中華民國第56屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

最佳創意獎

030425

小三角大世界-N維餘弦定理三角觀

學校名稱：臺南市立建興國民中學

作者：	指導老師：
國二 余奕陞	李奕瑩

關鍵詞：餘弦定理

摘要

本研究即欲探討完整的餘弦定理。首先，透過在平面上利用面積關係證明餘弦定理的方式，推廣至在空間中的餘弦定理，接著猜想在 N 維中的餘弦定理，並利用數學軟體 Geogebra 進行數值檢驗。將空間中的餘弦定理結果，推廣至五種正多面體，最後考慮到在 N 維空間中外接正 N 維球體是否具有相同或類似的公式。

壹、研究動機

在二上時，學到了畢氏定理，即在一個直角三角形中，兩個股和斜邊有著平方和相同的關係，也就是兩股外接正方形的面積和會等於斜邊外接正方形的面積，因此我又想，如果不是直角三角形會是如何呢？於是我學習到了餘弦定理和其證明。其中有一種方式是透過歐幾里得在《幾何原本》卷一命題 47 所給出的畢氏定理之證明方法，進一步改變角度(在銳角或鈍角三角形時)會產生面積修正項而得到餘弦定理。這讓我想到既然在任意三角形外接正方形中，可以找到面積變化的關係，那麼如果任意三角形外接正立方體、甚至是正 N 維體，它們的「體積」是不是也會有特定的關係呢？最後，會不會有一個完整的通式可以概括至 N 次方，也就是完整的餘弦定理？

貳、研究目的

一、證明三角形外接正立方體時的體積關係。

二、找出三角形外接正 N 維體時的邊長 N 次方(體積)關係。

三、找出完整的餘弦定理。

四、找出外接五種正多面體的餘弦定理公式。

五、找出外接 N 維球體的餘弦定理公式。

参、研究設備及器材

一、數學分析工具

(一)紙、筆、電腦。

(二)軟體：GeoGebra 動態數學軟體，如圖 3-1。

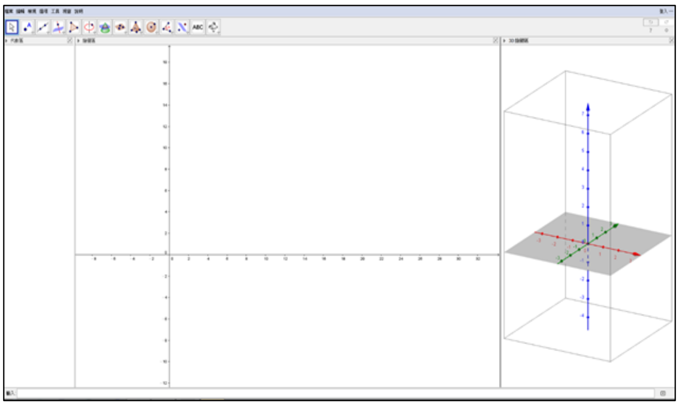


圖 3-1

肆、研究過程與方法

在本研究中為描述的便利性而使用了特定的符號或名詞的簡化將以「定義」命名；而在本研究中所發現而歸納之結論，則以「定理」稱之；已知的定理，在此則列為「引理」。

一、 基本定義、引理

(一)定義

1. 正 N 維體：

即為在 N 度空間中類似二維空間中的正方形、三維空間中的正方體的接續物體，因為正方形所占的面積為邊長的平方，又正方體所佔的體積為邊長的三次方，本研究定義正 N 維體其所占空間為邊長的 N 次方。如圖 3-2，為模擬正 4 維體圖。

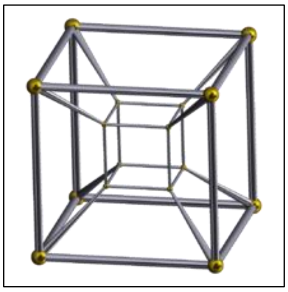


圖 4-1-1

(二)引理(來自前人研究的已知結果)

1. 平面三角形的餘弦定理：

若△ABC 的三邊長$\overline{AB}=x$、$\overline{CA}=y$、$\overline{BC}=z$，θ角為$\overline{AB}$、 $\overline{AC}$邊的夾角，則恆有性質$z^2=x^2+y^2-2xycos\theta$，此稱為餘弦定理。

由於本研究即透過此證明餘弦定理之方法，將平面中的面積修正項推廣至空間中的體積修正項，故在此給出此證明。

【證明】

(1) 做 C 至$\overline{DE}$的垂線$\overline{CK}$交$\overline{AB}$於 J，作 B 至$\overline{GF}$的垂線$\overline{BL}$交$\overline{AC}$於 M，作 A 至$\overline{HI}$的垂線$\overline{AO}$交$\overline{BC}$於 N，如圖 4-1-2。

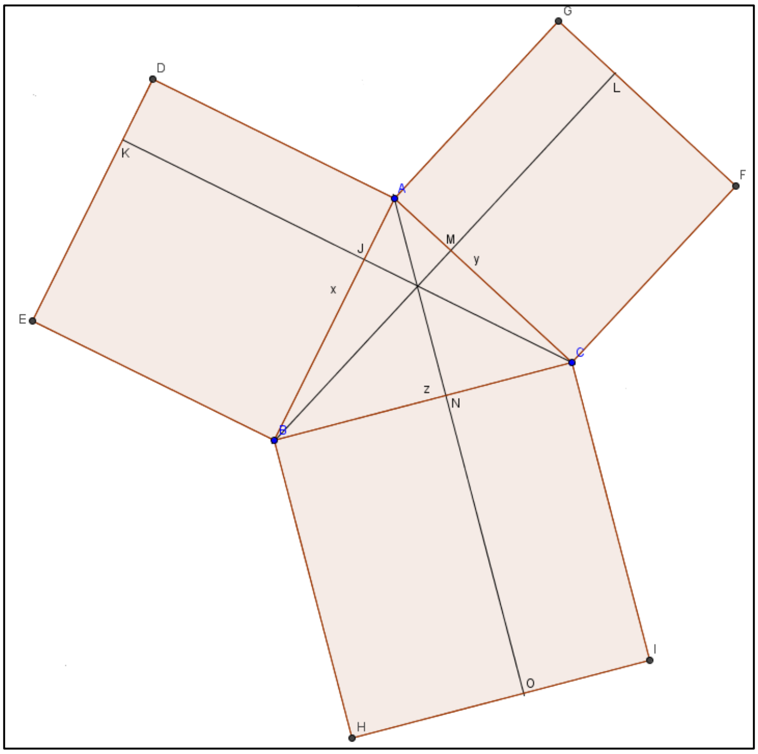


圖 4-1-2

(2) 在ΔBCE、ΔABH 當中，因為$\overline{AB}$=$\overline{BE}$，$\overline{BH}$=$\overline{BC}$，又∠EBC=∠ABH(同為 90^{o}+∠ABC)，則ΔBCE≅ ΔBHA(SAS)，又因為$\overline{KC}$平行$\overline{EB}$，所以ΔBCE 的面積=ΔEBK 的面積(同底等高)=$\frac{1}{2}$□KJBE 的面積。

(3) 同理，□BNOH 的面積也為ΔBHA 的面積的兩倍，所以□BNOH 的面積=□KJBE 的面積。

(4) 同理，□NCIO 的面積=□MLFC 的面積

(5) 剩下□AMLG、□AJKD 兩個矩形面積，□AMLG 的面積為$\overline{AG}\times\overline{AM}$=y×xcosθ=xycosθ，□AJKD 的面積為$\overline{AJ}\times\overline{AD}$=ycosθ ×x=xycosθ，所以□AMLG 的面積=□AJKD 的面積=xycosθ。

