}}+\overrightarrow{\mathrm{HB'}}+\overrightarrow{\mathrm{HC'}}=\vec{0}$，即可讓H 變成$\Delta \mathrm{A'B'C'}$的重心了。

外心變換成重心向量座標理論(不包含直角三角形，詳見第 18 頁、5.)

在外心到三角形各頂點長度，所乘上的”特定倍率”通式為

$$\mathcal{X}=\frac{b^2\cdot(a^2+c^2-b^2)}{4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2}$$

$$\mathcal{Y}=\frac{c^2\cdot(a^2+b^2-c^2)}{4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2}$$ 以及$(1-\mathcal{X}-\mathcal{Y})$，

使得$(1-\mathcal{X}-\mathcal{Y})\overrightarrow{IA}+\mathcal{X}\overrightarrow{IB}+\mathcal{Y}\overrightarrow{IC}=\vec{0}$變成$\overrightarrow{IA'}+\overrightarrow{IB'}+\overrightarrow{IC'}=\vec{0}$，即可讓I 變成$\triangle A'B'C'$的重心了。

五、三共軛三角形彼此之間內心與重心互換性質探討

原三角形內心與大三角形重心共點，原三角形重心與小三角形內心共點，且大三角形：原三角形：小三角形面積比為$54Rr:9:1$(r：原三角形內切圓半徑，R：原三角形外接圓半徑)。

六、共圓三角形與重覆疊作圖形之性質探討

(一)由原三角形角平分線與原三角形外接圓的三個交點連線，形成新的三角形，這個三角形垂心與原三角形內心共點，且新三角形和原三角形外接圓共圓，故兩個三角形的外心也共點。

(二)重複疊作上一點之共圓的三角形，發現其穩定狀態時呈現正三角形，面積為$\frac{3\sqrt{3}}{4}\times$(原三角形外接圓半徑)^2。

七、分析第 52 屆科展高中組”心心相印”類似研究的錯誤

(一)第 18 頁第一行

錯誤：$a_{n+1}=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}(-\frac{1}{2})^{n-1}$，必須修改成如右：$a_n=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}(-\frac{1}{2})^{n-1}$

(二)第 18 頁第 3 行

錯誤: $b_{n+1}=\frac{1}{3}-\frac{1}{6}(-\frac{1}{2})^{n-1}$，必須修改成如右：$b_n=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}(-\frac{1}{2})^{n-1}$

(三)第 18 頁第 3 行

錯誤: $c_{n+1}=\frac{1}{3}-\frac{1}{6}(-\frac{1}{2})^{n-1}$，必須修改成如右：$c_n=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}(-\frac{1}{2})^{n-1}$

柒、未來展望

一、過程中我們的重點，圍繞在內心與重心互換的面積關係上，實已無精力再探討三角形彼此之間邊長的變化，之後先進有機會可再結合孟氏或西瓦定理，討論邊長之間的關聯性。

二、外心和垂心變成重心的變化通式中，我們必須捨棄直角三角形，因為通式代入後等於 0，無法乘上”倍率”放大，之後先進可再思考其他方法解決直角三角形。

三、能否將本研究各種轉換成另一三角形的重心的方法，應用在其他科學上，相當值得深思。

四、尤拉線的特殊關係，也是我們有機會非常想去嘗試的神祕區域。

五、平面中的三角形就這麼有趣了，那空間中的三角錐呢?必然變化更多也十分值得去研究!

六、發現前人研究有誤時，有何辦法或機制可告知以及提醒他人，下次在閱讀時能立刻發現，不用再一次虛耗光陰、精力？

捌、參考資料

1.陳建燁(民 100)。角比例共軛點。數學傳播，35 卷 1 期，pp.29-35。

2.蔡奇夆、蘇達亞、李博元(民 103)。多邊形與其中重、頂重多邊形之性質探討。中華民國第 54 屆中小學科學展覽會，國中組，數學科，第一名 030421。

3.鄭容濤、郭立生(民 103)。三角型等角、等截、角比例共軛點之推廣研究。中華民國第 54 屆中小學科學展覽會，國中組，數學科，第三名 030401。

4.林哲佑、朱柏翰、李沛宸(民 101)。心心相印。中華民國第 52 屆中小學科學展覽會，高中組，數學科，040410。

【評語】030426

本作品討論由已知三角形按某些邊長比例規則建構三角形的性質，雖有一些推導出的幾何結論，但大半的結果可以用向量的方式得到，是比較可惜之處，建議專注少數規則做深入討論。