因此，我們可以整理出以下結論：

1、矩形 BNOH 的面積=矩形 KJBE 的面積

2、矩形 NCIO 的面積=矩形 MLFC 的面積

3、正方形 BCIH 的面積=矩形 KJBE 的面積+矩形 MLFC 的面積

4、矩形 AJKD 的面積=矩形 AMLG 的面積= $xy\cos\theta$

又因為矩形 BNOH 的面積+矩形 NCIO 的面積=正方形 BCIH 的面積= z^2 ，

矩形 JBEK 的面積+矩形 AJKD 的面積=正方形 BEDA 的面積= x^2 ，

矩形 MLFC 的面積+矩形 AMLG 的面積=正方形 CFGA 的面積= y^2 ，

所以可知□BCIH 的面積=□ABED 的面積+□ACFG 的面積-□AJKD 的面積-□AMLG 的面積，

而□AJKD 的面積=□AMLG 的面積= $xy\cos\theta$ ，即可得到

$z^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos\theta$ ，這就是所謂的餘弦定理。

2. 正 N 維球體：

即為在 N 度空間中類似二維空間中的圓形、三維空間中的球體的接續物體。根據文獻，N 維球體所占空間，在 N 為偶數時，其所占空間為$\frac{r^n\pi^{\frac{n}{2}}}{\frac{n}{2}!}$(r 為半徑)，而在 N 為奇數時，其所占空間為$\frac{2^{\frac{n+3}{2}}\times\frac{n-1}{2}!\times r^n\times\pi^{\frac{n-1}{2}}}{n!}$，如圖 4-1-3，為模擬正四維球體。

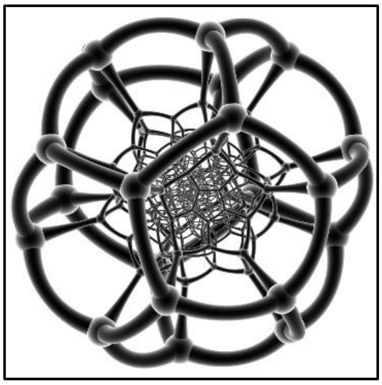
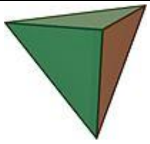
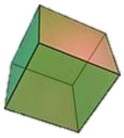


圖 4-1-3

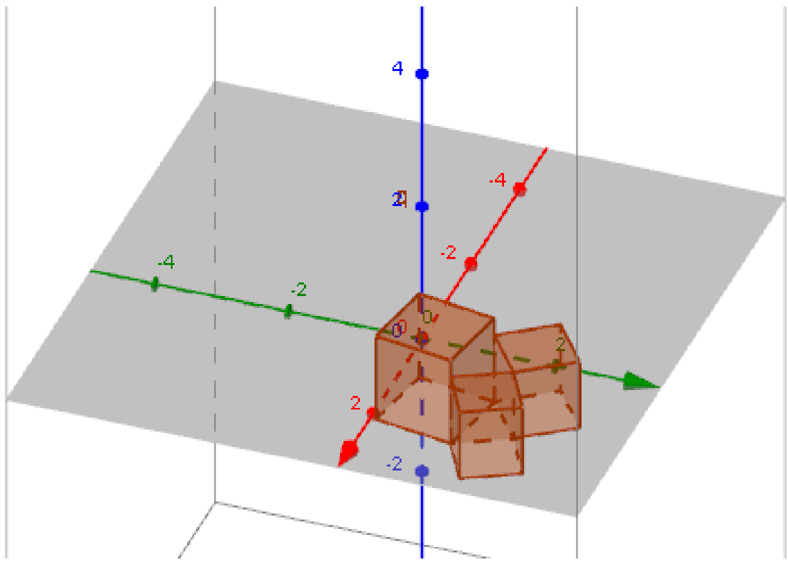
3. 正多面體：

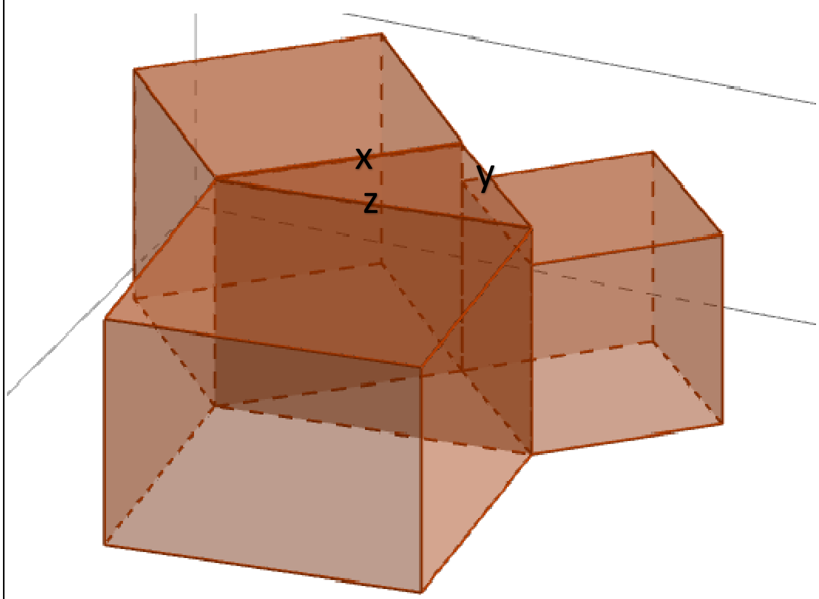
在三維空間中，各面都是全等的正多邊形且每一個頂點所接的面數都是一樣的凸多面體。這樣的多面體共有五種，分別是正四面體、正六面體、正八面體、正十二面體及正二十面體。下表為五種正多面體及其體積。

正 N 面體	圖形	體積(L 為邊長)
正四面體		$\frac{\sqrt{2}}{12}L^3$
正六面體		L^3
正八面體		$\frac{\sqrt{2}}{3}L^3$
正十二面體		$\frac{1}{4}\left(15+7\sqrt{5}\right)L^3$
正二十面體		$\frac{5}{12}\left(3+\sqrt{5}\right)L^3$

二、三角形外接正立方體的餘弦定理(體積關係)

利用<引理 1>三角形與外接正方形的面積關係，推廣至由平面和立體的圖形關係，進而推導出完整的N次方餘弦定理的通式。以下將三角形的三個內角，∠BAC 記為θ_3，∠ABC 記為θ_2，∠ACB 記為θ_1。

步驟一	圖 4-2-1
分別以三角形的三邊長度為邊長做外接正立方體，如圖 4-2-1。	

步驟二	圖 4-2-2
1. 將中央三角形拉成跟其中一個正方體一樣高度。 2. 將以 z 為邊長的正方體下拉至與 x 同高(這裡假設 z 為最高，但不影響結果)，如圖 4-2-2。	

經過步驟一、步驟二可得俯視圖，如圖 4-2-3。

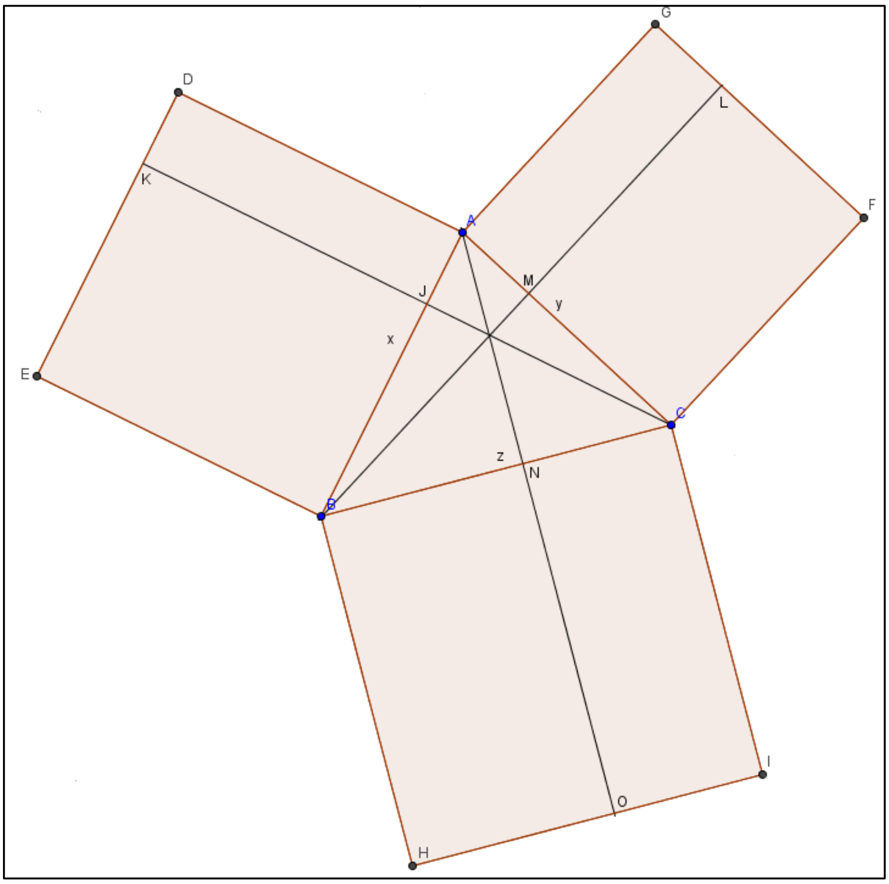


圖 4-2-3

由此，JKEB 柱體就會與 BNOH 柱體體積相同，最後加回 BNOH×(z-x)(下拉時所失去的體積)。同理，MLFC 柱體的體積會與 NCIO 相同，再加回 NCIO×(z-y)的體積，並將剩下 AMLG 柱體體積以及 AJKD 柱體體積算出來後相加，就可以列出完整的三角形外接正立方體關係了。

【證明】

(一) 計算得$\overline{\mathrm{BN}}$、$\overline{\mathrm{NC}}$、$\overline{\mathrm{CM}}$、$\overline{\mathrm{AM}}$、$\overline{\mathrm{AJ}}$、$\overline{\mathrm{JB}}$的長度(以 x、y、z 表示)，分別是：

$\overline{\mathrm{BN}}=\frac{x^2-y^2+z^2}{2z}$，$\overline{\mathrm{NC}}=\frac{-x^2+y^2+z^2}{2z}$，$\overline{\mathrm{CM}}=\frac{-x^2+y^2+z^2}{2y}$，$\overline{\mathrm{AM}}=\frac{x^2+y^2-z^2}{2y}$，$\overline{\mathrm{AJ}}=\frac{x^2+y^2-z^2}{2x}$，$\overline{\mathrm{JB}}=\frac{x^2-y^2+z^2}{2x}$

(二) 將 BNOH×(z-x)再加上 NCIO×(z-y)，即可得到$\frac{x^2-y^2+z^2}{2z}\times(z-x)\times z+\frac{-x^2+y^2+z^2}{2z}\times(z-y)\times z$

又$x^2+z^2=y^2+2xz\cos\theta_2$，$y^2+z^2=x^2+2yz\cos\theta_1$，故可得到$xz\cos\theta_2(z-x)+yz\cos\theta_1(z-y)$。

(三) 接著，是 AMLG 柱體和 AJKD 柱體的體積，AMLG 柱體=$\frac{x^2+y^2-z^2}{2y}\times y^2$，AJKD 柱體=$\frac{x^2+y^2-z^2}{2x}\times x^2$，

同上，$x^2+y^2=z^2+2xy\cos\theta_3$，所以就變成$xy\cos\theta_3(x+y)$。

(四) 最後總整理，三角形外接正立方體的公式為：

$\boxed{x^3+y^3+xz(z-x)\cos\theta_2+yz(z-y)\cos\theta_1=z^3+xy(x+y)\cos\theta_3}$ ....公式(1)

二、 三角形外接正 N 維體的餘弦定理

將兩條公式的形式進行比對，在三角形外接正方形時的公式$x^2+y^2=z^2+2xy\cos\theta_3$與外接正立方體的公式$x^3+y^3+xz(z-x)\cos\theta_2+yz(z-y)\cos\theta_1=z^3+xy(x+y)\cos\theta_3$中，發現到$x^n+y^n=z^n+xy\cos\theta_3$為其共同的式子，而在三次的公式中，發現多了(x+y)*xy$\cos\theta_3$。據此推論，可能是在二次方時，皆具有類似三次方時的架構，但是因為對消的關係，使其值變為 0 而省略，因此觀察，xz 不可能為 0。又因為是任意三角形，因此，$\cos\theta$ 也不可能為 0，所以，必為 z-x=0。

根據以上觀察推測，可能因其值在二次方時為 1-1=0(因為是任意三角形，邊長無法固定，只能利用次方調控)因此，可能為z^0-x^0，也就是 n-2 次方，因此，在本研究之架構下，猜想完整的 N 次餘弦定理公式可能為：

$\boxed{x^n+y^n+xz(z^{n-2}-x^{n-2})\cos\theta_2+yz(z^{n-2}-y^{n-2})\cos\theta_1=z^n+xy(x^{n-2}+y^{n-2})\cos\theta_3}$....................公式(2)

此為任意三角形外接正 N 維體時(這裡假設正 N 維體所佔空間為邊長的 N 次方)，三個 N 維體所佔空間的關係，而算式中不把 xy 的次數提高的原因是因為，在我們所發現的二次餘弦定理和三次餘弦定理中，皆為 xy，並無增加次方指數。

為了檢驗任意三角形外接正 N 維體的公式，我決定做出一個三角形，透過將次方 n 設定為 4、5、6……等，模擬外接正 N 維體時的情況，將其一個邊固定，變動其餘兩個角，用以控制最後一個角，模型如圖 4-3-1。

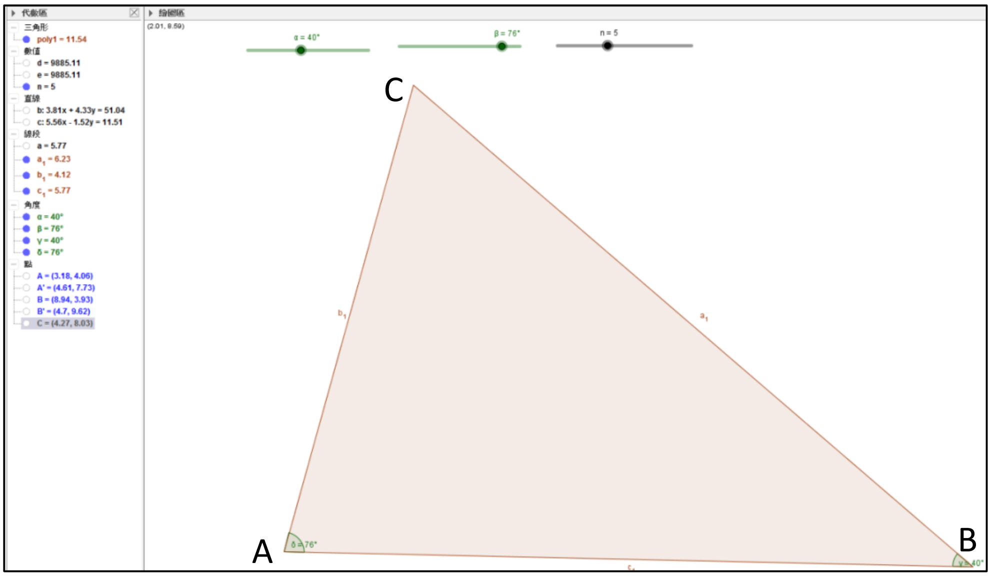


圖 4-3-1

(一) 作法

1. 設定以α、β為角度的數值滑桿，並設定其範圍以及間隔，再設定數值滑桿 n 當作公式裡的 n 次方，為了不讓數字變得太大，且因只是要做驗證，所以先將值設定在一範圍內。
2. 作線段$\overline{AB}$，並作角度α=∠a，β=∠b，令兩直線的交點為 C，做三角形 ABC，如圖 4-3-1。
3. 這裡將α的值設在 $1^{\circ} \le \alpha \le 88^{\circ}$，並將間隔調為 3°，而β的值也是設在 $1^{\circ} \le \beta \le 89^{\circ}$，但是間隔調為 1。設定間隔不同的目的是為使其之間的角度差可以不同，可以檢驗更多種的三角形。
4. 避免讓值變得太過繁雜，此處先將 n 的值範圍設在 $2 \le n \le 10$之間，並將間隔設為 1，如此可對應至 9 個值以作為檢驗之用。
5. 輸入等式左端以及右端的算式，分別是 $x^n + y^n + xz(z^{n-2} - x^{n-2})\cos\theta_2 + yz(z^{n-2} - y^{n-2})\cos\theta_1$ 以及 $z^n + xy(x^{n-2} + y^{n-2})\cos\theta_3$，即可顯示出對應的數值，如圖 4-3-2 中的數值 d、e。

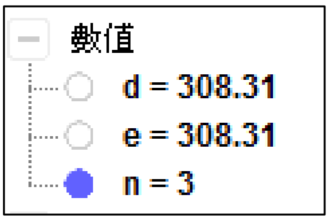


圖 4-3-2

6. 輸入方式說明：

此處的 x=a_1，y=b_1，z=c_1，而 $\theta_1=\alpha$，$\theta_2=\beta$，$\theta_3=180^{\circ}-\alpha-\beta$

左式輸入方法如下：

a_1^n+b_1^n+a_1*c_1*(c_1^(n-2)-a_1^(n-2))*cos(α)+b_1*c_1*(c_1^(n-2)-b_1^(n-2))*cos(β)

其中次方須用^來表示，而 cos 的角度須括號。

右式輸入方法如下：

c_1^n+a_1*b_1*(a_1^(n-2)+b_1^(n-2))cos(180°-α-β)

這裡要注意的是，180 須加上「°」符號，否則無法正確地計算。

而經過這些步驟後，只要調整角度的數值，便可藉由調控其角度並比對 d、e 之值是否相同來檢驗算式了。

(二) 檢驗猜想

在此分別以銳角三角形、鈍角三角形和直角三角形為分類，以上述角度 α、β 及 n=4 代入計算。此處控制兩個角度皆未超過 90°，且相加大於 90°，因此為銳角三角形，並在此圖可發現 d、e 的數值相同，如圖 4-3-3。

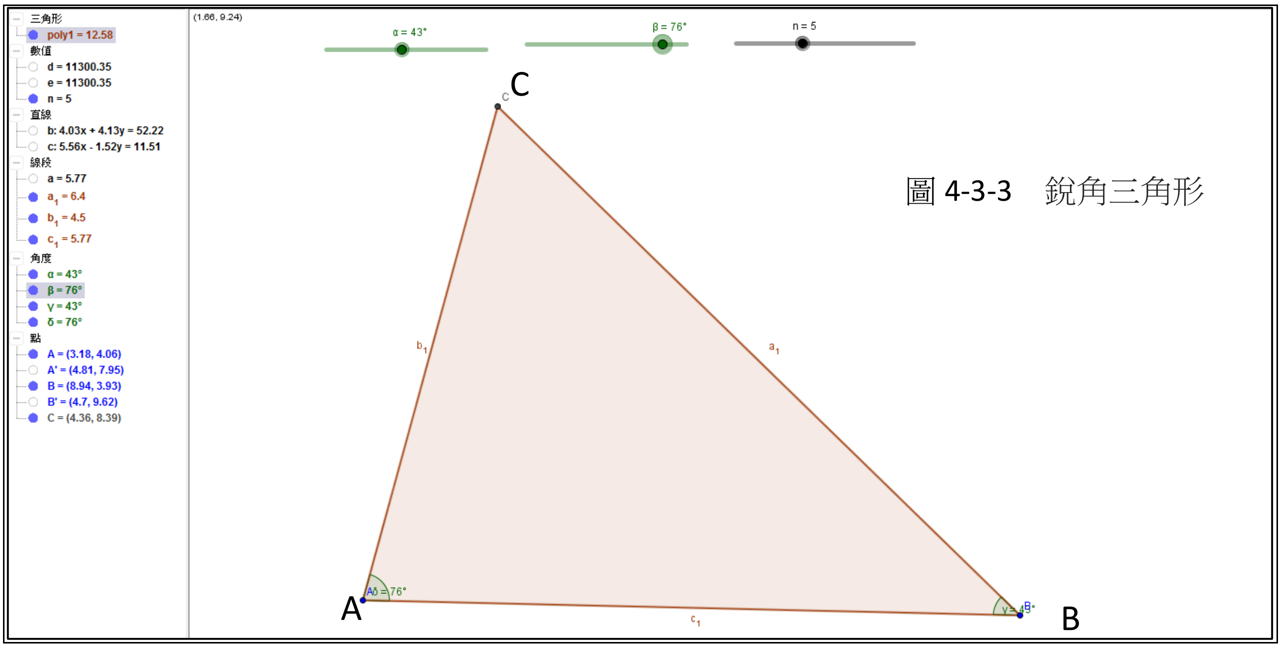


圖 4-3-3　銳角三角形

再看第二個圖，其中兩個角為銳角，分別為 43°以及 31°，相加小於 90°，因此 C 為鈍角，為鈍角三角形，此時 d、e 的值仍是相同。

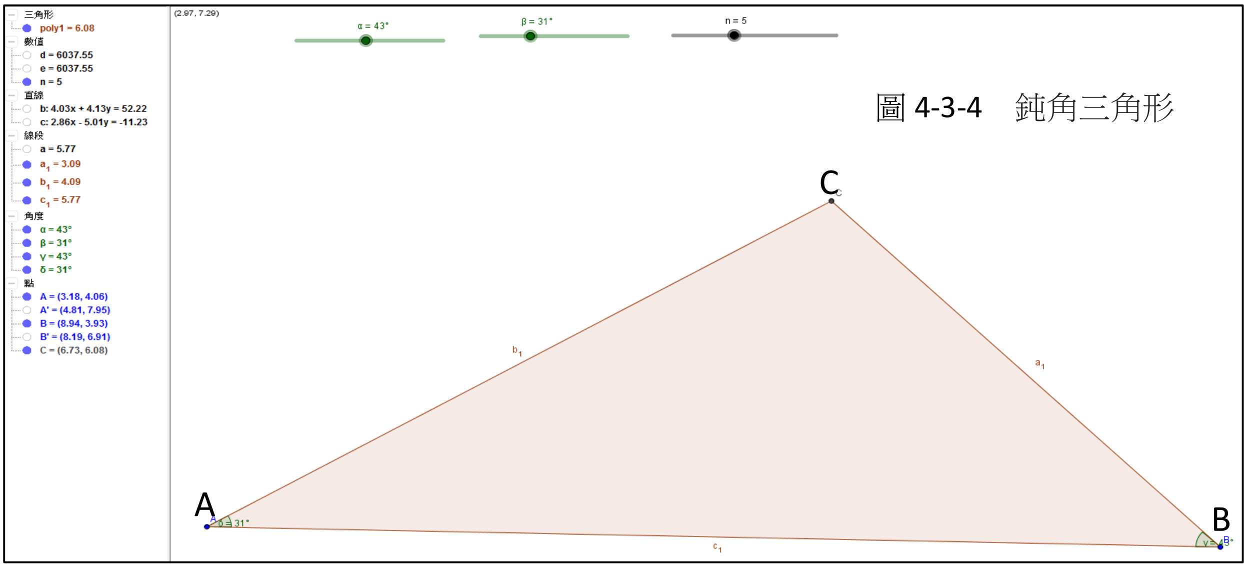


圖 4-3-4　鈍角三角形

最後看第三個圖，兩個控制角分別為 52°以及 38°，相加恰好等於 90°，為直角三角形，並將 n 的值調為 6，發現 d、e 的值還是相等，於此，可檢驗此公式在不同三角形的分類下皆可滿足。

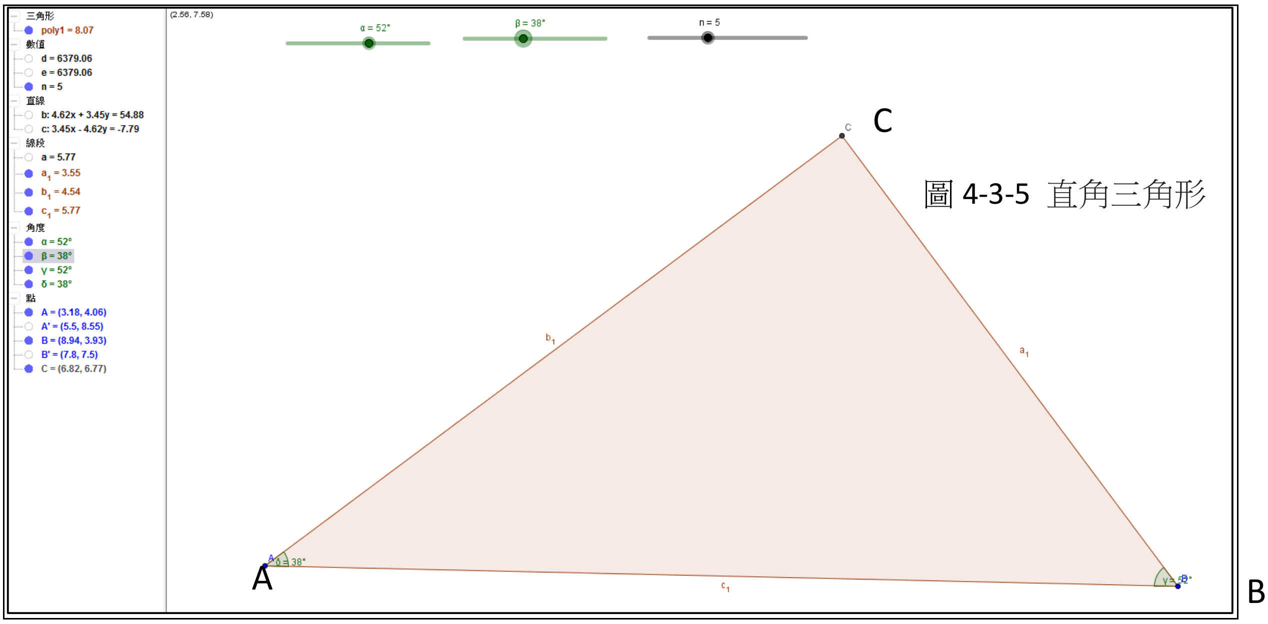


圖 4-3-5 直角三角形

接著，為了再更進一步的檢驗，我們在初始兩個不同角度的情況下以動態模擬方式觀察數值變化，並將兩個間隔調為不同，隨機抽取時間，觀察 d、e 兩值是否相等，此為我們在初始為 1°及 89°(為∝、β 的最小、最大值)的直角三角形開始動畫，設定從 n=2(最小)開始增加次方並經過 30 次動畫之間數值的紀錄。

次數	∝	β	n	d	e
0 次	1	89	2	33.26	33.26
1 次	4	88	3	192.3	192.3
2 次	7	87	4	1115.73	1115.73
3 次	10	86	5	6497.54	6497.54
4 次	13	85	6	37989.57	37989.57
5 次	16	84	7	223112.94	223112.94
6 次	19	83	8	1317425.98	1317425.98
7 次	22	82	9	7832632.26	7832632.26
8 次	25	81	10	46994059.89	46994059.89
9 次	28	80	9	8486709.95	8486709.95
10 次	31	79	8	1541360.31	1541360.31
11 次	34	78	7	282272.01	282272.01
12 次	37	77	6	52374.03	52374.03
13 次	40	76	5	9885.11	9885.11
14 次	43	75	4	1893.09	1893.09
15 次	46	74	3	363.38	363.38
16 次	49	73	2	68.63	68.63
17 次	52	72	3	437.13	437.13
18 次	55	71	4	2945.83	2945.83
19 次	58	70	5	21207.95	21207.95
20 次	61	69	6	165281.73	165281.73
21 次	64	68	7	1414114.73	1414114.73
22 次	67	67	8	13445691.06	13445691.06
23 次	70	66	9	143332876.51	143332876.51

24 次	73	65	10	1722632714.27	1722632714.27
25 次	76	64	9	330040695.58	330040695.58
26 次	79	63	8	58217643.09	58217643.09
27 次	82	62	7	9430273.32	9430273.32
28 次	85	61	6	1401320.22	1401320.22
29 次	88	60	5	190995.81	190995.81
30 次	85	59	4	12162.83	12162.83

以上檢驗結果 d 皆與 e 相等，也就是公式(2)在此 30 次檢驗中皆成立，因檢驗結果的資料太多了，我們無法在此列出所有結果，改以附件的型式提供驗證。

(三)誤差討論

接著，為了更進一步檢驗，我將小數位數調為十五位小數，卻發現，在第十位、十一位左右的地方，兩個等式出現了偏差，如圖 4-3-6。

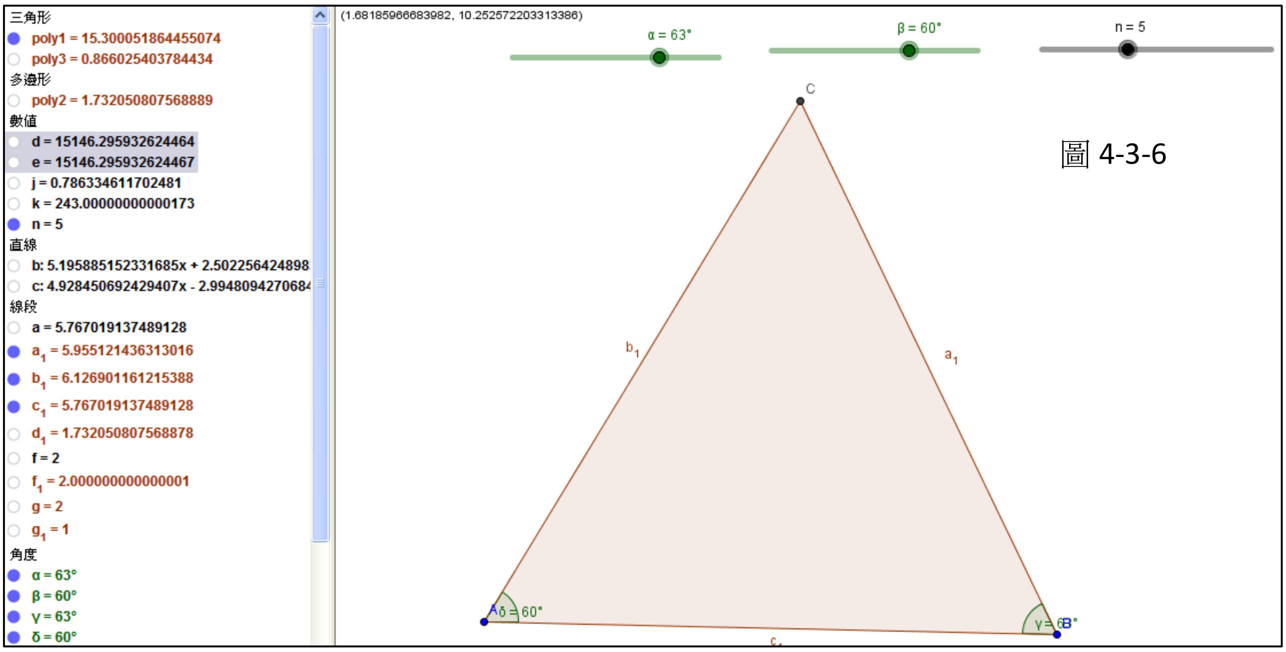


圖 4-3-6

圖中的 d、e 值(左式以及右式的計算結果)在小數第十二位的時候出現了誤差，我認為，可能為根號運算時所產生的誤差，因為無法確認誤差的來源，因此作了以下的檢驗。

首先，我找了兩個具有特殊角度的三角形，θ_1、θ_2、θ_3分別為 30°、60°、90°，以及 45°、45°、90°，

並將其邊長定為 x=1、y=$\sqrt{3}$、z=2，以及 x=1、y=1、z=$\sqrt{2}$，以 n=10 代入檢驗，發現第一個三角形其左式值與右式值皆為 1024，符合左式=右式，而第二個三角形左式值與右式值皆為 32，也符合左式=右式，因此，應為程式計算時將根號化簡成小數的誤差，為了檢驗此是否為前述推論的誤差來源，因此，我製造了一個 30°、60°、90°的三角形，並將其 30°所對應的邊設為 1，如圖 4-3-7。

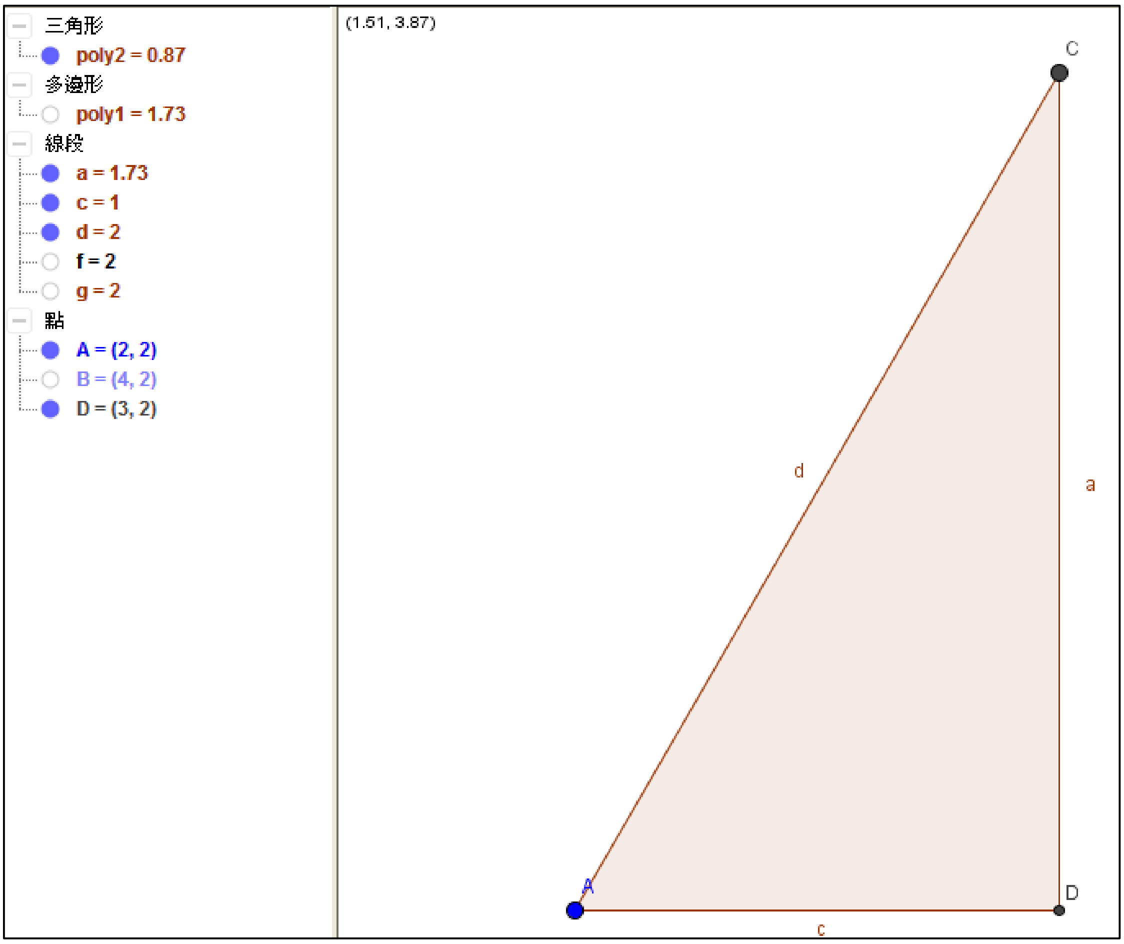


圖 4-3-7

接著，已知 a 值為$\sqrt{3}$，為了檢驗其是否為根號化為小數時的誤差，因此在下方程式欄輸入 a 的六次方(偶數次方為整數值較好比對誤差)，並觀察其數值，發現原本應為 27，但是在小數第十四位及第 15 位時出現了 32 這兩個數字，如下圖數值 b 所示。

數值
b = 27.000000000000032

因此，在每次根號化為小數的過程中，都會產生一次的誤差，此誤差本身就是存在的，透過檢驗，合理的推測誤差來源應為根號化為小數的部分，而非公式本身的誤差。

四、三角形外接正多面體時的餘弦定理

為了推廣餘弦定理，於是我進一步想：在三角形外接正四面體時的餘弦定理，是否能如同外接正方體時，應用體積相等的性質來找出關係呢？下圖 4-4-1 為三角形外接正四面體時的情形。

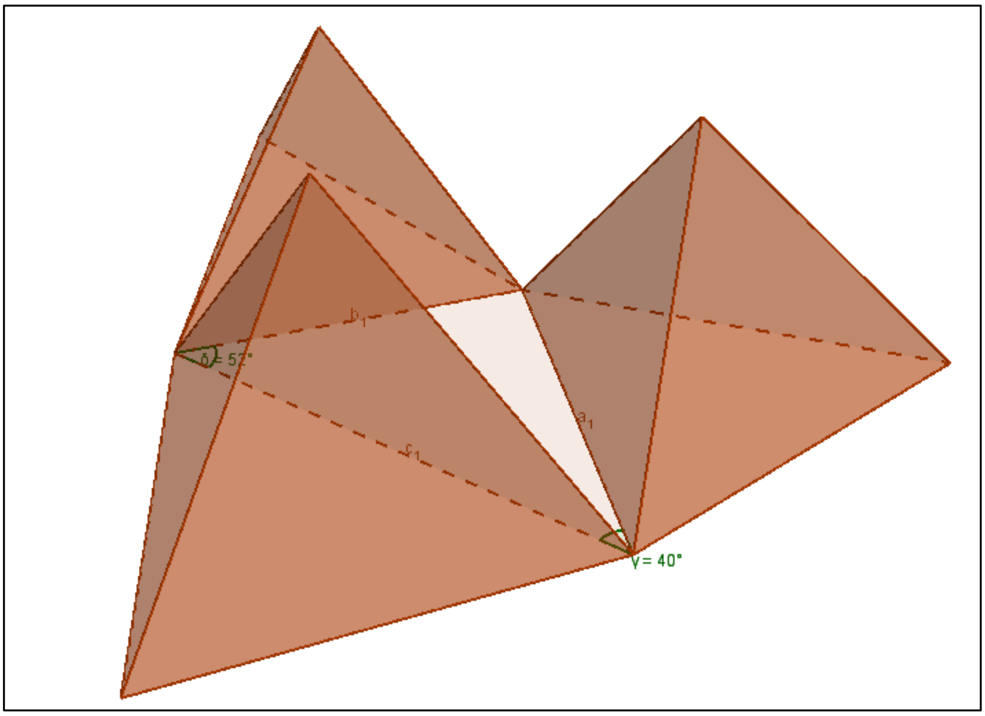


圖 4-4-1

但後來發現難以藉由切割來進行計算，其實只需將正立方體的公式同乘以正多面體與其的體積倍數，也就是使正方形體積變為正四面體，毋須使用上述方法即可得到三角形外接正多面體的體積關係。而由正立方體與正多面體的體積關係，可以得到下列五個恆等式：

1. $$\frac{\sqrt{2}}{12}x^3+\frac{\sqrt{2}}{12}y^3+\frac{\sqrt{2}}{12}xz(z-x)\cos\theta_2+\frac{\sqrt{2}}{12}yz(z-y)\cos\theta_1=\frac{\sqrt{2}}{12}z^3+\frac{\sqrt{2}}{12}xy(x+y)\cos\theta_3$$

   此為外接正四面體時的餘弦公式。

2. $$x^3+y^3+xz(z-x)\cos\theta_2+yz(z-y)\cos\theta_1=z^3+xy(x+y)\cos\theta_3$$

   此為外接正六面體(正立方體)時的餘弦公式。

3. $$\frac{\sqrt{2}}{3}x^3+\frac{\sqrt{2}}{3}y^3+\frac{\sqrt{2}}{3}xz(z-x)\cos\theta_2+\frac{\sqrt{2}}{3}yz(z-y)\cos\theta_1=\frac{\sqrt{2}}{3}z^3+\frac{\sqrt{2}}{3}xy(x+y)\cos\theta_3$$

   此為外接正八面體時的餘弦公式。

4. $$\frac{1}{4}\left(15+7\sqrt{5}\right)x^3+\frac{1}{4}\left(15+7\sqrt{5}\right)y^3+\frac{1}{4}\left(15+7\sqrt{5}\right)xz(z-x)\cos\theta_2+\frac{1}{4}\left(15+7\sqrt{5}\right)yz(z-y)\cos\theta_1=$$
   $$\frac{1}{4}\left(15+7\sqrt{5}\right)z^3+\frac{1}{4}\left(15+7\sqrt{5}\right)xy(x+y)\cos\theta_3$$

此為外接正十二面體時的餘弦公式。

5. $\frac{5}{12}\left(3+\sqrt{5}\right)x^3+\frac{5}{12}\left(3+\sqrt{5}\right)y^3+\frac{5}{12}\left(3+\sqrt{5}\right)xz(z-x)\cos\theta_2+\frac{5}{12}\left(3+\sqrt{5}\right)yz(z-y)\cos\theta_1=$

$\frac{5}{12}\left(3+\sqrt{5}\right)z^3+\frac{5}{12}\left(3+\sqrt{5}\right)xy(x+y)\cos\theta_3$

此為外接正二十面體時的餘弦公式。

五、三角形外接正 N 維球體時的餘弦定理

討論在 N 維的情況下，正 N 維體所占空間為 L^n，而若以三角形邊長 L 為直徑，N 維球體所占空間為$\frac{\left(\frac{L}{2}\right)^n\pi^{\frac{n}{2}}}{\frac{n}{2}!}$(偶數維度)或$\frac{2^{\frac{n+3}{2}}\times\frac{n-1}{2}!\times\left(\frac{L}{2}\right)^n\times\pi^{\frac{n-1}{2}}}{n!}$(奇數維度)，也就是說，其實只需將上述公式(2)乘上正 N 維體跟正 N 維球體的空間關係倍數$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n\pi^{\frac{n}{2}}}{\frac{n}{2}!}$(n 為偶數)或$\frac{2^{\frac{3-n}{2}}\times\frac{n-1}{2}!\times\pi^{\frac{n-1}{2}}}{n!}$(n 為奇數)，即可得三角形外接正 n 維球體的餘弦定理公式：

$$\boxed{\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n\pi^{\frac{n}{2}}}{\frac{n}{2}!}x^n+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n\pi^{\frac{n}{2}}}{\frac{n}{2}!}y^n+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n\pi^{\frac{n}{2}}}{\frac{n}{2}!}xz(z^{n-2}-x^{n-2})\cos\theta_2+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n\pi^{\frac{n}{2}}}{\frac{n}{2}!}yz(z^{n-2}-y^{n-2})\cos\theta_1=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n\pi^{\frac{n}{2}}}{\frac{n}{2}!}z^n+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n\pi^{\frac{n}{2}}}{\frac{n}{2}!}xy(x^{n-2}+y^{n-2})\cos\theta_3}$$

……………………………公式(3)

此即為在偶數維度時，分別以三角形三個邊當直徑外接球體時的餘弦定理。

$$\boxed{\frac{2^{\frac{3-n}{2}}\pi^{\frac{n-1}{2}}\frac{n-1}{2}!}{n!}x^n+\frac{2^{\frac{3-n}{2}}\pi^{\frac{n-1}{2}}\frac{n-1}{2}!}{n!}y^n+\frac{2^{\frac{3-n}{2}}\pi^{\frac{n-1}{2}}\frac{n-1}{2}!}{n!}xz(z^{n-2}-x^{n-2})\cos\theta_2+\frac{2^{\frac{3-n}{2}}\pi^{\frac{n-1}{2}}\frac{n-1}{2}!}{n!}yz(z^{n-2}-y^{n-2})\cos\theta_1=}$$

$$\boxed{\frac{2^{\frac{3-n}{2}}\pi^{\frac{n-1}{2}}\frac{n-1}{2}!}{n!}z^n+\frac{2^{\frac{3-n}{2}}\pi^{\frac{n-1}{2}}\frac{n-1}{2}!}{n!}xy(x^{n-2}+y^{n-2})\cos\theta_3}$$ ……………………………公式(4)

此即為在奇數維度時，分別以三角形三個邊當直徑外接球體時的餘弦定理。

其中，x、y、z 分別為外接 N 維球體的直徑。

伍、研究結果與討論

一、證明三角形外接正立方體的餘弦定理：

$$x^3+y^3+xz(z-x)\cos\theta_2+yz(z-y)\cos\theta_1=z^3+xy(x+y)\cos\theta_3$$

二、檢驗三角形外接正 N 維體的餘弦定理：

$$x^n+y^n+xz(z^{n-2}-x^{n-2})\cos\theta_2+yz(z^{n-2}-y^{n-2})\cos\theta_1=z^n+xy(x^{n-2}+y^{n-2})\cos\theta_3$$

現階段先以數值檢驗的方式檢驗猜想應滿足條件下各類三角形，但尚未完成證明。

三、發現不論外接任意正多面體或 N 維正多面體時，只要知道與其所占空間的關係，即可找出其餘弦定理。

陸、參考資料

一、https://zh.wikipedia.org/zh-tw/%E5%9B%9B%E7%BB%B4%E7%A9%BA%E9%97%B4

二、http://www.dimensions-math.org/Dim_CH3_ZH_tr.htm

三、https://zh.wikipedia.org/wiki/%E6%AD%A3%E5%A4%9A%E9%9D%A2%E9%AB%94

四、http://www.shs.edu.tw/works/essay/2009/11/2009111414225709.pdf

附件

一、當其中一角移動，N 也移動，而另一角固定時

次數	α	β	n	d	e
0	1	89	2	33.26	33.26
1	4	89	3	192.55	192.55
2	7	89	4	1120.74	1120.74
3	10	89	5	6564.27	6564.27
4	13	89	6	38756.2	38756.2
5	16	89	7	231463.69	231463.69
6	19	89	8	1407444.49	1407444.49

7	22	89	9	8814077.44	8814077.44
8	25	89	10	57963588.82	57963588.82
9	28	89	9	11321282.6	11321282.6
10	31	89	8	2236850.85	2236850.85
11	34	89	7	445466.5	445466.5
12	37	89	6	89253.71	89253.71
13	40	89	5	17893.73	17893.73
14	43	89	4	3530.38	3530.38
15	46	89	3	666.13	666.13
16	49	89	2	116.57	116.57
17	52	89	3	1034.25	1034.25
18	55	89	4	11364.7	11364.7
19	58	89	5	158726.65	158726.65
20	61	89	6	2862183.09	2862183.09
21	64	89	7	67984285.45	67984285.45
22	67	89	8	2208871357.78	2208871357.78
23	70	89	9	104498947130.43	104498947130.43
24	73	89	10	7914651335118.38	7914651335118.38
25	76	89	9	2294734343146.81	2294734343146.81
26	79	89	8	637085159398.96	637085159398.96
27	82	89	7	176608689497.92	176608689497.92
28	85	89	6	55435945458.11	55435945458.11
29	88	89	5	32386480573.94	32386480573.94
30	85	89	4	18285085.11	18285085.11

二、兩角皆不固定，而 n=4 時(因為為無法實際證明出的 n 值之第一個)

次數	α	β	n	d	e
0	1	89	4	1106.13	1106.13
1	4	88	4	1108.84	1108.84
2	7	87	4	1115.73	1115.73
3	10	86	4	1127.12	1127.12
4	13	85	4	1143.55	1143.55
5	16	84	4	1165.75	1165.75
6	19	83	4	1194.71	1194.71
7	22	82	4	1231.67	1231.67
8	25	81	4	1278.16	1278.16
9	28	80	4	1336.04	1336.04
10	31	79	4	1407.57	1407.57
11	34	78	4	1495.45	1495.45
12	37	77	4	1602.93	1602.93
13	40	76	4	1733.91	1733.91
14	43	75	4	1893.09	1893.09
15	46	74	4	2086.15	2086.15
16	49	73	4	2320	2320
17	52	72	4	2603.1	2603.1
18	55	71	4	2945.83	2945.83
19	58	70	4	3361.12	3361.12
20	61	69	4	3865.13	3865.13
21	64	68	4	4478.34	4478.34
22	67	67	4	5226.86	5226.86

23	70	66	4	6144.49	6144.49
24	73	65	4	7275.42	7275.42
25	76	64	4	8678.28	8678.28
26	79	63	4	10431.99	10431.99
27	82	62	4	12644.51	12644.51
28	85	61	4	15466.26	15466.26
29	88	60	4	19110.95	19110.95
30	85	59	4	12162.83	12162.83

三、三者皆移動，如內文中的描述，但將內文中的第 31 次當作第一次，並進行 30 次測試

次數	α	β	n	d	e
1	82	58	3	1045.88	1045.88
2	79	57	2	114.89	114.89
3	76	56	3	644.42	644.42
4	73	55	4	3299.71	3299.71
5	70	54	5	15791.44	15791.44
6	67	53	6	72840.79	72840.79
7	64	52	7	335939.65	335939.65
8	61	51	8	1604507.4	1604507.4
9	58	50	9	8102474.85	8102474.85
10	55	49	10	43226532.89	43226532.89
11	52	48	9	7314529.76	7314529.76
12	49	47	8	1248438.5	1248438.5
13	46	46	7	213640.34	213640.34
14	43	45	6	36498.39	36498.39

15	40	44	5	6195.21	6195.21
16	37	43	4	1036.79	1036.79
17	34	42	3	168.46	168.46
18	31	41	2	25.58	25.58
19	28	40	3	161.55	161.55
20	25	39	4	992.57	992.57
21	22	38	5	5947.3	5947.3
22	19	37	6	35020.23	35020.23
23	16	36	7	204110.58	204110.58
24	13	35	8	1182937.67	1182937.67
25	10	34	9	6832274.95	6832274.95
26	7	33	10	39362098.71	39362098.71
27	4	32	9	6760389.44	6760389.44
28	1	31	8	1195524.92	1195524.92
29	4	30	7	200944.96	200944.96
30	7	29	6	34423.16	34423.16

【評語】030425

本作品考慮以三角形的三邊為特定形狀邊長後，三塊體積之間的關係，作者引導之稱為餘弦定理。雖有討論高維情形，但本質上仍是體積比的一堆問題。作者有研究數學的潛力和天分，應好好栽培。